arXiv:2601.04757v1 [cs.DB] 8 Jan 2026

用于评估自由连通无环合取查询的关系数据库结构索引

Cristian Riveros[1], Benjamin Scheidt[2],和 Nicole Schweikardt[2]

[1] 智利天主教大学´，智利，criveros@ing.puc.cl[2] 洪堡大学¨柏林，德国，{benjamin.scheidt,schweikn }@hu-berlin.de

摘要

我们提出一种索引结构，以加速关系数据库上自由连通无环合取查询（fc-ACQs）的求值。与给定数据库 D相关联的索引的主要组成部分是一个辅助数据库 D_{col}。我们的主要结果表明，对于任意的 fc-ACQ Q 和数据库 D，我们可以统计 Q 的答案数量，或在经过一个预处理阶段后以常数延迟枚举这些答案；该预处理阶段所需时间与 D_{col}的大小呈线性关系。

与以往基于值或序（例如 B+ 树）的索引方法不同，我们的索引基于数据库中元组之间的结构对称性，而 D_{col} 的大小与 Scheidt 和 Schweikardt 提出的“关系颜色细化”（2025年）为 D 分配的颜色数量相关。对于图这一特殊情形，这等同于图的等度划分的最小大小。例如，对于二叉树，D_{col} 的大小为对数级；对于正则图，则为常数。即使在最坏情形下，D 的元组之间完全没有结构对称性，D_{col} 的大小仍与 D的大小呈线性关系。

鉴于 D_{col} 的大小受 D 的大小限制，且可能小得多（对于某些数据库族甚至是常数），我们的索引是首个关于利用数据库内部结构对称性进行索引的基础性成果，可用于求值所有 fc-ACQ，且其性能可能严格优于数据库大小。

相关版本 本文取代了arXiv:2405.12358 [37] 同一作者发表的预印本，该预印本仅考虑了二元模式这一特殊情形。

1 引言

数据库系统的一个重要组成部分是索引结构，它能够高效访问存储的数据，并帮助加速查询求值。这类索引结构通常依赖哈希表或平衡树，例如 B树或 B^+-树，以提升值查询 [36]的性能。另一个近期的例子是用于最坏情况最优连接算法 [32]的索引。例如，*Leapfrog Triejoin* [40], 是一种用于在关系数据库上求值多路连接的简单最坏情况最优算法，它基于所谓的字典树迭代器，以提升不同连接顺序下的访问效率。近期，这些字典树索引在时间和空间使用方面都有所改进 [3]。通常，索引结构并非为支持单个查询的求值而构建，而是为了支持整个查询类的求值。本文提出一种新型索引结构，用于加速自由连通无环合取查询（fc-ACQ）的求值。与以往基于值或序的索引方法不同，我们的索引基于数据库中元组之间的结构对称性。

无环合取查询（ACQ）于 [8, 11] 被提出，此后在数据库文献中受到了广泛关注。根据 Yannakakis 的开创性论文 [41] ，我们知道每个

固定的 ACQ Q 在数据库 D 上的查询结果，可以在与数据库大小 $|D|$ 和输出大小 $|[\![Q]\!]$的乘积成线性关系的时间内计算出来（D）|。对于自由连通 ACQ 的特殊子类 fc-ACQ，其计算时间甚至已知与二者之和成线性关系（$|D| + |[\![Q]\!]$）（D）|。自由连通 ACQ 的概念由 Bagan、Durand 和 Grandjean 在其开创性论文中提出 [7], ，他们对 Yannakakis 的结果作了如下改进：对于任意数据库 D，在耗时与 $|D|$成线性关系的预处理阶段中，可以构建一种数据结构，以无重复的方式枚举查询结果中的所有元组 $[\![Q]\!]$（D），且输出任意两个元组之间的延迟为常数。请注意，上述运行时间陈述省略了依赖于 Q的因子，并且预处理阶段构建的数据结构是针对特定查询 Q设计的。要计算新的查询 Q'，必须重新开始一个预处理阶段，而该阶段同样耗时与 $|D|$成线性关系。

我们的主要贡献是一种新的索引结构，它基于数据库中元组之间的结构对称性。给定一个任意模式 σ 的数据库 D ，在最坏情况下，索引可在时间 $O(|D| \cdot \log |D|)$ 内构建；对于许多 D，所需时间仅为 $O(|D|)$。该索引的核心要素是一个辅助数据库 D_{col}。我们的主要结果表明，对于任意在 D上的 fc-ACQ Q ，我们都可以统计其答案数量，或在经过耗时$O(|D_{\text{col}}|)$的预处理阶段后，以常数延迟枚举这些答案。与 Bagan、Durand 和 Grandjean [7], 上述结果相比，这将预处理时间从 $O(|D|)$加速至 $O(|D_{\text{col}}|)$。

D_{col} 的大小与 Scheidt 和 Schweikardt 的关系颜色细化 [38]为 D 指定的颜色数量有关。对于图这一特例，它等同于图的等度划分的最小大小。例如，对于二叉树， D_{col} 的大小为对数级；对于正则图，则为常数。即使在最坏情况下， D 的元组之间完全没有结构对称性， D_{col} 的大小仍与 D的大小呈线性关系。鉴于 $|D_{\text{col}}|$ 有上界 $|D|$ ，且可能小得多（对于某些数据库系列甚至为常数），我们的索引首次从基础层面实现了对数据库内部结构对称性的索引，使得评估所有 fc-ACQ 时的性能有可能严格优于数据库大小。

证明我们的主要结果依赖于两个关键要素。第一步是将任意固定模式 σ 上数据库 D 的 fc-ACQ 求值，归约为节点标记图上的 fc-ACQ 求值。我们通过证明以下几点来实现这一点：(1) 可以在线性时间内将 D 转换为节点标记图 D ；(2) 可以在线性时间内将 D 上的任意 fc-ACQ 转换为 D 上的查询 Q ；(3) D 上 Q 的答案元组与 D 上 Q 的答案元组之间存在一个可在线性时间内计算的双射。所有这些步骤都必须以这样的方式完成： Q 也具有自由连通无环性质，而且不会在 D 中引入原始数据库 D 中原本不存在的额外结构对称性——同时确保这两点是一项重大的技术挑战。

第二个主要组成部分是应用著名的颜色细化算法（简称 CR）于节点标记图 D。CR 是图同构测试算法中一种简单且广泛使用的子程序（概述见例如 [9, 22] ，关于其可表达性的详细信息见 [15, 4, 30, 31] ）。其结果是对 D的顶点集进行的一种特定着色。我们的索引结构的构造，尤其是辅助数据库 D_{col} ，都基于这种着色。我们的结果依赖于 CR 计算出的颜色与从 ACQ 到数据库的同态之间的紧密联系。近年来，这种颜色与来自树形结构的同态之间的联系已成功应用于不同背景下的研究 [18, 23, 21, 28, 12, 17, 19, 38]。基于互模拟概念（其产生与 CR 类似的结果）并面向合取查询求值的索引结构概念已经被提出并进行了实证评估，例如见 [34, 35]。但据我们所知，本文首次使用 CR 来生成一种索引结构，从而保证高效的常数延迟枚举和计数，并考虑具有任意关系模式的数据库和 fc-ACQ。

本文其余部分安排如下。第2 节介绍数据库和查询的基本记号，并形式化定义查询求值的索引的一般设定。第3 节介绍 fc-ACQ 的必要背景知识，并正式陈述主定理。第4 节将问题从任意模式归约到节点标记图。第5 节介绍我们的索引结构，并说明如何利用它

枚举并计数 fc-ACQ 的结果。第6 节证明主定理，详细说明 D_{col}的大小，并指出未来研究方向。许多证明细节已移至附录。

2 查询求值索引的预备知识与形式化

我们用 $\mathbb{N}$ 表示非负整数的集合，并令 $\mathbb{N}_{\geqslant 1} \coloneqq \mathbb{N} \setminus \{0\}$。对于 $m, n \in \mathbb{N}$ 我们令$[m,n] \coloneqq \{i \in \mathbb{N} : m \leqslant i \leqslant n\}$ 且 $[n] \coloneqq [1,n]$。

每当 G 表示一个图（有向或无向）时，我们用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示 G 的节点集合和边集合。给定集合 $U \subseteq V(G)$，由 U 诱导的 G子图（简写为：$G[U]$）是满足以下条件的图 G'：$V(G') = U$且 $E(G') = \{(u, v) \in E(G) : u, v \in U\}$。无向图的连通分量是其极大的连通子图。森林是无向无环图；而树是连通森林。

我们通常用 $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_r)$ 表示一个元数为 $r \in \mathbb{N}$的 r 元组，并用 a_i 表示它的第 i 个分量（对于 $i \in [r]$）。注意，元数为 0 的元组只有一个，即记作 () 的空元组。给定一个函数 $f\colon X \to Y$和一个由 X中的元素组成的 r 元组 $\bar{x}$，我们用 $f(\bar{x})$ 表示 r 元组 $(f(x_1), \ldots, f(x_r))$。对于 $S \subseteq X^r$，我们令 $f(S) \coloneqq \{f(\bar{x}) : \bar{x} \in S\}$。

一个模式 σ 是一个有限的非空关系符号集合，其中每个 $R \in \sigma$ 都配有一个固定的元数 $\text{ar}(R) \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$。如果模式 σ 中的每个 $R \in \sigma$ 的元数 $\text{ar}(R) \leqslant 2$，则称该模式为二元。如果一个模式由一个二元关系符号 E 以及有限个一元关系符号组成，则称其为节点标记图的模式。

我们固定一个可数无限集合**dom** 作为潜在数据库条目的域，并将这些条目称为常量。模式为 σ 的数据库 D （简称 σ-db）是形如 $D = (R^D)_{R \in \sigma}$ 的元组，其中 R^D 是$\mathbf{dom}^{\text{ar}(R)}$ 的有限子集。D 的活动域 $\text{adom}(D)$ 是满足以下条件的 **dom** 最小子集 S：对所有 $R \in \sigma$，$R^D \subseteq S^{\text{ar}(R)}$。$D$ 的大小 $|D|$ 定义为 D 中元组的总数，即$|D| = \sum_{R \in \sigma} |R^D|$。节点标记图是一个 σ-db D，其中 σ 是节点标记图的模式，且 E^D 是对称的；也就是说，对于所有元组 $(a, b) \in E^D$，还有 $(b, a) \in E^D$。

模式为 σ 的 k 元查询（针对 $k \in \mathbb{N}$，简称 σ-query）是一个语法对象 Q，它关联着一个函数，该函数将每个 σ-db D 映射到$\mathbf{dom}^k$ 的有限子集。$k = 0$（$k \geqslant 1$）的布尔（非布尔）查询是 k 元查询。注意，元数为 0 的关系只有两个，即 $\emptyset$ 和 $\{()\}$。对于布尔查询 Q，我们用 $[\![Q]\!](D) = $真表示 $() \in [\![Q]\!](D)$，用 $[\![Q]\!](D) = $假表示 $[\![Q]\!](D) = \emptyset$。

本文将重点讨论给定的 σ-数据库 D 的以下求值任务：

布尔 布尔查询求值： 输入一个布尔 σ-查询 Q 后，判断 $[\![Q]\!](D) = $为真；

Non-布尔查询求值： 输入一个 σ-查询 Q 后，计算关系 $[\![Q]\!](D)$ ；

Co计数查询求值： 输入一个 σ-查询 Q 后，计算数量 $|[\![Q]\!](D)$ |.

关于第二项任务，我们主要关注寻找一种枚举算法，以计算 $[\![Q]\!](D)$ 中的元组。此类算法由两个阶段组成：预处理阶段和枚举阶段。在预处理阶段，算法可以进行任意预处理，以构建合适的数据结构。在枚举阶段，算法可以使用该数据结构枚举 $[\![Q]\!](D)$ 中的所有元组，随后输出枚举结束消息 EOE。我们要求每个元组恰好枚举一次（即不重复）。延迟是指从枚举阶段开始到首次输出、两个连续元组的输出之间，以及最后一个元组输出到 EOE 之间所经过的最长时间。

对于我们的算法，我们采用均匀成本度量下的 RAM 模型。具体而言，存储和访问 **dom** 中的元素需要 $O(1)$ 的空间和时间。根据这一假设，对于任意 r 元关系 R^D，我们都能在时间 $O(r \cdot |R^D|)$ 内构建一个索引，使其能够以 $O(1)$ 的延迟枚举 R^D，并能在时间 $O(r)$ 内测试给定的 r 元组 $\bar{c}$ 是否满足 $\bar{c} \in R^D$。此外，这意味着，对于任意有限偏函数 $f\colon A \to B$，我们可以在时间 $O(|\mathrm{dom}(f)|)$ 内构建一个查找表，其中 $\mathrm{dom}(f) := \{ x \in A : f(x) \text{ 已定义} \}$，并能以常数时间访问 $f(a)$。

查询求值的索引

我们通过形式化以下内容来结束第 2 节：对于给定查询类 Q 中的查询，在固定模式 σ 上执行布尔（bool）、非布尔（enum）和计数（count）查询求值任务时，如何进行查询求值的索引。这里我们介绍一般设定；稍后将针对特定查询类具体说明。场景如下：输入为一个 σ-db D。我们执行索引阶段，以构建合适的数据结构DS_D。该数据结构应有助于高效求值任意查询 $Q \in \mathrm{Q}$。在求值阶段，我们可以访问DS_D。输入为任意查询 $Q \in \mathrm{Q}$，以及 bool、enum 或 count 这三种任务描述之一；其中，只有在 Q 是布尔查询时才允许使用 bool。目标是在 D 上为 Q 解决此查询求值任务。

这一场景类似于现实世界中的数据库系统：系统会构建索引，以确保能够高效访问信息在数据库中的存储位置，随后再使用这些索引来求值各种输入查询。我们将该问题形式化如下：

问题：	索引求值(σ,Q)
索引：	**输入：** 一个 σ-数据库 D **结果：** 一个数据结构 DS_D
求值：	**输入：** 一个 σ-查询 $Q \in \mathrm{Q}$，以及一个以 { bool,枚举, 计数 } 表示的任务描述 **输出：** 针对 $[\![Q]\!](D)$所给任务的正确答案

索引时间 是构建数据结构 DS_D所需的时间；它仅取决于输入数据库 D。回答关于 D 的布尔查询 Q，或对关于 D 的查询 Q 的结果元组数量进行计数所需的时间，取决于 Q 以及数据结构 DS_D的具体属性。我们使用函数来衡量这些时间，这些函数给出了利用数据结构 DS_D完成任务所需时间的上界。对于枚举任务，我们使用两个函数分别衡量预处理时间和延迟，它们分别给出使用数据结构 DS_D 枚举 $[\![Q]\!](D)$ 时预处理所需时间和延迟的上界。

请注意，衡量运行时间时，我们使用 DS_D（而不是 $|\mathsf{DS}_D|$或 $|D|$），因为我们希望运行时间分析能够比仅取决于 DS_D 或 D的大小更加细致。我们的主要结果是针对 IndexingEval(σ, Q) 的一种解法，其中 Q 是类 fc-ACQ[σ]，由任意模式 σ上的所有自由连通无环合取查询 组成。

3 自由连通无环合取查询与本文主定理的表述

在正式陈述本文的主定理之前，我们先介绍有关自由连通无环合取查询（fc-ACQ）的必要背景。

我们固定一个可数无限的变量集合 var，使得 $\mathrm{var} \cap \mathrm{dom} = \emptyset$。模式 σ 上的原子 α 具有如下形式：$R(x_1, \ldots, x_r)$，其中 $R \in \sigma, r = \mathrm{ar}(R)$，且 $x_1, \ldots, x_r \in \mathrm{var}$。我们用 $\mathrm{vars}(\alpha)$ 表示在 α 中出现的变量集合，并令 $\mathrm{ar}(\alpha) := \mathrm{ar}(R)$ 表示 α的元数。令 $\mathrm{l} \in \mathbb{N}$。模式 σ 上的 l 元合取查询（CQ）具有如下形式：$\mathrm{Ans}(z_1, \ldots, z_\ell) \leftarrow \alpha_1, \ldots, \alpha_d$，其中 $d \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, α_j是一个原子

对于每个 $j \in [d]$，该原子均属于模式 σ；而 $z_1, \ldots, z_\ell$ 是 $\bigcup_{j\in[d]}\text{vars}(\alpha_j)$ 中两两不同的 l 个变量。$\leftarrow$ 左侧（右侧）的表达式称为查询的头部（体部）。我们令 $\text{atoms}(Q) := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_d\}$、$\text{vars}(Q) := \bigcup_{j\in[d]}\text{vars}(\alpha_j)$，以及 $\text{free}(Q) := \{z_1, \ldots, z_\ell\}$。（存在量化的）量化变量是 $\text{quant}(Q) := \text{vars}(Q) \setminus \text{free}(Q)$ 中的元素。若 $\text{free}(Q) = \emptyset$，则称合取查询 Q 为布尔查询；若 $\text{quant}(Q) = \emptyset$，则称其为全查询（或无量词查询）。查询的大小 $|Q|$ 定义为 $|\text{atoms}(Q)|$，而 $\|Q\|$ 定义为 Q 的合理表示的长度；具体而言，我们令 $\|Q\|$ 为查询的元数 l 与 $|\text{free}(Q)|$ 之和，再加上 Q中所有原子的元数之和。语义按通常方式定义（参见 [1]）：Q 的赋值 ν 是一个映射 $\nu\colon \text{vars}(Q) \to \text{dom}$。从 Q 到一个 σ-db D 的同态是 Q 的一个赋值 ν，满足对于每个原子 $R(x_1, \ldots, x_r) \in \text{atoms}(Q)$，都有 $(\nu(x_1), \ldots, \nu(x_r)) \in R^D$。我们用 $\text{Hom}(Q, D)$ 表示从 Q 到 D 的所有同态构成的集合。头部为 $\text{Ans}(z_1, \ldots, z_\ell)$ 的合取查询 Q 在 σ-DB D 上的查询结果定义为元组 $[\![Q]\!](D)$ 的集合：$= \{ (\nu(z_1), \ldots, \nu(z_\ell)) : \nu \in \text{Hom}(Q, D) \}$。

合取查询 Q 的超图 $H(Q)$定义如下。其顶点集为 $\text{vars}(Q)$，并且对于每个 $\alpha \in$ 原子(Q)，都包含一个超边 $\text{vars}(\alpha)$。Q 的盖夫曼图 $G(Q)$是一个顶点集为 $\text{vars}(Q)$ 的无向简单图；当 x、y 是不同变量，且对于某个 $\alpha \in$ 原子(Q)，x、$y \in$ 属于 $\text{vars}(\alpha)$ 时，该图包含边 $\{x, y\}$。

无环合取查询和自由连通无环合取查询是数据库理论文献中研究的标准概念（参见 [8, 11, 20, 7, 1]；概述见 [10] ）。如果合取查询 Q 的超图 $H(Q)$ 是 α-无环的，则称其为无环的；也就是说，存在一棵无向树 $T = (V(T), E(T))$（称为 $H(Q)$ 和 Q 的连接树），其节点集 $V(T)$ 恰好是 $H(Q)$ 的超边集合，并且对于每个变量 $x \in \text{vars}(Q)$，集合 $\{ t \in V(T) : x \in t \}$ 构成 T 的一个连通子树。若合取查询 Q 无环，且在 $H(Q)$ 中添加超边 $\text{free}(Q)$ 后所得的超图是 α-无环的，则称其为自由连通无环的。注意，对于任何布尔或全合取查询 Q，其为自由连通无环的当且仅当其为无环的。不过，$\text{Ans}(x, z) \leftarrow R(x, y)$、$R(y, z)$ 是一个无环但非自由连通无环的查询示例。对于二元模式这一特殊情形，（自由连通）无环合取查询有一个特别简单的刻画（证明见附录 A.1）：

命题 3.1（民间结果）。二元模式 σ 上的合取查询 Q 是无环的，当且仅当其盖夫曼图 $G(Q)$ 是无环的。合取查询 Q 是自由连通无环的，当且仅当 $G(Q)$ 是无环的，且以下陈述成立：对于 $G(Q)$ 的每个连通分量 C，$\text{free}(Q) \cap V(C) = \emptyset$，或者由集合 $\text{free}(Q) \cap V(C)$ 诱导的 C 的子图是连通的。」

我们用 fc-ACQ$[\sigma]$ 表示模式 σ 上所有自由连通无环合取查询的集合。注意，命题 3.1 并不能推广到任意非二元模式 σ（示例见附录 B.1.1，其中给出了一个查询$Q \in$ fc-ACQ$[\sigma]$，其盖夫曼图并非无环）。

接下来，我们将讨论一项重要结果，它对本文的主要结果至关重要。Yannakakis 的开创性结果 [41]指出，布尔无环合取查询 Q可以在 $O(|D|)$ 时间内求值。Bagan、Durand 和 Grandjean 的开创性论文 [7] 证明，对于任意（非布尔）fc-ACQ Q，集合 $[\![Q]\!](D)$经过 $O(|D|)$预处理时间后，可以以常数延迟进行枚举。上述陈述针对的是数据复杂度，即依赖于查询的运行时间部分被隐藏在大 O 记号中。文献中已有 Bagan、Durand 和 Grandjean 定理的多个证明（以及不同的算法） [7, 6, 13, 33, 24, 25, 26]；它们都聚焦于数据复杂度。本文需要一个更精细的陈述，将问题的联合复杂度考虑在内；这一点在 [10] 中隐含给出（详情见附录 A.2）。

定理 3.2。对于每个模式 σ，都存在一种枚举算法，以 σ-*db* D 和查询 $Q \in$fc-ACQ$[\sigma]$ 为输入，并在预处理时间 $O(|Q|\cdot|D|)$ 内计算出一个数据结构，用于以延迟 $O(|\text{free}(Q)|)$枚举 $[\![Q]\!](D)$。

我们的主要结果为任意模式 σ 下的问题索引求值(σ，fc-ACQ$[\sigma]$) 提供了一种解决方案。我们在索引阶段针对给定数据库 D 构建的数据结构 DS_D 将提供一个

新的辅助数据库 D_{col}，它可能比 D 小得多。这将使我们能够将定理 3.2 给出的预处理时间改进为 $O(|Q|\cdot|D_{\text{col}}|)$。具体而言，以下是本文的主定理。

定理 *3.3*。对于每个模式 σ，问题 *IndexingEval*(σ, *fc-ACQ*[σ]) 都可以通过索引时间 $O(|D|\cdot \log |D|)$ 求解，并构造一个新的数据库 D_{col}，使得此后，针对 D 提出的每个布尔无环查询 Q都可以在时间 $O(|Q|\cdot|D_{\text{col}}|)$ 内得到回答。此外，对于每个查询 $Q \in$ *fc-ACQ*[σ]，我们可以在 $[\![Q]\!](D)$ 中枚举元组，预处理时间为 $O(|Q|\cdot|D_{\text{col}}|)$，延迟为 $O(|\mathit{free}(Q)|)$；并且可以在时间 $O(|Q|\cdot|D_{\text{col}}|)$ 内计算结果元组的数量 $|[\![Q]\!](D)|$。

本文其余部分致力于证明定理 3.3，并进一步阐述 D_{col} 的大小。在第 4 节中，我们将问题从任意模式 σ 归约为节点标记图的模式 $\hat{\sigma}$。在第 5 节中，我们描述索引结构，并展示如何利用它来枚举和计数针对节点标记图提出的 fc-ACQ 的结果。在第 6 节中，我们将前两节的结果结合起来，给出定理 3.3的证明，同时还详细说明 D_{col} 的大小，以及它与原始 σ-数据库的内部结构对称性之间的关系。

4 将任意模式问题约化为节点标记图问题

本节将固定任意模式 σ 上的数据库中 fc-ACQ 的求值，约化为节点标记图上的 fc-ACQ 求值，同时确保该转换在线性时间内完成，不会在数据库中引入新的对称性，并且保持查询的自由连通无环性。我们分两步进行：首先，从任意模式转换为二元模式（第 4.1 节），然后从二元模式转换为节点标记图（第 4.2 节）。

4.1 从任意模式到二元模式

本小节旨在证明以下定理。

定理 4.1. 对于任意模式 σ，其 $k := $ 元数(σ)，存在一个大小为$|\sigma| + 2k^2 + k + 1$的二元模式 σ'，使得以下结论成立：

(1) 给定一个 σ-*db* D，我们可以在 $2^{O(k \log k)}\cdot|D|$ 时间内计算出一个 σ'-*db* D'；*(2)* 给定任意查询 $Q \in$ *fc-ACQ*[σ]，我们可以在 $O(\|Q\|)$ 时间内计算出一个查询 $Q' \in$ *fc-ACQ*[σ']，使得 $|\mathit{free}(Q')| < 2\cdot|\mathit{free}(Q)|$；*(3)* 存在一个双射 $f\colon [\![Q']\!](D') \to [\![Q]\!](D)$。此外，给定一个元组 $\bar{a} \in [\![Q']\!](D')$，可以在 $O(|\mathit{free}(Q)|\cdot k)$ 时间内计算出元组 $f(\bar{a}) \in [\![Q]\!](D)$。

采用与定理 3.2 的表述相同的观点时，模式 σ 是固定的，且值$k = \text{ar}(\sigma)$已包含在 O-记号中。因此，在定理 4.1 中，运行时间可简化为 $O(|D|)$在陈述 (1) 中，以及 $O(|\text{free}(Q)|)$ 在陈述 (3)中。

本小节余下部分将介绍定理4.1证明的主要组成部分（缺失的细节见附录 B.1 ）。我们首先选取二元模式 σ'，并说明如何从 D 构造数据库 D' (1)（陈述）。随后，我们说明如何从给定的 fc-ACQ Q 构造 fc-ACQ Q' (2)（陈述）。最后，我们给出从 $[\![Q']\!](D')$ 中的输出到$[\![Q]\!](D)$ 中输出的双射，并概述其正确性（陈述(3)）。

我们使用以下记号。对于任意 $r \in \mathbb{N}$ 以及任意 r-元组 $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_r)$，我们定义 set($\bar{a}$) :={$a_1, \ldots, a_r$}；对于 $i \in [r]$，我们定义 $\pi_i(\bar{a}) := a_i$。对于 $r \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$，每个 r-元组 $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_r)$，每个

$m \in [0, r]$ 以及由两两不同的元素 $j_1, \ldots, j_m \in [r]$ 构成的每个元组 $(j_1, \ldots, j_m)$，我们定义 $\pi_{(j_1,\ldots,j_m)}(\bar{a}) := (a_{j_1}, \ldots, a_{j_m})$，并称此元组为 $\bar{a}$的一个投影。特别地，对于 $m = 0$和空元组 $()$，有 $\pi_{()}(\bar{a}) = ()$；对于 $i \in [r]$，有 $\pi_{(i)}(\bar{a}) = (a_i) = (\pi_i(\bar{a}))$。我们将 $\mathbf{\Pi}(\bar{a})$ 定义为 $\bar{a}$ 的所有投影构成的集合，即，

$$\mathbf{\Pi}(\bar{a}) \;=\; \big\{ \pi_{(j_1,\ldots,j_m)}(\bar{a}) \;:\; m \in [0, r],\; j_1, \ldots, j_m \text{ are pairwise distinct elements in} [r] \big\}.$$

对于一个 σ-db D，令$\mathbf{D} := \bigcup_{R\in\sigma} R^D$ 表示出现在 D某个关系中的元组集合。令$\mathbf{\Pi}(\mathbf{D}) := \bigcup_{\bar{d}\in\mathbf{D}} \mathbf{\Pi}(d)$表示 D中元组的投影集合。

(1) 选择 σ' 并构造 σ'-db D'。 令 σ 为任意模式，并令 $k := \mathrm{ar}(\sigma) = \max\{\mathrm{ar}(R) : R \in \sigma\}$。令 σ' 由以下符号组成：对于所有 $R \in \sigma$，包含一元符号 U_R；对于所有 $i \in [0, k]$，包含一元符号A_i；对于所有 $i, j \in [k]$，包含二元符号 $E_{i,j}$和 $F_{i,j}$。显然，$|\sigma'| = |\sigma| + 2k^2 + k + 1$。

现在，我们为任意新节点 $w_{\bar{a}}$表示并且的每个 σ-db D定义如下。对于每个节点 $v_{\bar{p}}$。令

$$\begin{aligned}
(U_R)^{D'} &:= \{ w_{\bar{a}} : \bar{a} \in R^D \}, \quad \text{for every } R \in \sigma, \\
(A_i)^{D'} &:= \{ v_{\bar{p}} : \bar{p} \in \mathbf{\Pi}(\mathbf{D}),\, \mathrm{ar}(\bar{p}) = i \}, \quad \text{for every } i \in [0, k],
\end{aligned}$$

并且对于所有 $i,\ j \in [k]$ 令

$$\begin{aligned}
(E_{i,j})^{D'} &:= \big\{ (w_{\bar{d}}, v_{\bar{p}}) : \bar{d} \in \mathbf{D},\, \bar{p} \in \mathbf{\Pi}(\bar{d}),\, i \leqslant \mathrm{ar}(\bar{d}),\, j \leqslant \mathrm{ar}(\bar{p}),\, \pi_i(\bar{d}) = \pi_j(\bar{p}) \big\}, \\
(F_{i,j})^{D'} &:= \big\{ (v_{\bar{p}}, v_{\bar{q}}) : \bar{p}, \bar{q} \in \mathbf{\Pi}(\mathbf{D}),\, i \leqslant \mathrm{ar}(\bar{p}),\, j \leqslant \mathrm{ar}(\bar{q}),\, \pi_i(\bar{p}) = \pi_j(\bar{q}),\, \text{and} \\
&\qquad \big(\mathrm{set}(\bar{p}) \subseteq \mathrm{set}(\bar{q}) \;\text{ or }\; \mathrm{set}(\bar{p}) \supseteq \mathrm{set}(\bar{q})\big) \big\}.
\end{aligned}$$

直观地说，在新的数据库 D' 中，我们用 $(U_R)^{D'}$ 中的一个节点 $w_{\bar{a}}$ 表示每个 R-元组 $\bar{a}$，并用 $(A_i)^{D'}$ 中的一个节点 $v_{\bar{p}}$ 表示元数为 i 的任意投影$\bar{p}$。为了将 $w_{\bar{a}}$ 与 $v_{\bar{p}}$ 关联起来，我们使用二元关系 $(E_{i,\ j})^{D'}$，该关系表示 $\bar{a}$ 的第 i 个分量等于 $\bar{p}$ 的第 j 个分量。最后，$(F_{i,\ j})^{D'}$ 将 D 中元组的投影之间的相等值关联起来，只要它们的域彼此包含。

断言 4.2。 给定一个 σ-数据库 D，可以在 $2^{O(k\cdot\log k)}\cdot|D|$ 时间内构造出 σ'-数据库 D'。

证明概要。注意，对于每个满足 $r := \mathrm{ar}(\bar{a})$ 的 $\bar{a} \in \mathbf{D}$，都有 $|\mathbf{\Pi}(\bar{a})| \leqslant \sum_{m=0}^{r} \binom{r}{m} \cdot m! \leqslant r \cdot r! \leqslant k \cdot k!$。因此，$|\mathbf{\Pi}(\mathbf{D})| \leqslant k \cdot k! \cdot |\mathbf{D}| \leqslant k \cdot k! \cdot |D| = 2^{O(k\cdot\log k)} \cdot |D|$。定义 $(F_{i,j})^{D'}$第二行中的条件至关重要，因为它确保我们确实能在 $2^{O(k\cdot\log k)}\cdot|D|$(时间内构造出该关系（若省略此条件，最终得到的将是因子 $|D|^2$，而不是 $|D|$）。关于 D' 的（蛮力法）构造的细节见附录 B.1.2。□

(2) 构造 fc-ACQ Q'。 我们的下一个目标是将查询 $Q \in$ fc-ACQ$[\sigma]$ 转换为合适的σ'-查询 Q'。我们希望 Q' 属于 fc-ACQ$[\sigma']$，并确保存在一个易于计算的双射 f，将 $[\![Q']\!](D')$ 中的元组映射到 $[\![Q]\!](D)$ 中的元组。这里的主要挑战是以恰当的方式定义Q'，使其确实是 自由连通无环的（参见附录 B.1.1）。

我们的转换基于自由连通无环查询的一个著名刻画，该刻画通过以下概念给出。CQ Q 的宽度为 *1* 的自由连通广义超树分解 （简称 fc-1-GHD）是一个元组 $H = (T、包、覆盖、W)$，满足

(1) $T = (V(T)、E(T))$ 是一棵有限无向树，

(2) 包 是一个映射，它为每个 $t \in V(T)$ 关联一个集合 包$(t) \subseteq$变量集(Q)，使得

(a) 对于每个原子 $\alpha \in$原子(Q)，都存在一个 $t \in V(T)$，使得变量集(α) $\subseteq$包(t)；并且 (b) 对于每个变量 $y \in$变量集(Q)，集合 包$^{-1}(y) := \{ t \in V(T) : y \in$包$(t) \}$ 诱导出一个连通子树 T（此条件称为路径条件），

(3) 覆盖是一个映射，它为每个 $t \in V(T)$ 关联一个原子 覆盖(t) $\in$原子(Q)，使得包(t) $\subseteq$变量集(覆盖(t))，

(4) $W \subseteq V(T)$，使得 W 在 T 中诱导出一个连通子树，并且 free(Q) $= \bigcup_{t \in W}$包(t)。集合 W 称为 H 自由连通性的见证。

我们用 $\|H\|$ 表示 H 的一种合理表示的大小。如果对于每个 $\alpha \in$原子(Q)，都存在一个 $t \in V(T)$，使得 vars(α) = 包(t) 且 $\alpha =$ 覆盖(t)，则称 fc-1-GHD H 为完备。

命题 4.3。对于每个 $Q \in$ fc-ACQ[σ]，可以在 $O(\|Q\|)$ 时间内计算出 Q 的一个完备 fc-1-GHDH =(T，包，覆盖，W，使得 $|W| < 2\cdot|$free(Q)$|$，并且对于所有边 $\{t, p\} \in E(T)$，均有包(t) $\subseteq$包(p) 或 包(t) $\supseteq$包(p)。

证明思路。利用 Bagan 的一个结果 [6]，然后进行标准修改，我们可以在 $O(\|Q\|)$ 时间内构造出 Q 的一个完备 fc-1-GHD H =(T, 包, 覆盖, W，使其满足 $|W| \leqslant |$free(Q)$|$。对于 T 中每条违反条件“bag(t) $\subseteq$bag(p) 或 bag(t) $\supseteq$bag(p)”的边 $\{t, p\}$，我们通过引入一个新节点$n_{\{t,p\}}$将其细分，令 bag($n_{\{t,p\}}$) := bag(t) $\cap$bag(p)，并令 cover($n_{\{t,p\}}$) := cover(t)；若 $\{t, p\} \subseteq W$ 则将 $n_{\{t,p\}}$ 插入 W 详情见附录 B.1.2。□

给定一个查询 $Q \in$ fc-ACQ[σ]，我们使用命题 4.3 计算 Q 的一个完备 fc-1-GHD H =(V, 包, 覆盖, W，使得 $|W| < 2\cdot|$free(Q)$|$，并且对于 $\in E(T)$ 中的所有边 $\{t, p\}$，都有 bag(t) $\subseteq$bag(p) 或 bag(t) $\supseteq$bag(p)。我们固定 vars(Q) 上的一个任意序 $<$。对于每个 $t \in V(T)$，令 $\bar{x}_t$ 为由 bag(t) 中的元素构成的、按 $<$排序的元组（即，ar($\bar{x}_t$) = $|$bag(t)$|$，且 set($\bar{x}_t$) = bag(t)）。对于每个原子$\alpha \in$atoms(Q)，我们固定一个节点 $t_\alpha \in V(T)$，使得 vars(α) =bag(t_α) 且 $\alpha =$cover(t_α)（这样的节点 t_α 存在，因为 H 是完备的），并令 atm(T) := $\{ t_\alpha : \alpha \in$atoms(Q)$\}$。最后，我们固定一个任意列表$t_1, \ldots, t_{|W|}$，其中包含 W 中的所有节点（若 $W = \emptyset$，则该列表为空）。若 $W \neq \emptyset$，则将根选为 W中的任意节点；否则 $W = \emptyset$ 且 free(Q) $= \emptyset$，并将 T 中的任意节点选为根。令 $\hat{T}$ 为T的有向版本，其中根是 T 的根。

对于每个 $t \in V(T)$，查询 Q'使用一个新变量 v_t；如果 $t \in$atm(T)，则还会使用一个新变量 w_t。 σ'-查询 Q'定义为 $Ans(\mathsf{v}_{t_1}, \ldots, \mathsf{v}_{t_{|W|}}) \leftarrow \bigwedge_{\alpha \in$原子$(Q')} \alpha$，其中 atoms($Q'$) 的构造如下。我们将 atoms($Q'$) 初始化为空集合 $\emptyset$，并对于每个节点 $t \in V(T)$，将原子插入 atoms(Q') 中：

- $A_{|$包$(t)|}(\mathsf{v}_t)$。

如果 $t \in$atm(T)，令 α为 Q 的特定原子，使得 $t = t_\alpha$；令 $R(\bar{z}) := \alpha$，并将以下附加原子插入 atoms(Q') 中：

- $U_R(\mathsf{w}_t)$，以及
- $E_{i,j}(\mathsf{w}_t, \mathsf{v}_t)$，对于所有满足 $i, j \in [k]$ 且 $i \leqslant$元数($\bar{z}$)，$j \leqslant$元数($\bar{x}_t$)，$\pi_i(\bar{z}) = \pi_j(\bar{x}_t)$ 的 i。

此外，对于任意的 $t \in V(T)$，如果 t不是$\hat{T}$ 的根节点，则令 p 为 $\hat{T}$ 中 t 的父节点，并将这些原子也插入 atoms(Q') 中

- $F_{i,j}(\mathsf{v}_t, \mathsf{v}_p)$ for all those $i, j \in [k]$ with $i \leqslant \mathrm{ar}(\bar{x}_t)$, $j \leqslant \mathrm{ar}(\bar{x}_p)$ where $\pi_i(\bar{x}_t) = \pi_j(\bar{x}_p)$.

至此，Q'的构造完成。

断言 4.4。 $Q' \in$ fc-ACQ$[\sigma']$，给定 H，可以在 $O(\|H\|)$ 时间内构造查询 Q'。 ⌟

证明概要。达到所声称的运行时间显而易见。为证明 $Q' \in$ fc-ACQ$[\sigma']$，我们通过将每个节点 $t \in V(T)$ 重命名为 v_t，并针对每个 $t \in \mathrm{atm}(T)$，在 v_t 处添加一个名为 w_t 的新叶节点，从而修改树 $T$of H。容易看出，删除满足 $\mathrm{bag}(t) \cap \mathrm{bag}(t') = \emptyset$ 的边 $\{\mathrm{v}_t, \mathrm{v}_{t'}\}$ 后，所得的树恰好给出 Q' 的盖夫曼图 $G(Q')$。由命题 3.1 可知，Q' 是一个无环查询；又由于 $\mathrm{free}(Q') = \{\mathrm{v}_t : t \in W\}$，很容易验证 $Q' \in$ fc-ACQ$[\sigma']$。详情见附录 B.1.2。□

(3) 输出之间的双射。我们对 σ'-db D' 的定义与 [38, 定义 3.4] 中为 σ-db D 给出的二元结构 H_D 的定义相似——但存在一些对定理 4.1 的证明至关重要的细微差异：我们使用所有投影 $\bar{p} \in \mathbf{\Pi}(D)$，而 [38]仅使用“切片”（即满足 $|\mathrm{set}(\bar{p})| = \mathrm{ar}(\bar{p}) \neq 0$ 的投影 $\bar{p}$）；此外，我们还使用额外的一元关系 A_i（对于 $i \in [0, k]$），以标记与元数为 i 的投影 $\bar{p}$ 相关联的节点 $v_{\bar{p}}$。这样，我们就能将 Q' 的变量 v_t 指派给 D' 的节点 $v_{\bar{p}}$，确保 $\bar{p}$ 的元数与变量元组 $\bar{x}_t$ 相同，并将元组 $\bar{x}_t$ 中第 l 个变量指派给元组 $\bar{p}$ 中第 l 个元素（对所有 l 均如此）。此外，我们还使用额外的二元关系 $F_{i,j}$（对于 $i, j \in [k]$），以确保在考虑 T 的不同节点 t, t' 时，这些赋值保持一致。下文将证明，这会诱导出 $\mathrm{Hom}(Q', D')$ 与 $\mathrm{Hom}(Q, D)$ 之间的双射 β，并且还会在 $[\![Q']\!](D')$ 与 $[\![Q]\!](D)$ 之间诱导出双射 f。

我们固定以下记号。对于每个 $y \in \mathrm{vars}(Q)$，任取一个节点 $t_y \in V(T)$，使得$y \in$ 包(t_y)，此外，若 $y \in \mathrm{free}(Q)$，则 $t_y \in W$（这是可行的，因为 H 是 Q的一个 fc-1-GHD）。令$j_y \in [|$包$(t_y)|]$满足 $y = \pi_{j_y}(\bar{x}_{t_y})$（即，$y$作为元组 $\bar{x}_{t_y}$ 的第 j_y 个条目出现）。在本证明的其余部分，对于每个 $y \in \mathrm{vars}(Q)$，这些项 t_y 和 j_y 都将保持固定。

现在考虑任意同态 $\mathrm{h} \in \mathrm{Hom}(Q', D')$，并令 $\beta(\mathrm{h}) : \mathrm{vars}(Q) \to$ 活动域(D)按如下方式定义。任取一个 $y \in \mathrm{vars}(Q)$，并注意 $\mathrm{A}_{|bag(t_y)|}(\mathrm{v}^{t_y}) \in$原子$(Q')$。由 $\mathrm{h} \in \mathrm{Hom}(Q', D')$，我们由此得到 $\mathrm{h}(\mathrm{v}^{t_y}) \in (\mathrm{A}_{|bag(t_y)|})^{D'}$。根据 D' 的定义，存在一个（唯一的）元组 $\bar{p}_{h,y} \in \mathbf{\Pi}(\mathrm{D})$，使得 $\mathrm{h}(\mathrm{v}^{t_y}) = v_{\bar{p}_{h,y}}$，并且 $\mathrm{ar}(\bar{p}_{h,y}) = |$包$(t_y)|$。我们定义$\beta(\mathrm{h})(y) := \pi_{j_y}(\bar{p}_{h,y})$，也就是说，$\beta(\mathrm{h})$将变量 y映射到元组 $\bar{p}_{h,y}$ 的第 j_y 个条目。显然，这定义了一个映射 $\beta(\mathrm{h}) : \mathrm{vars}(Q) \to$ 活动域(D)。

断言 4.5。

(a) 设 $\mathrm{h} \in$同态(Q', D') 且 $\mathrm{h}' := \beta(\mathrm{h})$。对于所有 $t \in V(T)$，我们有 $\mathrm{h}(\mathrm{v}_t) = v_{h'}(\bar{x}_t)$；并且对于每个满足 $R(\bar{z})$ 的$t \in$原子(T)：$=$覆盖(t)，我们有 $\mathrm{h}(\mathrm{w}_t) = w_{h'}(\bar{z})$ 且 $\mathrm{h}'(\bar{z}) \in R^D$。(b) 对于所有 $\mathrm{h} \in$ 同态(Q', D')，我们有：$\beta(\mathrm{h}) \in$同态(Q, D)。(c) 对于所有 $\mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2 \in$同态$(Q', D')$ 以及所有 $t \in V(T)$，以下结论成立：若 $\mathrm{h}_1(\mathrm{v}_t) \neq \mathrm{h}_2(\mathrm{v}_t)$，则存在一个变量 $y \in$包(t)，使得 $\beta(\mathrm{h}_1)(y) \neq \beta(\mathrm{h}_2)(y)$。若 $t \in$原子(T) 且 $\mathrm{h}_1(\mathrm{w}_t) \neq \mathrm{h}_2(\mathrm{w}_t)$，则存在一个 $y \in$包(t)，使得 $\beta(\mathrm{h}_1)(y) \neq \beta(\mathrm{h}_2)(y)$。(d) 映射 β: 同态$(Q', D') \to$ 同态(Q, D) 是双射。

⌟

证明思路。 (a) 可通过仔细检查 D'、 Q' 以及特定的 fc-1-GHD H .

(b) 和 (c) 可直接由(a) （而 (b) 依赖于 fc-1-GHD H 是 完备）轻易推出。

对于 (d)，由 (c) 可立即推出 β 的单射性。为证明 β 是满射，任取 $\mathrm{h}'' \in \mathrm{Hom}(Q, D)$。我们需要找到一个 $\mathrm{h} \in \mathrm{Hom}(Q', D')$，使得 $\mathrm{h}'' = \beta(\mathrm{h})$。根据 h''，我们定义映射 $\mathrm{h} : \mathrm{vars}(Q') \to \mathrm{adom}(D')$ 如下。对于每个 $t \in V(T)$，令 $R_t(\bar{z}_t) := \mathrm{cover}(t)$。由于 $\mathrm{h}'' \in \mathrm{Hom}(Q, D)$ 且 $R_t(\bar{z}_t) \in \mathrm{atoms}(Q)$，因此有 $\bar{a}_t := \mathrm{h}''(\bar{z}_t) \in (R_t)^D \subseteq \mathrm{D}$。由 $\mathrm{set}(\bar{z}_t) \supseteq \mathrm{bag}(t)$，我们

可得 $h''(\bar{x}_t) \in \mathbf{\Pi}(\bar{a}_t) \subseteq \mathbf{\Pi}(D)$。对于每个 $t \in V(T)$，令 $h(v_t) := v_{h''}(\bar{x}_t)$；对于每个 $t \in \mathrm{atm}(T)$，令 $h(w_t) := w_{h''}(\bar{z}_t)$。由此定义了映射 $h : \mathrm{vars}(Q') \to \mathrm{adom}(D')$。仔细检查 Q' 的原子后，我们可以证明 $h \in \mathrm{Hom}(Q', D')$（为此，我们依赖于以下事实：fc-1-GHD H 的所有边 $\{t, p\}$ 都满足“$\mathrm{bag}(t) \subseteq \mathrm{bag}(p)$ 或 $\mathrm{bag}(t) \supseteq \mathrm{bag}(p)$”）。之后，由 (a) 可容易看出 $h'' = \beta(h)$。这证明了 β 是满射，并完成了断言 4.5(d) 的证明。详情见附录 B.1.2。□

断言 4.5 的 (d) 和 (c) 部分意味着存在一个双射 f: $[\![Q']\!](D') \to [\![Q]\!](D)$。仔细检查可知，给定一个元组 $\bar{a} \in [\![Q']\!](D')$ 时，可以在时间 $O(|\mathrm{free}(Q)| \cdot k)$ 内计算出元组 $f(\bar{a}) \in [\![Q]\!](D)$（见附录 B.1.2）。至此，定理 4.1 的证明终于完成。

4.2 从二元模式到节点标记图

本小节旨在证明以下定理。

定理 4.6. 对于任意二元模式 σ，存在一个用于节点标记图的模式 $\widehat{\sigma}$，使得 $|\widehat{\sigma}| = |\sigma| + 3$，并且

(1) 给定一个 σ-数据库 D，我们可以在 $O(|D|)$ 时间内计算出一个模式为 $\widehat{\sigma}$ 的节点标记图 D，并且 (2) 给定任意查询 $Q \in$ fc-ACQ$[\sigma]$，我们可以在 $O(\|Q\|)$ 时间内计算出一个查询 $Q \in$ fc-ACQ$[\widehat{\sigma}]$，满足 $|\mathrm{free}(Q)| < 3 \cdot |\mathrm{free}(Q)|$，使得 (3) 存在一个双射 g: $[\![\widehat{Q}]\!](\widehat{D}) \to [\![Q]\!](D)$。此外，给定一个元组 $\bar{a} \in [\![\widehat{Q}]\!](\widehat{D})$，可以在 $O(|\mathrm{free}(Q)|)$ 时间内计算出元组 $g(\bar{a}) \in [\![Q]\!](D)$。

与定理 4.1类似，我们按照陈述 (1) 至 (3).

(1) 选取 $\widehat{\sigma}$ 并构造 $\widehat{\sigma}$-db D。 设 σ 是任意一个二元模式，并设 $\sigma_{|2}$ 为 σ 中所有二元关系符号的集合。设 $\widehat{\sigma}$ 是仅包含一个二元关系符号 E、σ 的所有一元关系符号、对每个 U_F 都包含一个一元关系符号 $F \in \sigma_{|2}$，以及另外两个新的一元关系符号 V 和 W 的模式。显然，$|\widehat{\sigma}| = |\sigma| + 3$。

D := 插入模式 D。对于每个二元关系 $\widehat{\sigma}$-db D，方法如下。令 V 符号 $X \in \sigma$，令 $X^D := X^D$。我们将 E^D、W^D 和 $(U_F)^D$ 对所有 $F \in \sigma_{|2}$ 初始化为空集 $\emptyset$。令 $T := \bigcup_{F \in \sigma_{|2}} F^D$，并令 T' 为 T 的对称闭包，即 $T' = T \cup \{(b, a) : (a, b) \in T\}$。对于每个元组 $(a, b) \in T'$，我们在 dom 中选取一个新元素 w_{ab}，并将其插入 W^D。此外，我们在 E^D 中插入对称边，分别连接 a 与 w_{ab}，以及 w_{ab} 与 w_{ba}；见图 1。

注意，W 中的每个节点 $\widehat{D}$ 在 V 中恰有一个邻居 $\widehat{D}$ 和 W 中各有一个邻居 D。我们通过遍历所有 $F \in \sigma_{|2}$ 以及所有 $(c, d) \in F^D$，并将 w_{cd} 插入 $(U_F)^{\widehat{D}}$，从而完成 $\widehat{D}$ 的构造。注意，D 是一个节点标记图，可在 $O(|D|)$ 时间内构造。



(a) 为 $(a, a) \in \mathbf{T}'$ 插入的边。　　(b) 为 $a \neq b$ 以及 (a, b)、$(b, a) \in \mathbf{T}'$ 插入的边。

图 1：圆圈标出的节点属于 V^D，方框标出的节点属于 W^D。自环表示 E^D 中的边 (w_{aa}, w_{aa})；x 和 y 两个节点之间的无向边表示两个方向上的边，即 E^D 中的 (x, y) 和 (y, x)。

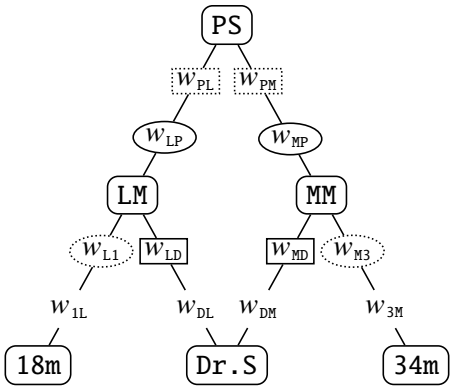

图2：表示 D 来自示例4.7。

例4.7。 考虑一个关于电影和演员的例子，取自 [2, 图 2]。模式σ 包含二元关系符号 出演、由.....出演、电影和银幕时间 （分别记作 P、A、M和S），数据库 D 包含以下关系和元组：

P		
	PS	LM
	PS	MM

A		
	LM	PS
	MM	PS

M		
	LM	Dr.S
	MM	Dr.S

S		
	LM	18m
	MM	34m

其中，Peter Sellers（PS）是一名演员，在同一部电影《奇爱博士》（Dr.S）中饰演 Lionel Mandrake（LM）和 Merkin Muffley（MM）。这两个角色在电影中分别出现了18分钟（18m）和34分钟（34m）。

相应的模式 $\widehat{\sigma}$ 由一个二元关系符号 E 和一元关系符号 V、W、U_P、U_A、U_M、U_S组成。相应的 $\widehat{\sigma}$-数据库 D 如图2所示。形如 w_{ab} 的元素用 a 和 b的首字母缩写，例如，我们用 w_{PL}代替 w_{PSLM}。由于这些元素恰好就是 W^D中的元素，而其他所有元素都属于 V^D，因此不再进一步标示它们。因为 E^D 是对称的，所以我们用无向边表示它。关系 U_P^D、U_A^D、U_M^D、U_S^D分别表示为 、 、 、 。

(2) 构造 fc-ACQ Q**.** 我们的下一个目标是将查询 $Q \in$ fc-ACQ$[\sigma]$ 转换为合适的 $\widehat{\sigma}$-查询 Q。我们希望 Q 属于 fc-ACQ$[\widehat{\sigma}]$，并确保存在一个易于计算的双射 g，将 $[\![\widehat{Q}]\!](\widehat{D})$ 中的元组映射到 $[\![Q]\!](D)$ 中的元组。

考虑任意一个查询 $Q \in$ fc-ACQ$[\sigma]$。考虑 Q 的盖夫曼图 $G(Q)$，并回顾命题 3.1：$G(Q)$ 是一片森林，且对于 $G(Q)$ 的每个连通分量 C，由集合 free$(Q) \cap V(C)$ 诱导出的 C 的子图都是连通的或为空。对于 $G(Q)$ 的每个连通分量 C，我们按如下方式为 C 的边定向。如果 free$(Q) \cap V(C) \neq \emptyset$，则任意选择一个顶点 $r_C \in$ free$(Q) \cap V(C)$ 作为 C 的根；否则，任意选择一个顶点 $r_C \in V(C)$ 作为 C 的根。将 C 的边定向为从根 r_C 向外延伸的方向。令 $G(Q)$ 为所得的 $G(Q)$ 的有向版本。此外，令 S 为 Q 的所有变量 x 的集合，使得对于某个 $F \in \sigma_{|2}$，$F(x,x) \in$ atoms(Q)。我们按如下方式构造 $\widehat{\sigma}$-查询 Q。

我们将 atoms(Q) 初始化为包含 Q的所有一元原子。对于每个 $x \in$ vars(Q)，我们将一元原子 $V(x)$ 添加到 atoms(Q)中。对于每个 $x \in S$，我们使用一个新变量 z_{xx}，并将原子 $W(z_{xx})$、$E(x, z_{xx})$ 和 $E(z_{xx}, z_{xx})$ 添加到 atoms(Q) 中。对于 $G(Q)$ 的每条有向边 (x,y)，我们使用两个新变量 z_{xy}和 z_{yx}，并将原子 $W(z_{xy})$、$W(z_{yx})$、$E(x, z_{xy})$、$E(z_{xy}, z_{yx})$ 和 $E(z_{yx}, y)$ 插入 atoms(Q) 中。最后，对于 Q 中形式为 $F(u,v)$ 的每个原子（其中 $F \in \sigma_{|2}$ 和 $u, v \in$ vars(Q)），我们将原子 $U_F(z_{uv})$ 添加到 atoms(Q) 中。

$\widehat{Q}$ 的头部由 Q 的头部得到，方法是将变量 z_{xy} 和 z_{yx} 追加到其中；对于 $\vec{G}(Q)$ 中的所有边 (x, y)，其中 x 和 y 都属于 $\widehat{\text{free}}(Q)$。不难验证，$|\text{free}(Q)| < 3 \cdot |\text{free}(Q)|$，并且 $\widehat{Q}$ 确实是一个 fc-ACQ（参见附录 B.2）。

例 4.8. 考虑模式 σ 和 $\widehat{\sigma}$，它们来自例 4.7，并令 Q 为查询

$$Ans(x, y_1) \leftarrow A(x, y_1), A(x, y_2), P(y_2, x).$$

$\vec{G}(Q)$ 考虑盖夫曼图的有向版本 $\vec{G}(Q)$，它通过选择 x 作为根从 Q 得到。那么，$\widehat{Q}$ 是以下查询：

$$\begin{aligned} Ans(x, y_1, z_{xy_1}, z_{y_1x}) \leftarrow\ & V(x), V(y_1), V(y_2), U_A(z_{xy_1}), U_A(z_{xy_2}), U_P(z_{y_2x}), \\ & E(x, z_{xy_1}), E(z_{xy_1}, z_{y_1x}), E(z_{y_1x}, y_1), W(z_{xy_1}), W(z_{y_1x}), \\ & E(x, z_{xy_2}), E(z_{xy_2}, z_{y_2x}), E(z_{y_2x}, y_2), W(z_{xy_2}), W(z_{y_2x}). \end{aligned}$$

$\widehat{D}$ **(3) 输出之间的双射** g。根据 D 和 $\widehat{Q}$ 的定义，可以验证以下结论（证明见附录 B.2）。

断言 4.9.

(a) 对于每个 $\nu \in$ 同态$(\widehat{Q}, \widehat{D})$，以下映射 $\widehat{\nu}$ 是从 Q 到 D 的同态：对于所有$x \in$ 变量集(Q)，令 $\widehat{\nu}(x) := \nu(x)$；对于所有 $x \in S$，令 $\widehat{\nu}(z_{xx}) := w_{aa}$ 对于 $a := \nu(x)$；对于 $\vec{G}(Q)$ 的所有边 (x, y)，令 $\widehat{\nu}(z_{xy}) := w_{ab}$，并且 $\widehat{\nu}(z_{yx}) := w_{ba}$ 对于 $a := \nu(x)$ 和 $b := \nu(y)$。

（b）对于每个从 $\widehat{Q}$ 到 $\widehat{D}$ 的同态 $\widehat{\nu}$，以下结论成立：

（i）对于 $\vec{G}(Q)$ 的每条边 (x, y)，对于 $a := \widehat{\nu}(x)$ 和 $b := \widehat{\nu}(y)$，有 $a, b \in \text{adom}(D)$ 和 $\widehat{\nu}(z_{xy}) = w_{ab}$ 以及 $\widehat{\nu}(z_{yx}) = w_{ba}$。对于每个 $x \in S$，有 $a := \widehat{\nu}(x) \in \text{adom}(D)$ 和$\widehat{\nu}(z_{xx}) = w_{aa}$。（ii）映射 ν，满足对于所有 $x \in \text{vars}(Q)$，$\nu(x) := \widehat{\nu}(x)$，是从 Q 到 D 的同态。

由断言 4.9 可知，将每个同态 $\widehat{\nu} \in \text{Hom}(\widehat{Q}, \widehat{D})$ 映射到 $\widehat{\nu}$ 在集合 $\text{vars}(Q)$ 上的限制的映射 β，是 $\text{Hom}(\widehat{Q}, \widehat{D})$ 与 $\text{Hom}(Q, D)$ 之间的双射。特别地，这意味着 $[\![Q]\!](D) = g([\![\widehat{Q}]\!](\widehat{D}))$，其中 g 将 $[\![\widehat{Q}]\!](\widehat{D})$ 中的每个元组投影到该元组的前 $|\text{free}(Q)|$ 个分量。此外，作为断言 4.9 第（b）部分（i）的直接推论，我们得到：对于$\widehat{Q}$ $\widehat{D}$所有满足 $t \neq t'$ 的元组 $t, t' \in [\![Q]\!](D)$，有：$g(t) \neq g(t')$。由此得到陈述（3），并完成定理 4.6 的证明。

5 求解节点标记图问题

在本节中，我们将证明定理 3.3 适用于以下特殊情形：模式 σ 由一个二元符号E 和有限个一元符号组成，且给定 E^D 的关系 σ-db D 是对称的。我们可以将 D 视为一个可能包含自环的无向节点标记图。

5.1 索引阶段

本小节介绍我们解决方案中的索引阶段。输入为一个模式为 σ 的节点标记图 D（即，E^D 是对称的）。我们构建一个数据结构 DS_D，并将其称为 颜色索引；它是针对 D 的一种索引结构，可高效地求值 fc-ACQ[σ] 中的所有查询。

环的编码。我们首先用一个新的一元关系符号 $L \notin \sigma$ 标记 E^D 中的自环。令 $\bar{\sigma} := \sigma \cup \{L\}$。我们将 D 转换为一个 $\bar{\sigma}$-db $\bar{D}$，方法是令 $L^D := \{(v) : (v,v) \in E^D\}$，并令 $R^D := R^D$，对每个 $R \in \sigma$ 都如此。注意，自环仍然也存在于关系 E^D 中，而 L^D 是这些自环的冗余表示。显然，D 的大小与 D 的大小呈线性关系。

回想一下，D因此 D也可以看作节点标记无向图，并且可能包含自环（因为 $E^D = E^D$是对称的）。接下来，将 $\bar{D}$视为这样的图，并使用与图相关的常用记号，会更容易理解。也就是说，我们将 D 表示为节点标记无向图（含自环）$G := (V, E, \mathsf{nl})$，定义如下：$V = \mathrm{adom}(D)$，E由所有满足以下条件的无向边$\{v, w\}$组成：$(v, w) \in E^D$——注意，这意味着 $\bar{E}$可能包含表示环的单元素集合——对于每个节点 $v \in \bar{V}$，我们令$\mathsf{nl}(v) := \{U \in \bar{\sigma} : \mathrm{ar}(U) = 1, (v) \in U^D\}$。

颜色细化。我们将 G 应用一种适当的、广为人知的颜色细化算法变体。该算法的高层描述基本摘自 [9], ，如下所示。该算法通过迭代细化节点的着色，对 G 的节点进行分类。初始时，每个节点 v 的颜色为 $\mathsf{nl}(v)$，注意，$L \in \mathsf{nl}(v)$ 当且仅当 v 有一个自环。然后，在每次迭代中，当前颜色相同的两个节点 v、w 会得到不同的细化颜色，当且仅当存在某个当前颜色 c，使得 $\#(v,c) \neq \#(w,c)$。这里，对于 G中的任意节点 u，我们定义 $\#(u,c) := |N(u,c)|$，其中 $N(u,c)$表示 u中颜色为 c的所有邻居组成的集合。注意，如果 u 有一个自环，那么它也是 u 的邻居；特别地，对于 u当前的颜色 d，有$u \in N(u,d)$。如果无法再进行细化，该过程便会停止，从而得到节点的所谓稳定着色。

形式上，我们说颜色细化计算出一种“细化 nl 的最粗稳定着色”，其定义如下所示。设 S_f 和 S_g 为集合，$f\colon V \to S_f$ 和 $g\colon V \to S_g$ 为函数。我们称 f 细化 g，当且仅当对于所有满足 $f(v) = f(w)$ 的 v、$w \in V$，都有 $g(v) = g(w)$。此外，我们称 f 为稳定的，当且仅当对于所有满足 $f(v) = f(w)$ 的 v、$w \in V$，以及每种颜色 $c \in S_f$，都有：$\#(v,c) = \#(w,c)$。最后，若 f 稳定、细化 g，并且对于每个稳定且细化 g 的着色 $\mathrm{h}: V \to S_h$（其中 S_h 为某个集合），都有 h 细化 f，则称 f 为细化 g 的最粗稳定着色。众所周知（例如参见 [16, 9, 15, 27]），颜色细化可以通过一种算法实现，其运行时间为 $O((|V| + |E|) \cdot \log |V|)$，由此在我们的设定下得到以下定理：

定理 5.1 ([16, 9, 15, 27])。在时间 $O((|V| + |E|) \log |V|)$ 内，可以计算出一个最粗稳定着色$\mathsf{col}\colon V \to C$，它细化了nl （对于一个适当选取的集合 C，使得 $img(\mathsf{col}) = C$）。

在索引阶段，我们应用定理 5.1 给出的算法来计算 col。令 $f_{\mathrm{cr}}(D)$ 表示为此所需的时间。注意，$f_{\mathrm{cr}}(D) \in O(|D| \cdot \log |\text{活动域}(D)|)$，这是最坏情况下的复杂度；若 D的结构特别简单，该算法也可能在时间 $O(|D|)$ 内就已终止。还要注意，col 使用的颜色数量 $|C|$ 是为了得到细化 nl 的稳定着色所可能达到的最小数量；此外，细化 nl 的最粗稳定着色在颜色重命名意义下是唯一的。进一步地，对于所有 v，$w \in V$，以下结论成立：若 $\mathsf{col}(v) = \mathsf{col}(w)$，则 $\mathsf{nl}(v) = \mathsf{nl}(w)$，且对于所有 $c \in C$，$\#(v,c) = \#(w,c)$。据此，我们定义以下记号：对于所有 $c, c' \in C$，令$\#(c,c') := \#(v,c')$，其中取任意一个（因而也可取每一个）满足 $\mathsf{col}(v) = c$ 的 $v \in V$。现在我们进入索引阶段的最后一步，在这一步中，我们使用 col 构建颜色索引数据结构。

Th颜色索引。我们在索引阶段构建的数据结构 DS_D 由 f

(1) 模式 $\bar{\sigma}$ 和 $\bar{\sigma}$-db D；(2) 一个查找表，用于给定顶点 $v \in V$ 时查找颜色 $\mathsf{col}(v)$；以及一个（反向）查找表，用于查找集合 $\{v \in V : \mathsf{col}(v) = c\}$ $c \in C$，以及该集合中元素的数量 n_c；

(3) 一个查找表，用于给定顶点 $v \in V$和颜色 $c \in C$时访问集合 $N(v,c)$;

(4) 一个查找表，用于给定颜色 $c, c' \in C$时访问数量 $\#(c, c')$;

（5）模式 $\bar{\sigma}$ 的颜色数据库 D_{col}，其活动域为 $\text{adom}(D_{\text{col}}) = C$，定义如下：

- 对于每个一元关系符号 $U \in \bar{\sigma}$，我们令 $U^{D_{\text{col}}}$ 为所有满足以下条件的一元元组 (c) 的集合：对于所有 $c \in C$，存在一个 $(v) \in U^D$，使得 $\text{col}(v) = c$。
- 我们令 $E^{D_{\text{col}}}$ 为所有满足 $\#(c, c') > 0$ 的元组 $(c, c') \in C \times C$ 的集合。注意，$E^{D_{\text{col}}}$ 是对称的，并且可能包含形如 (c, c) 的元组。

注意，在时间 $O(|D|)$ 内构造 D 并在时间 $f_{\text{cr}}(D)$ 内计算 col 之后，DS_D 的其余组件（2）–（5）可在总计 $O(|D|)$ 的时间内构建。因此，总而言之，索引阶段需要 $f_{\text{cr}}(D) + O(|D|)$ 的时间。最坏情况下，颜色数据库 D_{col} 的大小为 $O(|D|)$；但 $|D_{\text{col}}|$ 可能远小于 $|D|$。我们将在第 6 节进一步讨论这一点。

5.2 使用颜色索引求值 fc-ACQ

本小节介绍如何使用颜色索引 DS_D 对任意 fc-ACQ Q 在 D上求值。也就是说，本小节描述了我们对 IndexingEval(σ,fc-ACQ[σ]) 解决方案的求值阶段 。我们假设，给定模式为 σ 的节点标记图 D 的颜色索引 DS_D（包括颜色数据库 D_{col}）已在索引阶段构建完成。在求值阶段，我们收到一个任意查询 $Q \in \text{fc-ACQ}[\sigma]$ 作为输入，其头部形式为 $Ans(x_1, \ldots, x_k)$（针对 $k \geqslant 0$）。我们首先说明，如何通过聚焦于连通 查询来简化求值任务。

连通查询。我们称 Q 是连通的，当且仅当其盖夫曼图是连通的。如果 Q 不连通，我们可以将 Q 写为 $\text{Ans}(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_\ell) \leftarrow \bar{\alpha}_1(\bar{z}_1, \bar{y}_1), \ldots, \bar{\alpha}_\ell(\bar{z}_\ell, \bar{y}_\ell)$，其中每个 $\bar{\alpha}_i(\bar{z}_i, \bar{y}_i)$ 都是原子序列；对于 $i \neq j$，$\text{vars}(\bar{\alpha}_i(\bar{z}_i, \bar{y}_i))$ 与 $\text{vars}(\bar{\alpha}_j(\bar{z}_j, \bar{y}_j))$ 不相交；并且对于每个 $i \in [1]$，合取查询 Q_i:=$\text{Ans}(\bar{z}_i) \leftarrow \bar{\alpha}_i(\bar{z}_i, \bar{y}_i)$ 都是连通的。为简化记号，不失一般性地假设，在 Q 的头部中，变量的排列顺序与列表 $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_\ell$ 中的顺序相同。容易验证，该分解满足$[\![Q]\!](D) = [\![Q_1]\!](D) \times \cdots \times [\![Q_\ell]\!](D)$，且 $|[\![Q]\!](D)| = \prod_{i=1}^{\ell} |[\![Q_i]\!](D)|$。因此，我们可以先计算每个数值 $|[\![Q_i]\!](D)|$，再用 $O(|Q|)$ 的时间将所有值相乘，从而计算 $|[\![Q]\!](D)|$。类似地，要枚举 $[\![Q]\!](D)$，可以将针对 $Q_1, \ldots, Q_\ell$ 的常数延迟枚举算法转换为针对 Q 的算法，方法是通过嵌套循环遍历 $[\![Q_1]\!](D), \ldots, [\![Q_\ell]\!](D)$ 的输出。此后，不失一般性地假设 Q 是连通的。

处理 Q中的环。收到 $Q \in \text{fc-ACQ}[\sigma]$后，第一步是移除 Q 的自环，即我们通过将 Q 中所有形如 $E(x, x)$ 的原子替换为原子 $L(x)$，把 Q 转换为 $\bar{\sigma}$-查询 Q。显然，合取查询的盖夫曼图保持不变（即 $G(Q) = G(Q)$），Q 是自由连通无环、连通且无自环的，也就是说，对于 $\bar{Q}$ 中每个形如 $E(x, y)$ 的原子，$x \neq y$。显然，$[\![Q]\!](D) = [\![\bar{Q}]\!](\bar{D})$。因此，我们可以不在 D 上评估 Q，而改为在 D 上评估 Q。

对 Q 中的变量排序。为了确定 Q 中变量的序，我们首先任意选取一个属于 $\text{free}(Q)$ 的变量 r；如果 Q 是布尔查询（即 $\text{free}(Q) = \emptyset$），则任意选取一个属于 $\text{vars}(Q)$ 的变量 r。从现在起，这个 r 将固定不变。由于 Q 连通，以 r 为根节点后，Gaifman 图 $G(Q)$ 将成为一棵有根树 T。此外，由于 $Q \in$ 是 fc-ACQ[$\bar{\sigma}$]，根据命题 3.1 可知，存在一个定义在 $\text{vars}(Q)$ 上的严格线性序 $<$，满足：对于所有 $x \in \text{free}(Q)$ 和所有 $y \in \text{quant}(Q)$，$x < y$，并且该序 $<$ 与有根树 T 的后代关系兼容；也就是说，对于所有 $x \in \text{vars}(Q)$ 以及所有在 T 中是 x 后代的 $y \in \text{vars}(Q)$，都有 $x < y$。这样的 $<$ 可以基于 $G(Q)$ 的一种广度优先搜索变体得到：该搜索从节点 r 开始，并通过为自由变量和量化变量分别设置队列，优先处理自由变量

。我们任意选择这样一个序 $<$，并从现在起将其固定。此后，我们假设 $r = x_1$，且 $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$（通过对 Q 和 Q 的头部中的变量 $x_1, \ldots, x_k$ 重新排序即可做到这一点，且不失一般性）。

对于 T 的每个节点 x，我们令 λ_x 表示满足 $U(x) \in \text{atoms}(Q)$ 的所有一元关系符号 $U \in \bar{\sigma}$ 构成的集合；令 $\text{ch}(x)$ 表示其子节点集合；若 $x \neq x_1$，则用 $\text{p}(x)$ 表示 T 中 x 的父节点。给定 Q 作为输入后，我们可以在 $O(|Q|)$ 时间内计算出查询 Q、有根树 T，以及一个查找表，从而能够以 $O(1)$ 时间访问 λ_x 中每个 $x \in \text{vars}(Q)$ 对应的 。下述引理概述了 从 Q 到 D 的同态、与 $G(Q)$ 的节点 x 相关联的标签 λ_x，以及节点标记图 $G = (V, E, \text{nl})$ 之间的对应关系；证明见附录 C.1。

引理 *5.2.* 映射 $\nu\colon vars(Q) \to adom(D)$ 是从 Q 到 D 的同态，当且仅当，对于每个 $x \in vars(Q)$，都有 $nl(\nu(x)) \supseteq \lambda_x$；并且对于 $G(Q)$ 的每条边 $\{x, y\}$，都有 $\{\nu(x), \nu(y)\} \in E$。

布尔查询（“bool”任务）的求值阶段。作为预热，我们从布尔查询的求值开始。对于此任务，我们假设 Q 是一个布尔查询，并且如前所述，不失一般性地假设它是连通的。下面的引理表明，在 D 上求值 Q 可以归约为在颜色数据库 D_{col} 上求值查询 Q。

引理 5.3。 如果 Q 是一个布尔查询，则 $[\![Q]\!](D) = [\![\bar{Q}]\!](\bar{D}) = [\![\bar{Q}]\!](D_{\text{col}})$。

证明可由引理 5.2、我们对 D_{col} 的特定选择，以及 col 是 G 的稳定着色且细化了 nl 这一事实得出（详细信息请参见附录 C.2 和 C.3）。对于布尔查询，定理 3.2 中的算法会枚举空元组 ()，或者完全不枚举任何内容。因此，结合引理 5.3 和定理 3.2 可知，我们可以通过检查在输入 D_{col} 和 Q 时是否枚举了空元组 () 来解决该任务，这需要时间 $O(|Q| \cdot |D_{\text{col}}|) + O(|\text{free}(Q)|)$。由于 $|\text{free}(Q)| = \emptyset$ 和 $|Q| \in O(|Q|)$，因此可以在时间 $O(|Q| \cdot |D_{\text{col}}|)$ 内解决“布尔”任务。

非布尔查询（“枚举”任务）的求值阶段。现在假设 Q 是某个 $k \geqslant 1$ 的连通 k 元 查询。回想一下，Q 的头部是 $\text{Ans}(x_1, \ldots, x_k)$，其中 $x_1 < \cdots < x_k$，且 $<$ 是我们与查询 Q 关联的序。此外，回想一下，T 是通过选取 $r = x_1$ 作为根，从盖夫曼图 $G(Q)$ 得到的有根树。下面的技术引理揭示了 $[\![\bar{Q}]\!](\bar{D})$ 与 $[\![\bar{Q}]\!](D_{\text{col}})$ 之间的联系，这将使我们能够使用颜色索引来枚举 $[\![\bar{Q}]\!](\bar{D})$。为陈述该引理， 我们需要以下记号。对于任意 $i \in [k]$，我们称 $(v_1, \ldots, v_i)$ 是 Q 在颜色为 $(c_1, \ldots, c_k)$ 的 D 上的一个部分输出，当且仅当存在一个扩展 $(v_{i+1}, \ldots, v_k)$，使得 $(v_1, \ldots, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k) \in [\![\bar{Q}]\!](\bar{D})$ 且 $(\text{col}(v_1), \ldots, \text{col}(v_k)) = (c_1, \ldots, c_k)$。

引理 5.4。

(a) 对于每个 $(v_1, \ldots, v_k) \in [\![\bar{Q}]\!](\bar{D})$，都有 $(\text{颜色}(v_1), \ldots, \text{颜色}(v_k)) \in [\![\bar{Q}]\!](D_{\text{col}})$。

(b) 对于所有 $\bar{c} = (c_1, \ldots, c_k) \in [\![\bar{Q}]\!](D_{\text{col}})$，以及每个 $v_1 \in \text{活动域}(\bar{D})$ 中满足 $col(v_1) = c_1$ 的元素，(v_1) 是 Q 在 D 上、颜色为 $\bar{c}$ 的部分 输出。此外，若 $(v_1, \ldots, v_i)$ 是 Q 在 D 上、颜色为 $\bar{c}$ 的部分输出，且 $x_j = p(x_{i+1})$，则对于每个 $v_{i+1} \in N(v_j, c_{i+1})$，$N(v_j, c_{i+1}) \neq \emptyset$，且 $(v_1, \ldots, v_i, v_{i+1})$ 是 Q 在 D 上、颜色为 $\bar{c}$ 的部分输出。

证明使用引理 5.2、我们对 D_{col} 的特定选择，以及 col 是 G 的稳定着色且细化了 nl 这一事实（详情请参见附录 C.2 和 C.4）。为解决“枚举”任务，我们使用定理 3.2，以 作为输入，并使用 D_{col} 和 Q 在时间 $O(|Q| \cdot |D_{\text{col}}|)$ 内完成预处理阶段，然后以延迟 $O(k)$ 枚举 $[\![\bar{Q}]\!](D_{\text{col}})$ 中的元组。每当我们收到一个元组 $\bar{c} = (c_1, \ldots, c_k) \in [\![\bar{Q}]\!](D_{\text{col}})$ 时，就执行以下算法：

对于所有满足 $\mathrm{col}(v_1) = c_1$ 的 $v_1 \in V$，执行 $\mathrm{Enum}((v_1); \bar{c})$。

这里，对于所有 $i \in [k]$，$\mathrm{Enum}((v_1, \ldots, v_i); \bar{c})$ 过程如下：

> 如果 $i = k$，则 **输出** $(v_1, \ldots, v_k)$；否则，令 $x_j := p(x_{i+1})$，对所有 $v_{i+1} \in N(v_j, c_{i+1})$，执行 $\mathrm{Enum}((v_1, \ldots, v_i, v_{i+1}); \bar{c})$，结束否则分支。

显然，对于每个固定的 $\bar{c} = (c_1, \ldots, c_k) \in [\![\bar{Q}]\!](D_{\mathrm{col}})$，该过程会不重复地输出满足 $(\mathrm{col}(v_1), \ldots, \mathrm{col}(v_k)) = \bar{c}$ 的元组 $(v_1, \ldots, v_k) \in \bar{V}^k$。由引理 5.4(b) 可知，输出包含所有满足 $\mathrm{color}(\mathrm{col}(v_1), \ldots, \mathrm{col}(v_k)) = \bar{c}$ 且属于 $[\![\bar{Q}]\!](\bar{D})$ 的元组 $(v_1, \ldots, v_k)$。再利用引理 5.4(a)，可知该算法总共恰好枚举 $[\![\bar{Q}]\!](\bar{D})$ 中的所有元组 $(v_1, \ldots, v_k)$。由引理 5.4(b) 可知，每当遇到形如“for all $v_{i+1} \in N(v_j, c_{i+1})$”的环时，集合 $N(v_j, c_{i+1})$ 都非空。因此，借助索引阶段构建的查找表可知，输出 $[\![\bar{Q}]\!](\bar{D})$ 中任意两个元组之间的延迟为 $O(k)$。总之，这表明经过耗时为 $O(|Q| \cdot |D_{\mathrm{col}}|)$ 的预处理阶段后，我们可以以 $O(k)$ 的延迟枚举 $[\![\bar{Q}]\!](\bar{D})$（它等于 $[\![Q]\!](D)$）。

计数的求值阶段（“计数”任务）。如果 Q 是布尔查询，答案数量为 0 或 1，而“计数”任务的结果可通过按上述方法求解“布尔”任务获得。如果 Q 是某个 $k \geqslant 1$ 的 k 元查询，我们采用与“枚举”任务相同的假设和记号。求解“计数”任务时，我们按如下方式进行。对于每个 $c \in C$，令 v_c 为查找表中集合 $\{ v \in V : \mathrm{col}(v) = c \}$ 的第一个顶点；对于每个 $x \in \mathrm{vars}(Q)$ 以及每个 $c \in C$，令 $f_1(c, x) := 1$ if $\mathrm{nl}(v_c) \supseteq \lambda_x$，否则令 $f_1(c, x) := 0$。注意，查找表是颜色索引 DS_D 的一部分，并且 $f_1(c, x)$ 表示颜色为 c 的任意一个（因而也是每一个）顶点是否满足所有形如 $U(x)$ 且出现在 Q 中的一元原子。回顾一下，DS_D 包含一个查找表，用于访问每个 $c \in C$，对应的集合 $\{ v \in V : \mathrm{col}(v) = c \}$；并且在此阶段，我们已经为每个 $x \in \mathrm{vars}(Q)$ 计算出一个用于访问 λ_x 的查找表。因此，我们可以在 $O(|C| \cdot |Q|)$ 时间内计算出一个查找表，从而以 $O(1)$ 时间访问所有 $c \in C$ 以及所有 $x \in \mathrm{vars}(Q)$ 对应的 $f_1(c, x)$。

回忆一下，T 表示从盖夫曼图 $G(Q)$ 得到的有根树，其中选择 x_1 作为其根。对于 T 的每个节点 x，我们令 T_x 表示以 x 为根的 T 的子树。通过对 T 进行自底向上传递，我们为每个 $c \in C$ 定义如下值：对于 T 的每个叶节点 x，令 $f_{\downarrow}(c, x) := f_1(c, x)$；对于 T 的每个节点 $y \neq x_1$，令 $g(c, y) := \sum_{c' \in C} f_{\downarrow}(c', y) \cdot \#(c, c')$；对于 T 的每个内部节点 x，令 $f_{\downarrow}(c, x) := f_1(c, x) \cdot \prod_{y \in \mathrm{ch}(x)} g(c, y)$。容易看出，可以在总时间 $O(|Q| \cdot |D_{\mathrm{col}}|)$ 内计算出查找表，从而以 $O(1)$-时间访问 $f_{\downarrow}(\cdot)$ 和 g（为此，对 T 的边 $\{x, y\}$ 进行自底向上传递，并注意到 $g(c, y) = \sum_{c' : (c, c') \in E^{D_{\mathrm{col}}}} f_{\downarrow}(c', y) \cdot \#(c, c')$）。

通过归纳法（沿 T 自底向上），我们得到以下引理；证明见附录 C.5。

引理 5.5。对于所有 $(c, v) \in C \times V$ 且满足 $c = \mathrm{col}(v)$ 的情况，以下结论对所有 $x \in V(T)$ 均成立：

> *(a)* $f_{\downarrow}(c, x)$ 是映射的数量，其中 $\nu : V(T_x) \to V$ 满足 $\nu(x) = v$ 并且满足：*(1)* 对于每个 $x' \in V(T_x)$，均有 $\mathrm{nl}(\nu(x')) \supseteq \lambda_{x'}$；以及 *(2)* 对于 T_x 中的每条边 $\{x', y'\}$，均有 $\{\nu(x'), \nu(y')\} \in E$；
>
> *(b)* 对于所有 $y \in \mathrm{ch}(x)$，值 $g(c, y)$ 是映射的数量 $\nu : \{x\} \cup V(T_y)$，这些映射满足 $\nu(x) = v$ 并且 *(1)* 对于每个 $x' \in V(T_y)$，我们都有 $\mathrm{nl}(\nu(x')) \supseteq \lambda_{x'}$，并且 *(2)* 对于 T_x 中每条满足 $x', y' \in \{x\} \cup V(T_y)$ 的边 $\{x', y'\}$，我们都有 $\{\nu(x'), \nu(y')\} \in E$。

结合引理 5.5(a) 和 5.2 可得，$\sum_{c\in C} n_c \cdot f_{\downarrow}(c, x_1)$ 是从 Q 到 D的同态数量，其中 n_c 是满足 $\mathrm{col}(v) = c$ 的节点 $v \in V$ 的数量。由于我们可以 $O(1)$ 在 DS_D中访问 n_c，因此可以在 $O(|C|)$ 时间内计算数量 $\sum_{c\in C} n_c \cdot f_{\downarrow}(c, x_1)$。特别地，当 $\mathrm{free}(Q) = \mathrm{vars}(Q)$ 时，从 $\bar{Q}$ 到 $\bar{D}$ 的同态数量恰好是数量 $|[\![\bar{Q}]\!](\bar{D})|$。因此，当 $\mathrm{free}(Q) = \mathrm{vars}(Q)$ 时，这就在 $O(|Q|\cdot|D_{\mathrm{col}}|)$ 时间内解决了“count”任务。

如果 $\mathrm{free}(Q) \neq \mathrm{vars}(Q)$，注意到 $\mathrm{free}(Q)$ 根据命题 3.1 诱导出 T 的一个子树 T'。通过对 T' 进行自底向上的遍历，我们可以为每个 $c \in C$ 定义以下值：对于 T' 的每个叶节点 x，令 $f'{\downarrow}(c, x) := 1 \text{ if } f_{\downarrow}(c, x) \geqslant 1$，否则令 $f'{\downarrow}(c, x) := 0$；对于 T' 的每个节点 $y \neq x_1$，令 $g'(c, y) := \sum_{c'\in C} f'{\downarrow}(c', y) \cdot \#(c, c')$；对于 T' 的每个内部节点 x，令 $f'{\downarrow}(c, x) := f_1(c, x) \cdot \prod_{y\in \mathrm{ch}(x)} g'(c, y)$。按照与之前相同的推理，我们可以在 $O(|Q|\cdot|D_{\mathrm{col}}|)$ 时间内得到 $f'{\downarrow}$ 和 g' 的查找表。根据归纳法（沿着T'自底向上），可得：对于所有 $c \in C$ 以及所有满足 $\mathrm{col}(v) = c$ 的 $v \in V$，值 $f'{\downarrow}(c, x_1)$ 等于满足 $v_1 = v$ 的元组 $(v_1, \ldots, v_k) \in [\![\bar{Q}]\!](\bar{D})$ 的数量。因此，$|[\![\bar{Q}]\!](\bar{D})| = \sum_{c\in C} n_c \cdot f'{\downarrow}(c, x_1)$。按照与之前相同的推理，可以在 $O(|\bar{Q}|\cdot|D_{\mathrm{col}}|)$ 时间内计算该数量。总之，我们可以在 $O(|Q|\cdot|D_{\mathrm{col}}|)$ 时间内计算数量 $|[\![\bar{Q}]\!](\bar{D})|$。

总之，这就完成了定理 3.3在以下特殊情形下的证明：σ 是节点标记图的模式，且给定的 σ-数据库 D 是一个节点标记图（即 E^D 是对称的）。

6 收尾：主定理的证明、$_{\mathrm{col}}$ 的大小及开放问题

在第 5 节中，我们已经证明了定理 3.3 的一个特殊情形：σ 是节点标记图的模式，且 D 是一个节点标记图（即 E^D 是对称的）。利用这一结果并应用定理 4.6，可得定理 3.3 在 σ 是任意二元模式且 D 是任意 σ-数据库时的证明。进一步利用该结果并应用定理 4.1，可得定理 3.3 在一般情形下的证明：σ 是任意关系模式，且 D 是任意 σ-数据库。在索引阶段，我们首先根据定理 4.1 将 σ 和 D 转换为 σ'和 D'，然后根据定理 4.6 将它们转换为 $\widehat{\sigma}$ 和 D，接着按照第 5 节所述，对后者执行索引阶段。除此之外，这还产生了辅助数据库 D_{col}。

事实证明，D_{col} 的大小与关系颜色细化（RCR）为原始的 σ-db D赋予的颜色数量密切相关。Scheidt 和 Schweikardt 于 [38] 引入了 RCR。它是经典颜色细化（CR）的一种推广，可应用于任意关系结构；在关系结构为图的特殊情形下，它与 CR 等价。对于本文而言，RCR 的关键之处在于，针对无环 σ-结构，它生成的着色具有与 CR 针对树生成的着色相同的性质。当且仅当存在一棵以 r 为根的树 T，使得将 r 映射到 u 的从 T 到 G的同态数量，与将 r 映射到 v [18]的从 T 到 G 的同态数量不同，CR 才会为图 G 中的两个节点 u、v 赋予不同的颜色。类似地，当且仅当存在一个无环的 σ-db C，其中有一个元组 $\bar{c}$，使得将 $\bar{c}$ 映射到 $\bar{a}$ 的从 C 到 D 的同态数量，与将 $\bar{c}$ 映射到 b [38]的从 C 到 D 的同态数量不同，RCR 才会为 σ-db D 中的两个元组 $\bar{a}$、b 赋予不同的颜色。以下定理表明，对于固定的任意 σ，$\mathrm{adom}(D_{\mathrm{col}})$ 的大小与 RCR 在 D 上生成的颜色数量呈线性关系（详情请参阅附录 D）。

定理 6.1. 设 σ 是任意模式。对于每个 σ-*db* D，我们有 $|\text{活动域}(D_{\mathrm{col}})| = O(|C_R|)$，其中 C_R 是对 *[38]* 进行关系颜色细化后在 D 上产生的颜色集合。

对于无向、无自环且无标签图 G，已知 CR 为 G 赋予的最粗稳定着色有 $\leqslant k$ 种颜色，当且仅当 G 具有大小为 $\leqslant k$ 的等度划分（例如参见 [39]），也就是说，$V(G)$可以划分为 k 个互不相交的集合 $V_1, \ldots, V_k$，使得对于每个 $i \in [k]$，导出子图 $G[V_i]$ 是

正则（即所有顶点的度都相同），并且对于所有 $i, j \in [k]$ 满足 $i \neq j$ 的情况， V_i 中的所有顶点在 V_j 中都有完全相同数量的邻居。因此，对于任意函数 $f(n) \in o(n)$，都存在一大类数据库，其活动域大小为 n（且 n 可任意大），而其颜色数据库的活动域大小仅为 $f(n)$ 阶：令 C^f 表示所有具有 n 个节点（对任意 $n \in \mathbb{N}$）且具有大小为 $\leqslant f(n)$ 的等度划分的图所构成的类。C^f 中每个具有 n 个节点的图 G 的颜色数据库，其活动域大小为 $\leqslant f(n)$。特别地，对于 $f(n) = 1$，类 C^f 由所有正则图构成（例如包括所有环）；它们的颜色数据库仅含一种颜色，即大小为 $O(1)$。类 $\mathsf{C}^{\log(n)}$ 还包含其他图，例如高度为 $\log(n)$ 的所有有根树，其中对于每个高度 i，高度为 i 的所有节点具有相同的度；它们的颜色数据库大小为 $O(\log(n))$。

众所周知， [5] 对于随机图，CR 以高概率为每个节点分配一种新的颜色，因此其颜色数据库不会小于图本身。但实际数据库通常旨在存储结构化信息，预计其形态与随机图有很大不同。Kersting 等人的实证结果 [29] 证实了这一预期：他们计算了各种数据集中的颜色数量，其中包括来自 Google 的一个网页图，其“颜色数量”与“节点数量”之比为 0.4；在他们其余的大多数结果中，该比值介于 0.3 和 0.6 之间。

本文最后提出两个有待未来研究的问题。

问题 1 我们能否将这种方法从 *fc-ACQ* 推广到自由连通广义超树宽度$\leqslant k$的查询，其中 $k \geqslant 1$为任意固定值？对于二元模式，我们认为可以通过使用一种 k 维 Weisfeiler-Leman 算法的变体来实现这一点（参见 [15, 22]）。但将其推广到任意模式可能会很困难，因为目前尚无已知方法能够将 RCR 从无环关系结构推广到广义超树宽度为 k 的结构。

问题 2 我们的方法能否扩展到动态场景？ Idris、Ugarte 和 Vansummeren 的动态 *Yannakakis* 方法 [24] 将定理 3.2 扩展到了这样的场景：对一个经常更新的数据库 D 评估固定查询 Q 。我们的索引结构 DS_D 能否在更新时间内完成更新，且该时间与更新前后 DS_D 两个版本之间的实际差异成正比？

参考文献

[1] Serge Abiteboul、Richard Hull 和 Victor Vianu。《数据库基础》。Addison-Wesley，1995 年。URL：http://webdam.inria.fr/Alice/.[2] Renzo Angles、Marcelo Arenas、Pablo Barcel´o、Aidan Hogan、Juan L. Reutter 和 Domagoj Vrgoc。图数据库现代查询语言基础。《ACM 计算调查》，50(5):68:1–68:40，2017 年。[3] Diego Arroyuelo、Aidan Hogan、Gonzalo Navarro、Juan L. Reutter、Javiel Rojas-Ledesma 和 Adri´an Soto。几乎不占用空间的最坏情况最优图连接。在 SIGMOD，页码 102–114。ACM，2021 年。[4] V. Arvind、Johannes K¨obler、Gaurav Rattan 和 Oleg Verbitsky。图同构、颜色细化与紧致性。《计算复杂性》，26(3):627–685，2017 年 9 月。doi:10.1007/ s00037-016-0147-6。[5] L´aszl´o Babai、Paul Erd¨os 和 Stanley M. Selkow。随机图同构。《SIAM 计算杂志》，9(3):628–635，1980 年。doi:10.1137/0209047。[6] Guillaume Bagan。用于逻辑查询求值的枚举问题的算法与复杂性。（用于逻辑查询求值的枚举问题的算法与复杂性）。

博士论文，卡昂诺曼底大学，法国，2009 年。URL：https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00424232.[7] Guillaume Bagan、Arnaud Durand 和 Etienne Grandjean。关于无环合取查询与常数延迟枚举。在 EACSL 第 16 届年度会议论文集 CSL'07，瑞士洛桑，2007 年 9 月 11–15 日，页码 208–222，2007 年。doi:10.1007/978-3-540-74915-8_18。[8] Catriel Beeri、Ronald Fagin、David Maier 和 Mihalis Yannakakis。无环数据库模式的优越性。《ACM 杂志》，30(3):479–513，1983 年。doi:10.1145/2402.322389。[9] Christoph Berkholz、Paul S. Bonsma 和 Martin Grohe。规范颜色细化复杂性的紧致上下界。《理论计算机系统》，60(4):581–614，2017 年。doi: 10.1007/S00224-016-9686-0。[10] Christoph Berkholz、Fabian Gerhardt 和 Nicole Schweikardt。合取查询的常数延迟枚举：教程。ACM SIGLOG News，7(1):4–33，2020 年。doi:10.1145/3385634. 3385636。[11] Philip A. Bernstein 和 Nathan Goodman。自然半连接的威力。《SIAM 计算杂志》，10(4):751–771，1981 年。doi:10.1137/0210059。[12] Jeroen Bollen、Jasper Steegmans、Jan Van Den Bussche 和 Stijn Vansummeren。使用精确压缩学习图神经网络。在第 6 届图数据管理经验与系统（GRADES）及网络数据分析（NDA）联合研讨会论文集，GRADES & NDA '23，美国纽约，2023 年。ACM。doi:10.1145/3594778.3594878。[13] Johann Brault-Baron。枚举的相关性：命题逻辑和一阶逻辑中的复杂性。（列表的相关性：命题逻辑和一阶逻辑的复杂性）。博士论文，卡昂诺曼底大学，法国，2013 年。URL：https://tel.archives-ouvertes.fr/ tel-01081392。[14] Johann Brault-Baron。重新审视超图无环性。《ACM 计算调查》，49(3):54:1–54:26，2016 年。doi:10.1145/2983573。[15] Jin-yi Cai、Martin F¨urer 和 Neil Immerman。图识别所需变量数量的最优下界。《组合数学》，12(4):389–410，1992 年。doi:10.1007/BF01305232。[16] A. Cardon 和 Maxime Crochemore。在 $O(|A|\log_2|V|)$ 中划分图。《理论计算机科学》，19:85–98，1982 年。doi:10.1016/0304-3975(82)90016-0。[17] Kyle B. Deeds、Diandre Sabale、Moe Kayali 和 Dan Suciu。COLOR：将图着色应用于子图基数估计的框架。《VLDB 会议录》，18(2):130–143，2024 年。doi: 10.14778/3705829.3705834。[18] Zdenˇek Dvoˇr´ak。通过同态数量识别图。《图论杂志》，64(4):330–342，2010 年。[19] Andreas G¨obel、Leslie Ann Goldberg 和 Marc Roth。合取查询的 Weisfeiler-Leman 维数。《ACM 数据管理会议录》，2(2):86，2024 年。PODS'24 会议录。doi:10.1145/3651587。[20] Georg Gottlob、Nicola Leone 和 Francesco Scarcello。超树分解与可处理查询。《计算机系统科学杂志》，64(3):579–627，2002 年。doi:10.1006/jcss.2001.1809。

[21] Martin Grohe. Word2vec、Node2vec、Graph2vec、X2vec：迈向结构化数据向量嵌入理论。载于第39届 ACM SIGMOD-SIGACT-SIGAI 数据库系统原理研讨会论文集（PODS'20），第1–16页。ACM，2020年。doi:10.1145/3375395.3387641。[22] Martin Grohe、Kristian Kersting、Martin Mladenov 和 Pascal Schweitzer。颜色细化及其应用。载于 Guy Van den Broeck、Kristian Kersting、Sriraam Natarajan 和 David Poole 编，《提升式概率推理导论》。麻省理工学院出版社，2021年。doi:10.7551/mitpress/ 10548.003.0023。[23] Martin Grohe、Kristian Kersting、Martin Mladenov 和 Erkal Selman。通过颜色细化降维。载于 Andreas S. Schulz 和 Dorothea Wagner 编，《算法——ESA 2014》，计算机科学讲义，第505–516页，柏林、海德堡，2014年。施普林格。doi: 10.1007/978-3-662-44777-2_42。[24] Muhammad Idris、Mart´ın Ugarte 和 Stijn Vansummeren。动态 Yannakakis 算法：更新场景下紧凑而高效的查询处理。载于2017年 ACM 数据管理国际会议论文集（SIGMOD 2017 大会），美国伊利诺伊州芝加哥，2017年5月14–19日，第1259–1274页，2017年。doi:10.1145/3035918.3064027。[25] Muhammad Idris、Mart´ın Ugarte、Stijn Vansummeren、Hannes Voigt 和 Wolfgang Lehner。更新场景下带不等式的合取查询。PVLDB，11(7):733–745，2018年。doi:10.14778/3192965. 3192966。[26] Muhammad Idris、Mart´ın Ugarte、Stijn Vansummeren、Hannes Voigt 和 Wolfgang Lehner。动态变化的数据集的高效查询处理。SIGMOD Record，48(1):33–40，2019年。doi: 10.1145/3371316.3371325。[27] Neil Immerman 和 Eric Lander。图的描述：图规范化的一阶方法。载于 Alan L. Selman 编，《复杂性理论回顾：献给 Juris Hartmanis，以纪念他六十岁生日（1988年7月5日）》，第59–81页。施普林格，纽约，纽约州，1990年。doi:10.1007/978-1-4612-4478-3_5。[28] Moe Kayali 和 Dan Suciu。用于图压缩的准稳定着色：近似最大流、线性规划和中心性。载于《VLDB 基金会会刊》，第16卷，第803–815页，2022年12月。doi:10.14778/3574245.3574264。[29] Kristian Kersting、Martin Mladenov、Roman Garnett 和 Martin Grohe。幂迭代颜色细化。载于 Carla E. Brodley 和 Peter Stone 编，第二十八届 AAAI 人工智能大会论文集，2014年7月27–31日，加拿大魁北克省魁北克市，第1904–1910页。AAAI Press，2014年。doi:10.1609/AAAI.V28I1.8992。[30] Sandra Kiefer。Weisfeiler-Leman 算法：探索其能力。ACM SIGLOG News，7(3):5–27，2020年11月。doi:10.1145/3436980.3436982。[31] Sandra Kiefer、Pascal Schweitzer 和 Erkal Selman。由带计数的逻辑识别的图。ACM 计算逻辑汇刊，23(1):1:1–1:31，2021年10月。doi:10.1145/3417515。[32] Hung Q Ngo、Ely Porat、Christopher R´e 和 Atri Rudra。最坏情况最优连接算法。《美国计算机协会学报》（JACM），65(3):1–40，2018年。[33] Dan Olteanu 和 Jakub Z´avodn´y。查询结果因子化表示的大小界。ACM 数据库系统汇刊，40(1):2:1–2:44，2015年。doi:10.1145/2656335。

[34] Franc¸ois Picalausa、George H. L. Fletcher、Jan Hidders 和 Stijn Vansummeren。守卫结构索引原理。载于 Nicole Schweikardt、Vassilis Christophides 和 Vincent Leroy 编，第17届国际数据库理论会议（ICDT）论文集，希腊雅典，2014年3月24–28日，第245–256页。OpenProceedings.org，2014年。doi:10.5441/002/ICDT.2014.26。[35] Franc¸ois Picalausa、Yongming Luo、George H. L. Fletcher、Jan Hidders 和 Stijn Vansummeren。三元组索引的结构化方法。载于 Elena Simperl、Philipp Cimiano、Axel Polleres、Oscar Corcho 和 Valentina Presutti 编，《语义网：研究与应用》，计算机科学讲义，第406–421页，柏林、海德堡，2012年。施普林格。doi:10.1007/978-3-642-30284-8_34。[36] Raghu Ramakrishnan 和 Johannes Gehrke。《数据库管理系统》，第3卷。麦格劳-希尔，纽约，2003年。[37] Cristian Riveros、Benjamin Scheidt 和 Nicole Schweikardt。利用颜色细化提升二元模式无环合取查询的枚举与计数。CoRR，abs/2405.12358，2024年。arXiv:2405.12358，doi:10.48550/ARXIV.2405.12358。[38] Benjamin Scheidt 和 Nicole Schweikardt。关系结构的颜色细化。载于第50届国际计算机科学数学基础研讨会（MFCS 2025），2025年8月25–29日，波兰华沙，LIPIcs 第345卷，第88:1–88:19页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2025年。doi:10.4230/LIPICS.MFCS.2025.88。[39] Edward R. Scheinerman 和 Daniel H. Ullman。《分数图论：图论的有理方法》。Wiley-Interscience离散数学与优化系列。威利：John Wiley & Sons。211页，1997年。可见 https://www.ams.jhu.edu/ers/books/。[40] Todd L. Veldhuizen。Triejoin：一种简单的最坏情况最优连接算法。载于 Nicole Schweikardt、Vassilis Christophides 和 Vincent Leroy 编，第17届国际数据库理论会议（ICDT）论文集，希腊雅典，2014年3月24–28日，第96–106页。OpenProceedings.org，2014年。doi:10.5441/002/ICDT.2014.13。[41] Mihalis Yannakakis。无环数据库模式算法。载于《超大型数据库》，第7届国际会议论文集，法国戛纳，1981年9月9–11日，第82–94页，1981年。

附录

A 第3节中省略的详细内容 3

A.1 命题 3.1 的证明3.1

命题 3.1（民间结果）。 二元模式 σ 上的合取查询 Q 是无环的，当且仅当其盖夫曼图 $G(Q)$ 是无环的。当且仅当 $G(Q)$ 是无环的，且以下陈述成立时，合取查询 Q 是自由连通无环的：对于 $G(Q)$ 的每个连通分量 C，要么 $\mathrm{free}(Q) \cap V(C) = \emptyset$，要么由集合 $\mathrm{free}(Q) \cap V(C)$ 诱导的 C 的子图是连通的。」

设 σ 为二元模式，即每个 $R \in \sigma$ 的元数 $\mathrm{ar}(R) \leqslant 2$。下文中，如果 G 是一个（超）图，那么我们用 $G - e$ 表示从 G中移除（超）边 $e \in E(G)$ 后得到的（超）图。如果某个顶点因此变得孤立，我们也将其移除。此外，我们用 $G + e$ 表示向 G中添加（超）边 e 后得到的（超）图。首先我们证明，可以假设 Q 不包含环，并且只使用元数恰为 2 的谓词。

断言 A.1. Q 是自由连通无环的，当且仅当 Q' 是自由连通无环的，其中

$$\mathrm{atoms}(Q') := \{\, R(x,y) \,:\, R(x,y) \in \mathrm{atoms}(Q),\ x \neq y \,\}$$

且 $\mathrm{free}(Q') := \mathrm{free}(Q) \cap$变量集$(Q')$。 」

证明。“⟹”: 设 Q是自由连通无环的。那么， $H(Q) +\mathrm{free}(Q)$有一棵连接树 T。我们按如下方式将 T 转换为 $H(Q') +\mathrm{free}(Q')$的一棵连接树 T'。首先，将 T中的节点 $\mathrm{free}(Q)$替换为 $\mathrm{free}(Q')$。然后，对于每条超边 $e = \{ x \}$，我们在 T 中寻找 e 的一个邻居 f，使得 $x \in f$。如果找不到这样的邻居，就任取一个邻居作为 f。接着，将 T 中 e 的所有其他邻居与 f 相连，并移除 T中的 e。所得图仍是一棵树，并且包含 x 的节点集合仍然诱导出一个连通子树，或者该集合为空——但后一种情况下也有 $x \notin \mathrm{vars}(Q')$。也就是说，现在 T' 中的节点集合恰好是$H(Q') +\mathrm{free}(Q')$的超边集合，并且对于每个 $x \in \mathrm{vars}(Q')$，集合$\{\, t \in V(T') : x \in t \}$仍然诱导出一个连通子树。因此， T'是 $H(Q') +\mathrm{free}(Q')$的一棵连接树。

由于 Q 是自由连通无环的，因此也存在一个用于 $H(Q)$ 的连接树 T。按照与上文相同的推理，可以将 T 转换为用于 $H(Q')$ 的连接树。总之，我们得到 Q' 是自由连通无环的。

“⟸”: 设 Q' 是自由连通无环的。那么 $H(Q') +\mathrm{free}(Q')$ 有一个连接树 T'。我们可以按如下方式将 T' 扩展为用于 $H(Q) +\mathrm{free}(Q)$ 的连接树 T。首先，将 T' 中的节点 $\mathrm{free}(Q')$ 替换为 $\mathrm{free}(Q)$。对于 $H(Q)$ 中形如 $e = \{ x \}$ 的每条超边 e，我们都将 e 作为一个新节点添加到 T' 中，并按如下方式将边 $\{ e, f \}$ 插入 T'：如果 $x \notin \mathrm{vars}(Q')$，则令 f 为 $V(T')$ 中任意一个节点。否则，令 $f \in V(T')$ 为满足 $x \in f$ 的一个节点。容易验证，所得树 T 是用于 $H(Q) +\mathrm{free}(Q)$ 的连接树。由于 Q' 是自由连通无环的，因此也存在一个用于 $H(Q')$ 的连接树 T。按照与上文相同的推理，可以将 T' 转换为用于 $H(Q)$ 的连接树。总之，我们得到 Q 是自由连通无环的。□

根据上述断言，我们可以不失一般性地假设 Q 不含自环，且只使用元数为 2 的谓词。注意，这意味着 $H(Q) = G(Q)$。众所周知，对于无向图，α-无环性的概念与图的标准无环性概念一致。也就是说，图是 α-无环的，当且仅当它是无环的（概述见 [14]）。因此，在我们的设定中， $H(Q) = G(Q)$是 α- 无环的，当且仅当它是无环的，也就是说，它是一个森林。这立即得出命题 3.1 的第一条陈述。命题 3.1的第二条陈述由以下断言得出。

断言 A.2. Q 是自由连通无环的，当且仅当 $G(Q)$ 无环，且以下陈述成立：（**）对于 $G(Q)$ 的每个连通分量 C，由集合 $\mathrm{free}(Q) \cap V(C)$ 在 C 中诱导的子图是连通的或为空。

」

证明。“⟹”：根据假设，Q 是自由连通无环的。即，$H(Q)$ 是 α-无环的，并且 $H(Q)$ + free(Q) 是α-无环的。由于 $H(Q) = G(Q)$，且在图上 α-无环性与无环性等价，这意味着$G(Q)$ 无环，也就是说，它是一个森林。

由于 $H(Q)$ +free(Q) 是 α-无环的，因此存在一个 T，它是 $H(Q)$ +free(Q) 的连接树。为证明 (**)，我们对 $H(Q)$ + free(Q) 的连接树中的节点数进行归纳。

如果 T至多有两个节点，那么 $H(Q)$ 由单个超边构成，且该超边的形式为 $\{x, y\}$，其中 $x \neq y$。因此，$G(Q)$ 由单条边 $\{x, y\}$ 构成，在这种情况下 (**) 显然成立。

在归纳情形中，设 T 是 $H(Q)$ + free(Q) 的一棵连接树。考虑 T 的某个叶节点 e（即 e 在 T 中只有一个邻居），其形式为 $e = \{x, y\}$，并令其父节点为 p。那么，$T - e$ 是 $H(Q')$ +free(Q) 的一棵连接树，其中 atoms(Q') := $\{ R(z_1, z_2) \in \text{atoms}(Q) : \{z_1, z_2\} \neq \{x, y\} \}$，而 free($Q'$) 是 free($Q$) 中所有出现在 Q' 的某个原子中的变量所构成的集合。容易看出，这意味着存在一个 T'，它是 $H(Q')$ +free(Q') 的连接树。此外，由于 $G(Q')$ 是无环的，查询 Q' 是自由连通无环的，因此根据归纳假设，(**) 对 $G(Q')$ 成立。注意，$G(Q') = G(Q) - e$。显然，x 和 y 位于 $G(Q)$ 中的同一个连通分量 C。我们需要考察 x、y 与 C 其余部分之间的关系。

由于 e 是 T 中的叶节点，$x, y \in p$ 意味着 $p =$ free(Q)。利用这一点，我们知道 tha t

(i) 要么 y 在 $G(Q)$ 中只有 x 这一个邻居，要么反过来，或者

(ii) x 和 y 都是自由变量，并且它们分别还有 y 和 x 以外的邻居。

情况 (i)：不失一般性，假设 x 是 $G(Q)$ 中唯一与 y 相邻的顶点。那么，$C' := C - \{x, y\}$ 是 $G(Q')$ 中的一个连通分量，$y \notin \text{vars}(Q')$，也就是说，尤其也是 $y \notin \text{free}(Q')$。根据归纳假设，free(Q') $\cap V(C')$ 在 C' 上诱导出一个连通子图。若 $y \notin$free(Q)，则显然可得 free(Q) $\cap V(C)$ 在 C 上诱导出一个连通子图。若 $y \in$free(Q) 且 free(Q) $\cap V(C) = \{y\}$，这也显然成立。否则，存在一个不同于 y 的 $z \in$free(Q) $\cap V(C)$。由于 x、y、z 都位于同一个连通分量 C 中，而 x 是唯一与 y 相邻的顶点，因此必定存在另一个与 x 相邻的顶点 w。因此，x 是 T 某处另一个节点 $\{x, w\}$ 的一部分；根据定义，这意味着 x 必须位于 p 中。由于 y、$z \in$free(Q)、y 也必须位于 p 中。因此，$p =$free(Q)，这意味着 $x \in$free(Q)。因此，在此情况下，free(Q) $\cap V(C)$ 也在 C 上构成一个连通分量。

情形（ii）：假设两个变量 x和 y 都是自由变量，并且它们在 $G(Q)$ 中各自都与另一个顶点相邻。那么 $x, y \in$free(Q')（即 free(Q) = free(Q')），且移除边 $\{x, y\}$ 会将 C分成两个连通分量 C_x, C_y。根据归纳假设，free(Q') $\cap V(C_x)$ 和 free(Q') $\cap V(C_y)$ 分别在 C_x 和 C_y上诱导连通子图，并且 x（分别为 y）属于这些子图。因此，添加边 $\{x, y\}$ 可将它们连接起来，所以 free(Q) $\cap V(C)$ 也在 C上诱导一棵连通子树。

$G(Q)$ 中的其他每个连通分量 $D \neq C$ 也是 $G(Q')$ 中的连通分量。因此，对于 $G(Q)$，(**) 成立。

“⟸”：根据假设，$G(Q)$ 是无环的，且满足 (**)。由于 $G(Q) = H(Q)$，并且图上的 α-无环性与无环性等价，因此 Q 是无环的。还需证明 $H(Q)$ + free(Q) 具有一棵连接树。

我们对 $G(Q)$ 中顶点的数量进行归纳。回顾一下，Q 仅使用二元关系符号，并且没有自环。因此，在基本情形中，$G(Q)$ 由两个通过一条边连接的顶点组成。由于 $H(Q) = G(Q)$，很容易看出，$H(Q)$ +free(Q) 具有一棵连接树。

在归纳情形中，令 C 为 $G(Q)$ 的一个包含量化变量的连通分量，即 free(Q) $\cap V(C) \neq V(C)$。如果不存在这样的连通分量，则通过令 $H(Q)$ 的所有超边在 T 中都成为 free(Q) 的子节点，$H(Q)$ +free(Q) 具有一棵平凡的连接树。

由于 (**)，C 中必定存在一个叶节点 x，使得 $x \notin$free(Q)。令 y 为 x 的父节点，即令 $\{x, y\}$ 为 $G(Q)$ 中包含 x 的一条（或者更确切地说，唯一一条）边。令 $H' := H(Q) - \{x, y\}$。对于以下查询，$H' = H(Q')$：其中 atoms(Q') = $\{ R(z_1, z_2) \in \text{atoms}(Q) : x \notin \{z_1, z_2\} \}$，且 free($Q'$) = free($Q$) \ $\{x\}$。

设 T' 为连接　根据归纳假设，为 $H(Q')$ +free(Q')，即为 H' +free(Q) \ $\{x\}$ 存在的树　.

如果 $x \notin \text{free}(Q)$，我们可以通过添加边 $\{x, y\}$，将 T' 扩展为 $H(Q)$ 的连接树 T，并将其作为某个包含 y 的节点在 T' 中的子节点。对于 $\text{free}(Q) = \{x\}$ 的情况，也可以类似处理：将 $\{x\}$ 插入为 $\{x, y\}$ 的子节点。

如果 $x \in \text{free}(Q)$，但 $\text{free}(Q) \supsetneq \{x\}$，则根据 $\text{free}(Q) \cap V(C)$ 诱导出连通子图这一假设，可知 $y \in \text{free}(Q)$。在这种情况下，我们可以将 $\{x, y\}$ 添加为 $\text{free}(Q)$ 的子节点。□

A.2 定理 3.2 的证明3.2

定理 3.2。对于每个模式 σ，都存在一种枚举算法，其输入为一个 σ-*db* D 和一个查询 $Q \in \text{fc-ACQ}[\sigma]$，并能在预处理时间 $O(|Q| \cdot |D|)$ 内，构造一个用于枚举 $[\![Q]\!](D)$ 的数据结构，其延迟为 $O(|\text{free}(Q)|)$。

我们给出一些取自 [10] 的进一步定义。下文证明定理 3.2 时将用到这些定义。

合取查询 Q 及其超图 $H(Q)$ 的一种树分解（简称 TD）是一个元组 $TD = (T, \text{包})$，满足：

(1) $T = (V(T), E(T))$ 是一棵有限无向树，并且

(2) 包是一个映射，它为每个节点 $t \in V(T)$ 关联一个集合 $\text{包}(t) \subseteq \text{vars}(Q)$，使得

(a) 对每个原子 $\alpha \in \text{atoms}(Q)$，都存在 $t \in V(T)$，使得 $\text{vars}(\alpha) \subseteq \text{包}(t)$；(b) 对每个变量 $v \in \text{vars}(Q)$，集合 $\text{包}^{-1}(v) := \{t \in V(T) : v \in \text{包}(t)\}$ 在 T 中诱导出一棵连通子树。

宽度 $TD = (T, \text{包})$ 定义为 $\text{宽度}(TD) = \max_{t \in V(T)} |\text{包}(t)| - 1$。

合取查询 Q 及其超图 $H(Q)$ 的广义超树分解（简称 GHD）是一个元组 $\text{H} = (T, \text{包}, \text{覆盖})$，由 Q 的树分解 $(T, \text{包})$ 和一个覆盖映射组成；该映射为每个节点 $t \in V(T)$ 关联一个集合 $\text{覆盖}(t) \subseteq \text{atoms}(Q)$，使得 $\text{包}(t) \subseteq \bigcup_{\alpha \in \text{覆盖}(t)} \text{vars}(\alpha)$。集合 $\text{包}(t)$ 和 $\text{覆盖}(t)$ 分别称为与节点 $t \in V(T)$ 关联的包和覆盖。GHD H 的宽度定义为 T 的某个节点的覆盖标签中原子的最大数量，即 $\text{width(H)} = \max_{t \in V(T)} |\text{cover}(t)|$。合取查询 Q 的广义超树宽度（记作 $\text{ghw}(Q)$）定义为其所有广义超树分解中的最小宽度。

若存在集合 $U \subseteq V(T)$，它在 T 中诱导出一个连通子树，并且满足条件 $\text{free}(Q) = \bigcup_{t \in U} \text{包}(t)$，则 CQ Q 的树分解 $TD = (T, \text{包})$ 是**自由连通**的。这样的集合 U 称为见证，用于证明 TD 的自由连通性。若 GHD 的树分解是自由连通的，则该 GHD 也是自由连通的。CQ Q 的**自由连通广义超树宽度**记为*fc-ghw*(Q)，定义为其所有自由连通广义超树分解中的最小宽度。

已知（[20, 7, 13]；概述及证明细节另见 [10]），对于每个模式 σ 以及每个模式为 σ 的 CQ Q，以下结论成立：

(I) Q 是无环的，当且仅当 $ghw(Q) = 1$。

(II) Q 是自由连通无环的，当且仅当*fc-ghw*$(Q) = 1$。

如果对于每个原子 $\alpha \in \text{atoms}(Q)$，都存在一个节点 $t \in V(T)$，使得 $\text{vars}(\alpha) \subseteq \text{包}(t)$ 且 $\alpha \in \text{覆盖}(t)$，则 CQ Q 的广义超树分解 $H = (T, \text{包}, \text{覆盖})$ 被称为完备。

以下结果已在 [10] 中证明（参见 [10] 中的定理 4.2）：

定理 A.3 ([10])。对于每个模式 σ，都存在一种算法，其输入为查询 $Q \in \text{fc-ACQ}[\sigma]$、一个完备的自由连通宽度*1*广义超树分解 $H = (T、\text{包}、\text{覆盖})$（针对 Q）以及一个见证 $U \subseteq V(T)$，并且在预处理时间 $O(|V(T)| \cdot |D|)$ 内构建一个数据结构，使得能够以 $O(|U|)$ 的延迟枚举 $[\![Q]\!](D)$。

已知，对于每个模式 σ，都存在一种算法，其输入为查询 $Q \in$ fc-ACQ$[\sigma]$，并在时间 $O(|Q|)$ 内计算出 Q ([6])的自由连通宽度1广义超树分解；另见 [10]中的第5.1节。将证明 [10, 引理 3.3], 中使用的构造应用于此分解，然后再执行 [10, 备注 3.1], 中的补全构造，即可在时间 $O(|Q|)$ 内计算出 Q的广义超树分解 H $=(T$、包、覆盖$)$，以及一个满足定理 A.3 假设的见证 $U \subseteq V(T)$；此外，它们还满足以下性质： $|U| \leqslant |\text{free}(Q)|$ 且 $|V(T)| \in O(|Q|)$。总之，这就证明了定理 3.2。

B 第4节中省略的细节

B.1 第4.1节中省略的细节

B.1.1 一个关于非二元模式的示例

乍看之下，人们可能会认为定理 4.1 可以通过直接的方法证明。然而，fc-ACQ 的概念颇为微妙，如何将任意模式 σ 的 fc-ACQ 转换为一个 恰当选取的二元模式 σ''的 fc-ACQ，并非显而易见。下面给出一个具体示例。

考虑一个模式 σ，它由一个三元关系符号 R 构成。将该模式的数据库 D 表示为一个二元模式的数据库 D''，一种直接的方法如下。 D'' 有 3 个边关系，分别称为 E_1、E_2、E_3。 D 活动域中的每个元素都是 D'' 的一个节点。此外， D 的 R-关系中的每个元组 $t = (a_1, a_2, a_3)$ 都作为 D'' 的一个节点；我们在 D'' 中插入一条 E_1-边 (t, a_1)、一条 E_2-边 (t, a_2)，以及一条 E_3-边 (t, a_3)。现在，在 D 上提出的合取查询 Q 可转换为在 D'' 上提出的合取查询 Q''，方法如下： Q'' 与 Q 具有相同的头部。对于 Q 体部中的每个原子 $R(x, y, z)$，我们引入一个新变量 u，并将原子 $E_1(u, x)$、 $E_2(u, y)$、 $E_3(u, z)$ 加入 Q'' 的体部。

问题在于，针对 自由连通无环查询 Q 的 D 并不一定会转化为针对自由连通无环查询 Q'' 的 D'' ——因此，证明定理 4.1 并不容易。下面给出这样一个查询的具体示例 Q:

$$Ans(x, y, z) \leftarrow R(x, y, z),\ R(x, x, y),\ R(y, y, z),\ R(z, z, x).$$

这是一个自由连通无环查询（作为见证，取一棵连接树，其根标记为 $R(x,\ y,\ z)$，并有 3 个子节点，分别标记为查询体部中其余的原子）。但与之对应的查询 Q'' 则是

$$\begin{aligned} Ans(x, y, z) \leftarrow\ & E_1(u_1, x), E_2(u_1, y), E_3(u_1, z), \\ & E_1(u_2, x), E_2(u_2, x), E_3(u_2, y), \\ & E_1(u_3, y), E_2(u_3, y), E_3(u_3, z), \\ & E_1(u_4, z), E_2(u_4, z), E_3(u_4, x). \end{aligned}$$

注意， Q''的盖夫曼图不是无环的（其中包含环 $x - u_2 - y - u_3 - z - u_4 - x$）。因此，根据命题 3.1， Q'' 并非自由连通无环。这个简单的例子说明，将数据库 D 直接编码为一个二元模式上的数据库，并不能轻易地帮助证明定理 4.1。

B.1.2 第 4.1 节中省略的证明细节

断言 4.2. 给定一个 σ-db D，可在 $2^{O(k \cdot \log k)} \cdot |D|$ 时间内构造出 σ'-db D'。 ⌟

证明。 根据定义，我们有 $|\sigma'| = |\sigma| + 2 \cdot k^2 + k + 1$。对于每个满足 $r :=$ 元数$(\bar{a})$ 的元组 $\bar{a} \in \mathbf{D}$，我们有

$$|\mathbf{\Pi}(\bar{a})| \leqslant \sum_{m=0}^{r} \binom{r}{m} \cdot m! \leqslant r \cdot r! \leqslant k \cdot k!.$$

因此， $|\mathbf{\Pi(D)}| \leqslant k \cdot k! \cdot |\mathbf{D}| \leqslant k \cdot k! \cdot |D| = 2^{O(k \cdot \log k)} \cdot |D|$。

显然，根据 只需遍历所有 $R \in \sigma$ 和所有元组 $\bar{d} \in R^D$ 一次，我们就能构造出以下集合 s:

- （U_R）$^{D'}$，对所有 $R \in \sigma$、
- $\mathbf{D}$ 和 $\{ w_{\bar{d}} : d \in \mathbf{D}\}$,
- $\mathbf{\Pi}(d)$，对于所有 $d \in \mathbf{D}$,
- $\mathbf{\Pi(D)}$ 和 $\{v_{\bar{p}} : \bar{p} \in \mathbf{\Pi(D)}\}$,
- $(A_i)^{D'}$，对于所有 $i \in [0, k]$,
- $(E_{i,\ j})^{D'}$，对于所有 $i,\ j \in [k]$。

所有这些都可以在 $poly(k) \cdot k! \cdot |D| = 2^{O(k \cdot \log k)} \cdot |D|$ 时间内完成；之后，我们还可以使用数据结构，以输出线性延迟枚举相应集合的元素，在常时间 $O(k)$ 内测试给定项是否属于这些集合之一，在 $O(k)$ 时间内在元组 $d \in \mathbf{D}$ 与关联节点 $w_{\bar{d}}$ 之间切换，并在 $O(k)$ 时间内在投影 $\bar{p} \in \mathbf{\Pi(D)}$ 与关联节点 $v_{\bar{p}}$ 之间切换。

一种构造集合 $(F_{i,j})^{D'}$（针对 $i, j \in [k]$）的蛮力法如下。将它们初始化为空集 $\emptyset$，然后遍历所有 $\bar{p} \in \mathbf{\Pi}(\mathbf{D})$，并令 $X := \text{set}(\bar{p})$。遍历所有满足 $1 \leqslant m \leqslant k$ 且 $\text{set}(\bar{q}) \subseteq X$ 的元组 $\bar{q} = (q_1, \ldots, q_m)$，检查 $\bar{q} \in \mathbf{\Pi}(\mathbf{D})$ 是否成立；若成立，则将元组 $(v_{\bar{p}}, v_{\bar{q}})$ 插入 $(F_{i,j})^{D'}$，并针对所有满足 $1 \leqslant i \leqslant \text{ar}(\bar{p})$、$1 \leqslant j \leqslant \text{ar}(\bar{q})$ 且 $\pi_i(\bar{p}) = \pi_j(\bar{q})$ 的 $i, j \in [k]$，将 $(v_{\bar{q}}, v_{\bar{p}})$ 插入 $(F_{j,i})^{D'}$。

注意，执行此算法后，对于所有 $i,\ j \in [k]$ 集合 $(F_{i,\ j})^{D'}$ 恰好由预期的元组组成。运行时间为 $|\mathbf{\Pi}(\mathbf{D})| \cdot poly(k) \cdot k! = 2^{O(k \cdot \log k)} \cdot |D|$。命题 4.2 的证明至此完成。□

命题 4.3。对于每个 $Q \in$ fc-ACQ$[\sigma]$，可以在时间 $O(\|Q\|)$ 内计算出一个完备的 fc-1-GHD $H = (T$、包、覆盖、$W)$，其满足 Q 使得 $|W| < 2 \cdot |$自由$(Q)|$，并且对于所有边 $\{t,\ p\}$，若 $\in E(T)$，则有包$(t) \subseteq$包(p)，或包$(t) \supseteq$包(p)。」

证明。根据 Bagan [6]，我们可以得到一个算法：输入一个合取查询 Q 后，该算法在时间 $O(\|Q\|)$ 内判断 Q 是否为自由连通无环的；如果是，则输出一个针对 Q 的 fc-1-GHD（另见 [10, 备注 5.3]）。

将引理 [10, 3.3], 证明中使用的构造应用于该 fc-1-GHD，并随后执行备注 [10, 3.1], 中的补全构造，可在 $O(\|Q\|)$ 时间内计算出一个完备的 fc-1-GHD $H' = (T,$ 包，覆盖，$W)$，其对应于 Q，且满足 $|W| \leqslant |\text{free}(Q)|$。

最后，我们通过考虑所有边 $\{t, p\} \in E(T)$，按如下方式修改 H'。若 $\text{bag}(t) \not\subseteq \text{bag}(p)$ 且 $\text{bag}(t) \not\supseteq \text{bag}(p)$，则通过引入一个新节点 $n_{\{t,p\}}$，将边 $\{t, p\}$ 细分；将边 $\{t, p\}$ 替换为两条新边 $\{t, n_{\{t,p\}}\}$ 和 $\{n_{\{t,p\}}, p\}$；并令 $\text{bag}(n_{\{t,p\}}) := \text{bag}(t) \cap \text{bag}(p)$，且 $\text{cover}(n_{\{t,p\}}) := \text{cover}(t)$。若 $\{t, p\} \subseteq W$ 则将 $n_{\{t,p\}}$ 插入 W

不难验证，这样便得到一个满足所需性质的完备 fc-1-GHD Q。由此完成了命题4.3的证明。□

Clai命题 4.4。$Q' \in$fc-ACQ$[\sigma']$，给定 H，可在 $O(\|H\|)$ 时间内构造查询 Q' 。」

证明。上述定义显然给出了一个算法，可在 $O(\|H\|)$ 时间内构造 Q'。显然，Q' 是模式 σ'（二元）的一个合取查询。为了证明 $Q' \in$ fc-ACQ$[\sigma']$，根据命题 3.1，只需证明盖夫曼图 $G(Q')$ 是无环的，并且对于 $G(Q')$ 的每个连通分量 C，由集合 $\text{free}(Q') \cap V(C)$ 诱导出的 C 的子图是连通的或为空。

Le是由 T 按如下方式得到的图：我们将每个节点 t 重命名为 v_t，并且对于每个 $t \in \text{atm}(T)$，都向 v_t 添加一个名为 w_t 的新叶节点。由于 T 是一棵树，T 也同样是一棵树。容易验证，盖夫曼图 $G(Q')$ 是从 T 中删除边 $\{v_t, v_{t'}\}$ 后得到的子图，其中包$(t) \cap$ 包$(t') = \emptyset$。特别地，$G(Q')$ 是无环的。

根据我们对 Q'的定义，有$\text{free}(Q') = \{ \mathrm{v}_t : t \in W \}$。由于$W$ 是 H自由连通性的一个见证，集合W 在 T中诱导出一棵连通子树。因此，集合$\{ \mathrm{v}_t : t \in W\}$也在 T中诱导出一棵$\widetilde{}$连通子树。这意味着，对于 $G(Q')$的每个连通分量 C， C中由集合$\{ \mathrm{v}_t : t \in W\} \cap V(C)$诱导出的子图是连通的或为空。由命题 3.1 可知， Q' 是自由连通无环的。至此，断言 4.4 的证明完成。□

断言 4.5。

(a) 设 $\mathrm{h} \in$同态(Q', D') 且 $\mathrm{h}' := \beta(\mathrm{h})$。对于所有 $t \in V(T)$，我们有 $\mathrm{h}(\mathrm{v}_t) = v_{h'}(\bar{x}_t)$；并且，对于每个满足 $R(\bar{z})$ 的$t \in$原子(T)：$=$覆盖(t)，我们有 $\mathrm{h}(\mathrm{w}_t) = w_{h'}(\bar{z})$ 且 $\mathrm{h}'(\bar{z}) \in R^D$。(b) 对于所有 $\mathrm{h} \in$同态(Q', D')，我们有：$\beta(\mathrm{h}) \in$同态(Q, D)。(c) 对于所有 $\mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2 \in$同态$(Q', D')$ 以及所有 $t \in V(T)$，以下结论成立：若 $\mathrm{h}_1(\mathrm{v}_t) \neq \mathrm{h}_2(\mathrm{v}_t)$，则存在一个变量 $y \in$包(t)，使得 $\beta(\mathrm{h}_1)(y) \neq \beta(\mathrm{h}_2)(y)$。若 $t \in$原子(T) 且 $\mathrm{h}_1(\mathrm{w}_t) \neq \mathrm{h}_2(\mathrm{w}_t)$，则存在一个 $y \in$包(t)，使得 $\beta(\mathrm{h}_1)(y) \neq \beta(\mathrm{h}_2)(y)$。(d) 映射 β: 同态$(Q', D') \to$同态(Q, D) 是双射。

⌟

命题证明 *4.5(a)*。
考虑任意一个$h \in$ 同态(Q', D')。我们的证明分为三个步骤。

步骤 *1*：对于所有 $t \in V(T)$，存在一个 $\bar{q}_t \in \mathbf{\Pi(D)}$，使得 $h(\mathrm{v}_t) = v_{\bar{q}_t}$且 $\mathrm{ar}(\bar{q}_t) = \mathrm{ar}(\bar{x}_t)$。此外，对于所有 $y \in$变量集(Q)、所有 t，$t' \in V(T)$（满足 $y \in$包$(t) \cap$包(t')），以及满足$y = \pi_i(\bar{x}_t) = \pi_{i'}(\bar{x}_{t'})$的 $i \leqslant \mathrm{ar}(\bar{x}_t)$ 和 $i' \leqslant \mathrm{ar}(\bar{x}_{t'})$，我们有 $\pi_i(\bar{q}_t) = \pi_{i'}(\bar{q}_{t'})$。
步骤 *1* 的证明：关于第一个陈述，考虑任意 $t \in V(T)$，并注意到 $\mathrm{atoms}(Q')$ 包含原子 $A_{|bag(t)|}(\mathrm{v}_t)$。由于$h \in$同态$(Q', D')$，我们有 $h(\mathrm{v}_t) \in (A_{|bag(t)|})^{D'}$。根据 D' 的定义，我们得到 $h(\mathrm{v}_t) = v_{\bar{q}_t}$对于某个 $\bar{q}_t \in \mathbf{\Pi(D)}$，满足 $\mathrm{ar}(\bar{q}_t) = |\text{包}(t)| = \mathrm{ar}(\bar{x}_t)$。

关于第二个陈述，考虑任意变量 $y \in \mathrm{vars}(Q)$，以及任意节点t，$t' \in V(T)$，满足 $y \in$包$(t) \cap$包(t')。令 $i \leqslant \mathrm{ar}(\bar{x}_t)$ 和 $i' \leqslant \mathrm{ar}(\bar{x}_{t'})$，使得 $y = \pi_i(\bar{x}_t) = \pi_{i'}(\bar{x}_{t'})$。我们需要证明 $\pi_i(\bar{q}_t) = \pi_{i'}(\bar{q}_{t'})$。

回顾一下，H是一个 fc-1-GHD，因此特别满足路径条件。因此，$y \in$包$(t) \cap$包(t') 意味着，对于每个在 t 到 t' 的路径上、位于 T 中的节点 t''，都有 $y \in$包(t'')。因此，只需证明当 t 和 t' 在 T 中互为邻居这一特殊情形下的陈述，即 $\{t, t'\} \in E(T)$。由 $\{t, t'\} \in E(T)$ 可知，t' 是 $\hat{}T$ 中 t 的父节点，或 t 是 $\hat{}T$ 中 t' 的父节点。因此，根据查询 Q' 的定义，集合 $\mathrm{atoms}(Q')$ 包含原子 $F_{i,i'}(\mathrm{v}_t, \mathrm{v}_{t'})$ 或原子 $F_{i',i}(\mathrm{v}_{t'}, \mathrm{v}_t)$。由于 $\mathrm{h} \in$同态(Q', D')，因此有：$(\mathrm{h}(\mathrm{v}_t), \mathrm{h}(\mathrm{v}_{t'})) \in (F_{i,i'})^{D'}$或 $(\mathrm{h}(\mathrm{v}_{t'}), \mathrm{h}(\mathrm{v}_t)) \in (F_{i',i})^{D'}$。回顾步骤 1 的第一个陈述，$\mathrm{h}(\mathrm{v}_t) = v_{\bar{q}_t}$且 $\mathrm{h}(\mathrm{v}_{t'}) = v_{\bar{q}_{t'}}$，由此得到：$(v_{\bar{q}_t}, v_{\bar{q}_{t'}}) \in (F_{i,i'})^{D'}$或 $(v_{\bar{q}_{t'}}, v_{\bar{q}_t}) \in (F_{i',i})^{D'}$。根据 D' 的定义可得：$\pi_i(\bar{q}_t) = \pi_{i'}(\bar{q}_{t'})$。至此，步骤 1 的证明完成。

回顾断言 4.5(a)的表述可知，$h' := \beta(h)$。

步骤 *2*：$h(\mathrm{v}_t) = v_{h'(\bar{x}_t)}$，对每个 $t \in V(T)$ 均成立。

步骤 *2* 的证明：考虑任意一个 $t \in V(T)$。根据步骤 1，存在一个 $\bar{q}_t \in \mathbf{\Pi}(D)$，使得 $\mathrm{ar}(\bar{q}_t) = \mathrm{ar}(\bar{x}_t)$ 且 $h(\mathrm{v}_t) = v_{\bar{q}_t}$。我们需要证明 $\bar{q}_t = h'(\bar{x}_t)$。

令 $m := \mathrm{ar}(\bar{x}_t)$，考虑任意一个 $i \in [m]$，并令 $y := \pi_i(\bar{x}_t)$（即，y是在 $\bar{x}_t$ 的位置 i 处出现的变量）。我们需要证明 $\pi_i(\bar{q}_t) = h'(y)$。

根据我们对 $h' = \beta(h)$ 的定义，我们知道 $h'(y) = \pi_{j_y}(\bar{p}_{h,y})$，其中 $\bar{p}_{h,y} \in \mathbf{\Pi(D)}$ 满足 $h(\mathrm{v}_{t_y}) = v_{\bar{p}_{h,y}}$，且 $\mathrm{ar}(\bar{p}_{h,y}) = |\text{包}(t_y)| = \mathrm{ar}(\bar{x}_{t_y})$。此外，根据我们对 j_y 的选择，我们

知道 $y = \pi_{j_y}(\bar{x}_{t_y})$。对 $t' := t_y$ 和 $i' := j_y$ 使用步骤 1，并注意到 $\bar{q}_{t'} = \bar{p}_{h,y}$，我们得到：$\pi_i(\bar{q}_t) = \pi_{i'}(\bar{q}_{t'}) = \pi_{j_y}(\bar{p}_{h,y}) = h'(y)$。至此，步骤 2 的证明完成。

步骤 *3*：对于每个 $t \in \text{atm}(T)$ 以及每个 $R(\bar{z}) :=$ 覆盖(t)，我们有 $h(\mathrm{w}_t) = w_{h'(\bar{z})}$，并且 $h'(\bar{z}) \in R^D$。

步骤 3 的证明：设 $t \in \text{atm}(T)$ 且 $R(\bar{z}) :=$ 覆盖(t)。令 $r :=$ 元数(R)，且 $(z_1, \ldots, z_r) := \bar{z}$。根据 atm$(T)$ 的定义，我们有 $\{z_1, \ldots, z_r\} =$ 包(t)。因此，存在一个满射 $f: [r] \to [m]$ for $m :=$ |包(t)|，使得对于 $(x_1, \ldots, x_m) := \bar{x}_t$，我们有：$(z_1, \ldots, z_r) = (x_f(1), \ldots, x_f(r))$。

根据 Q' 的定义，集合 atoms(Q') 包含原子 $(U_R)(\mathrm{w}_t)$ 以及 $E_{\nu,f(\nu)}(\mathrm{w}_t, \mathrm{v}_t)$，对所有 $\nu \in [r]$ 均成立。由于 $\mathrm{h} \in$ 同态(Q', D')，我们有 $\mathrm{h}(\mathrm{w}_t) \in (U_R)^{D'}$，并且 $(\mathrm{h}(\mathrm{w}_t), \mathrm{h}(\mathrm{v}_t)) \in (E_{\nu,f(\nu)})^{D'}$，对所有 $\nu \in [r]$ 均成立。

根据 D' 的定义，存在一个元组 $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_r) \in R^D$，使得 $h(\mathrm{w}_t) = w_{\bar{a}}$。因此，要完成证明，只需证明 $\bar{a} = h'(\bar{z})$。

由步骤 2，我们已经知道 $\mathrm{h}(\mathrm{v}_t) = v_{h'}(\bar{x}_t)$。根据 D' 的定义，以及 $\mathrm{h}(\mathrm{w}_t) = w_{\bar{a}}$ 和 $(\mathrm{h}(\mathrm{w}_t), \mathrm{h}(\mathrm{v}_t)) \in (E_{\nu,f(\nu)})^{D'}$ 这一事实，我们得到 $\pi_\nu(\bar{a}) = \pi_{f(\nu)}(\mathrm{h}'(\bar{x}_t))$，也就是说，对于所有 $\nu \in [r]$，都有 $a_\nu = \mathrm{h}'(x_{f(\nu)})$。

利用 $(z_1, \ldots, z_r) = (x_f(1), \ldots, x_f(r))$，我们得到：$\mathrm{h}'(\bar{z}) = (\mathrm{h}'(x_f(1)), \ldots, \mathrm{h}'(x_f(r))) = (a_1, \ldots, a_r) = \bar{a}$。至此，步骤 3 的证明完成。总之，命题 4.5(a) 的证明已经完成。□

命题证明*4.5(b)*、*(c)*和*(d)*。

(b)：设 $h \in$ 同态(Q', D')，并设 $h' := \beta(h)$。任取一个原子 $R(\bar{z}) \in$ 原子(Q)。我们需要证明 $h'(\bar{z}) \in R^D$。

设 $\alpha := R(\bar{z})$，并考虑特定节点 $t := t_\alpha \in$ 原子(T)。由断言 4.5(a) 可得$h'(\bar{z}) \in R^D$。至此，断言 4.5(b) 的证明完成4.5(b)。

(c)：对于每个 $i \in \{1,2\}$，设 $h'_i := \beta(h_i)$。

首先，考虑一个 $t \in V(T)$，满足 $\mathrm{h}_1(\mathrm{v}_t) \neq \mathrm{h}_2(\mathrm{v}_t)$。由命题 4.5(a)可得，对于每个 $i \in \{1, 2\}$，$\mathrm{h}_i(\mathrm{v}_t) = v_{h'_i}(\bar{x}_t)$。因此，我们有 $v_{h'_1}(\bar{x}_t) = \mathrm{h}_1(\mathrm{v}_t) \neq \mathrm{h}_2(\mathrm{v}_t) = v_{h'_2}(\bar{x}_t)$。这意味着 $\mathrm{h}'_1(\bar{x}_t) \neq \mathrm{h}'_2(\bar{x}_t)$。也就是说，对于 $(x_1, \ldots, x_m) := \bar{x}_t$，有：$(\mathrm{h}'_1(x_1), \ldots, \mathrm{h}'_1(x_m)) \neq (\mathrm{h}'_2(x_1), \ldots, \mathrm{h}'_2(x_m))$。因此，对于某个 $\nu \in [m]$，有 $\mathrm{h}'_1(x_\nu) \neq \mathrm{h}'_2(x_\nu)$。取 $y := x_\nu$，即可完成第一条陈述的证明。

现在，考虑一个 $t \in \text{atm}(T)$，使得 $\mathrm{h}_1(\mathrm{w}_t) \neq \mathrm{h}_2(\mathrm{w}_t)$。令 $R(\bar{z}) :=$ cover(t)。由命题 4.5(a) 可得，对每个 $i \in \{1, 2\}$，都有 $\mathrm{h}_i(\mathrm{w}_t) = w_{h'_i}(\bar{z})$。因此，我们有 $w_{h'_1}(\bar{z}) = \mathrm{h}_1(\mathrm{w}_t) \neq \mathrm{h}_2(\mathrm{w}_t) = w_{h'_2}(\bar{z})$。这意味着 $\mathrm{h}'_1(\bar{z}) \neq \mathrm{h}'_2(\bar{z})$。也就是说，对于 $(z_1, \ldots, z_r) := \bar{z}$，我们有：$(\mathrm{h}'_1(z_1), \ldots, \mathrm{h}'_1(z_r)) \neq (\mathrm{h}'_2(z_1), \ldots, \mathrm{h}'_2(z_r))$。因此，存在某个 $\nu \in [r]$，使得 $\mathrm{h}'_1(z_\nu) \neq \mathrm{h}'_2(z_\nu)$。选取 $y := z_\nu$，并注意到 $y \in \text{bag}(t)$（因为根据 $t \in \text{atm}(T)$，我们知道 bag(t) = vars(cover(t)) $= \{z_1, \ldots, z_r\}$），即可完成第二个陈述的证明以及断言 4.5(c) 的证明。

(d)：根据断言 4.5(c) 以及 $\text{vars}(Q') = \{\mathrm{v}_t : t \in V(T)\} \cup \{\mathrm{w}_t : t \in \text{atm}(T)\}$这一事实，我们立即可得该映射 β 是单射。为了证明它是满射，我们按如下方式进行。

设 $\mathrm{h}'' \in$ 同态(Q, D)。我们的目标是找到一个 $\mathrm{h} \in$ 同态(Q', D')，使得 $\mathrm{h}'' = \beta(\mathrm{h})$。基于 h''，我们定义映射 h : vars$(Q') \to$ 活动域(D')如下。回顾一下，$\text{vars}(Q') = \{\mathrm{v}_t : t \in V(T)\} \cup \{\mathrm{w}_t : t \in \text{atm}(T)\}$且 $\text{adom}(D') = \{w_{\bar{a}} : \bar{a} \in \mathrm{D}\} \cup \{v_{\bar{p}} : \bar{p} \in \mathbf{\Pi}(\mathrm{D})\}$。对于每个 $t \in V(T)$，我们令$R_t(\bar{z}_t) :=$ 覆盖(t)。由于 $\mathrm{h}'' \in$同态(Q, D)且 $R_t(\bar{z}_t) \in$原子(Q)，因此有 $\bar{a}_t := \mathrm{h}''(\bar{z}_t) \in (R_t)^D \subseteq \mathrm{D}$。由 $\text{set}(\bar{z}_t) \supseteq \text{bag}(t)$，我们得到 $\mathrm{h}''(\bar{x}_t) \in \mathbf{\Pi}(\bar{a}_t) \subseteq \mathbf{\Pi}(\mathrm{D})$。我们令

$$h(\mathrm{v}_t) := v_{h''(\bar{x}_t)}, \quad \text{for every } t \in V(T), \qquad \text{and} \qquad h(\mathrm{w}_t) := w_{h''(\bar{z}_t)}, \quad \text{for every } t \in \text{atm}(T).$$

显然，h 是一个映射 h: vars$(Q') \to$ adom(D')。

步骤 *1:* $h \in$ 同态(Q', D')。

步骤 *1* 的证明：我们系统地考察 atoms(Q') 中的所有原子。考虑任意一个 $t \in V(T)$。回想一下，$R_t(\bar{z}_t) =$ 覆盖 (t) 且 $h(\mathrm{v}_t) := v_{h''(\bar{x}_t)}$；并且在 $t \in \text{atm}(T)$ 的情况下，我们还有 $h(\mathrm{w}_t) := w_{h''(\bar{z}_t)}$。

我们首先考虑原子 $A_{|bag(t)|}(\mathrm{v}_t)$。由于 $\text{ar}(\bar{x}_t) =$ |包(t)|，根据我们对 D' 的定义，可得 $h(\mathrm{v}_t) = v_{h''(\bar{x}_t)} \in (A_{|bag(t)|})^{D'}$。

接下来，在 $t \in \text{atm}(T)$ 的情况下，我们考虑 Q' 的原子 $(U_{R_t})(\mathsf{w}_t)$。我们已经知道 $h''(\bar{z}_t) \in (R_t)^D$。根据我们对 D' 的定义，因此可得 $h(\mathsf{w}_t) = w_{h''(\bar{z}_t)} \in (U_{R_t})^{D'}$。

此外，如果 $t \in \text{atm}(T)$，我们考虑原子 $E_{i,j}(\mathsf{w}_t, \mathsf{v}_t)$，其中 $i \leqslant \text{ar}(\bar{z}_t)$ 和 $j \leqslant \text{ar}(\bar{x}_t)$，且 $\pi_i(\bar{z}_t) = \pi_j(\bar{x}_t)$，也就是说，$\bar{z}_t$中的第 i 个条目包含与 $\bar{x}_t$中的第 j 个条目相同的变量。因此，$\mathrm{h}''(\bar{z}_t)$ 中的第 i 个条目也包含与 $\mathrm{h}''(\bar{x}_t)$ 中的第 j 个条目相同的值。回想一下，我们已经知道 $\bar{a}_t := \mathrm{h}''(\bar{z}_t) \in \mathrm{D}$，并且 $\bar{p}_t := \mathrm{h}''(\bar{x}_t) \in \mathbf{\Pi}(\bar{a}_t)$。因此，根据我们的定义 D'，有：$(\mathrm{h}(\mathsf{w}_t), \mathrm{h}(\mathsf{v}_t)) = (w_{\bar{a}_t}, v_{\bar{p}_t}) \in (E_{i,j})^{D'}$。

最后，对于任意的 $t \in V(T)$，若 t不是 $\hat{T}$ 的根，我们还必须考虑 $\hat{T}$ 中 t 的父节点 p，以及 $F_{i,j}(\mathsf{v}_t, \mathsf{v}_p)$ 这两个原子，其中 $i \leqslant \text{ar}(\bar{x}_t)$ 和 $j \leqslant \text{ar}(\bar{x}_p)$，且 $\pi_i(\bar{x}_t) = \pi_j(\bar{x}_p)$；也就是说，$\bar{x}_t$ 的第 i 个位置包含的变量与 $\bar{x}_p$ 的第 j 个位置包含的变量相同。因此，$h''(\bar{x}_t)$ 的第 i 个位置也包含与 $h''(\bar{x}_p)$ 的第 j 个位置相同的值。

回想一下，我们已经知道 $\mathrm{h}''(\bar{x}_t) \in \mathbf{\Pi}(\mathrm{D})$，且 $\mathrm{h}''(\bar{x}_p) \in \mathbf{\Pi}(\mathrm{D})$。此外，根据命题 4.3，按照我们对$H$的选择，我们知道 $\text{bag}(t) \subseteq \text{bag}(p)$ 或 $\text{bag}(t) \supseteq \text{bag}(p)$，也就是说，$\text{set}(\bar{x}_t) \subseteq \text{set}(\bar{x}_p)$ 或 $\text{set}(\bar{x}_t) \supseteq \text{set}(\bar{x}_p)$。这意味着 $\text{set}(\mathrm{h}''(\bar{x}_t)) \subseteq \text{set}(\mathrm{h}''(\bar{x}_p))$ 或 $\text{set}(\mathrm{h}''(\bar{x}_t)) \supseteq \text{set}(\mathrm{h}''(\bar{x}_p))$。根据 D'的定义，我们因此有：$(\mathrm{h}''(\bar{x}_t), \mathrm{h}''(\bar{x}_p)) \in (F_{i,j})^{D'}$。至此，步骤 1 的证明完成。

步骤 2：$h'' = \beta(h)$。

步骤 2 的证明：根据 h 的定义，对于每个 $t \in V(T)$，我们都有 $\mathrm{h}(\mathsf{v}_t) = v_{h''}(\bar{x}_t)$。另一方面，由于 $\mathrm{h} \in$ 同态(Q', D')，由命题 4.5(a) 可知，对于 $\mathrm{h}' := \beta(\mathrm{h})$ 以及每个 $t \in V(T)$，都有 $\mathrm{h}(\mathsf{v}_t) = v_{h'}(\bar{x}_t)$。因此，对于每个 $t \in V(T)$，我们都有 $v_{h''}(\bar{x}_t) = v_{h'}(\bar{x}_t)$，进而也有 $\mathrm{h}''(\bar{x}_t) = \mathrm{h}'(\bar{x}_t)$。由于对于每个变量 $y \in$变量集(Q)，都存在一个 $t \in V(T)$，使得 y作为元组 $\bar{x}_t$ 的一个条目出现，因此对于每个 $y \in$ 变量集(Q)，都有 $\mathrm{h}''(y) = \mathrm{h}'(y)$。这证明了 $\mathrm{h}'' = \mathrm{h}'$，即 $\mathrm{h}'' = \beta(\mathrm{h})$，并完成了步骤 2 的证明以及命题 4.5(d) 的证明。

总之，断言的证明4.5已经完备。 □

在附录 B.1.2的余下部分中，我们将说明 β 如何导出一个易于计算的双射，从 $[\![Q']\!](D')$到 $[\![Q]\!](D)$。

断言 B.1。 存在一个双射 $f: [\![Q']\!](D') \to [\![Q]\!](D)$。此外，给定一个元组 $\bar{a} \in [\![Q']\!](D')$，元组 $f(\bar{a}) \in [\![Q]\!](D)$ 可以在 $O(|\text{free}(Q)| \cdot k))$ 时间内计算得出。」

证明。 令 $l := |\text{free}(Q)|$，并令 $Ans(z_1, \ldots, z_\ell)$ 为 Q 的头部（即 $\text{free}(Q) = \{z_1, \ldots, z_\ell\}$）。回顾一下，$Q'$ 的头部是 $Ans(\mathsf{v}_{t_1}, \ldots, \mathsf{v}_{t_{|W|}})$，其中 $\{t_1, \ldots, t_{|W|}\} = W$ 且 $|W| < 2 \cdot |\text{free}(Q)|$。根据合取查询语义的定义，我们知道

$$
\begin{aligned}
[\![Q']\!](D') &= \{ (h(\mathsf{v}_{t_1}), \ldots, h(\mathsf{v}_{t_{|W|}})) : h \in \text{Hom}(Q', D') \}, \quad \text{and} \\
[\![Q]\!](D) &= \{ (h'(z_1), \ldots, h'(z_\ell)) : h' \in \text{Hom}(Q, D) \}.
\end{aligned}
$$

Fro断言 4.5(d) 我们知道 β 是从同态(Q', D') 到同态(Q, D)。因此 e,

$$
[\![Q]\!](D) = \{ (\beta(h)(z_1), \ldots, \beta(h)(z_\ell)) : h \in \text{Hom}(Q', D') \}.
$$

此外，由于 $\text{free}(Q) = \bigcup_{t \in W}$ 包(t)，根据断言 4.5(c) 可得，对于任意两个 $h_1, h_2 \in$同态(Q', D') 满足

$$
\big(h_1(\mathsf{v}_{t_1}), \ldots, h_1(\mathsf{v}_{t_{|W|}})\big) \neq \big(h_2(\mathsf{v}_{t_1}), \ldots, h_2(\mathsf{v}_{t_{|W|}})\big),
$$

我们有

$$
\big(\beta(h_1)(z_1), \ldots, \beta(h_1)(z_\ell)\big) \neq \big(\beta(h_2)(z_1), \ldots, \beta(h_2)(z_\ell)\big).
$$

这表明存在一个双射 $f: [\![Q']\!](D') \to [\![Q]\!](D)$。

下面，我们给出一种算法：给定元组 $\bar{a} = (a_1, \ldots\ldots, a_{|W|}) \in [\![Q']\!](D')$，计算元组 $f(\bar{a}) \in [\![Q]\!](D)$。

首先，我们读取元组 $\bar{a}$，并在 $O(\mathrm{ar}(\bar{a})) = O(|\mathrm{free}(Q)|)$ 时间内构建一种数据结构，该结构可在输入一个 $i \in [\mathrm{ar}(\bar{a})]$ 后，以 $O(1)$ 时间访问 a_i。

接下来，对于每个 $y \in \mathrm{free}(Q)$，我们按如下方式进行。设 $i \in \{1, \ldots, |W|\}$ 满足 $t_i = t_y$。回想一下，我们已将 t_y 固定为 W 中的一个节点，使得 $y \in \mathrm{bag}(t_y)$；并已固定 $j_y \in [\mathrm{ar}(t_y)]$，使得 $y = \pi_{j_y}(\bar{x}_{t_y})$。考虑元组 $\bar{a}$ 的第 i 个条目 a_i。由命题 4.5(a)，我们知道，对于某个元数为 $\mathrm{ar}(\bar{p}) = \mathrm{ar}(\bar{x}_{t_y})$ 的元组 $\bar{p} \in \mathbf{\Pi}(\mathrm{D})$，有 $a_i = v_{\bar{p}}$。我们令 $b_y := \pi_{j_y}(\bar{p})$。

最后，我们输出元组 $\bar{b} := (b_{z_1}, \ldots\ldots, b_{z_\ell})$。注意，给定输入 $\bar{a}$ 后，元组 $\bar{b}$ 可在 $O(|\mathrm{ar}(\bar{a})| + |\mathrm{free}(Q)| \cdot k) = O(|\mathrm{free}(Q)| \cdot k)$ 时间内构造。

要完成证明，剩下的工作就是证明：如果对于某个 $\mathrm{h} \in$同态(Q', D')，有 $\bar{a} = (\mathrm{h}(v_{t_1}), \ldots\ldots, \mathrm{h}(v_{t_{|W|}}))$，那么 $\bar{b} = (\beta(\mathrm{h})(z_1), \ldots\ldots, \beta(\mathrm{h})(z_\ell))$。注意，要证明后者，只需证明对于所有 $y \in \mathrm{free}(Q)$，都有 $b_y = \beta(\mathrm{h})(y)$。任取一个 $y \in \mathrm{free}(Q)$。如上所述，我们令 $i \in \{1, \ldots, |W|\}$ 满足 $t_i = t_y$。根据我们对 b_y 的选择，有：$b_y = \pi_{j_y}(\bar{p})$，其中 $\bar{p}$ 满足 $a_i = v_{\bar{p}}$。由 $a_i = \mathrm{h}(v_{t_y})$ 可得 $\mathrm{h}(v_{t_y}) = v_{\bar{p}}$。因此，根据我们对 $\beta(\mathrm{h})$ 的定义，有：$\beta(\mathrm{h})(y) = \pi_{j_y}(\bar{p})$，即 $\beta(\mathrm{h})(y) = b_y$。至此，断言 B.1 的证明完成。□

最后，定理4.1的证明完备：

- 陈述 (1) 由断言4.2得到，
- 陈述 (2) 由命题 4.3、断言 4.4 以及以下事实得到：$|\mathrm{free}(Q')| = |W| < 2 \cdot |\mathrm{free}(Q)|$，
- 陈述(3)由断言 B.1得到。

B.2 第 4.2 节中省略的细节4.2

断言 B.2。$|\mathrm{free}(\widehat{Q})| < 3 \cdot |\mathrm{free}(Q)|$ 以及 $\widehat{Q} \in \text{fc-ACQ}[\widehat{\sigma}]$。

证明。根据 Q 的头部定义，我们有 $|\mathrm{free}(\widehat{Q})| = |\mathrm{free}(Q)| + 2 \cdot l$，其中 l 是由集合 $\mathrm{free}(Q)$ 诱导的 $G(Q)$ 子图的边数。由于该子图是一个包含 $|\mathrm{free}(Q)|$ 个节点的森林，其边数为 $< |\mathrm{free}(Q)|$。因此，$|\mathrm{free}(\widehat{Q})| < 3 \cdot |\mathrm{free}(Q)|$。

注意，通过将 $G(Q)$ 的每条边 (x, y) 的方向改为 $\vec{G}(Q)$ 中的 (x, z_{xy})、(z_{xy}, z_{yx}) 和 (z_{yx}, y)，再为每个 $x \in S$ 附加一个新的叶节点 z_{xx}，并随后忽略边的方向而得到。显然，$G(Q)$ 是一个森林；对于 $G(Q)$ 的每个连通分量 C，由集合 $\mathrm{free}(Q) \cap V(C)$ 诱导的子图是连通的或为空。因此，根据命题 3.1，查询 Q 是自由连通无环的，即 $Q \in \text{fc-ACQ}[\widehat{\sigma}]$。注意，对于输入的查询 $Q \in \text{fc-ACQ}[\sigma]$，可以在 $O(\|Q\|)$ 时间内构造查询 Q。这就完成了断言 B.2 的证明。□

断言 4.9。

(a) 对于每个 $\nu \in \mathrm{Hom}(Q, D)$，以下映射 $\widehat{\nu}$ 是从 Q 到 D的同态：对于所有$x \in \mathrm{vars}(Q)$，令 $\widehat{\nu}(x) := \nu(x)$；对于所有 $x \in S$，令 $\widehat{\nu}(z_{xx}) := w_{aa}$，其中 $a := \nu(x)$；对于 $\vec{G}$的所有边 (x, y)，令 $\widehat{\nu}(z_{xy}) := w_{ab}$，且 $\widehat{\nu}(z_{yx}) := w_{ba}$，其中 $a := \nu(x)$ 和 $b := \nu(y)$。

(b) 对于从 Q 到 D的每个同态 $\widehat{\nu}$，以下结论成立：

(i) 对于 $\vec{G}(Q)$ 的每条边（x, y），对于 $a := \widehat{\nu}(x)$ 和 $b := \widehat{\nu}(y)$，有 a, $b \in \mathrm{adom}(D)$ 且$\widehat{\nu}(z_{xy}) = w_{ab}$ 和 $\widehat{\nu}(z_{yx}) = w_{ba}$。对于每个 $x \in S$，有 $a := \widehat{\nu}(x) \in \mathrm{adom}(D)$ 且 $\widehat{\nu}(z_{xx}) = w_{aa}$。

(ii) 对于所有 $x \in \mathrm{vars}(Q)$，映射 ν with $\nu(x) := \widehat{\nu}(x)$ 是从 Q 到 D的同态。 ⌟

证明。(a)：设 ν 是从 Q 到 D的同态，并设 $\widehat{\nu}$: $\mathrm{vars}(Q) \to \mathrm{dom}$ 是如下定义的映射：对于所有 $x \in \mathrm{vars}(Q)$，令 $\widehat{\nu}(x) := \nu(x)$；对于所有 $x \in S$，令 $\widehat{\nu}(z_{xx}) := w_{aa}$，其中 $a := \nu(x)$；对于 $G(Q)$ 的所有边 $\vec{}$（x, y），令 $\widehat{\nu}(z_{xy}) := w_{ab}$，且 $\widehat{\nu}(z_{yx}) := w_{ba}$，其中 $a := \nu(x)$ 和 $b := \nu(y)$。我们必须证明 $\widehat{}$ $\widehat{}$，$\widehat{\nu}$ 是从 Q 到 D的同态。

首先，考虑 x，它要么是带有 $X(x) \in \mathrm{atoms}(Q)$ 的 $X(x)$。在这两种情况下，我们都有 $x \in \mathrm{vars}(Q)$，因此 $\widehat{\nu}(x) = a$ 对 $a := \nu(x)$ 成立。特别地，$a \in \mathrm{adom}(D) = V^D$。此外，如果 $X(x)$ 是 $\widehat{Q}$和 Q的原子，那么（因为 ν是从 Q到 D的同态）我们有 $a \in X^D = X^{\widehat{D}}$。

接下来，由于考虑 $x \in S$，以存在 $F(z_{xx}, x)$ 使得 $F \in \sigma_{|2}$ 这些原子 Q。由于 $\nu \in \mathrm{Hom}(Q, D)$，我们知道 $(a, a) \in F^D$ 对 $a := \nu(x)$ 成立。根据 $\widehat{\nu}$ 的定义，我们有 $\widehat{\nu}(z_{xx}) = w_{aa}$；根据 $\widehat{D}$ 的定义，我们有 $w_{aa} \in W^{\widehat{D}}$，且 $(a, w_{aa}) \in E^{\widehat{D}}$ 以及 $(w_{aa}, w_{aa}) \in E^{\widehat{D}}$。此外，对于每个满足 $U_F(z_{xx})$ 是 $\widehat{Q}$的原子的 $F \in \sigma_{|2}$，我们知道 $F(x, x)$ 是 Q的原子，因此 $(a, a) \in F^D$。根据 $\widehat{D}$的定义，这意味着 $w_{aa} \in (U_F)^{\widehat{D}}$。因此，$Q$ 中涉及 z_{xx} 的所有原子都由 $\widehat{\nu}$正确处理。

现在，考虑原子 $W(z_{xy})$、$W(z_{yx})$、$\vec{}$ $E(x, z_{xy})$、$E(z_{xy}, z_{yx})$、$\vec{}$和 $E(z_{yx}, y)$。我们知道，$x, y \in$ 变量集（Q）。令 $a := \nu(x)$ 且 $b := \nu(y)$。由于（x，y）是 $G(Q)$ 的一条边，因此存在一个 $F \in \sigma_{|2}$，使得原子（Q）至少包含原子 $F(x, y)$ 和 $F(y, x)$ 中的一个。由于 ν 是从 Q 到 D的同态，我们有 a，$b \in$ 活动域（D），此外，我们有（a，b）$\in F^D$ 或（b，a）$\in F^D$（注意，我们必有 $a = b$ 或 $a \neq b$）。根据 $\widehat{\nu}$ 的定义，我们有 $\widehat{\nu}(z_{xy}) = w_{ab}$ 以及 $\widehat{\nu}(z_{yx}) = w_{ba}$。根据 $\widehat{D}$的定义，关系 $E^{\widehat{D}}$ 包含以下每个元组：（a，w_{ab}）、（w_{ab}，w_{ba}）、（w_{ba}，b）（无论是否 a=b）。此外，关系 W^D 包含 w_{ab}和 w_{ba}。最后，对于每个 $F \in \sigma_{|2}$，如果 $U_F(z_{xy})$（分别为 $U_F(z_{yx})$）是 Q的一个原子，我们知道 $F(x, y)$（分别为 $F(y, x)$）是 Q的一个原子，因此（a，b）$\in F^D$（分别为（b，a）$\in F^D$）。根据 $\widehat{D}$的定义，这意味着 $w_{ab} \in (U_F)^{\widehat{D}}$（分别为 $w_{ba} \in (U_F)^{\widehat{D}}$）。因此，$\widehat{Q}$ 中涉及 z_{xy} 或 z_{yx} 的所有原子均由 $\widehat{\nu}$正确处理。

总之，我们已经验证 $\widehat{\nu}$ 是从 Q 到 D的同态。因此，断言 (a) 中 4.9部分的证明完备。

(b)：令 $\widehat{\nu}$ 为从 Q 到 D的同态。

(i)：考虑 $\vec{G}(Q)$ 的任意一条边 (x, y)，并令 $a := \widehat{\nu}(x)$ 和 $b := \widehat{\nu}(y)$（注意，要么 $a = b$要么 $a \neq b$）。由于 $x, y \in$ 是 $\mathrm{vars}(Q)$，查询 Q 包含原子 $V(x)$ 和 $V(y)$。因此，根据 $\vec{}$的定义，我们有 $a, b \in$ 属于 $\mathrm{adom}(D)$。由于 (x, y) 是 $G(Q)$ 的一条边，我们知道 $x \neq y$，并且根据 Q的构造，查询 Q 包含原子 $W(z_{xy})$、$W(z_{yx})$、$E(x, z_{xy})$、$E(z_{xy}, z_{yx})$、$E(z_{yx}, y)$。由于 $\widehat{\nu}$是从 $\widehat{Q}$ 到 $\widehat{D}$的同态，对于 $c := \widehat{\nu}(z_{xy})$ 和 $d := \widehat{\nu}(z_{yx})$，关系 $W^{\widehat{D}}$ 包含 c 和 d、，而关系 E^D 包含以下每个元组：(a, c)、(c, d)、(d, b)（注意，要么 $c = d$要么 $c \neq d$）。根据 $\widehat{D}$的定义，$W^{\widehat{D}}$ 中的每个元素恰好有一个属于 $W^{\widehat{D}}$ 的邻居，以及恰好有一个邻居属于 $\mathrm{adom}(D)$；而 (a, c)、(c, d)、$(d, b) \in E^D$ 必然意味着 $c = w_{ab}$ 和 $d = w_{ba}$（参见图 1）。因此，我们有：$\widehat{\nu}(z_{xy}) = w_{ab}$ 以及 $\widehat{\nu}(z_{yx}) = w_{ba}$。

现在，考虑任意一个 $x \in S$，并令 $a := \widehat{\nu}(x)$。由于 $x \in \mathrm{vars}(Q)$，查询 Q 包含原子 $V(x)$。因此，根据 D 的定义，我们有 $a \in \mathrm{adom}(D)$。由于 $x \in S$，按照 Q的构造，查询 Q 包含原子 $W(z_{xx})$、$E(x, z_{xx})$、$E(z_{xx}, z_{xx})$。由于 $\widehat{\nu}$是从 Q到 $\widehat{D}$的同态，对于 $c := \widehat{\nu}(z_{xx})$，我们有 $c \in W^{\widehat{D}}$，且关系 $E^{\widehat{D}}$ 包含元组 (a, c) 和 (c, c)。根据我们对 D的构造，只有形如 w_{bb} 的节点（其中某个 b 满足 $(b, b) \in \mathrm{T}'$）才会在 E^D中形成自环 (w_{bb}, w_{bb})；而特定节点 w_{aa} 是唯一一个与 a 相邻的此类节点，亦即满足 $(a, w_{aa}) \in E^D$。因此，$c = w_{aa}$。于是，我们有：$\widehat{\nu}(z_{xx}) = w_{aa}$。

这就完成了第(i) 项的证明，属于第(b)部分的断言 4.9。

(ii)：首先，考虑 Q 的任意一个一元原子 $X(x)$。根据构造， $X(x)$ 是 Q 的一个原子。因此，由于 ν 是从 Q 到 D的同态，对于 $a := \nu(x)$，我们有 a 属于 X^D。根据 D 的构造，我们有 $X^D = X^D$。因此，我们有：$\nu(x) = a \in X^D$。

接下来，考虑 Q 的任意一个形如 $F(x,x)$ 的原子。于是， $x \in S$，并且由 (i) 可得，$a := \nu(x) \in \mathrm{adom}(D)$ 且 $\nu(z_{xx}) = w_{aa}$。此外，根据构造， Q 包含原子 $U_F(z_{xx})$。因此，由于 ν 是从 Q 到 D的同态，我们有：$w_{aa} = \nu(z_{xx}) \in (U_F)^D$。根据 D 的构造，这意味着 $(a,a) \in F^D$。因此，我们有：$(\nu(x), \nu(x)) = (a,a) \in F^D$。

最后，考虑 Q 中任意一个形如 $F(u,v)$ 的原子，其中 $u, v \in \mathrm{vars}(Q)$ 且 $u \neq v$。那么， $G(Q)$ 盖夫曼图 Q 包含边 $\{u,v\}$，其有向版本 $G(Q)$ 则包含边 (u,v) 或边 (v,u)。

我们先考虑以下情况：令 $a := \nu(u)$， 且 $b := \nu(v)$。由第 (i) 项可得， $a, b \in \mathrm{adom}(D)$ 且 $\nu(z_{uv}) = w_{ab}$。根据构造， Q 包含原子 $U_F(z_{uv})$。因此，由于 ν 是从 Q 到 D 的同态，我们有 $w_{ab} = \nu(z_{uv}) \in (U_F)^D$。根据 D 的构造，我们有 $(a,b) \in F^D$。因此，我们有：$(\nu(u), \nu(v)) = (a,b) \in F^D$。

现在考虑以下情况：令 $a := \nu(v)$且 $b := \nu(u)$。根据第(i)项，我们得到 $a, b \in \mathrm{adom}(D)$以及 $\nu(z_{vu}) = w_{ab}$ 且 $\nu(z_{uv}) = w_{ba}$。根据构造， Q 包含原子 $U_F(z_{uv})$（因为 Q 包含原子 $F(u,v)$）。因此，由于 ν是从 Q到 D的同态，我们有$w_{ba} = \nu(z_{uv}) \in (U_F)^D$。根据 D的构造，我们有（b,a） $\in F^D$。因此，我们有：（$\nu(u)$, $\nu(v)$） $\in F^D$。

总之，我们已经证明 ν 是从 Q 到 D的同态。这就完成了断言 (ii)的第 (b) 部分的证明，该断言为 4.9。最后，断言4.9 的证明也已完成。 □

C 第 5.2 节省略的细节5.2

C.1 引理 5.2 的证明5.2

引理 *5.2*。映射 ν: *vars(Q)* $\to$ *adom(D)* 是从 Q 到 D 的同态，当且仅当，对于每个 $x \in vars(Q)$，都有 $\supseteq \lambda_x nl(\nu(x))$，并且对于 $G(Q)$ 的每条边 $\{x, y\}$，都有 $\{\nu(x), \nu(y)\} \in E$。

证明。“⟹”：设 ν: $\mathrm{vars}(Q) \to \mathrm{adom}(D)$ 是从 Q 到 D的同态。我们需要证明

(1) $\mathrm{nl}(\nu(x)) \supseteq \lambda_x$，对于每个 $x \in \mathrm{vars}(Q)$，以及

(2) $\{\nu(x), \nu(y)\} \in E$ 对于 $G(Q)$

的每条边$\{x, y\}$。

考虑一个变量 $x \in \mathrm{vars}(Q)$。根据定义， $\lambda_x = \{ U \in \bar{\sigma} : U(x) \in \mathrm{atoms}(Q) \}$。因此，考虑 $U \in \lambda_x$；我们需要证明 $U \in \mathrm{nl}(\nu(x))$。由于 $U(x) \in \mathrm{atoms}(Q)$，且 ν 是一个同态，因此必有 $(\nu(x)) \in U^D$。根据 $\bar{G}$的定义，$(\nu(x)) \in U^D$ 意味着 $U \in \mathrm{nl}(\nu(x))$。这证明了(1)成立。

考虑 $G(Q)$的一条边$\{x, y\}$。那么， $E(x,y) \in \mathrm{atoms}(Q)$或 $E(y,x) \in \mathrm{atoms}(Q)$必定成立（也可能两者都成立）。由于 ν 是一个同态，这意味着$(\nu(x), \nu(y)) \in E^D$或$(\nu(y), \nu(x)) \in E^D$ 中至少有一个为 true。因此，根据 G 的定义，有 $\{\nu(x), \nu(y)\} \in E$。这证明了 (2) 成立。

“⟸”：设 ν: $\mathrm{vars}(Q)$ $\to$ 活动域(D) 是一个满足以下条件的赋值。

(1) $\mathrm{nl}(\nu(x)) \supseteq \lambda_x$，对于每个 $x \in \mathrm{vars}(Q)$，以及

(2) $\{\nu(x), \nu(y)\} \in E$ 对于 $G(Q)$

的每条边 $\{x, y\}$。

我们必须证明，ν 是从 $\bar{Q}$ 到 $\bar{D}$ 的同态，即对于所有原子 $R(x_1, \ldots\ldots, x_r) \in \text{atoms}(Q)$，都有 $(\nu(x_1), \ldots\ldots, \nu(x_r)) \in R^D$。回忆一下，根据定义，$\bar{\sigma}$ 由单个二元符号 E、一元符号 L 以及可能存在的其他一元符号组成。因此，我们只需区分可能出现在 Q 中的两种原子形式——一元和二元。

考虑 atoms(Q) 中的一个二元原子 $E(x, y)$。于是，$x, y \in \text{vars}(Q)$，根据 Q 的定义，我们有 $x \neq y$.那么，$\{x, y\}$ 必须是 $G(Q)$ 的一条边，并且根据 (2)，我们知道 $\{\nu(x), \nu(y)\} \in E$。根据定义，当且仅当 $(\nu(x), \nu(y)) \in E^D$ 或 $(\nu(y), \nu(x)) \in E^D$ 时，这是种情况。由于 E^D 是对称的，这意味着无论哪种情况，$(\nu(x), \nu(y)) \in E^D$。

考虑 atoms(Q) 中的一个一元原子 $U(x)$。于是，$x \in \text{vars}(Q)$。由于 x 是 $G(Q)$ 的一个节点，集合 λ_x 根据定义包含符号 U，而 (1) 推出 $U \in \text{nl}(\nu(x))$ 也成立。将对 $\bar{G}$ 的 nl 定义代入，可得 $(\nu(x)) \in U^D$。引理 5.2 的证明至此完成。□

C.2 第 5.2 节结果的基本观察

观察 C.1。对于每种颜色 $c \in C$，以及每个 $u \in D$ 的活动域，若 $\text{col}(u) = c$，则有：$\{U : (c) \in U^{D_{\text{col}}}\} = \text{nl}(u)$。

证明。这显然可由以下事实推出：根据定义，$(c) \in U^{D_{\text{col}}}$ 当且仅当存在一个 $v \in \bar{D}$ 的活动域，其中 $\text{col}(v) = c$ 且 $(v) \in U^D$。此外，$(v) \in U^D$ 当且仅当 $U \in \text{nl}(v)$。最后，着色 col 细化了 nl，即对于所有 u，$v \in D$ 的活动域，若 $\text{col}(u) = \text{col}(v)$，则有 $\text{nl}(u) = \text{nl}(v)$。□

推论 C.2。映射 ν：变量集(Q) → 活动域(D) 是从 Q 到 D 的同态，当且仅当：

(1) 对所有 $x \in$ 变量集(Q)，我们有：$\lambda_x \subseteq \text{nl}(\nu(x))$，并且

(2) 对所有 $x \in \text{vars}(\bar{Q})$ *with* $x \neq x_1$ *we have:* $\nu(x) \in N(\nu(y), d)$, *where* $y = p(x)$ *and* $d = \text{col}(\nu(x$

证明。 条件 (1) 与引理 5.2中的条件相同。剩下只需证明条件 (2) 等价于引理 5.2中的以下条件 (2)：$\nu(x), \nu(y)\} \in E$ 对于 $\{x, y\}$ 的每条边 $G(Q)$。

注意，$\{x, y\}$ 是 $G(Q)$ 中的一条边，当且仅当 $x = \text{p}(y)$ 或 $y = \text{p}(x)$ 成立。因此，引理 5.2 的条件 (2) 成立，当且仅当对于每个满足 $x \neq x_1$ 且 $y = \text{p}(x)$ 的 $x \in$ 变量集(Q)，都有 $\{\nu(x), \nu(y)\} \in E$。

根据定义，$\{\nu(x), \nu(y)\} \in E$ 成立，当且仅当 $\nu(x) \in N(\nu(y), \text{col}(\nu(x)))$。因此，引理 5.2 的条件 (2) 成立，当且仅当对于每个满足 $x \neq x_1$ 且 $y = \text{p}(x)$ 的 $x \in$ 变量集(Q)，都有 $\nu(x) \in N(\nu(y), \text{col}(\nu(x)))$；这等价于推论 C.2 的第 (2) 项。由此完成推论 C.2 的证明。□

引理 *C.3.* 设 μ: *vars(Q)* → C 是从 Q 到 D_{col}的同态。对于每个不是 T的 $x \in$ *vars(Q)* 叶节点的变量集，对于每个 $v \in V$ 满足 *col(v)* $= \mu(x)$ 的 $v \in V$，以及每个 $z \in$ *ch(x)*，我们都有：$N(v, d) \neq \emptyset$ 对于 $d := \mu(z)$。

证明。 令 $x \in \text{vars}(Q)$ 满足 $ch(x) \neq \emptyset$。令 $z \in ch(x)$。令 $c := \mu(x)$ 且 $d := \mu(z)$。令 $v \in V$ 满足$\text{col}(v) = \mu(x) = c$。

由 $z \in \text{ch}(x)$ 可知，atoms(Q) 至少包含原子 $E(x, z)$ 和 $E(z, x)$ 中的一个。由于μ是从 $\bar{Q}$到 D_{col}的同态，这意味着 $(\mu(x), \mu(z)) \in E^{D_{\text{col}}}$或 $(\mu(z), \mu(x)) \in E^{D_{\text{col}}}$。即，$(c, d) \in E^{D_{\text{col}}}$或 $(d, c) \in E^{D_{\text{col}}}$成立。由于 $E^{D_{\text{col}}}$是对称的，这意味着 $\#(c, d) > 0$在任何情况下都为真。这意味着，对于每个 $u \in V$ 满足 $\text{col}(u) = c$ 的 $u \in V$，我们都有 $N(u, d) \neq \emptyset$。特别地，这得到$N(v, d) \neq \emptyset$。引理 C.3 的证明至此完成。□

引理 C.4。设 μ：变量集(Q)→ C和 ν：变量集(Q)→ V为映射，使得对于所有 $x \in$变量集(Q)，均有

(a) $\text{col}(\nu(x)) = \mu(x)$, *and*

(b) $x = x_1$ 或 $\nu(x) \in N(\nu(y), d)$ 其中 $y = p(x)$ 和 $d = \mu(x)$。

那么，μ 是从 Q 到 D_{col} 的同态，当且仅当 ν 是从 Q 到 D的同态。

证明。“$\Rightarrow$”：我们利用推论 C.2 验证 ν 是从 Q 到 D的同态：

(1)：令 $x \in \text{vars}(Q)$，并令 $\nu(x) = u$ 且 $\mu(x) = c$。我们必须证明$\text{nl}(u) \supseteq \lambda_x$。由于 μ 是从 $\bar{Q}$ 到 D_{col}的同态，因此对于 A，有 $\lambda_x \subseteq A := \{U : (c) \in U^{D_{\text{col}}}\}$。根据(a)，由于$\text{col}(u) = c$，由观察 C.1 可得 $A = \text{nl}(u)$。因此，$\lambda_x \subseteq \text{nl}(u)$。

(2)：这可直接由(b)和(a)得出。

“$\Leftarrow$”：首先，考虑 atoms($\bar{Q}$) 中任意一个一元原子 $U(x)$。我们必须证明 $(\mu(x)) \in U^{D_{\text{col}}}$。由于 ν 是从 $\bar{Q}$ 到 $\bar{D}$的同态，因此有 $(\nu(x)) \in U^D$，即 $U \in \text{nl}(\nu(x))$。利用 (a) 和观察 C.1 可得 $(\mu(x)) \in U^{D_{\text{col}}}$。

现在，考虑 atoms($\bar{Q}$) 中任意一个二元原子 $E(x, y)$。我们必须证明 $(\mu(x), \mu(y)) \in E^{D_{\text{col}}}$。由于 ν 是从 $\bar{Q}$ 到 $\bar{D}$的同态，因此有 $(\nu(x), \nu(y)) \in E^D$。令 $c := \text{col}(\nu(x))$，且 $d := \text{col}(\nu(y))$。于是，根据 D_{col} 的定义，有 $(c, d) \in E^{D_{\text{col}}}$。由 (a) 可知，$\mu(x) = c$ 且 $\mu(y) = d$，由此可得 $(\mu(x), \mu(y)) \in E^{D_{\text{col}}}$。

这就完成了引理的证明C.4。 □

C.3 引理 5.3 的证明5.3

引理 5.3。如果 Q 是一个布尔查询，那么 $[\![Q]\!](D) = [\![\bar{Q}]\!](\bar{D}) = [\![\bar{Q}]\!](D_{\text{col}})$。

证明。根据 $\bar{D}$ 和 $\bar{Q}$ 的定义，我们已经知道 $[\![Q]\!](D) = [\![\bar{Q}]\!](\bar{D})$。接下来，我们证明 $[\![\bar{Q}]\!](\bar{D}) = [\![\bar{Q}]\!](D_{\text{col}})$。

首先，考虑 $[\![\bar{Q}]\!](\bar{D}) =$ 为真的情形。那么，存在一个同态 ν: $\text{vars}(\bar{Q}) \to \bar{V}$，它从 $\bar{Q}$ 映射到 D。令 μ: $\text{vars}(Q) \to C$ 由 $\mu(x) := \text{col}(\nu(x))$定义，其中对所有 $x \in \text{vars}(Q)$均成立。然后，根据推论 C.2，映射 μ 和 ν 满足引理 C.4的条件(a)和(b)。因此，由引理 C.4可得，μ 是从 $\bar{Q}$ 到 D_{col}的同态。即，我们有 $[\![\bar{Q}]\!](D_{\text{col}}) =$ 为真。

现在，考虑 $[\![\bar{Q}]\!](D_{\text{col}}) =$ 为真的情形。那么，存在一个同态 μ: $\text{vars}(\bar{Q}) \to C$，从 $\bar{Q}$ 到 D_{col}。现在，我们可以结合引理 C.4 和引理 C.3，按如下方式得到一个同态 ν: $\text{vars}(Q) \to V$，从 Q 到 D。对 T进行一次自顶向下遍历。对于根节点 r，在 V中任意选取一个颜色为 $\text{col}(v) = \mu(r)$ 的节点 v，并令 $\nu(r) := v$。在归纳步骤中，我们考虑 T的一条边 (y, x)；根据归纳假设，我们已经选取了一个颜色为 $\mu(y)$ 的节点 $v = \nu(y) \in V$。令 $d := \mu(x)$。由引理 C.3 可知，存在一个节点 $v' \in N(v, d)$。我们任意选取这样一个节点 v'，并令 $\nu(x) := v'$。现在可以验证，此映射 ν 满足引理 C.4 的条件 (a) 和 (b)。因此，由引理 C.4 可得，ν 是从 $\bar{Q}$ 到 $\bar{D}$的一个同态。因此，$[\![\bar{Q}]\!](\bar{D}) =$ 为真。引理 5.3 的证明至此完成。□

C.4 引理5.4 的证明

对于接下来的两个引理，考虑一个固定的 $\bar{c} := (c_1, \ldots, c_k) \in [\![\bar{Q}]\!](D_{\text{col}})$，以及一个固定同态$\mu$: $\text{vars}(\bar{Q}) \to C$ 从 $\bar{Q}$ 到 D_{col}，它见证了 $\bar{c} \in [\![\bar{Q}]\!](D_{\text{col}})$，即对于所有 $i \in [k]$，都有 $\mu(x_i) = c_i$。

对于 $l \in [k]$，如果一个l元组 $(v_1, \ldots, v_\ell) \in$属于 $\text{adom}(\bar{D})^\ell$，且与 $\bar{c} = (c_1, \ldots, c_k)$ 一致，则称其为

1. 对所有 $i \in [l]$ 列$(v_i) = c_i$，并且

2. 对所有 $j < i$，若 $\{x_i, x_j\}$ 是 $G(Q)$ 中的一条边，则有 $v_i \in N(v_j, c_i)$。

注意，对于每个 $v_1 \in \text{adom}(D)$，(v_1)都与 $\bar{c}$ 一致，且列$(v_1) = c_1$。

引理 C.5. 令 $l \in [k-1]$，令 $(v_1, \ldots, v_\ell)$与 $\bar{c}$一致，且令 $x_j = p(x_{\ell+1})$。那么，对于所有 $v_{\ell+1} \in N(v_j, c_{\ell+1})$，$(v_1, \ldots, v_\ell, v_{\ell+1})$都与 $\bar{c}$一致。

证明。令 $v_{\ell+1} \in N(v_j, c_{\ell+1})$。我们需要证明 $(v_1, \ldots, v_\ell, v_{\ell+1})$ 与 $\bar{c}$一致。

令 $i \in [l+1]$。显然，$i \neq l+1$ 则 $v_i \in N(v_j, c_i)$ 成立。令 $i = l+1$，因为根据假设 $\{x_j, x_i\}$ 是 $G(Q)$ 中的一条边，则 x_j 是 x_i 的唯一父节点，因为 $G(Q)$ 是无环的，即 $x_j = p(x_i)$。根据 $v_i = v_{\ell+1}$ 的选取，我们有：$v_i \in N(v_j, c_i)$。综上，$(v_1, \ldots, v_\ell, v_{\ell+1})$ 与 $\bar{c}$一致。□

引理 C.6。对于每个 $l \in [k]$ 以及每个 l 元组 $\bar{v} \in \bar{V}^\ell$，以下结论成立：

$\bar{v}$ 与 $\bar{c} \iff \bar{v}$ 是 Q 在 D 上、颜色为 $\bar{c}$的一个部分输出一致。

证明。“⇒”：令 $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_\ell) \in \bar{V}^\ell$ 与 $\bar{c}$一致。我们证明一个更强的陈述：存在一个同态 ν: vars$(Q) \to V$，从 Q到 D，使得对所有 $i \in [l]$，都有 $\nu(x_i) = v_i$；并且对所有 $z \in$ vars(Q)，都有 col$(\nu(z)) = \mu(z)$。由此可直接推出，$(v_1, \ldots, v_\ell)$ 是 Q在 D上、颜色为 $\bar{c}$的一个部分输出。

我们按照 vars(Q) 上的序 $<$来定义 ν（这对应于对 T的边进行一次自顶向下遍历）。对于所有 $i \in [l]$,，令 $\nu(x_i) := v_i$。现在考虑满足以下条件的 $z \in$ vars(Q)：对每个 $i \in [l]$，都有 $z \neq x_i$，但我们已经考虑过 $y =$ p(z)，即已经选取了满足 col$(\nu(y)) = \mu(y)$ 的 $\nu(y)$。令 $u := \nu(y)$，并令 $d := \mu(z)$。由于 μ是从 Q到 D_{col}的同态，根据引理 C.3 可知 $N(u, d)$ 非空。任取一个 $w \in N(u, d)$，并令 $\nu(z) := w$。显然，col$(\nu(w)) = d = \mu(z)$。

以这种方式考察所有变量后，ν 满足引理 C.4 中的条件 (a) 和 (b)。因此，根据引理 C.4 可得，ν 是从 Q 到 D的同态。

“⇐”：设 $(v_1, \ldots, v_\ell)$ 是 Q在 D上、颜色为 $\bar{c}$的一个部分输出。我们需要证明它与 $\bar{c}$一致。显然，对于所有 $i \in [l]$，col$(v_i) = c_i$。设 $j < i$满足 $\{x_j, x_i\}$ 是 $G(Q)$ 中的一条边。由于 $(v_1, \ldots, v_\ell)$ 是 Q 在 D 上、颜色为 $\bar{c}$的一个部分输出，因此存在一个同态 ν，从 Q到 D，使得 $\nu(x_i) = v_i$且 $\nu(x_j) = v_j$。注意，$x_j =$p(x_i) 且 col$(v_i) = c_i$。由于 ν是一个同态，根据推论 C.2(2)，可得 $v_i \in N(v_j, c_i)$ 成立。总之，这表明 $\bar{v}$与 $\bar{c}$一致。引理 C.6 的证明至此完成。□

引理 5.4。

(a) 对于每个 $(v_1, \ldots, v_k) \in [\![\bar{Q}]\!](\bar{D})$，我们有 $(col(v_1), \ldots, col(v_k)) \in [\![\bar{Q}]\!](D_{\text{col}})$。*(b)* 对所有 $\bar{c} = (c_1, \ldots, c_k) \in [\![\bar{Q}]\!](D_{\text{col}})$，以及每个满足 $col(v_1) = c_1$ 的 $v_1 \in$ 活动域$(\bar{D})$，(v_1) 都是 Q 在 D 上、颜色为 $\bar{c}$ 的部分输出。此外，若 $(v_1, \ldots, v_i)$ 是 Q 在 D 上、颜色为 $\bar{c}$ 的部分输出，且 $x_j = p(x_{i+1})$，则对于每个 $v_{i+1} \in N(v_j, c_{i+1})$，$N(v_j, c_{i+1}) \neq \emptyset$，并且 $(v_1, \ldots, v_i, v_{i+1})$ 是 Q 在 D 上、颜色为 $\bar{c}$ 的部分输出。

证明。

(a) 由于 $(v_1, \ldots\ldots, v_k) \in [\![\bar{Q}]\!](\bar{D})$，存在一个同态 ν: vars$(\bar{Q}) \to \bar{V}$从 $\bar{Q}$到 $\bar{D}$，使得 $\nu(x_i) = v_i$ 对所有 $i \in [k]$均成立。令 μ: vars$(Q) \to C$，满足 $\mu(x) =$ 颜色$(\nu(x))$，对所有 $x \in$ vars(Q) 均成立。利用推论C.2，我们可以将引理 C.4 应用于 μ 和 ν。因此，μ 是一个同态，见证了 (颜色(v_1)，……，颜色$(v_k)) \in [\![\bar{Q}]\!](D_{\text{col}})$。

(b) 对于每个 $v_1 \in$ 活动域(D) 满足 颜色$(v_1) = c_1$的元组 (v_1) 与 $\bar{c}$ 一致，因此，根据引理C.6，它是 Q 在 D 上颜色为 $\bar{c}$的部分输出。

如果（v_1，…，v_i）是 Q在 D上、颜色为 $\bar{c}$的部分输出，那么根据引理 C.6，元组（v_1，…，v_i）与 $\bar{c}$一致。令$x_j =$p（x_{i+1}）。由于（v_1，…，v_i）是 Q在 D上、颜色为 $\bar{c}$的部分输出，根据引理 C.3，我们得到 N（v_j，c_{i+1}）$\neq \emptyset$。根据引理 C.5，对于每个$v_{i+1} \in N$（v_j，c_{i+1}），元组（v_1，…，v_i，v_{i+1}）都与 $\bar{c}$一致；应用引理 C.6，我们得到（v_1，…，v_i，v_{i+1}）同样是 Q在 D上、颜色为 $\bar{c}$的部分输出。□

C.5 引理5.5 的证明

Le ¯**引理 5.5**。 对于所有 $(c,\ v) \in C \times V$ 满足 $c =$ 颜色(v)，以下结论对所有 $x \in V(T)$ 均成立：

¯*(a)* $f_{\downarrow}(c, x)$ 是映射 ν 的数量：满足 $\nu(x) = v$ 且满足以下条件的 $V(T_x) \to V$：对于每个 $x' \in V(T_x)$，我们有 $nl(\nu(x')) \supseteq \lambda_{x'}$；并且¯*(2)* 对于 T_x 中的每条边 $\{x', y'\}$，我们有 $\{\nu(x'), \nu(y')\} \in E$；

¯*(b)* 对于所有 $y \in ch(x)$，值 $g(c, y)$ 是映射 ν：$\{x\} \cup V(T_y) \to V$ 的数量，其中 $\nu(x) = v$，并且 *(1)* 对于每个 $x' \in V(T_y)$，我们有 $\mathsf{nl}(\nu(x')) \supseteq \lambda_{x'}$；并且¯*(2)* 对于 T_x 中的每条边 $\{x', y'\}$，其中 $x', y' \in \{x\} \cup V(T_y)$，我们有 $\{\nu(x'),\ \nu(y')\} \in E$。

证明。 证明通过对树 T 自底向上进行归纳。

¯基本情形：令 $v \in V$，令 $c =$ col(v)，并令 x 为 T 的一个叶节点。由于 ch$(x) = \emptyset$，因此 (b) 显然成立。¯为证明 (a)，注意到 $V(T_x) = \{x\}$ 且 $E(T_x) = \emptyset$。因此，只有一个映射 ν：$V(T_x) \to V$ with$\nu(x) = v$。当且仅当 nl$(\nu(x)) \supseteq \lambda_x$，即当且仅当 nl$(v) \supseteq \lambda_x$ 时，此映射 ν 满足 (a) 中所述的条件。由于 col$(v) = c =$ col(v_c)，根据观察 C.1 可得 nl$(v) =$ nl(v_c)。因此，当且仅当 nl$(v_c) \supseteq \lambda_x$ 时，此映射 ν 满足 (a) 中所述的条件；根据定义，这当且仅当$f_1(c, x) = 1$（否则，$f_1(c, x) = 0$）。由于 x 是 T 的一个叶节点，我们有 $f_{\downarrow}(c, x) = f_1(c, x)$。总之，这证明了 $f_{\downarrow}(c, x)$ 恰好等于满足 (a) 中所述条件的映射 ν 的数量。

¯归纳步骤：设 $x \in V(T)$ 是 T 的一个内部节点，设 $c \in C$，并设 $v \in V$ 且 col$(v) = c$。

¯归纳假设：对于每个 $y \in ch(x)$、每个 $d \in C$ 以及每个满足 col$(w) = d$ 的 $w \in V$，值 $f_{\downarrow}(d, y)$ ¯是映射 ν 的数量：$V(T_y) \to V$，满足 $\nu(y) = w$ 且

(1) 对于每个 $x' \in V(T_y)$，我们都有 nl$(\nu(x')) \supseteq \lambda_{x'}$，并且

¯(2) 对于 T_y 中的每条边 $\{x', y'\}$，我们都有 $\{\nu(x'), \nu(y')\} \in E$。

我们首先证明以下断言 C.7，它对应于引理的陈述 (b).

¯**断言 C.7**。 对于每个 $y \in ch(x)$，值 $g(c, y)$ 是映射 ν 的数量：$\{x\} \cup V(T_y) \to V$，满足$\nu(x) = v$，并且

(1) 对于每个 $x' \in V(T_y)$，都有 nl$(\nu(x')) \supseteq \lambda_{x'}$，并且

¯(2) 对于 T_y 中的每条边 $\{x', y'\}$，都有 $\{\nu(x'), \nu(y')\} \in E$，并且

¯(3) 有 $\{\nu(x), \nu(y)\} \in E$。 ⌟

证明。由于每个被考虑的映射 ν 都必须将 x 映射到 v，每个子节点 $y \in$ ch(x) 都必须映射到满足 $\{v, w\} \in E$ 的某个 w¯ ¯，根据 (3)，也就是说，我们知道 y 必须映射到 D 中 v 的某个邻居 w。为此，对于任意 $c' \in C$，任何 $w \in N(v, c')$ 都是有效选择，也就是说，对于所有$c' \in C$，w 有 $|N(v, c')| = \#(c, c')$ 种选择。以这种方式选定一个 w 并令 $\nu(y) = w$ 后，我们可以使用归纳假设，得到映射剩余变量且满足 $\nu(y) = w$ 以及 (1) 和 (2) 的可用选择数，即 $f_{\downarrow}(\text{col}(w), y)$。因此，被考虑的映射 ν 总数为 $\sum_{c' \in C} f_{\downarrow}(c', y) \cdot \#(c, c')$，根据定义，这等于 $g(c, y)$。由此完成断言 C.7 的证明。■

接下来，我们使用断言 C.7 来证明以下断言C.8，它对应于引理的陈述 (a) .

¯**断言 C.8**。 $f_{\downarrow}(c,\ x)$ 是满足 $\nu(x) = v$ 且符合以下条件的映射 ν：$V(T_x) \to V$ 的数量：

(1) 对于每个 $x' \in V(T_x)$，都有 $\mathsf{nl}(\nu(x')) \supseteq \lambda_{x'}$，并且

(2) 对于 T_x 中的每条边 $\{x', y'\}$，都有 $\{\nu(x'), \nu(y')\} \in E$。 ⌟

证明。与基本情形相同，我们可以看出，所考虑的映射数量 ν 为 0，除非$f_{\mathsf{I}}(c, x)$ 为 1。如果 $f_{\mathsf{I}}(c, x)$ 为 1，那么根据 (2)，一个有效映射必须将每个 $y \in ch(x)$ 映射到 v 的一个邻居w 。

因此，对于每个 $y \in \mathsf{ch}(x)$，若将映射限制在 $\{x\} \cup V(T_y)$ 上，则每个所考虑的映射都必须满足断言 C.7 的要求 (1)–(3)。另一方面，对于 $y \in \mathsf{ch}(x)$，这些树 T_y 仅在节点 x 处相交。因此，我们可以将每个满足这些要求的子节点 y' 的映射 $\nu' : \{x\} \cup V(T_{y'}) \to V$，与每个其他满足这些要求的子节点 y'' 的映射 $\nu'' : \{x\} \cup V(T_{y''})$ 组合起来，最终得到一个满足断言 C.8 的条件 (1) 和 (2) 的映射 ν 。根据断言 C.7，这意味着当 $f_{\mathsf{I}}(c, x)$ 为 1 时，我们总共得到 $\prod_{y \in \mathsf{ch}(x)} g(c, y)$ 种 ν 的选择；当 $f_{\mathsf{I}}(c, x)$ 为 0 时，则有 0 种选择，这恰好就是$f_{\downarrow}(c, x)$。至此，断言 C.8 的证明完成。 ■

总之，这 完成了归纳步骤的证明。因此，引理 5.5 的证明完备。 □

D 第 6 节中省略的细节 6

本节将使用 [38] 中的记号，并假设读者已熟悉这些记号。对于所有$\bar{p} \in \mathbf{\Pi}$（$\mathbf{D}$），令

$$N_{\bar{p}} \coloneqq \left\{ \bar{q} \in \mathbf{\Pi}(\mathbf{D}) \,:\, \mathrm{set}(\bar{q}) \subseteq \mathrm{set}(\bar{p}) \text{ or } \mathrm{set}(\bar{q}) \supseteq \mathrm{set}(\bar{p}) \right\} \quad \text{and}$$
$$M_{\bar{p}} \coloneqq \left\{ \bar{c} \in \mathbf{D} \,:\, \bar{p} \in \mathbf{\Pi}(\bar{c}) \right\}.$$

为证明定理 6.1 ，我们证明以下着色 g D' 基于 CR 对 $\mathcal{H}_D$ 的着色是稳定的。令 h 为 CR 在 $\mathcal{H}_D$ 上生成的稳定着色，并令 n_h 为 h 所使用的颜色数。根据[38, 定理 3.6 和第 3 节。2] 我们知道，h 限制在 $\{ w_{\bar{a}} : \bar{a} \in \mathbf{D}\}$ 上是 $\mathcal{G}_D$上的稳定着色。我们定义 g 如下：

1. 对所有 $\bar{a} \in \mathbf{D}$，令 $g(w_{\bar{a}}) \coloneqq h(w_{\bar{a}})$。
2. 对于所有 $\bar{s} \in \mathsf{S}(\mathbf{D})$，令 $g(v_{\bar{s}}) \coloneqq h(v_{\bar{s}})$。
3. 对于所有 $\bar{p} \in \mathbf{\Pi}(\mathbf{D}) \setminus \mathsf{S}(\mathbf{D})$，令$g(v_{\bar{p}}) \coloneqq \Big(\mathsf{stp}(\bar{p}),\ \{\!\{ (\mathsf{stp}(\bar{c}, \bar{p}),\ h(w_{\bar{c}})) : \bar{c} \in M_{\bar{p}} \}\!\}\Big)$。

令 n_g 为 g 使用的颜色数。本节的主要目标是证明 g 是 D'的稳定着色，即证明以下内容：

引理 D.1。

1. 对于所有 $\bar{a}, b \in \mathbf{D}$，若 $g(w_{\bar{a}}) = g(w_{\bar{b}})$，则有

$$\{\!\{ (\mathsf{stp}(\bar{a}, \bar{p}), g(v_{\bar{p}})) \,:\, \bar{p} \in \mathbf{\Pi}(\bar{a}) \}\!\} = \{\!\{ (\mathsf{stp}(\bar{b}, \bar{p}), g(v_{\bar{p}})) \,:\, \bar{p} \in \mathbf{\Pi}(\bar{b}) \}\!\}.$$

2. 对所有 $\bar{s}$、$\bar{t} \in \mathcal{S}(\mathbf{D})$满足 $g(v_{\bar{s}}) = g(v_{\bar{t}})$的情形，都有

(a) $\{\!\{ (\mathsf{stp}(\bar{c}, \bar{s}), g(w_{\bar{c}})) \,:\, \bar{c} \in M_{\bar{s}} \}\!\} = \{\!\{ (\mathsf{stp}(\bar{c}, \bar{t}), g(w_{\bar{c}})) \,:\, \bar{c} \in M_{\bar{t}} \}\!\}$, *and*

(b) $\{\!\{ (\mathsf{stp}(\bar{s}, \bar{p}'), g(v_{\bar{p}'})) \,:\, \bar{p}' \in N_{\bar{s}} \}\!\} = \{\!\{ (\mathsf{stp}(\bar{t}, \bar{p}'), g(v_{\bar{p}'})) \,:\, \bar{p}' \in N_{\bar{t}} \}\!\}$.

3. 对所有 $\bar{p}$、$\bar{q} \in \mathbf{\Pi}(\mathbf{D}) \setminus \mathcal{S}(\mathbf{D})$ 满足 $g(v_{\bar{p}}) = g(v_{\bar{q}})$ 的情形，都有

(a) $\{\!\{ (\mathrm{stp}(\bar{c}, \bar{p}), g(w_{\bar{c}})) : \bar{c} \in M_{\bar{p}} \}\!\} = \{\!\{ (\mathrm{stp}(\bar{c}, \bar{q}), g(w_{\bar{c}})) : \bar{c} \in M_{\bar{q}} \}\!\}$，以及

(b) $\{\!\{ (\mathrm{stp}(\bar{p}, \bar{p}'), g(v_{\bar{p}'})) : \bar{p}' \in N_{\bar{p}} \}\!\} = \{\!\{ (\mathrm{stp}(\bar{q}, \bar{p}'), g(v_{\bar{p}'})) : \bar{p}' \in N_{\bar{q}} \}\!\}$。

由于 h 和限制在 $\{ w_{\bar{a}} : \bar{a} \in \mathrm{D} \}$ 上的 g 等价于 RCR 在 D 上产生的着色，因此很容易看出 $n_h \in O(|C_R|)$；又由于 g 在 D' 上是稳定的，所以有 $n_g \in O(|C_R|)$——为看出这一点，注意对于任意两个元组 $\bar{a}$、$\bar{b}$，若 $g(w_{\bar{a}}) = g(w_{\bar{b}})$，则 $\mathbf{\Pi}(\bar{a})$ 和 $\mathbf{\Pi}(\bar{b})$ 必须以相同方式着色。由于对于所有 $\bar{a} \in \mathrm{D}$，$|\mathbf{\Pi}(\bar{a})| \leqslant 2^{O(k \log k)}$，因此可得 $n_g \leqslant |C_R| + |C_R| \cdot 2^{O(k \log k)}$。由于 $k = \mathrm{ar}(\sigma)$ 且 σ 固定，因子 $2^{O(k \log k)}$ 可视为常数，从而得到 $n_g = O(|C_R|)$。最后，使用标准方法（例如参见 [9]），可以将 g 转换为 D 的一种稳定着色，其颜色数为 $O(n_g)$。因此，由于在 D 上运行 CR 会产生 D 的最粗稳定着色，这就证明了定理 6.1。于是，要证明定理 6.1，剩下的唯一工作就是证明引理 D.1。本节余下部分将用于证明引理 D.1。

我们知道以下结论成立，因为h 是 CR 在 H_D 上生成的着色：

事实 *D.2.* 对所有满足 $h(w_{\bar{a}}) = h(w_{\bar{b}})$ 的 $\bar{a}, \bar{b} \in D$，都有 $stp(\bar{a}) = stp(\bar{b})$；并且对所有满足 $h(v_{\bar{s}}) = h(v_{\bar{t}})$ 的 $\bar{s}, \bar{t} \in S(D)$，都有 $stp(\bar{s}) = stp(\bar{t})$。

我们知道以下结论成立，因为h 在 G_D 和 H_D 上是稳定的：

事实 D.3. 对于所有满足 $h(w_{\bar{a}}) = h(w_{\bar{b}})$ 的 $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbf{D}$，以下结论成立：

1. 存在一个双射 $\beta_{\bar{a},\bar{b}} : \{ \bar{c} \in D : stp(\bar{a}, \bar{c}) \neq \emptyset \} \to \{ \bar{d} \in D : stp(\bar{b}, \bar{d}) \neq \emptyset \}$，使得对于所有满足 $stp(\bar{a}, \bar{c}) \neq \emptyset$ 且满足 $\bar{d} := \beta_{\bar{a},\bar{b}}(\bar{c})$ 的 $\bar{c} \in D$，都有

(a) $h(w_{\bar{c}}) = h(w_{\bar{d}})$ 和

(b) $\mathrm{stp}(\bar{a}, \bar{c}) = \mathrm{stp}(\bar{b}, \bar{d})$;

2. 且存在一个双射 $\tilde{\beta}_{\bar{a},\bar{b}} : \mathcal{S}(\bar{a}) \to \mathcal{S}(\bar{b})$，使得对于所有满足 $\bar{t} := \tilde{\beta}_{\bar{a},\bar{b}}(\bar{s})$ 的 $\bar{s} \in \mathcal{S}(\bar{a})$，均有

(a) $h(v_{\bar{s}}) = h(v_{\bar{t}})$ 和

(b) $\mathrm{stp}(\bar{a}, \bar{s}) = \mathrm{stp}(\bar{b}, \bar{t})$。

事实 D.4. 对于所有满足 $h(v_{\bar{s}}) = h(v_{\bar{t}})$ 的 $\bar{s}, \bar{t} \in \mathcal{S}(\mathbf{D})$，都存在一个双射 $\tilde{\beta}_{\bar{s},\bar{t}} : M_{\bar{s}} \to M_{\bar{t}}$，使得对于所有满足 $\bar{d} := \tilde{\beta}_{\bar{s},\bar{t}}(\bar{c})$ 的 $\bar{c} \in M_{\bar{s}}$，均有

1. $h(w_{\bar{c}}) = h(w_{\bar{d}})$ 且 *2.*

$\mathrm{stp}(\bar{c}, \bar{s}) = \mathrm{stp}(\bar{d}, \bar{t})$。

利用这些事实，我们已经能够证明引理 D.1 的 (2a) 和 (3a) 部分：

命题 D.5。 (a) 对于所有 $\bar{s}, \bar{t} \in \mathrm{S}(\mathbf{D})$，若 $g(v_{\bar{s}}) = g(v_{\bar{t}})$，则有

$$\{\!\{ (\mathrm{stp}(\bar{c}, \bar{s}), g(w_{\bar{c}})) : \bar{c} \in M_{\bar{s}} \}\!\} = \{\!\{ (\mathrm{stp}(\bar{c}, \bar{t}), g(w_{\bar{c}})) : \bar{c} \in M_{\bar{t}} \}\!\}.$$

(b) 对于所有满足 $g(v_{\bar{p}}) = g(v_{\bar{q}})$ 的 $\bar{p}, \bar{q} \in \mathbf{\Pi}(\mathbf{D}) \setminus \mathrm{S}(\mathbf{D})$，均有

$$\{\!\{ (\mathrm{stp}(\bar{c}, \bar{p}), g(w_{\bar{c}})) : \bar{c} \in M_{\bar{p}} \}\!\} = \{\!\{ (\mathrm{stp}(\bar{c}, \bar{q}), g(w_{\bar{c}})) : \bar{c} \in M_{\bar{q}} \}\!\}.$$ 」

证明。 (a) 这可由事实 D.4 得出，因为根据定义， $g(v_{\bar{x}}) = h(v_{\bar{x}})$ 对于所有 $\bar{x} \in \mathbf{D} \cup \mathcal{S}(\mathbf{D})$。

(b) 这直接由 g 在 $\mathbf{\Pi}(\mathbf{D}) \setminus \mathrm{S}(\mathbf{D})$ 上的定义得出。 □

为了证明引理 D.1的其余部分，我们需要一些技术引理：

引理 D.6. 对于所有 $\bar{a} \in \mathbf{D}$ 以及所有 $\bar{p}, \bar{p}' \in \mathbf{\Pi}(\bar{a})$，均有：$\mathrm{stp}(\bar{a}, \bar{p}) = \mathrm{stp}(\bar{a}, \bar{p}') \iff \bar{p} = \bar{p}'$。

证明。“⇐=”显然成立。对于“⟹”，令 $(a_1, \ldots, a_k) = \bar{a}, (p_1, \ldots, p_\ell) = \bar{p}, (p'_1, \ldots, p'_{\ell'}) = \bar{p}'$，并假设 $\mathrm{stp}(\bar{a}, \bar{p}) = \mathrm{stp}(\bar{a}, \bar{p}')$。对于每个 $j \in [\mathrm{l}]$，都存在一个 $i \in [k]$，使得 $(i, j) \in \mathrm{stp}(\bar{a}, \bar{p}) = \mathrm{stp}(\bar{a}, \bar{p}')$，因此 $p_j = a_i = p'_j$。于是，$\mathrm{l}' \geqslant \mathrm{l}$ 且 $p'_j = p_j$ 对所有 $j \leqslant \mathrm{l}$ 都成立。此外，特别地，对于 $j = \mathrm{l}'$，我们知道存在一个 $i \in [k]$，使得 $(i, \mathrm{l}') \in \mathrm{stp}(\bar{a}, \bar{p}')$，也就是说，$(i, \mathrm{l}') \in \mathrm{stp}(\bar{a}, \bar{p})$ 也必定成立。这意味着 $\mathrm{l} \geqslant \mathrm{l}'$，因此 $\mathrm{l} = \mathrm{l}'$ 且 $\bar{p} = \bar{p}'$。□

引理 *D.7*。对于所有 $\bar{a}, b \in D$，我们有：$stp(\bar{a}) = stp(b)$ 当且仅当存在一个双射 $\pi_{\bar{a},\bar{b}}$: $\mathbf{\Pi}(\bar{a}) \to \mathbf{\Pi}(b)$，使得对于所有 $\bar{p} \in \mathbf{\Pi}(\bar{a})$，我们有 $stp(\bar{a}, \bar{p}) = stp(b, \pi_{\bar{a},\bar{b}}(\bar{p}))$。

证明。令 $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ 和 $b = (b_1, \ldots, b_\ell)$ 对于 $k, \mathrm{l} \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$。

“⇐=”：根据假设，存在一个双射 $\pi_{\bar{a},\bar{b}}$：$\mathbf{\Pi}(\bar{a}) \to \mathbf{\Pi}(b)$，使得 $\mathrm{stp}(\bar{a}, \bar{p}) = \mathrm{stp}(b, \pi_{\bar{a},\bar{b}}(\bar{p}))$ 对所有 $\bar{p} \in \mathbf{\Pi}(\bar{a})$ 均成立。

考虑任意切片 $\bar{t}'$，满足 $\bar{t}' \in \mathrm{S}(b)$ 且集合$(\bar{t}')$ =集合(b)（显然，这样的切片存在）。特别地，存在一个 $j \in [\text{元数}(\bar{t}')]$，使得 $b_\ell = t'_j$，因此 $(\mathrm{l}, j) \in \mathrm{stp}(\bar{b}, \bar{t}')$。令 $\bar{s}' := \pi^{-1}_{\bar{a},\bar{b}}(\bar{t}')$，并

注意，根据 $\pi_{\bar{a}}$ 的选择，$\bar{b}$ 我们有 $\mathrm{stp}(\bar{a}, \bar{s}') = \mathrm{stp}(b, \bar{t}')$。因此，由 $(\mathrm{l}, j) \in \mathrm{stp}(b, \bar{t}')$ 可得 $(\mathrm{l}, j) \in \mathrm{stp}(\bar{a}, \bar{s}')$，从而 $k \geqslant \mathrm{l}$。

现在，任取一个满足 $\mathrm{set}(\bar{s}) =$ $= \pi_{\bar{a}\,\bar{b}}$ $\pi_{\bar{a}\,\bar{b}}\mathrm{set}(\bar{a})$ 的切片 $\bar{s} \in \mathrm{S}(\bar{a})$。令 $\bar{t} :, (\bar{s})$。根据 的选取，我们有 $\mathrm{stp}(\bar{a}, \bar{s}) = \mathrm{stp}(b, \bar{t})$。由 $\mathrm{set}(\bar{s}) = \mathrm{set}(\bar{a})$ 和 $\bar{s} \in \mathrm{S}(\bar{a})$，可得对于每个 $i \in [k]$，恰好存在一个 $j_i \in [\mathrm{ar}(\bar{s})]$，使得 $(i, j_i) \in \mathrm{stp}(\bar{a}, \bar{s})$。由 $\mathrm{stp}(\bar{a}, \bar{s}) = \mathrm{stp}(b, \bar{t})$ 可得，对于每个 $i \in [k]$，都有 $(i, j_i) \in \mathrm{stp}(b, \bar{t})$。对于 $i = k$，这尤其意味着 $\mathrm{l} \geqslant k$。总之，我们证明了 $k = \mathrm{l}$。

最后，任取 i、$\hat{\imath} \in [k]$。我们有 $(i, \hat{\imath}) \in \mathrm{stp}(\bar{a}) \iff a_i = a_{\hat{\imath}} \iff j_i = j_{\hat{\imath}} \iff (i, j_i), (\hat{\imath}, j_{\hat{\imath}}) \in \mathrm{stp}(\bar{a}, \bar{s})$。由 $\mathrm{stp}(\bar{a}, \bar{s}) = \mathrm{stp}(b, \bar{t})$ 可得 $(i, j_i), (\hat{\imath}, j_{\hat{\imath}}) \in \mathrm{stp}(\bar{a}, \bar{s}) \iff (i, j_i), (\hat{\imath}, j_{\hat{\imath}}) \in \mathrm{stp}(b, \bar{t}) \iff b_i = t_{j_i} = b_{\hat{\imath}} \iff b_i = b_{\hat{\imath}} \iff (i, \hat{\imath}) \in \mathrm{stp}(b)$。

总之，我们得到 $\mathrm{stp}(\bar{a}) = \mathrm{stp}(b)$。这就完成了“⇐=”的证明。

“⟹”：根据假设，我们有 $\mathrm{stp}(\bar{a}) = \mathrm{stp}(b)$。由 [38, 引理 3.7(b)] 可得，$k = l$ 以及函数 β: $\mathrm{set}(\bar{a}) \to \mathrm{set}(b)$，其中 $\beta(a_i) := b_i$ 对所有 $i \in [k]$ 均有良好定义且为双射。对于任意形如 $(p_1, \ldots, p_n)$ 的 $\bar{p} \in \mathbf{\Pi}(\bar{a}) = \bar{p}$（特别地，$1 \leqslant n = \mathrm{ar}(\bar{p})$），我们令 $\pi_{\bar{a},\bar{b}}(\bar{p}) := (\beta(p_1), \ldots, \beta(p_n))$。

我们首先证明 $\pi_{\bar{a},\bar{b}}(\bar{p}) \in \mathbf{\Pi}(b)$：令 $\bar{q} := \pi_{\bar{a},\bar{b}}(\bar{p})$，即对于所有$i \in [n]$，有 $\bar{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ 和 $q_i = \beta(p_i)$。由于 $\bar{p} \in \mathbf{\Pi}(\bar{a})$，存在一个由两两不同的元素组成的元组 $(i_1, \ldots, i_n)$ 作为见证，即$\bar{p} = \pi_{(i_1,\ldots,i_n)}(\bar{a})$。这也意味着 $\bar{p} = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$，也就是说，$\bar{q} = (\beta(a_{i_1}), \ldots, \beta(a_{i_n})) = (b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}) = \pi_{(i_1,\ldots,i_n)}(b)$。因此，$\pi_{(i_1,\ldots,i_n)}(b)$ 见证了 $\bar{q} \in \mathbf{\Pi}(b)$。

接下来，我们证明 $\mathrm{stp}(\bar{a}, \bar{p}) = \mathrm{stp}(b, \bar{q})$：对于任意 $i \in [k]$ 和 $j \in [n]$，我们有 $(i, j) \in \mathrm{stp}(\bar{a}, \bar{p}) \iff a_i = p_j \iff \beta(a_i) = \beta(p_j) \iff b_i = q_j \iff (i, j) \in \mathrm{stp}(b, \bar{q})$。因此，我们有$\mathrm{stp}(\bar{a}, \bar{p}) = \mathrm{stp}(b, \bar{q})$。

总而言之，我们已经证明 $\pi_{\bar{a},\bar{b}}$ 是一个映射 $\pi_{\bar{a},\bar{b}}$：$\mathbf{\Pi}(\bar{a}) \to \mathbf{\Pi}(b)$，其满足 $\mathrm{stp}(\bar{a}, \bar{p}) = \mathrm{stp}(b, \pi_{\bar{a},\bar{b}}(\bar{p}))$，对于所有 $\bar{p} \in \mathbf{\Pi}(\bar{a})$。

接下来，我们证明 $\pi_{\bar{a},\bar{b}}$ 是单射：任取形式为 $(p_1, \ldots, p_n)$ 和 $(p'_1, \ldots, p'_m)$ 的 $\bar{p}, \bar{p}' \in \mathbf{\Pi}(\bar{a})$，使得 $\pi_{\bar{a},\bar{b}}(\bar{p}) = \pi_{\bar{a},\bar{b}}(\bar{p}')$。根据 $\pi_{\bar{a},\bar{b}}$的定义，我们有 $n = m$，且对所有 $i \in [n]$，$\beta(p_i) = \beta(p'_i)$。由于 β 是单射，我们得到对所有 $i \in [n]$，$p_i = p'_i$ 成立。因此，$\bar{p} = \bar{p}'$。于是，$\pi_{\bar{a},\bar{b}}$ 是单射。

接下来，我们证明 $\pi_{\bar{a},\bar{b}}$ 是满射：任取形式为 $(q_1,\ldots,q_n)$ 的 $\bar{q}\in\mathbf{\Pi}(b)$。令 $(i_1,\ldots,i_n)$ 为见证 $\bar{q}\in\mathbf{\Pi}(b)$ 的两两不同的指标，即 $\bar{q}=\pi_{(i_1,\ldots,i_n)}(b)$。对于 $i\in[n]$，令 $p_i:=\beta^{-1}(q_i)$，并令 $\bar{p}:=(p_1,\ldots,p_n)$。由于 $\bar{p}=(\beta^{-1}(b_{i_1}),\ldots,\beta^{-1}(b_{i_n}))=(a_{i_1},\ldots,a_{i_n})$，因此 $\pi_{(i_1,\ldots,i_n)}(\bar{a})=\bar{p}$ 成立。因此，$\bar{p}\in\mathbf{\Pi}(\bar{a})$。注意到 $\pi_{\bar{a},\bar{b}}(\bar{p})=\bar{q}$，即可得证。至此，“⟹”的证明以及引理 D.7 的证明均告完成。□

引理 D.8。设 $\bar{a}$，$b\in\mathbf{D}$ 具有 $\mathrm{stp}(\bar{a})=\mathrm{stp}(b)$，并设 $\pi_{\bar{a},\bar{b}}$ 根据引理 D.7 是一个双射。以下结论成立：

1. $\pi_{\bar{a},\bar{b}}$ 是唯一的，

2. 对所有 $\bar{p}\in\mathbf{\Pi}(\bar{a})$，均有 元数$(\bar{p})$ = 元数$(\pi_{\bar{a},\bar{b}}(\bar{p}))$ 且 $\mathrm{stp}(\bar{p})=\mathrm{stp}(\pi_{\bar{a},\bar{b}}(\bar{p}))$，并且

3. 对所有 $\bar{s}\in\mathcal{S}(\bar{a})$，均有 $\pi_{\bar{a},\bar{b}}(\bar{s})=\tilde{\beta}_{\bar{a},\bar{b}}(\bar{s})$，其中 $\tilde{\beta}_{\bar{a},\bar{b}}(\bar{s})$ 是事实 D.3(2) 中的双射。

证明。(1) 由引理 D.6得出。

接下来，我们证明 (2)。设 $\bar{p}\in\mathbf{\Pi}(\bar{a})$ 且 $\bar{q}=\pi_{\bar{a},\bar{b}}(\bar{p})$。对于 $i:=$元数$(\bar{p})$，必定存在一个 j_i 使得 $p_i=a_{j_i}$。也就是说，$(j_i,i)\in\mathrm{stp}(\bar{a},\bar{p})=\mathrm{stp}(b,\bar{q})$。因此，$b_{j_i}=q_i$，尤其是 $i\leqslant$元数$(\bar{q})$，即，元数$(\bar{p})\leqslant$元数$(\bar{q})$。用类似的推理可得，元数$(\bar{q})\leqslant$元数$(\bar{p})$：根据假设，$\bar{q}\in\mathbf{\Pi}(b)$。因此，特别是对于 $i:=$元数$(\bar{q})$，存在一个 j_i 使得 $q_i=b_{j_i}$。也就是说，$(j_i,i)\in\mathrm{stp}(b,\bar{q})=\mathrm{stp}(\bar{a},\bar{p})$。因此，$a_{j_i}=p_i$，尤其是$i\leqslant$元数$(\bar{p})$，即，元数$(\bar{q})\leqslant$元数$(\bar{p})$。这证明了元数$(\bar{p})$ = 元数$(\pi_{\bar{a},\bar{b}}(\bar{p}))$。

令 $(i,j)\in\mathrm{stp}(\bar{p})$，即 $p_i=p_j$。则存在一个 i'，使得 (i',i)、$(i',j)\in\mathrm{stp}(\bar{a},\bar{p})=\mathrm{stp}(b,\bar{q})$。因此，$b_{i'}=q_i=q_j$，即 $(i,j)\in\mathrm{stp}(\bar{q})$。因此，$\mathrm{stp}(\bar{p})\subseteq\mathrm{stp}(\bar{q})$。令 $(i,j)\in\mathrm{stp}(\bar{q})$，即 $q_i=q_j$。然后存在一个 i'，使得 (i',i)、$(i',j)\in\mathrm{stp}(b,\bar{q})=\mathrm{stp}(\bar{a},\bar{p})$。因此，$a_{i'}=p_i=p_j$，即 $(i,j)\in\mathrm{stp}(\bar{p})$。因此，$\mathrm{stp}(\bar{q})\subseteq\mathrm{stp}(\bar{p})$。

（3）由（1）以及根据 [38,第 88 页：8]所述的 $\pi_{\mathcal{S}}$ 的唯一性得出。□

引理 D.9. 设 $\bar{a},b\in\mathbf{D}$ 满足 $\mathrm{stp}(\bar{a})=\mathrm{stp}(b)$。若存在 $\bar{p}\in\mathbf{\Pi}(\bar{a})$，使得 $\bar{q}:=\pi_{\bar{a},\bar{b}}(\bar{p})$

$$\{\!\{(\mathrm{stp}(\bar{c},\bar{p}),g(w_{\bar{c}}))\,:\,\bar{c}\in M_{\bar{p}}\}\!\}\neq\{\!\{(\mathrm{stp}(\bar{c},\bar{q}),g(w_{\bar{c}}))\,:\,\bar{c}\in M_{\bar{q}}\}\!\}$$

那么，对于每个切片 $\bar{s}\in\mathcal{S}(\bar{a})$，若满足 集合$(\bar{s})$ =集合$(\bar{p})$ 且 $\bar{t}:=\pi_{\bar{a},\bar{b}}(\bar{s})$，则有

$$\{\!\{(\mathrm{stp}(\bar{c},\bar{s}),g(w_{\bar{c}}))\,:\,\bar{c}\in M_{\bar{s}}\}\!\}\neq\{\!\{(\mathrm{stp}(\bar{c},\bar{t}),g(w_{\bar{c}}))\,:\,\bar{c}\in M_{\bar{t}}\}\!\}.$$

证明。设 $\bar{p}\in\mathbf{\Pi}(\bar{a})$ 和 $\bar{q}:=\pi_{\bar{a},\bar{b}}(\bar{p})$ 满足

$$\{\!\{(\mathrm{stp}(\bar{c},\bar{p}),g(w_{\bar{c}}))\,:\,\bar{c}\in M_{\bar{p}}\}\!\}\neq\{\!\{(\mathrm{stp}(\bar{c},\bar{q}),g(w_{\bar{c}}))\,:\,\bar{c}\in M_{\bar{q}}\}\!\}.$$

那么，$\bar{p}\neq()$，因为 $M_{()}=\mathbf{D}$ 且 $\pi_{\bar{a},\bar{b}}(())=()$。

设 $\bar{p}=(p_1,\ldots\ldots,p_k)$，其中 $l:=|$集合$(\bar{p})|\geqslant 1$。设 $\bar{s}=(s_1,\ldots\ldots,s_\ell)\in\mathrm{S}(\bar{a})$ 是一个切片，满足集合$(\bar{p})$ =集合$(\bar{s})$；并设 $\beta:[k]\to[l]$ 是唯一映射，使得对所有 $i\in[k]$，都有 $p_i=s_{\beta(i)}$。

根据引理 D.8，元数$(\bar{p})$ =元数$(\bar{q})$，因此 $\bar{q}=(q_1,\ldots\ldots,q_k)$。设 $\bar{t}=\pi_{\bar{a},\bar{b}}(\bar{s})$。

断言。集合$(\bar{t})$ =集合$(\bar{q})$，并且对所有 $j\in[k]$，都有 $q_j=t_{\beta(j)}$。

命题证明：令 $j\in[k]$。选择 i 使得 $(i,j)\in\mathrm{stp}(\bar{a},\bar{p})$，这也意味着 $(i,j)\in\mathrm{stp}(b,\bar{q})$，即，$a_i=p_j$ 且 $b_i=q_j$。由于 $p_j=s_{\beta(j)}$，我们有 $(i,\beta(j))\in\mathrm{stp}(\bar{a},\bar{s})=\mathrm{stp}(b,\bar{t})$。因此，$b_i=t_{\beta(j)}$，即，$q_j=t_{\beta(j)}$。

由于 $\mathrm{img}(\beta)=[l]$,集合$(\bar{t})$ =集合$(\bar{q})$ 必须成立。■

我们知道存在一个 λ，使得

$$\{\!\{g(w_{\bar{c}})\,:\,\bar{c}\in M_{\bar{p}},\ \mathrm{stp}(\bar{c},\bar{p})=\lambda\}\!\}\neq\{\!\{g(w_{\bar{c}})\,:\,\bar{c}\in M_{\bar{q}},\ \mathrm{stp}(\bar{c},\bar{q})=\lambda\}\!\}.\tag{1}$$

因此，只需证明存在一个 λ'，使得

$$\{\!\{ g(w_{\bar{c}}) : \bar{c} \in M_{\bar{s}}, \mathrm{stp}(\bar{c}, \bar{s}) = \lambda' \}\!\} \neq \{\!\{ g(w_{\bar{c}}) : \bar{c} \in M_{\bar{t}}, \mathrm{stp}(\bar{c}, \bar{t}) = \lambda' \}\!\}.$$

令 $\lambda' := \{(i, \beta(j)) : (i, j) \in \lambda\}$。

断言。对于所有满足 $\mathrm{stp}(\bar{c}, \bar{p}) = \lambda$ 的 $\bar{c} \in M_{\bar{p}}$，我们有 $\bar{c} \in M_{\bar{s}}$，且 $\mathrm{stp}(\bar{c}, \bar{s}) = \lambda'$。类似地，对于所有满足 $\mathrm{stp}(\bar{c}, \bar{q}) = \lambda$ 的 $\bar{c} \in M_{\bar{q}}$，我们有 $\bar{c} \in M_{\bar{t}}$，且 $\mathrm{stp}(\bar{c}, \bar{t}) = \lambda'$。⌟

命题证明：显然，$\bar{s} \in \mathrm{S}(\bar{c})$，因为 $\bar{s}$ 是一个切片，且 $\mathrm{set}(\bar{s}) = \mathrm{set}(\bar{p})$。因此，只需证明 $\mathrm{stp}(\bar{c}, \bar{s}) = \lambda'$。容易看出 $\lambda' \subseteq \mathrm{stp}(\bar{c}, \bar{s})$：令 $(i, j) \in \lambda$，则 $(i, \beta(j)) \in \lambda'$。根据定义，$(i, j) \in \lambda$ 意味着 $c_i = p_j$。根据 β 的定义，我们有 $p_j = s_{\beta(j)}$，即 $c_i = s_{\beta(j)}$。因此，$(i, \beta(j)) \in \mathrm{stp}(\bar{c}, \bar{s})$。

为证明 $\mathrm{stp}(\bar{c}, \bar{s}) \subseteq \lambda'$，令 $(i, j) \in \mathrm{stp}(\bar{c}, \bar{s})$。也就是说，$c_i = s_j$。由于 $\mathrm{set}(\bar{s}) = \mathrm{set}(\bar{p})$，必定存在一个 $j' \in [k]$ 使得 $p_{j'} = s_j$。因此，$j = \beta(j')$ 且 $c_i = p_{j'}$，根据定义，这意味着 $(i, j') \in \lambda$。根据 λ' 的定义，可得 $(i, \beta(j')) \in \lambda'$。由于 $j = \beta(j')$，我们得到 $(i, j) \in \lambda'$。

对于 $\bar{q}$ 和 $\bar{t}$，同理可得。 ■

断言。对于所有满足 $\mathrm{stp}(\bar{c}, \bar{s}) = \lambda'$ 的 $\bar{c} \in M_{\bar{s}}$，都有 $\bar{c} \in M_{\bar{p}}$ 且 $\mathrm{stp}(\bar{c}, \bar{p}) = \lambda$。同理，对于所有满足 $\mathrm{stp}(\bar{c}, \bar{t}) = \lambda'$ 的 $\bar{c} \in M_{\bar{t}}$，都有 $\bar{c} \in M_{\bar{q}}$ 且 $\mathrm{stp}(\bar{c}, \bar{q}) = \lambda$。⌟

命题证明：显然，集合$(\bar{p}) \subseteq$集合$(\bar{c})$。我们需要证明 $\mathrm{stp}(\bar{c}, \bar{p}) = \lambda$ 且 $\bar{p} \in \mathbf{\Pi}(\bar{c})$。

设 $(i, j) \in \mathrm{stp}(\bar{c}, \bar{p})$，即 $c_i = p_j$。由于 $p_j = s_{\beta(j)}$，我们有 $(i, \beta(j)) \in \mathrm{stp}(\bar{c}, \bar{s}) = \lambda'$。因此，存在一个 j'，使得 $(i, j') \in \lambda$ 且 $\beta(j') = \beta(j)$。这意味着 $p_j = s_{\beta(j)} = s_{\beta(j')} = p_{j'}$，即 $p_j = p_{j'}$。由 $(i, j') \in \lambda$ 和 $p_j = p_{j'}$，我们也可得 $(i, j) \in \lambda$。这证明了 $\mathrm{stp}(\bar{c}, \bar{p}) \subseteq \lambda$。

为证明“$\supseteq$”，考虑任意的 $(i, j) \in \lambda$。那么，$(i, \beta(j)) \in \lambda' = \mathrm{stp}(\bar{c}, \bar{s})$，也就是说，$c_i = s_{\beta(j)}$。由于 $p_j = s_{\beta(j)}$，这也意味着 $c_i = p_j$，也就是说，$(i, j) \in \mathrm{stp}(\bar{c}, \bar{p})$。因此，$\lambda \subseteq \mathrm{stp}(\bar{c}, \bar{p})$。总之，我们证明了 $\mathrm{stp}(\bar{c}, \bar{p}) = \lambda$。

还需证明 $\bar{p} \in \mathbf{\Pi}(\bar{c})$。注意，根据我们对 λ的选择，存在两两不同的指标m_1、……、m_k，使得对所有 $j \in [k]$都有$(m_j, j) \in \lambda$（这是因为根据方程(1)，存在一个 $\bar{c}' \in M_{\bar{p}}$（即 $\bar{p} \in \mathbf{\Pi}(\bar{c}')$），满足$\mathrm{stp}(\bar{c}', \bar{p}) = \lambda$；或者存在一个 $\bar{c}' \in M_{\bar{q}}$（即 $\bar{q} \in \mathbf{\Pi}(\bar{c}')$），满足$\mathrm{stp}(\bar{c}', \bar{q}) = \lambda$）。我们已经证明了$\mathrm{stp}(\bar{c}, \bar{p}) = \lambda$，因此得到$\bar{p} = \pi_{(m_1, \ldots, m_k)}(\bar{c})$，也就是说，$\bar{p} \in \mathbf{\Pi}(\bar{c})$。至此，断言的第一条陈述得证。

该断言的第二个陈述（即针对 $\bar{q}$ 和 $\bar{t}$的陈述）可以用类似的方法证明。 ■

结合最后两个断言，即完成了引理 D.9的证明。 □

现在我们可以证明引理D.1的第 (1) 部分：

命题 D.10. 对于所有 $\bar{a}, b \in \mathbf{D}$，满足 $g(w_{\bar{a}}) = g(w_{\bar{b}})$，且 $\pi_{\bar{a},\bar{b}}$ 是根据引理 D.7 得到的双射，以及每个满足 $\bar{q} := \pi_{\bar{a},\bar{b}}(\bar{p})$ 的 $\bar{p} \in \mathbf{\Pi}(\bar{a})$，都有 $g(v_{\bar{p}}) = g(v_{\bar{q}})$。特别地，这表明

$$\{\!\{ (\mathrm{stp}(\bar{a}, \bar{p}), g(v_{\bar{p}})) : \bar{p} \in \mathbf{\Pi}(\bar{a}) \}\!\} = \{\!\{ (\mathrm{stp}(\bar{b}, \bar{p}), g(v_{\bar{p}})) : \bar{p} \in \mathbf{\Pi}(\bar{b}) \}\!\}.$$ ⌟

证明。设 $\bar{a}, b \in \mathbf{D}$ 满足 $g(w_{\bar{a}}) = g(w_{\bar{b}})$。根据事实 D.2，我们知道 $\mathrm{stp}(\bar{a}) = \mathrm{stp}(b)$。设 $\pi_{\bar{a},\bar{b}}$ 是根据引理 D.7得到的双射。

反设存在 $\bar{p} \in \mathbf{\Pi}(\bar{a})$ 和 $\bar{q} := \pi_{\bar{a},\bar{b}}(\bar{p})$，使得 $g(v_{\bar{p}}) \neq g(v_{\bar{q}})$。如果 $\bar{p}$ 不是切片，即 $\bar{p} \in \mathbf{\Pi(D)} \setminus \mathrm{S}(\mathbf{D})$，那么根据定义，$g(v_{\bar{p}}) \neq g(v_{\bar{q}})$ 意味着 $\mathrm{stp}(\bar{p}) \neq \mathrm{stp}(\bar{q})$ 或

$$\{\!\{ (\mathrm{stp}(\bar{c}, \bar{p}), h(w_{\bar{c}})) : \bar{c} \in M_{\bar{p}} \}\!\} \neq \{\!\{ (\mathrm{stp}(\bar{c}, \bar{q}), h(w_{\bar{c}})) : \bar{c} \in M_{\bar{q}} \}\!\}.$$

根据引理 D.8(2)，我们知道 $\mathrm{stp}(\bar{p}) = \mathrm{stp}(\bar{q})$ 成立。因此，根据引理 D.9，存在一个切片 $\bar{s} \in \mathrm{S}(\bar{a})$，满足$\bar{t} := \pi_{\bar{a},\bar{b}}(\bar{s})$，使得

$$\{\!\{ (\mathrm{stp}(\bar{c}, \bar{s}), g(w_{\bar{c}})) : \bar{c} \in M_{\bar{s}} \}\!\} \neq \{\!\{ (\mathrm{stp}(\bar{c}, \bar{t}), g(w_{\bar{c}})) : \bar{c} \in M_{\bar{t}} \}\!\}.$$

由于引理 D.8(3) 得出 $\bar{t}$ 也是一个切片，$g(v_{\bar{s}}) \neq g(v_{\bar{t}})$ 根据命题 D.5(a) 必须成立。

因此，我们可以假设 $\bar{p}$ 和 $\bar{q}$ 是切片。根据引理 D.8(3)，由于 $\bar{q} = \tilde{\beta}_{\bar{a},\bar{b}}(\bar{p})$，且 $\mathrm{h}(v_{\bar{p}}) = g(v_{\bar{p}}) \neq g(v_{\bar{q}}) = \mathrm{h}(v_{\bar{q}})$，事实 D.3(2) 推出 $\mathrm{h}(w_{\bar{a}}) \neq \mathrm{h}(w_{\bar{b}})$ 必须成立。根据定义，这意味着 $g(w_{\bar{a}}) \neq g(w_{\bar{b}})$ 也必须成立。这与我们的假设 $g(w_{\bar{a}}) = g(w_{\bar{b}})$ 矛盾。命题 D.10 的证明到此完成。□

下面我们展示引理 D.1 的 (2b) 部分：

命题 D.11。对于所有 $\bar{s}$，$\bar{t} \in \mathrm{S}(\mathbf{D})$，若 $g(v_{\bar{s}}) = g(v_{\bar{t}})$，则有

$$\{\!\{ (\mathrm{stp}(\bar{s}, \bar{p}'), g(v_{\bar{p}'})) : \bar{p}' \in N_{\bar{s}} \}\!\} = \{\!\{ (\mathrm{stp}(\bar{t}, \bar{p}'), g(v_{\bar{p}'})) : \bar{p}' \in N_{\bar{t}} \}\!\}. \tag{2}$$

证明。根据假设，给定 $\bar{s}, \bar{t} \in \mathrm{S}(\mathrm{D})$，满足 $g(v_{\bar{s}}) = g(v_{\bar{t}})$，即 $\mathrm{h}(v_{\bar{s}}) = \mathrm{h}(v_{\bar{t}})$。考虑任意满足 $(\lambda, c) = (\mathrm{stp}(\bar{s}, \bar{p}), g(v_{\bar{p}}))$（对于某个 $\bar{p} \in N_{\bar{s}}$），或满足 $(\lambda, c) = (\mathrm{stp}(\bar{t}, \bar{q}), g(v_{\bar{p}}))$（对于某个 $\bar{q} \in N_{\bar{t}}$）的 λ 和 c。令

$$\begin{aligned} P_{\lambda,c} &:= \{ \bar{p} \in N_{\bar{s}} : (\mathrm{stp}(\bar{s}, \bar{p}), g(v_{\bar{p}})) = (\lambda, c) \}, \\ Q_{\lambda,c} &:= \{ \bar{p} \in N_{\bar{t}} : (\mathrm{stp}(\bar{t}, \bar{p}), g(v_{\bar{p}})) = (\lambda, c) \}. \end{aligned}$$

注意，为了证明方程 (2)，只需证明 $|P_{\lambda,c}| = |Q_{\lambda,c}|$。

下面考虑 $(\lambda, c) = (\mathrm{stp}(\bar{s}, \bar{p}), g(v_{\bar{p}}))$（对于某个 $\bar{p} \in N_{\bar{s}}$）的情形，即已知 $P_{\lambda,c} \neq \emptyset$ 的情形（已知 $Q_{\lambda,c} \neq \emptyset$ 的情形可类似处理）。

根据 $N_{\bar{s}}$ 的定义，我们知道 $\bar{p} \in N_{\bar{s}}$ 意味着以下两种情况之一：$\mathrm{set}(\bar{p}) \subseteq \mathrm{set}(\bar{s})$，或 $\mathrm{set}(\bar{p}) \supseteq \mathrm{set}(\bar{s})$。因此，$\lambda$ 要么要求所有满足 $\lambda = \mathrm{stp}(\bar{s}, \bar{p})$ 的 $\bar{p} \in N_{\bar{s}}$ 都满足 $\mathrm{set}(\bar{p}) \subseteq \mathrm{set}(\bar{s})$，要么要求所有满足 $\lambda = \mathrm{stp}(\bar{s}, \bar{p})$ 的 $\bar{p} \in N_{\bar{s}}$ 都满足 $\mathrm{set}(\bar{p}) \supseteq \mathrm{set}(\bar{s})$。

情形 *1*：λ 要求对于所有满足 $\lambda = \mathrm{stp}(\bar{s}, \bar{p})$ 的 $\bar{p}$，均有 $\mathrm{set}(\bar{p}) \supseteq \mathrm{set}(\bar{s})$。

注意，对于所有 $\bar{p}$，$\bar{p}' \in P_{\lambda,c}$ 和 $\bar{q}$，$\bar{q}' \in Q_{\lambda,c}$，我们有 $g(v_{\bar{p}}) = g(v_{\bar{p}'}) = g(v_{\bar{q}}) = g(v_{\bar{q}'})$，因此

$$\begin{aligned} &\{\!\{ (\mathrm{stp}(\bar{a}, \bar{p}), g(w_{\bar{a}})) : \bar{a} \in M_{\bar{p}} \}\!\} = \{\!\{ (\mathrm{stp}(\bar{a}', \bar{p}'), g(w_{\bar{a}'})) : \bar{a}' \in M_{\bar{p}'} \}\!\} \\ = &\{\!\{ (\mathrm{stp}(\bar{b}, \bar{q}), g(w_{\bar{b}})) : \bar{b} \in M_{\bar{q}} \}\!\} = \{\!\{ (\mathrm{stp}(\bar{b}', \bar{q}'), g(w_{\bar{b}'})) : \bar{b}' \in M_{\bar{q}'} \}\!\} \end{aligned} \tag{3}$$

（如果 $\bar{p} \in \mathbf{\Pi}(\mathbf{D}) \setminus \mathrm{S}(\mathbf{D})$，则根据 g 的定义可得；如果 $\bar{p} \in \mathrm{S}(\mathbf{D})$，则由事实 D.4 可得）。

任取 λ' 和 d，使得元组 (λ', d) 包含在上述多重集中。对于 $\bar{p} \in P_{\lambda,c}$ 和 $\bar{q} \in Q_{\lambda,c}$，令

$$\begin{aligned} A_{\lambda',d}(\bar{p}) &:= \{ \bar{a} \in M_{\bar{p}} : (\mathrm{stp}(\bar{a}, \bar{p}), g(w_{\bar{a}})) = (\lambda', d) \}, \\ B_{\lambda',d}(\bar{q}) &:= \{ \bar{b} \in M_{\bar{q}} : (\mathrm{stp}(\bar{b}, \bar{q}), g(w_{\bar{b}})) = (\lambda', d) \}. \end{aligned}$$

由方程 (3) 可得，对于所有 $\bar{p}$，$\bar{p}' \in P_{\lambda,c}$ 以及所有 $\bar{q}$，$\bar{q}' \in Q_{\lambda,c}$，有

$$|A_{\lambda',d}(\bar{p})| = |A_{\lambda',d}(\bar{p}')| = |B_{\lambda',d}(\bar{q})| = |B_{\lambda',d}(\bar{q}')| =: \ell_{\lambda',d}, \tag{4}$$

并且显然，$l_{\lambda',d} \geqslant 1$。

断言。对于所有满足 $\bar{p} \neq \bar{p}'$ 的 $\bar{p}, \bar{p}' \in P_{\lambda,c}$，都有 $A_{\lambda',d}(\bar{p}) \cap A_{\lambda',d}(\bar{p}') = \emptyset$。

类似地，对于所有满足 $\bar{q} \neq \bar{q}'$ 的 $\bar{q}, \bar{q}' \in Q_{\lambda,c}$，都有 $B_{\lambda',d}(\bar{q}) \cap B_{\lambda',d}(\bar{q}') = \emptyset$。 ⌟

证明。设 $\bar{p}, \bar{p}' \in P_{\lambda,c}$。考虑任意一个 $\bar{a} \in A_{\lambda',d}(\bar{p})$。由于 $\bar{a} \in M_{\bar{p}}$，对于每个 $i \in \{1, \ldots, \mathrm{ar}(\bar{p})\}$，都存在一个 $j_i \in \{1, \ldots, \mathrm{ar}(\bar{a})\}$，使得 $p_i = a_{j_i}$，因此 $(j_i, i) \in \mathrm{stp}(\bar{a}, \bar{p}) = \lambda'$。

如果 $\bar{a}$ 也属于 $A_{\lambda',d}(\bar{p}')$，那么 $\mathrm{stp}(\bar{a}, \bar{p}') = \lambda'$ 意味着，对于每个 $i \in \{1, \ldots, \mathrm{ar}(\bar{p})\}$，$p'_i = a_{j_i} = p_i$。此外，我们知道 $g(v_{\bar{p}'}) = g(v_{\bar{p}})$，因此，特别地，$\mathrm{stp}(\bar{p}') = \mathrm{stp}(\bar{p})$，从而 $\mathrm{ar}(\bar{p}') = \mathrm{ar}(\bar{p})$。总之，$\bar{a} \in A_{\lambda',d}(\bar{p}) \cap A_{\lambda',d}(\bar{p}')$ 意味着 $\bar{p}' = \bar{p}$。这证明了该断言的第一部分。第二部分可以用类似的方法证明。■

由该断言以及方程（4）可得

$$\left|\bigcup_{\bar{p}\in P_{\lambda,c}} A_{\lambda',d}(\bar{p})\right| = |P_{\lambda,c}|\cdot\ell_{\lambda',d} \quad \text{and} \quad \left|\bigcup_{\bar{q}\in Q_{\lambda,c}} B_{\lambda',d}(\bar{q})\right| = |Q_{\lambda,c}|\cdot\ell_{\lambda',d}\,. \tag{5}$$

断言。存在一个 λ''，使得对于所有 $\bar{p}\in P_{\lambda,c}$、所有 $\bar{a}\in A_{\lambda',d}(\bar{p})$、所有 $\bar{q}\in Q_{\lambda,c}$，以及所有 $b\in B_{\lambda',d}(\bar{q})$，都有 $\lambda''=\mathsf{stp}(\bar{a},\bar{s})=\mathsf{stp}(b,\bar{t})$。⌟

证明。我们固定任意一个 $\bar{p}\in P_{\lambda,c}$ 以及任意一个 $\bar{a}\in A_{\lambda',d}(\bar{p})$，并令 $\lambda'':=\mathsf{stp}(\bar{a},\bar{s})$。由于我们处于情形 1，因此有 $\mathsf{set}(\bar{p})\supset\mathsf{set}(\bar{s})$。

现在，考虑任意一个 $\bar{p}'\in P_{\lambda,c}$ 以及任意一个 $\bar{a}'\in A_{\lambda',d}(\bar{p}')$。我们的目标是证明 $\mathsf{stp}(\bar{a}',\bar{s})=\lambda''$。

对于“⊇”，考虑任意元组 $(m,j)\in\lambda''$。那么，根据我们对 λ'' 的选择，我们有 $a_m=s_j$。由于 $\mathsf{set}(\bar{p})\supset\mathsf{set}(\bar{s})$，存在一个 $i\in[\text{元数}(\bar{p})]$ 使得 $s_j=p_i$。因此，$(j,i)\in\mathsf{stp}(\bar{s},\bar{p})=\lambda=\mathsf{stp}(\bar{s},\bar{p}')$，从而 $s_j=p'_i$。此外，$a_m=s_j=p_i$，因此 $(m,i)\in\mathsf{stp}(\bar{a},\bar{p})=\lambda'=\mathsf{stp}(\bar{a}',\bar{p}')$。所以，$a'_m=p'_i=s_j$，因此，$(m,j)\in\mathsf{stp}(\bar{a}',\bar{s})$。

对于“⊆”，考虑任意元组 $(m,j)\in\mathsf{stp}(\bar{a}',\bar{s})$。于是我们有 $a'_m=s_j$。由于 $\mathsf{set}(\bar{p}')\supset\mathsf{set}(\bar{s})$，因此存在一个 $i\in[\text{元数}(\bar{p}')]$ 使得 $s_j=p'_i$。因此，$(j,i)\in\mathsf{stp}(\bar{s},\bar{p}')=\lambda=\mathsf{stp}(\bar{s},\bar{p})$，从而 $s_j=p_i$。此外，$a'_m=s_j=p'_i$，因此 $(m,i)\in\mathsf{stp}(\bar{a}',\bar{p}')=\lambda'=\mathsf{stp}(\bar{a},\bar{p})$。于是，$a_m=p_i=s_j$，因此 $(m,j)\in\mathsf{stp}(\bar{a},\bar{s})=\lambda''$。这证明了对于所有 $\bar{p}'\in P_{\lambda,c}$ 以及所有 $\bar{a}'\in P_{\lambda',d}(\bar{p}')$，都有 $\mathsf{stp}(\bar{a}',\bar{s})=\lambda''$。

现在，考虑一个任意的 $\bar{q}\in Q_{\lambda,c}$ 以及任意的 $b\in B_{\lambda',d}(\bar{q})$ 我们的目标是证明 $\mathsf{stp}(b,\bar{t})=\lambda'$。对于“⊇”，考虑任意元组 $(m,j)\in\lambda''$。于是，根据我们对 λ'' 的选择，有 $a_m=s_j$。由于集合 $(\bar{p})\supset$集合$(\bar{s})$，存在一个 $i\in[\text{元数}(\bar{p})]$，使得 $s_j=p_i$。因此，$(j,i)\in\mathsf{stp}(\bar{s},\bar{p})=\lambda=\mathsf{stp}(\bar{t},\bar{q})$，从而 $t_j=q_i$。此外，$a_m=s_j=p_i$，因此 $(m,i)\in\mathsf{stp}(\bar{a},\bar{p})=\lambda'=\mathsf{stp}(b,\bar{q})$。于是，$b_m=q_i=t_j$，并且因此，$(m,j)\in\mathsf{stp}(b,\bar{t})$。

对于“⊆”，考虑任意元组 $(m,j)\in\mathsf{stp}(b,\bar{t})$。那么我们有 $b_m=t_j$。由于 $\mathsf{set}(\bar{q})\supset\mathsf{set}(\bar{t})$，存在一个 $i\in[\text{元数}(\bar{q})]$，使得 $t_j=q_i$。因此，$(j,i)\in\mathsf{stp}(\bar{t},\bar{q})=\lambda=\mathsf{stp}(\bar{s},\bar{p})$，从而 $s_j=p_i$。此外，$b_m=t_j=q_i$，因此 $(m,i)\in\mathsf{stp}(b,\bar{q})=\lambda'=\mathsf{stp}(\bar{a},\bar{p})$。于是，$a_m=p_i=s_j$，并且因此，$(m,j)\in\mathsf{stp}(\bar{a},\bar{s})=\lambda''$。这证明，对于所有 $\bar{q}\in Q_{\lambda,c}$ 以及所有 $b\in Q_{\lambda',d}(\bar{q})$，$\mathsf{stp}(b,\bar{t})=\lambda''$。■

根据前一个断言选择 λ''，并考虑这些集合

$$P'_{\lambda'',d} := \left\{\bar{a}\in M_{\bar{s}} : \left(\mathsf{stp}(\bar{a},\bar{s}),g(w_{\bar{a}})\right)=(\lambda'',d)\right\},$$
$$Q'_{\lambda'',d} := \left\{\bar{b}\in M_{\bar{t}} : \left(\mathsf{stp}(\bar{b},\bar{t}),g(w_{\bar{b}})\right)=(\lambda'',d)\right\}.$$

由事实 D.4可得

$$|P'_{\lambda'',d}| = |Q'_{\lambda'',d}|\,. \tag{6}$$

由上述断言可得

$$\bigcup_{\bar{p}\in P_{\lambda,c}} A_{\lambda',d}(\bar{p}) \subseteq P'_{\lambda'',d} \quad \text{and} \quad \bigcup_{\bar{q}\in Q_{\lambda,c}} B_{\lambda',d}(\bar{q}) \subseteq Q'_{\lambda'',d}\,. \tag{7}$$

断言。对于每个 $\bar{c}\in P'_{\lambda'',d}$，都存在一个 $\bar{p}'\in P_{\lambda,c}$，使得 $\bar{c}\in A_{\lambda',d}(\bar{p}')$。

类似地，对于每个 $d\in Q'_{\lambda'',d}$，都存在一个 $\bar{q}'\in Q_{\lambda,c}$，使得 $d\in B_{\lambda',d}(\bar{q}')$。⌟

证明。任取一个 $\bar{p}\in P_{\lambda,c}$ 和一个 $\bar{a}\in A_{\lambda',d}(\bar{p})$。因此，$\bar{p}\in\mathbf{\Pi}(\bar{a})$、$g(v_{\bar{p}})=c$、$g(w_{\bar{a}})=d$、$\mathsf{stp}(\bar{s},\bar{p})=\lambda$、$\mathsf{stp}(\bar{a},\bar{p})=\lambda'$，以及 $\mathsf{stp}(\bar{a},\bar{s})=\lambda''$。

考虑任意一个 $\bar{c} \in P'_{\lambda'',d}$，即 $\mathsf{stp}(\bar{c},\bar{s}) = \lambda''$ 且 $g(w_{\bar{c}}) = d$。注意，为了证明该断言的第一条陈述，只需找到一个 $\bar{p}' \in \mathbf{\Pi}(\bar{c})$，使得 $\mathsf{stp}(\bar{c},\bar{p}') = \lambda'$ 且 $g(^{v}\bar{p}') = c$ 且 $\mathsf{stp}(\bar{s},\bar{p}') = \lambda$。

根据命题D.10，以及 $g(w_{\bar{a}}) = g(w_{\bar{c}})$ 我们知道

$$\{\!\{ (\mathsf{stp}(\bar{a},\bar{q}'), g(v_{\bar{q}'})) : \bar{q}' \in \mathbf{\Pi}(\bar{a}) \}\!\} = \{\!\{ (\mathsf{stp}(\bar{c},\bar{q}'), g(v_{\bar{q}'})) : \bar{q}' \in \mathbf{\Pi}(\bar{c}) \}\!\}.$$

由于 $\bar{p} \in \mathbf{\Pi}(\bar{a})$ 且 $(\mathsf{stp}(\bar{a},\bar{p}), g(^{v}\bar{p})) = (\lambda', c)$，我们知道 (λ', c) 同时属于这两个多重集。因此，存在一个 $\bar{p}' \in \mathbf{\Pi}(\bar{c})$，使得 $\mathsf{stp}(\bar{c},\bar{p}') = \lambda'$ 且 $g(^{v}\bar{p}') = c$。剩下只需证明$\mathsf{stp}(\bar{s},\bar{p}') = \lambda$。

对于“$\subseteq$”，考虑一个元组 $(i,j) \in \mathsf{stp}(\bar{s},\bar{p}')$，即 $s_i = p'_j$。由于 $\bar{p}' \in \mathbf{\Pi}(\bar{c})$，存在一个 k使得 $p'_j = c_k$。因此，$(k,j) \in \mathsf{stp}(\bar{c},\bar{p}') = \lambda' = \mathsf{stp}(\bar{a},\bar{p})$，从而 $a_k = p_j$。此外，$s_i = p'_j = c_k$蕴含 $(k,i) \in \mathsf{stp}(\bar{c},\bar{s}) = \lambda'' = \mathsf{stp}(\bar{a},\bar{s})$。因此，$a_k = s_i$。总之，我们有 $s_i = a_k = p_j$，因而 $(i,j) \in \mathsf{stp}(\bar{s},\bar{p}) = \lambda$。这证明了 $\mathsf{stp}(\bar{s},\bar{p}') \subseteq \lambda$。

对于“$\supseteq$”，考虑一个元组 $(i,j) \in \lambda = \mathsf{stp}(\bar{s},\bar{p})$，即 $s_i = p_j$。由于 $\bar{p} \in \mathbf{\Pi}(\bar{a})$，存在一个 k使得$p_j = a_k$。因此，$(k,j) \in \mathsf{stp}(\bar{a},\bar{p}) = \lambda' = \mathsf{stp}(\bar{c},\bar{p}')$，从而 $c_k = p'_j$。此外，$s_i = p_j = a_k$意味着 $(k,i) \in \mathsf{stp}(\bar{a},\bar{s}) = \lambda'' = \mathsf{stp}(\bar{c},\bar{s})$。因此，$c_k = s_i$。总之，我们有 $s_i = c_k = p'_j$，从而 $(i,j) \in \mathsf{stp}(\bar{s},\bar{p}')$。这证明了 $\mathsf{stp}(\bar{s},\bar{p}') = \lambda$。

总之，我们已经证明了该断言的第一个陈述。

第二个陈述可以用类似的方法证明：考虑任意一个 $d \in Q'_{\lambda'',d}$，即 $\mathsf{stp}(d,\bar{t}) = \lambda''$ 且 $g(w_{\bar{d}}) = d$。注意，为了证明该断言的第二个陈述，只需找到一个 $\bar{q}' \in \mathbf{\Pi}(d)$，使得$\mathsf{stp}(d,\bar{q}') = \lambda'$ 且 $g(^{v}\bar{q}') = c$，并且 $\mathsf{stp}(\bar{t},\bar{q}') = \lambda$。

Fr根据引理 D.1(1)，我们已经证明了这一点，以及 $g(w_{\bar{a}}) = g(w_{\bar{d}})$ 我们知道

$$\{\!\{ (\mathsf{stp}(\bar{a},\bar{q}'), g(v_{\bar{q}'})) : \bar{q}' \in \mathbf{\Pi}(\bar{a}) \}\!\} = \{\!\{ (\mathsf{stp}(\bar{d},\bar{q}'), g(v_{\bar{q}'})) : \bar{q}' \in \mathbf{\Pi}(\bar{d}) \}\!\}.$$

由于 $\bar{p} \in \mathbf{\Pi}(\bar{a})$ 且 $(\mathsf{stp}(\bar{a},\bar{p}), g(^{v}\bar{p})) = (\lambda', c)$，我们知道（$\lambda'$，$c$）属于这两个多重集。因此，存在一个 $\bar{q}' \in \mathbf{\Pi}(d)$，使得 $\mathsf{stp}(d,\bar{q}') = \lambda'$ 且 $g(^{v}\bar{q}') = c$。剩下的就是证明$\mathsf{stp}(\bar{t},\bar{q}') = \lambda$。

对于“$\subseteq$”，考虑一个元组 $(i,j) \in \mathsf{stp}(\bar{t},\bar{q}')$，即 $t_i = q'_j$。由于 $\bar{q}' \in \mathbf{\Pi}(d)$，存在一个 k使得 $q'_j = d_k$。因此，$(k,j) \in \mathsf{stp}(d,\bar{q}') = \lambda' = \mathsf{stp}(\bar{a},\bar{p})$，从而 $a_k = p_j$。此外，$t_i = q'_j = d_k$意味着，因此 $(k,i) \in \mathsf{stp}(d,\bar{t}) = \lambda'' = \mathsf{stp}(\bar{a},\bar{s})$。因此，$a_k = s_i$。总之，我们有 $s_i = a_k = p_j$，从而 $(i,j) \in \mathsf{stp}(\bar{s},\bar{p}) = \lambda$。这证明了 $\mathsf{stp}(\bar{t},\bar{q}') \subseteq \lambda$。

对于“$\supseteq$”，考虑元组 $(i,j) \in \lambda = \mathsf{stp}(\bar{s},\bar{p})$，即 $s_i = p_j$。由于 $\bar{p} \in \mathbf{\Pi}(\bar{a})$，存在 k使得$p_j = a_k$。因此，$(k,j) \in \mathsf{stp}(\bar{a},\bar{p}) = \lambda' = \mathsf{stp}(d,\bar{q}')$，从而 $d_k = q'_j$。此外，$s_i = p_j = a_k$意味着 $(k,i) \in \mathsf{stp}(\bar{a},\bar{s}) = \lambda'' = \mathsf{stp}(d,\bar{t})$。因此，$d_k = t_i$。综上，我们有 $t_i = d_k = q'_j$，因此 $(i,j) \in \mathsf{stp}(\bar{t},\bar{q}')$。这证明了 $\mathsf{stp}(\bar{t},\bar{q}') = \lambda$。综上，我们已经证明了该断言的两个陈述。■

根据上述断言和方程（7），我们得到

$$\bigcup_{\bar{p} \in P_{\lambda,c}} A_{\lambda',d}(\bar{p}) = P'_{\lambda'',d} \quad \text{and} \quad \bigcup_{\bar{q} \in Q_{\lambda,c}} B_{\lambda',d}(\bar{q}) = Q'_{\lambda'',d}.$$

将其与方程（5）和（6）结合，我们得到

$$\ell_{\lambda',d} \cdot |P_{\lambda,c}| = |P'_{\lambda'',d}| = |Q'_{\lambda'',d}| = \ell_{\lambda',d} \cdot |Q_{\lambda,c}|.$$

由于 $l_{\lambda',d} \neq 0$，由此可得 $|P_{\lambda,c}| = |Q_{\lambda,c}|$。情形 1 的证明至此完成。

情况 2： λ对所有 $\bar{p}$（其中 $\lambda = \mathrm{stp}(\bar{s}, \bar{p})$）都强制要求 $\mathrm{set}(\bar{p}) \subseteq \mathrm{set}(\bar{s})$。

在这种情况下，λ和 $\bar{s}$完全确定 $\bar{p}$，以及 $|P_{\lambda,\ c}| = 1$和 $|Q_{\lambda,\ c}| \leqslant 1$。令 $\bar{p}$为 $P_{\lambda,\ c}$中的唯一元素，令 $n =$为 $\bar{p}$的元数，$r =$为 $\bar{s}$的元数，$=$为 $\bar{t}$的元数，并令 $i_1, \ldots, i_n \in [r]$满足 $\bar{p} = (p_1, \ldots, p_n) = (s_{i_1}, \ldots, s_{i_n})$。令 $\bar{q} = (q_1, \ldots, q_n) := (t_{i_1}, \ldots, t_{i_n})$。显然，$\mathrm{stp}(\bar{t}, \bar{q}) = \mathrm{stp}(\bar{s}, \bar{p}) = \lambda$。要完成情况 2 的证明，只需证明 $\bar{q} \in Q_{\lambda,\ c}$。也就是说，我们必须证明 $\bar{q} \in \mathbf{\Pi}(\mathbf{D})$，且 $g(v_{\bar{q}}) = c$。

固定任意一个 $\bar{a} \in M_{\bar{s}}$，并令 $\bar{b} := \tilde{\beta}_{\bar{s},\ \bar{t}}(\bar{a})$，其中 $\tilde{\beta}_{\bar{s},\ \bar{t}}$是事实 D.4 中的映射。从事实 D.4 可知，$\bar{b} \in M_{\bar{t}}$ 且 $h(w_{\bar{a}}) = h(w_{\bar{b}})$，并且 $\mathrm{stp}(\bar{a},\ \bar{s}) = \mathrm{stp}(\bar{b},\ \bar{t})$。

断言 D.12。 $\bar{q} \in \mathbf{\Pi}(\mathbf{D})$。此外，存在 $\bar{c},\ d \in \mathbf{D}$，使得 $h(w_{\bar{c}}) = h(w_{\bar{d}})$，且 $\bar{p} \in \mathbf{\Pi}(\bar{c})$，$\bar{q} \in \mathbf{\Pi}(d)$，以及 $\mathrm{stp}(\bar{c},\ \bar{p}) = \mathrm{stp}(d,\ \bar{q})$。⌟

证明。如果 $\bar{p} = ()$，那么 $\bar{q} = ()$，结论得证。如果 $\bar{p} \neq ()$，那么集合$(\bar{p}) \neq \emptyset$，我们按如下方式继续。根据假设，$\bar{p} \in \mathbf{\Pi}(\mathbf{D})$，也就是说，存在一个 $\bar{c} \in \mathbf{D}$，使得 $\bar{p} \in \mathbf{\Pi}(\bar{c})$。注意，集合$(\bar{p}) \subseteq$集合$(\bar{a}) \cap$集合$(\bar{c})$，因此$\mathrm{stp}(\bar{a}, \bar{c}) \neq \emptyset$。我们考虑事实 D.3(1) 中的映射 $\beta_{\bar{a},\bar{b}}$，并令 $d := \beta_{\bar{a},\bar{b}}(\bar{c})$。根据事实 D.3(1)，我们知道 $d \in \mathbf{D}$ 且 $h(w_{\bar{c}}) = h(w_{\bar{d}})$，并且 $\mathrm{stp}(\bar{a}, \bar{c}) = \mathrm{stp}(b, d)$。

由于 $\bar{p} = (p_1、\ \ldots\ldots、\ p_n) \in \mathbf{\Pi}(\bar{c})$，因此存在两两不同的指标 $k_1、\ \ldots\ldots、\ k_n \in \{1、\ \ldots\ldots、\ \mathrm{ar}(\bar{c})\}$，使得 $\bar{p} = (c_{k_1}、\ \ldots\ldots、\ c_{k_n})$。由于 $\mathrm{set}(\bar{p}) \subseteq \mathrm{set}(\bar{s}) \subseteq \mathrm{set}(\bar{a})$，因此存在指标 $l_1, \ldots\ldots,\ l_n \in \{1、\ \ldots\ldots、\ \mathrm{ar}(\bar{a})\}$，使得 $\bar{p} = (a_{\ell_1}、\ \ldots\ldots、\ a_{\ell_n})$。总之，我们有

$$\bar{p} = (s_{i_1}, \ldots, s_{i_n}) = (c_{k_1}, \ldots, c_{k_n}) = (a_{\ell_1}, \ldots, a_{\ell_n}) \qquad \text{and} \qquad \bar{q} = (t_{i_1}, \ldots, t_{i_n}).$$

对于所有 $\nu \in [n]$，我们都有 $c_{k_\nu} = a_{\ell_\nu}$，即 $(l_\nu, k_\nu) \in \mathrm{stp}(\bar{a}, \bar{c}) = \mathrm{stp}(b, d)$，因此 $d_{k_\nu} = b_{\ell_\nu}$。此外，对于所有 $\nu \in [n]$，我们都有 $s_{i_\nu} = a_{\ell_\nu}$，即 $(l_\nu, i_\nu) \in \mathrm{stp}(\bar{a}, \bar{s}) = \mathrm{stp}(b, \bar{t})$，因此 $t_{i_\nu} = b_{\ell_\nu}$。总之，这表明

$$\bar{q} = (t_{i_1}, \ldots, t_{i_n}) = (b_{\ell_1}, \ldots, b_{\ell_n}) = (d_{k_1}, \ldots, d_{k_n}).$$

由于 $d \in \mathbf{D}$ 和 $k_1, \ldots, k_n$ 是 $\{1, \ldots, \mathrm{ar}(d)\}$ 中的两两不同元素，因此这证明了 $\bar{q} \in \mathbf{\Pi}(d) \subseteq \mathbf{\Pi}(\mathbf{D})$。

为了完成断言的证明，我们必须证明 $\mathrm{stp}(\bar{c}, \bar{p}) = \mathrm{stp}(d, \bar{q})$。对于“$\subseteq$”，考虑一个任意元组 $(\mu, \nu) \in \mathrm{stp}(\bar{c}, \bar{p})$。也就是说，$c_\mu = p_\nu = s_{i_\nu} = c_{k_\nu} = a_{\ell_\nu}$。因此，$(l_\nu, \mu) \in \mathrm{stp}(\bar{a}, \bar{c}) = \mathrm{stp}(b, d)$。因此，$d_\mu = b_{\ell_\nu} = t_{i_\nu} = q_\nu$，即 $(\mu, \nu) \in \mathrm{stp}(d, \bar{q})$。这证明了 $\mathrm{stp}(\bar{c}, \bar{p}) \subseteq \mathrm{stp}(d, \bar{q})$。包含关系“$\supseteq$”可用类似方法证明。■

断言。 $g(v_{\bar{q}}) = c.$ ⌟

证明。设 $\bar{c}, d$ 根据断言 D.12 选取。由于 $h(w_{\bar{c}}) = h(w_{\bar{d}})$，必有 $\mathrm{stp}(\bar{c}) = \mathrm{stp}(d)$。设 $\pi_{\bar{c},\bar{d}}$为根据引理 D.7 得到的双射。由于根据引理 D.8(1)，$\pi_{\bar{c},\bar{d}}$是唯一的，因此必有 $\bar{q} = \pi_{\bar{c},\bar{d}}(\bar{p})$。由命题 D.10 可知，对于所有 $\bar{p}' \in \mathbf{\Pi}(\bar{c})$，$g(v_{\bar{p}'}) = g(v_{\pi_{\bar{c},\bar{d}}(\bar{p}')})$ 均成立。因此，特别地，$g(v_{\bar{p}}) = g(v_{\bar{q}})$，即 $g(v_{\bar{q}}) = c$。■

总之，由上述两个断言可得 $\bar{q} \in Q_{\lambda,\ c}$。因此，$|Q_{\lambda,\ c}| = 1 = |P_{\lambda,\ c}|$，情况 2 的证明也就完成了。命题 D.11 的证明至此完成。□

接下来需要证明引理D.1的第 (3b) 部分：

命题 D.13。 对于所有满足 $g(v_{\bar{p}}) = g(v_{\bar{q}})$ 的 $\bar{p}, \bar{q} \in \mathbf{\Pi}(\mathbf{D}) \setminus \mathrm{S}(\mathbf{D})$，均有

$$\{\!\{ (\mathrm{stp}(\bar{p}, \bar{p}'), g(v_{\bar{p}'})) : \bar{p}' \in N_{\bar{p}} \}\!\} = \{\!\{ (\mathrm{stp}(\bar{q}, \bar{p}'), g(v_{\bar{p}'})) : \bar{p}' \in N_{\bar{q}} \}\!\}.$$ ⌟

证明。 设 $\bar{p}, \bar{q} \in \mathbf{\Pi(D)} \setminus \mathrm{S}(\mathbf{D})$ 满足 $g(^{\nu}\bar{p}) = g(^{\nu}\bar{q})$。若 $\bar{p} = ()$，则 $\bar{q} = ()$ 也成立，结论得证。若 $\bar{p} \neq ()$，则按如下方式进行。

根据 g 的定义，$\mathrm{stp}(\bar{p}) = \mathrm{stp}(\bar{q})$ 成立，并且存在一个双射 $\delta\colon M_{\bar{p}} \to M_{\bar{q}}$，使得对于所有 $\bar{c} \in M_{\bar{p}}$，均有 $\mathrm{stp}(\bar{c}, \bar{p}) = \mathrm{stp}(\delta(\bar{c}), \bar{q})$，且 $\mathrm{h}(w_{\bar{c}}) = g(w_{\bar{c}}) = g(w_{\delta(\bar{c})}) = \mathrm{h}(w_{\delta(\bar{c})})$。选取 $\bar{a} \in M_{\bar{p}}$，并令 $b := \delta(\bar{a})$。选取一个切片 $\bar{s}$，使得 $\mathrm{set}(\bar{s}) = \mathrm{set}(\bar{p})$，并注意到 $\bar{s} \in \mathrm{S}(\bar{a})$。令 $\bar{t} := \pi_{\bar{a},\bar{b}}(\bar{s})$。注意，$\bar{\ }$有 $\mathrm{stp}(\bar{a}, \bar{s}) = \mathrm{stp}(b, \bar{t})$，且 $\mathrm{h}(v_{\bar{s}}) = \mathrm{h}(v_{\bar{t}})$。由命题 D.11 可知，存在一个双射$\delta'\colon N_{\bar{s}} \to N_{\bar{t}}$，使得对于所有满足 $\bar{q}' := \delta'(\bar{p}')$ 的 $\bar{p}' \in N_{\bar{s}}$，均有：

1. $\mathrm{stp}(\bar{s}, \bar{p}') = \mathrm{stp}(\bar{t}, \bar{q}')$，
以及 2. $g(^{\nu}\bar{p}') = g(^{\nu}\bar{q}')$。

断言。 集合$(\bar{t})$ = 集合$(\bar{q})$，且 $\mathrm{stp}(\bar{p}, \bar{s}) = \mathrm{stp}(\bar{q}, \bar{t})$。 ⌟

命题证明：集合$(\bar{s})$ =集合$(\bar{p})$ 意味着存在 r 和 $l_1, \ldots, l_r$，使得 $\bar{s} = (p_{\ell_1}, \ldots, p_{\ell_r})$，且集合$(\bar{p})$ ={ $p_{\ell_1}, \ldots, p_{\ell_r}$}。由 $\mathrm{stp}(\bar{p}) = \mathrm{stp}(\bar{q})$ 可得集合 $(\bar{q})$ ={ $q_{\ell_1}, \ldots, q_{\ell_r}$}。

另一方面，$\bar{s} \in \mathrm{S}(\bar{a})$ 意味着存在 $j_1, \ldots, j_r$，使得 $\bar{s} = (a_{j_1}, \ldots, a_{j_r})$。利用$\bar{\ }\mathrm{stp}(\bar{a}, \bar{s}) = \mathrm{stp}(b, \bar{t})$ 可得 $\bar{t} = (b_{j_1}, \ldots, b_{j_r})$。又由 $\bar{s} = (p_{\ell_1}, \ldots, p_{\ell_r})$ 可知 $p_{\ell_1} = a_{j_1}, \ldots, p_{\ell_r} = a_{j_r}$。利用 $\mathrm{stp}(\bar{p}, \bar{a}) = \mathrm{stp}(\bar{q}, b)$，可得 $q_{\ell_1} = b_{j_1}, \ldots, q_{\ell_r} = b_{j_r}$。将其与$\bar{t} = (b_{j_1}, \ldots, b_{j_r})$结合，可得 $\bar{t} = (q_{\ell_1}, \ldots, q_{\ell_r})$。特别地，我们得到 $\mathrm{set}(\bar{t}) = \{q_{\ell_1}, \ldots, q_{\ell_r}\} = \mathrm{set}(\bar{q})$。接着利用 $\mathrm{stp}(\bar{p}) = \mathrm{stp}(\bar{q})$，即可得 $\mathrm{stp}(\bar{p}, \bar{s}) = \mathrm{stp}(\bar{q}, \bar{t})$。■

由 $\mathrm{set}(\bar{s}) = \mathrm{set}(\bar{p})$ 和 $\mathrm{set}(\bar{t}) = \mathrm{set}(\bar{q})$ 可得 $N_{\bar{p}} = N_{\bar{s}}$和 $N_{\bar{q}} = N_{\bar{t}}$。因此，$\delta'$也是 $N_{\bar{p}}$与 $N_{\bar{q}}$之间的双射。由 $\mathrm{stp}(\bar{p}, \bar{s}) = \mathrm{stp}(\bar{q}, \bar{t})$ 可得，对于所有满足 $\bar{q}' := \delta'(\bar{p}')$ 的 $\bar{p}' \in N_{\bar{p}}$，都有 $\mathrm{stp}(\bar{p}, \bar{p}') = \mathrm{stp}(\bar{q}, \bar{q}')$ 且 $g(^{\nu}\bar{p}') = g(^{\nu}\bar{q}')$。至此，命题 D.13 □的证明完成。

总之，我们证明引理D.1如下。

引理*D.1*的证明。

1. 这直接由命题 D.10 得出。2. (a) 这直接由命题 D.5(a) 得出。(b) 这直接由命题 D.11 得出。3. (a) 这直接由命题 D.5(b) 得出。(b) 这直接由命题 D.13 得出。

□