˝ ´单位圆上多重正交性的 Szegő 映射与 Hermite–Padé 多项式

ROSTYSLAV KOZHAN[1] 和 MARCUS VAKTN ¨AS[1]

Abstract. 我们研究单位圆上满足相对于 r 概率测度或单位圆上线性泛函的同时正交条件的广义 Laurent 多重正交多项式。我们证明，这些多项式可刻画为一般两点 Hermite–Pad´é 逼近问题的解。

我们推导了 Szeg˝ő 型递推关系，建立了相关递推系数的相容条件，并得到 Christoffel–Darboux 公式以及 Heine 型行列式表示。

此外，通过推广 Szeg˝ő 映射和 Geronimus 关系，我们建立了这些 Laurent 多重正交多项式与实数轴上的多重正交多项式之间的联系，从而明确揭示了单位圆上与实数轴上多重正交性之间的关联。

arXiv:2601.04783v1 [math.CA] 8 Jan 2026

1. 引言

尽管过去几十年来，实数轴上的多重正交性已得到广泛发展，但 M´ınguez 和 Van Assche [20],提出的单位圆上的对应理论仍是一个相对新兴的研究领域。不过，近期研究 [6, 10, 13, 14, 16]表明，单位圆上的多重正交性具有丰富而复杂的结构，值得进行统一且系统的研究。

本文提出了 Laurent 多重正交多项式的广义概念，为广义 Hermite–Pad´e 问题提供了自然框架，并将其与 Szeg˝o 映射和杰罗尼穆斯关系联系起来，从而将该理论与实数轴上的多重正交多项式联系起来。在介绍主要结果之前，我们先概述本文后续将用到的一些理论基础。具体而言，我们总结实数轴上的正交多项式（第 1.1 节）和单位圆上的正交多项式（第 1.2 节）的关键性质，以及它们与 Pad´e 和 Hermite–Pad´e 逼近、Szeg˝o 映射（第 1.3 节）之间的联系。第 1.4 节简要概述本文的主要结果。

1.1. 实数轴上的正交性与 Hermite–Pad´e 逼近。

我们首先回顾实数轴上的正交多项式和多重正交多项式的基本理论，以及相关的 Pad´e 和 Hermite–Pad´e 逼近问题。设 μ 为支撑在实数轴 $\mathbb{R}$ 上的概率测度，且其所有

[1]Department of Mathematics, Uppsala University, S-751 06 Uppsala, Sweden
E-mail addresses: kozhan@math.uu.se, marcus.vaktnas@math.uu.se.*Date*: 2026年1月9日。

矩

$$c_j = \int_{\mathbb{R}} x^j d\mu(x), \qquad j \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\},$$

fini。 μ 的柯西–斯蒂尔杰斯变换是定义在 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$上解析的函数，给出如下:

$$m(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(x)}{x - z} = -\sum_{j=0}^{\infty} c_j z^{-j-1}, \qquad z \to \infty. \tag{1}$$

μ 的首一（即首项系数为 1）正交多项式由满足 $\deg P_n = n$ 且.....来定义

$$\int_{\mathbb{R}} P_n(x) x^k d\mu(x) = 0, \qquad k = 0, \ldots, n-1. \tag{2}$$

它们满足三项递推关系

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + b_n P_n(x) + a_n P_{n-1}(x), \tag{3}$$

其中， $a_n > 0$、 $n \geq 1$、$(a_0 := 0)$和 $b_n \in \mathbb{R}$ 称为雅可比系数。更多详情请参见 [25, 26]。

正交多项式自然出现的经典情形之一是 Pad´e 逼近，全面论述参见例如 [2] 。给定函数 $m(z)$，如式 (1) 所示，Pad´e 问题旨在求次数分别至多为 n 和 $n-1$的多项式 P_n 和 Q_n，使得

$$P_n(z)m(z) + Q_n(z) = \mathcal{O}(z^{-n-1}), \qquad z \to \infty. \tag{4}$$

可以证明，该问题的所有解 P_n 恰好就是由式 (2) 定义的正交多项式。

Hermite–Pad´e 逼近问题涉及对柯西–斯蒂尔杰斯变换进行同时逼近，是对 (4) 的推广。设 $m_1(z), \ldots, m_r(z)$ 为 r 个定义在 $\mathbb{R}$ 上的测度 $\mu_1, \ldots, \mu_r$ 的柯西–斯蒂尔杰斯变换。对于多重指标 $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_r) \in \mathbb{N}^r$，我们寻求次数为 $\leq |\boldsymbol{n}| := n_1 + \ldots + n_r$ 和 $\leq |\boldsymbol{n}| - 1$ 的多项式 $P_{\boldsymbol{n}}$ 和 $Q_{\boldsymbol{n},j}$，使其满足

$$P_{\boldsymbol{n}}(z)m_j(z) + Q_{\boldsymbol{n},j}(z) = \mathcal{O}(z^{-n_j-1}), \qquad z \to \infty, \quad j = 1, \ldots, r. \tag{5}$$

该理论中的一个基本结果是，多项式 $P_{\boldsymbol{n}}$ 是 (5) 的解，当且仅当它满足同时正交条件

$$\int_{\mathbb{R}} P_{\boldsymbol{n}}(x) x^k d\mu_j(x) = 0, \qquad k = 0, \ldots, n_j - 1, \quad j = 1, \ldots, r, \tag{6}$$

相对于测度系 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_r)$。这类多项式称为 $\boldsymbol{\mu}$ 的（II 型）多重正交多项式。这是一个发展十分成熟的研究领域，参见例如 [1, 11, 19, 21] 及其中的参考文献。

1.2. 单位圆上的正交性与两点 Hermite–Pad´e 逼近。

现在让我们引入复单位圆 [9, 23, 24, 26] 上的平行理论。我们从一个支撑在 $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ 上的概率测度开始，并将其矩记为

$$c_j = \int_{\partial\mathbb{D}} w^{-j} d\mu(w), \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

μ 的 Carath´eodory 函数定义为 $\mathbb{C}\setminus\partial\mathbb{D}$ 上的解析函数 $F(z)$，其表达式为

$$F(z)=\int_{\partial\mathbb{D}}\frac{w+z}{w-z}d\mu(w)=\begin{cases}c_0+2\sum_{k=1}^{\infty}c_kz^k, & z\to 0,\\ -c_0-2\sum_{k=1}^{\infty}c_{-k}z^{-k}, & z\to\infty.\end{cases}\tag{7}$$

首一正交多项式 $(\Phi_n(z))_{n=0}^{\infty}$ of μ 的定义要求 $\deg\Phi_n=n$and

$$\int_{\partial\mathbb{D}}\Phi_n(w)w^{-k}d\mu(w)=0,\qquad k=0,\dots,n-1.\tag{8}$$

它们满足 Szeg˝o 递推关系:

$$\Phi_{n+1}(z)=z\Phi_n(z)+\alpha_{n+1}\Phi_n^*(z),\tag{9}$$
$$\Phi_{n+1}^*(z)=\Phi_n^*(z)+\bar{\alpha}_{n+1}z\Phi_n(z),\tag{10}$$

其中，Szeg˝o 对偶多项式 $\Phi_n^*(z)=z^n\Phi_n(1/\bar{z})$ 可通过 $\Phi_n^*(0)=1$ and 定义

$$\int_{\partial\mathbb{D}}\Phi_n^*(w)w^{-k}d\mu(w)=0,\qquad k=1,\dots,n.\tag{11}$$

递推系数 α_n, $n\geq 1$ 属于开单位圆盘 $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}\colon\ |z|<1\}$，称为 μ 的 Verblunsky系数（文献中也称为 Schur、Szeg˝o 或 Geronimus系数）。[1]

相应的 Pad´e 逼近问题具有如下两点形式，参见例如 [2,4,12,22] 及其中的参考文献。给定函数 $F(z)$，如式 (7) 所示，我们寻求次数至多为 n 的多项式 Φ_n 和 Ψ_n，使得

$$\Phi_n(z)F(z)+\Psi_n(z)=\mathcal{O}(z^n),\qquad z\to 0,\tag{12}$$
$$\Phi_n(z)F(z)+\Psi_n(z)=\mathcal{O}(z^{-1}),\qquad z\to\infty.\tag{13}$$

(12)–(13) 的所有多项式解 Φ_n 都是由 (8) 定义的正交多项式的常数倍。

在 [20], M´ınguez 和 Van Assche 的研究中，他们考虑了 Hermite–Pad´e 逼近问题，即寻找次数为 $\leq|\boldsymbol{n}|$ 的多项式 $\Phi_{\boldsymbol{n}}(z)\,\Psi_{\boldsymbol{n},\,1}(z)\dots,\Psi_{\boldsymbol{n},\,r}(z)$，使其满足

$$\Phi_{\boldsymbol{n}}(z)F_j(z)+\Psi_{\boldsymbol{n},j}(z)=\mathcal{O}(z^{n_j}),\qquad z\to 0,\tag{14}$$
$$\Phi_{\boldsymbol{n}}(z)F_j(z)+\Psi_{\boldsymbol{n},j}(z)=\mathcal{O}(z^{-1}),\qquad z\to\infty,\tag{15}$$

对于与测度 $\mu_1,\dots,\mu_r$ 在 $\partial\mathbb{D}$ 上相关联的 r Carath´eodory 函数 (7) $F_1,\dots,F_r$，他们证明了 $\Phi_{\boldsymbol{n}}(z)$ 是 (14)–(15) 的解，当且仅当它满足以下同时正交关系

$$\int_{\partial\mathbb{D}}\Phi_{\boldsymbol{n}}(w)w^{-k}d\mu_j(w)=0,\qquad k=0,\dots,n_j-1,\quad j=1,\dots,r.\tag{16}$$

因此，$\Phi_{\boldsymbol{n}}(z)$ 被称为单位圆上的（II 型）多重正交多项式。关于 $\Phi_{\boldsymbol{n}}$ 性质的更多结果，请参见 [6,16,20]。

[1]提醒读者注意，这里我们选择的是 $\alpha_n=\Phi_n(0)$，而不是如今更常用的 $\alpha_n=\Phi_{n+1}(0)$（历史讨论见 [23, p.10]）。

1.3. **Szeg˝o 映射与 Geronimus 关系**。

最后，我们回顾 Szeg˝o 映射和 Geronimus 关系，它们建立了实直线与单位圆上的正交多项式理论之间的基本联系。给定任意一个支撑在实区间 $[-2,2]$ 上的概率测度 γ，可以定义概率测度 $\mu = \mathrm{Sz}(\gamma)$，使其成为单位圆 $\partial\mathbb{D}$ 上的概率测度，该测度关于反射 $e^{i\theta} \mapsto e^{-i\theta}$ 不变，并满足

$$\int_{\partial\mathbb{D}} g(2\cos\theta)d\mu(e^{i\theta}) = \int_{-2}^{2} g(x)d\gamma(x), \tag{17}$$

对于所有定义在 $[-2,2]$ 上的可测函数 g。反过来，任何在 $\partial\mathbb{D}$ 上关于 $e^{i\theta} \mapsto e^{-i\theta}$ 不变的概率测度 μ，都可表示为 $\mu = \mathrm{Sz}(\gamma)$，其中存在唯一的定义在 $[-2,2]$ 上的概率测度 γ，由式 (17) 确定。Szeg˝o 证明了，关于 γ 的实数轴上的正交多项式 P_n与关于 μ 的单位圆上的正交多项式 Φ_n 满足以下恒等式

$$P_n(z+z^{-1}) = \frac{1}{1+\alpha_{2n}}\big(z^{-n}\Phi_{2n}(z) + z^n\Phi_{2n}(1/z)\big) \tag{18}$$

后来，Geronimus [8, 9] 推导出了联系 γ 与 μ 的递推系数的显式公式:

$$a_n^2 = (1+\alpha_{2n-2})(1-\alpha_{2n-1}^2)(1-\alpha_{2n}), \qquad n \geq 1, \tag{19}$$

$$b_n = (1-\alpha_{2n})\alpha_{2n-1} - (1+\alpha_{2n})\alpha_{2n+1}, \qquad n \geq 0, \tag{20}$$

约定 $\alpha_{-1} = 0$。

1.4. **主要结果概述**。

本文引入如下定义的 Laurent多重正交多项式

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(w)w^{-k}d\mu_j(w) = 0, \qquad k = -m_j, \ldots, n_j - 1, \qquad j = 1, \ldots, r, \tag{21}$$

$$\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}} \in \operatorname{span}\left\{z^{-|\boldsymbol{m}|}, z^{-|\boldsymbol{m}|+1}, \ldots, z^{|\boldsymbol{n}|}\right\}. \tag{22}$$

这里，$\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{m}$ 是 $\mathbb{N}^r$中的两个任意多重指标。特别地，若 $\boldsymbol{m} = \mathbf{0}$，则 $\Phi_{\boldsymbol{n};\mathbf{0}}$是 M´ınguez–Van Assche [20]的多重正交多项式 $\Phi_{\boldsymbol{n}}$。

研究这类多项式的动机有两个方面。首先，我们证明（见第 3–4 节），满足（22）的 Laurent 多项式 $\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z)$满足正交条件（21），当且仅当它解出以下双点 Hermite–Pad´e 逼近问题

$$\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z)F_j(z) + \Psi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(z) = \mathcal{O}(z^{n_j}), \qquad z \to 0, \tag{23}$$

$$\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z)F_j(z) + \Psi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(z) = \mathcal{O}(z^{-m_j-1}), \qquad z \to \infty, \tag{24}$$

对于适当的 Laurent 多项式$\Psi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},\ j}$。这里，$F_j$ 是与测度 μ_1，……，μ_r相关联的 Carath´eodory 函数。在标量情形 $r = 1$下，很容易验证$\Phi_{n;m}(z) = z^{-m}\Phi_{n+m}(z)$。当然，若 $r \geq 2$，则这种与（16）中的 $\Phi_{\boldsymbol{n}}$ 之间的平凡关系不再成立。

我们引入 Laurent 框架 (21) 的第二个动机是，它能自然地容纳 Szeg˝o 映射和 Geronimus 关系。这使我们能够

将我们的结果与实数轴上的多重正交多项式理论联系起来；在 [6,16,20] 所讨论的多项式多重设定 (16) 中，无法建立这种联系。这些联系在第 10 节的定理 10.2 和 10.3 中得以确立。

为实现这一目标，我们首先构建基础框架，介绍相关概念，并建立若干结构性结果，这些内容将在全文中用到。在第 5 节中，我们证明多项式 $\Phi_{n;m}$ 满足一族最近邻递推关系，可将其视为单位圆上的正交多项式经典 Szeg˝o 递推关系的自然推广。在第 6 节中，我们推导出一个系统，其中递推系数和正交多项式满足最近邻相容关系。第 7 节专门讨论由这些关系导出的若干恒等式；尽管这些恒等式在一定程度上较为技术性，但它们为证明杰罗尼穆斯关系提供了主要工具。在第 8 节中，我们为 Laurent 多项式 $\Phi_{n;m}$ 以及所有相关递推系数建立 Heine 行列式公式的类似结果。第 9 节给出 Christoffel–Darboux 公式。第 5、6 和 9 节的结果与多重正交多项式 Φ_n 的情形遵循相同的模式，主要区别在于 $\Phi_{n;m}$ 涉及两个独立变化的多重指标。相应的证明与我们在 [16], 中提出的论证十分接近，并作了适当修改，以适应当前更一般的框架。

我们还指出，本文采用更广泛的框架，即将相对于测度的正交性替换为相对于矩线性泛函的正交性。这一推广不会带来任何额外的技术难题，所有陈述和证明也都可以自然地推广到这一框架。偏好经典框架的读者只需将每个泛函理解为相对于某个测度的积分即可。

近来的一些研究也考察了 Laurent 正交多项式 [10,13,14]。文献 [10] 中的多项式对应于混合多重正交性框架。尽管该研究讨论了递推关系、Christoffel–Darboux 公式和谱变换，但只有在非常特殊的多重指标下，其多项式才与本文的多项式一致，因为该研究仅关注阶梯线指标。此外，由于他们没有引入 II* 和 I* 族，其公式的形式与本文的公式大不相同。文献 [13,14] 中的多项式 φ_{2n} 与本文研究的 Laurent 多项式 $\Phi_{n;n}$ 一致；对于 φ_n，在单位圆上的广泛测度类（包括 Angelesco、AT 和 Nikishin 系统）中，正规性（存在性与唯一性）已得到证明。请注意，这就证明了在 $n = m$ 情形下，(23)–(24) 中的 $\Phi_{n;n}$ 以及 Hermite–Pad´e 逼近式的存在性与唯一性。这些结果在多大程度上可推广到任意指标（n； m），目前仍是一个值得研究的开放问题。另一个自然的问题是零点的位置，这与正规性问题密切相关，正如 [17] 中的思路所表明的那样。这些问题留待今后研究。

致谢。R.K.感谢 Maxim Derevyagin、Brian Simanek 和 Sergey Denisov 就 Szegő 映射进行的有益讨论。

2. 正交关系与正规性

给定 r 任意复数序列（$c_{k,\ j}$）$_{k\in\mathbb{Z}}$、 $j = 1$、.....、 r；我们将其称为矩。相应的矩泛函 L_j 定义为

定义在复系数 Laurent 多项式空间上的线性映射，由以下条件唯一确定

$$L_j[w^{-k}] = c_{k,j}, \qquad k \in \mathbb{Z}, \qquad j = 1, \dots, r. \tag{25}$$

特别重要的一种情形是，泛函 L_j 由单位圆 $\partial\mathbb{D}$上的概率测度诱导。

$$L_j[w^{-k}] = \int_{\partial\mathbb{D}} w^{-k} d\mu_j(w), \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{26}$$

下文中，令 $\mathbb{Z}$ 为整数集， $\mathbb{N}$ 为非负整数集。给定两个向量 $\boldsymbol{u}$， $\boldsymbol{v} \in \mathbb{Z}^r$，若对所有 $j = 1, \dots, r$，都有 $u_j \geq v_j$，则记作 $\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{v}$。最后，记 $|\boldsymbol{v}| = v_1 + \ldots + v_r$。注意，我们不取 v_j的绝对值，尽管v_j 可能为负；这是有意为之。特别地， $\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{v}$ 蕴含 $|\boldsymbol{u}| \geq |\boldsymbol{v}|$。

给定两个 $\mathbb{Z}^r$ 指标 $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{m}$, 记作

$$\mathfrak{C}_{2r} = \{(\boldsymbol{n}; \boldsymbol{m}) \in \mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}^r : n_j + m_j \geq 0 \text{ for all } j\} \tag{27}$$

在本文余下部分中。

对于 $(\boldsymbol{n}; \boldsymbol{m}) \in \mathfrak{C}_{2r}$，定义 $(|\boldsymbol{n}| + |\boldsymbol{m}|) \times (|\boldsymbol{n}| + |\boldsymbol{m}|)$ 矩阵

$$T_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}} = \begin{pmatrix} c_{|\boldsymbol{m}|-m_1,1} & \cdots & c_{-|\boldsymbol{n}|-m_1+1,1} \\ c_{|\boldsymbol{m}|-m_1+1,1} & \cdots & c_{-|\boldsymbol{n}|-m_1+2,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{|\boldsymbol{m}|+n_1-1,1} & \cdots & c_{-|\boldsymbol{n}|+n_1,1} \\ \hdashline \multicolumn{3}{c}{\vdots} \\ \hdashline c_{|\boldsymbol{m}|-m_r,r} & \cdots & c_{-|\boldsymbol{n}|-m_r+1,r} \\ c_{|\boldsymbol{m}|-m_r+1,r} & \cdots & c_{-|\boldsymbol{n}|-m_r+2,r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{|\boldsymbol{m}|+n_r-1,r} & \cdots & c_{-|\boldsymbol{n}|+n_r,r} \end{pmatrix}. \tag{28}$$

若对某个 j有$n_j = -m_j$，则上述矩阵中相应的第 j个块为空。此外，若 $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{m}$，则我们形式上取 $T_{\boldsymbol{n};-\boldsymbol{n}} = 1$。

我们称$(\boldsymbol{n}; \boldsymbol{m}) \in \mathfrak{C}_{2r}$为正规，当且仅当 $\det T_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}} \neq 0$。这种概念与适当归一化的 Laurent 正交多项式的唯一性有关，这一点并不令人意外，下面将对此进行说明。

命题 2.1. 设 $\boldsymbol{L} = (L_1, \dots, L_r)$ 为一个线性泛函系统，并且$(\boldsymbol{n}; \boldsymbol{m}) \in \mathfrak{C}_{2r}$，其中 $\boldsymbol{n} \neq -\boldsymbol{m}$。

(i) $\det T_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}} \neq 0$ 当且仅当存在唯一的 *Laurent* 多项式 $\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$ ，其形式为

$$\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) = z^{|\boldsymbol{n}|} + \ldots + \alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}} z^{-|\boldsymbol{m}|}, \tag{29}$$

满足

$$L_j[\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(w) w^{-k}] = 0, \quad -m_j \leq k \leq n_j - 1, \quad 1 \leq j \leq r. \tag{30}$$

（ii）$\det T_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}} \neq 0$ 当且仅当存在唯一一个形式为 $\Phi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$ 的 *Laurent* 多项式

$$\Phi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) = \beta_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}} z^{|\boldsymbol{n}|} + \ldots + z^{-|\boldsymbol{m}|} \tag{31}$$

满足

$$L_j[\Phi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(w)w^{-k}] = 0, \quad -m_j + 1 \le k \le n_j, \quad 1 \le j \le r. \tag{32}$$

(iii) $\det T_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}} \neq 0$ 当且仅当存在唯一的 *Laurent* 多项式向量 $\boldsymbol{\Xi}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}} = (\Xi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},1}, \dots, \Xi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},r})$，其形式为

$$\Xi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(z) \in \operatorname{span}\left\{z^k\right\}_{k=-n_j}^{m_j-1}, \tag{33}$$

且满足

$$\sum_{j=1}^{r} L_j[\Xi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(w)w^{-k}] = \begin{cases} 0, & -|\boldsymbol{n}| + 1 \le k \le |\boldsymbol{m}| - 1, \quad (34a) \\ 1, & k = -|\boldsymbol{n}|. \quad (34b) \end{cases}$$

(iv) $\det T_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}} \neq 0$ 当且仅当存在唯一的 *Laurent* 多项式向量 $\boldsymbol{\Xi}^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}} = (\Xi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},1}, \dots, \Xi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},r})$，其形式为

$$\Xi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(z) \in \operatorname{span}\left\{z^k\right\}_{k=-n_j+1}^{m_j}, \tag{35}$$

且满足

$$\sum_{j=1}^{r} L_j[\Xi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(w)w^{-k}] = \begin{cases} 0, & -|\boldsymbol{n}| + 1 \le k \le |\boldsymbol{m}| - 1, \quad (36a) \\ 1, & k = |\boldsymbol{m}|. \quad (36b) \end{cases}$$

证明。将 (29) 中 $\Phi_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}}$ 的系数视为未知数，写出方程组 (30)。其 $(|\boldsymbol{n}| + |\boldsymbol{m}|) \times (|\boldsymbol{n}| + |\boldsymbol{m}|)$ 系数矩阵为 $T_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$，由此可证得 (i)。

其他情形的论证类似，得到 (ii) 中相同的系数矩阵 $T_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$，以及 (iii) 和 (iv) 中 $T_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$ 的转置。□

注 2.2. 请注意，在 *(iii)* 和 *(iv)* 中，我们对 $\boldsymbol{n}$ 使用负号指标，对 $\boldsymbol{m}$ 使用正号指标，这与 *(i)* 和 *(ii)* 的情形相反。这样做是为了确保对偶性，也就是说，$\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$ 的唯一性等价于 $\boldsymbol{\Xi}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$ 的唯一性，正如上面的命题所示。

注 2.3. 在关于一个概率测度的正交情形下（因此 $r = 1$, $\boldsymbol{n} = n \in \mathbb{Z}$, $\boldsymbol{m} = m \in \mathbb{Z}$, $n + m \ge 0$），容易看出

$$\Phi_{n;m}(z) = z^{-m}\Phi_{n+m}(z), \qquad \Phi^*_{n;m}(z) = z^{-m}\Phi^*_{n+m}(z),$$
$$\Xi_{n;m}(z) = \tfrac{1}{\kappa_{n+m-1}} z^{-n}\Phi^*_{n+m-1}(z), \qquad \Xi^*_{n;m}(z) = \tfrac{1}{\kappa_{n+m-1}} z^{-n+1}\Phi_{n+m-1}(z),$$

其中 $\kappa_j = L[\Phi_j(w)w^{-j}] = L[|\Phi_j(w)|^2]$。

将 (i)、(ii)、(iii) 和 (iv) 中所述的 Laurent 多项式分别称为 II 型、II 型*、I 型和 I 型*。对于形如 $(\boldsymbol{n}; -\boldsymbol{n})$ 的指标情形（任意 $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^r$），它们均为正规，此时自然取 $\Phi_{\boldsymbol{n};-\boldsymbol{n}}(z) = \Phi^*_{\boldsymbol{n};-\boldsymbol{n}}(z) = 1, \boldsymbol{\Xi}_{\boldsymbol{n};-\boldsymbol{n}}(z) = \boldsymbol{\Xi}^*_{\boldsymbol{n};-\boldsymbol{n}}(z) = \mathbf{0}$。

如果 $(\boldsymbol{n}; \boldsymbol{m})$ 是正规矩形，我们将 $\alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$ 记作 $\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z)$ 的 $z^{-|\boldsymbol{m}|}$ 系数，将 $\beta_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$ 记作 $\Phi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z)$ 的 $z^{|\boldsymbol{n}|}$ 系数。这些应视为广义 Verblunsky 递推系数，见第 5 节。

引入以下记号。给定复变量 z 的函数 f，令

$$f^\sharp(z) = \overline{f(1/\bar{z})}. \tag{37}$$

类似地，给定满足 $L[w^{-k}]=c_k$ 的矩泛函 L，令

$$L^\sharp[w^{-k}]=\overline{L[w^k]}=\bar{c}_{-k},\qquad k\in\mathbb{Z}. \tag{38}$$

等价地，

$$L^\sharp[f(z)]=\overline{L[f^\sharp(z)]}. \tag{39}$$

命题 2.4. $(\boldsymbol{n};\ \boldsymbol{m})\in\mathfrak{C}_{2r}$ 相对于系统 $\boldsymbol{L}=(L_1,\ldots,L_r)$ 是正规的，当且仅当 $(\boldsymbol{m};\ \boldsymbol{n})$ 相对于 $\boldsymbol{L}^\sharp=(L_1^\sharp,\ldots,L_r^\sharp)$ 是正规的。在这种情况下，

$$\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z,\boldsymbol{L}^\sharp)=\Phi^*_{\boldsymbol{m};\boldsymbol{n}}(z,\boldsymbol{L})^\sharp, \tag{40}$$

$$\Phi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z,\boldsymbol{L}^\sharp)=\Phi_{\boldsymbol{m};\boldsymbol{n}}(z,\boldsymbol{L})^\sharp, \tag{41}$$

$$\boldsymbol{\Xi}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z,\boldsymbol{L}^\sharp)=\boldsymbol{\Xi}^*_{\boldsymbol{m};\boldsymbol{n}}(z,\boldsymbol{L})^\sharp, \tag{42}$$

$$\boldsymbol{\Xi}^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z,\boldsymbol{L}^\sharp)=\boldsymbol{\Xi}_{\boldsymbol{m};\boldsymbol{n}}(z,\boldsymbol{L})^\sharp, \tag{43}$$

$$\alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{L}^\sharp)=\bar{\beta}_{\boldsymbol{m};\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{L}), \tag{44}$$

$$\beta_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{L}^\sharp)=\bar{\alpha}_{\boldsymbol{m};\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{L}). \tag{45}$$

此外，如果每个 L_j 都满足 $c_{k,j}=\bar{c}_{-k,j}$ 对所有 $k\in\mathbb{N}$ 均成立（例如，如果它由单位圆 $\partial\mathbb{D}$ 上的概率测度(26) 诱导），那么 $(\boldsymbol{n};\boldsymbol{m})$ 是正规的，当且仅当 $(\boldsymbol{m};\boldsymbol{n})$ 是正规的，并且

$$\Phi^\sharp_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}=\Phi^*_{\boldsymbol{m};\boldsymbol{n}},\qquad \boldsymbol{\Xi}^\sharp_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}=\boldsymbol{\Xi}^*_{\boldsymbol{m};\boldsymbol{n}},\qquad \alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}=\bar{\beta}_{\boldsymbol{m};\boldsymbol{n}} \tag{46}$$

成立。

证明。 由 (28) 易知 $\det T_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{L})=\pm\det T_{\boldsymbol{m};\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{L}^\sharp)$，这意味着正规性结论。等式 (40)–(43) 由定义和 (39) 得出。等式 (40)–(41) 随后推出 (44)–(45)。

在特殊情形下，当式 (25) 中的矩 $c_{k,j}$ 满足 $c_{k,j}=\bar{c}_{-k,j}$（特别地，若 L_j 对应于 $\partial\mathbb{D}$ 上的正测度，则满足这一条件），于是 $L_j=L_j^\sharp$。将此结果与 (40)、(42) 和 (44) 结合，得到 (46)。□

注 2.5. 来自 [16] 的 *II* 型和 *I* 型多项式 $\Phi_{\boldsymbol{n}}$, $\Phi^*_{\boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{\Lambda}^*_{\boldsymbol{n}}$ 与我们的 *Laurent* 多项式之间的关系为

$$\Phi_{\boldsymbol{n}}(z)=\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{0}}(z),\qquad \Phi^*_{\boldsymbol{n}}(z)=\Phi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{0}}(z), \tag{47}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{n}}(z)=z^{-1}\boldsymbol{\Xi}^*_{\boldsymbol{0};\boldsymbol{n}}(z),\qquad \boldsymbol{\Lambda}^*_{\boldsymbol{n}}(z)=\boldsymbol{\Xi}_{\boldsymbol{0};\boldsymbol{n}}(z). \tag{48}$$

同样的多项式 $\Phi_{\boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{n}}$ 也曾在 [6,20] 中研究过。

注 2.6. 虽然关系 (47) 很自然，但 (48) 中的关系起初可能显得有些出乎意料。这可以从两个方面解释。首先，在正测度系统 [6,16,20] 中分析的多项式 $\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{n}}$，对于一般线性泛函 L_j 的情形而言并非最自然的研究对象，因为它们的唯一性（正规性）并不等价于 $\Phi_{\boldsymbol{n}}$ 的唯一性（正规性），而是等价于与泛函 $L_j^\sharp$ 相对应的 $\Phi_{\boldsymbol{n}}$ 的唯一性（正规性）（见 (38)）。这解释了 (48) 中指标 $(\boldsymbol{0};\boldsymbol{n})$ 顺序颠倒的原因。其次，附加因子 z^{-1} 实际上是自然的，因为它使 *Hermite–Pad´e* 问题 (76)–(77)、*I* 型递推关系 (98)–(99)（与 (96)–(97) 对比）以及 *Christoffel–Darboux* 公式 (146)–(147)（与 [16, 定理 6.1] 对比）的表述在形式上更为协调。

3. A General Two-Point Hermite–Padé Problem of Type II

本节讨论与上一节定义的 Laurent 多项式相关的 Hermite–Pad´e 逼近问题。

对于式（25）中给出的每个线性泛函 L_j, $j = 1, \dots, r$，我们赋予形式幂级数

$$F_j^{(0)}(z) = c_{0,j} + 2\sum_{k=1}^{\infty} c_{k,j} z^k, \quad F_j^{(\infty)}(z) = -c_{0,j} - 2\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k,j} z^{-k}. \tag{49}$$

由于

$$\frac{w+z}{w-z} = \begin{cases} 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{w^k}, & \text{if } |z| < |w|, \\ -1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{w^k}{z^k}, & \text{if } |z| > |w|, \end{cases} \tag{50}$$

the 对 $(F_j^{(0)}, F_{(\infty)j})$ 可以形式上视为广义 Carath´eodory 函数

$$F_j(z) = L_j[(w+z)(w-z)^{-1}]. \tag{51}$$

当 L_j 与概率测度 μ_j 相关联，如式（26）所示时，则式（49）是 Carath´eodory 函数 $F_j(z)$(7) 在 μ_j 的 0 点和 ∞ 点处的幂级数展开。

给定两个多重指标 $\boldsymbol{n} = (n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{N}^r$, $\boldsymbol{m} = (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{N}^r$。考虑广义的两点 Hermite–Pad´e 问题，即求 Laurent 多项式

$$\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}} \in \operatorname{span}\left\{z^k\right\}_{k=-|\boldsymbol{m}|}^{|\boldsymbol{n}|}, \tag{52}$$

同时满足

$$\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) F_j^{(0)}(z) + \Psi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(z) = \mathcal{O}(z^{n_j}), \qquad z \to 0, \tag{53}$$

$$\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) F_j^{(\infty)}(z) + \Psi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(z) = \mathcal{O}(z^{-m_j-1}), \qquad z \to \infty, \tag{54}$$

对于某些 Laurent 多项式 $\Psi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},\,1}, \dots, \Psi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},\,r} \in$ 张成空间 $\left\{z^k\right\}_{k=-|\boldsymbol{m}|}^{|\boldsymbol{n}|}$。

注意，这里我们取 $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{0}$和 $\boldsymbol{m} \geq \mathbf{0}$，这比上一节的条件更严格。这与以下事实有关： $F^{(0)}$和 $F_{(\infty)}$从 z^0 项开始，因此如果 $n_j < 0$ 或 $m_j < 0$，问题 (52)、(53)、(54) 可能变得不适定。

定理 3.1。任何满足 (52)、(53)、(54) 的 *Laurent* 多项式 $\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$ 都会自动满足正交条件 (30)，且$\Psi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},\,j}$ 由下式给出

$$\Psi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(z) = L_j\left[\frac{w+z}{w-z}\big(\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(w) - \Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z)\big)\right] + L_j[\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(w)]. \tag{55}$$

反过来，任何满足 (30) 的 *Laurent* 多项式 $\Phi_{\boldsymbol{n},\,\boldsymbol{m}} \in$ 张成空间 $\left\{z^k\right\}_{k=-|\boldsymbol{m}|}^{|\boldsymbol{n}|}$，都能与 *Laurent* 多项式 (55)一起解出 *Hermite–Pad´e* 问题 (52)、(53)、(54) 。

注记3.2。结合该定理与 [13, 14]，中的结果可知，除一个归一化常数外，*Hermite–Pad´e*问题(52)、(53)、(54)在 $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}$ 满足以下条件时的解是唯一的： $\boldsymbol{L}$ 在单位圆上是一个*Angelesco*系统、*AT*系统或*Nikishin*系统（带有 $r = 2$）。

证明。 将 $\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$ 和$\Psi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},\ j}$ 写成如下形式

$$\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) = \kappa_{-|\boldsymbol{m}|}z^{-|\boldsymbol{m}|} + \cdots + \kappa_{|\boldsymbol{n}|}z^{|\boldsymbol{n}|}, \tag{56}$$

$$\Psi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(z) = \lambda_{-|\boldsymbol{m}|,j}z^{-|\boldsymbol{m}|} + \cdots + \lambda_{|\boldsymbol{n}|,j}z^{|\boldsymbol{n}|}. \tag{57}$$

其中只有有限个非零$\lambda_{k,j}$ 系数，因此（57）实际上是一个 Laurent 多项式。于是得到

$$\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z)F_j^{(0)}(z) = a_{-|\boldsymbol{m}|,j}z^{-|\boldsymbol{m}|} + \cdots + a_{n_j-1,j}z^{n_j-1} + \mathcal{O}(z^{n_j}), \quad z \to 0,$$

$$\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z)F_j^{(\infty)}(z) = b_{|\boldsymbol{n}|,j}z^{|\boldsymbol{n}|} + \cdots + b_{-m_j,j}z^{-m_j} + \mathcal{O}(z^{-m_j-1}), \quad z \to \infty,$$

其中，$a_{-|\boldsymbol{m}|,j},\ldots,a_{n_j-1,j}$和$b_{-m_j,j},\ldots,b_{|\boldsymbol{n}|-1,j}$由下式给出

$$a_{k,j} = \kappa_k c_{0,j} + 2\kappa_{k-1}c_{1,j} + \cdots + 2\kappa_{-|\boldsymbol{m}|}c_{|\boldsymbol{m}|+k,j}, \tag{58}$$

$$b_{k,j} = -\kappa_k c_{0,j} - 2\kappa_{k+1}c_{-1,j} - \cdots - 2\kappa_{|\boldsymbol{n}|}c_{-|\boldsymbol{n}|+k,j}. \tag{59}$$

要使（53）–（54）成立，必须有

$$\lambda_{k,j} = a_{k,j}, \qquad k = -|\boldsymbol{m}|, \ldots, n_j - 1, \tag{60}$$

$$\lambda_{k,j} = b_{k,j}, \qquad k = -m_j, \ldots, |\boldsymbol{n}|. \tag{61}$$

这意味着

$$a_{k,j} = b_{k,j}, \qquad k = -m_j, \ldots, n_j - 1, \tag{62}$$

根据（25）和（58）–（59），这便转化为（30）。

由（60）–（61）还可知，$\Psi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}$ 由 $\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$唯一确定。为了计算$\sim\Psi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}$，将$\Psi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},\ j}$ 记为（55）的右端，并定义$R_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}$ 如下

$$R_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(z) = L_j\Big[\frac{w+z}{w-z}\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(w)\Big]. \tag{63}$$

同样，这应视为两个形式幂级数

$$R^{(0)}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(z) = L_j[\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(w)] + 2\sum_{k=1}^{\infty} z^k L_j[w^{-k}\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(w)], \qquad z \to 0, \tag{64}$$

$$R^{(\infty)}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(z) = -L_j[\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(w)] - 2\sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} L_j[w^{k}\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(w)], \qquad z \to \infty. \tag{65}$$

由 (30) 得

$$R^{(0)}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(z) = \mathcal{O}(z^{n_j}), \qquad z \to 0, \tag{66}$$

$$R^{(\infty)}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(z) = -L_j[\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(w)] + \mathcal{O}(z^{-m_j-1}), \qquad z \to \infty. \tag{67}$$

(67) 中的常数项仅在 $n_j = 0$ 时才相关，否则可通过正交性 (30) 将其消去。

注意，$\frac{w+z}{w-z}(\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(w) - \Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z))$ 是关于 z（以及关于 w）的 Laurent 多项式。根据（50），这个多项式与 0 处的 z 幂级数

$$\Big(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{w^k}\Big)\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(w) - \Big(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{w^k}\Big)\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z), \tag{68}$$

以及 ∞ 处的 z 幂级数相同

$$\Big(-1-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{w^k}{z^k}\Big)\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(w)-\Big(-1-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{w^k}{z^k}\Big)\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z). \tag{69}$$

因此，我们可以应用 L_j 泛函，得到

$$\widetilde{\Psi}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(z)=R^{(0)}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(z)-\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z)F_j^{(0)}(z)+L_j[\Phi_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}}(w)], \tag{70}$$

$$\widetilde{\Psi}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(z)=R^{(\infty)}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(z)-\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z)F_j^{(\infty)}(z)+L_j[\Phi_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}}(w)]. \tag{71}$$

$\sim$ $\sim$由 (66)–(67) 可知，$\Psi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},\ j}$ 满足等式 (53)–(54)，这意味着 $\Psi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},\ j}=\Psi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},\ j}$。

反过来，给定 $\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$ 以及如 (55) 中相应的 $\Psi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},\ j}$，按 (64)–(65) 定义 $R_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},\ j}$。如上所述，我们证明它满足 (66) 和 (67)，由此得到 (53)、(54)。□

我们还引入相关的 Hermite–Pad´e 问题

$$\Phi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z)F_j^{(0)}(z)-\Psi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(z)=\mathcal{O}(z^{n_j+1}),\qquad z\to 0, \tag{72}$$

$$\Phi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z)F_j^{(\infty)}(z)-\Psi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(z)=\mathcal{O}(z^{-m_j}),\qquad z\to \infty, \tag{73}$$

对于 Laurent 多项式

$$\Phi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}},\Psi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},1},\dots,\Psi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},r}\in \operatorname{span}\big\{z^k\big\}_{k=-|\boldsymbol{m}|}^{|\boldsymbol{n}|}. \tag{74}$$

定理 3.3。 任何满足 (72)、(73)、(74) 的 ***Laurent*** 多项式 $\Phi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$ 都必须满足正交关系 (32)，且 $\Psi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},\ j}$ 由下式给出

$$\Psi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(z)=L_j\Big[\frac{w+z}{w-z}\big(\Phi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z)-\Phi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(w)\big)\Big]+L_j[\Phi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(w)]. \tag{75}$$

反过来，任何满足，张成空间条件(32) 的 ***Laurent*** 多项式 $\Phi^*_{\boldsymbol{nm}}\in\big\{z^k\big\}_{k=-|\boldsymbol{m}|}^{|\boldsymbol{n}|}$，都能与 ***Laurent*** 多项式(75)一起，解出 ***Hermite–Pad´e*** 问题(72)、(73)、(74) 。

证明。 采用与定理 3.1 证明中相同的方法。(75) 中的负号源于这样一个事实：展开 (64)和(65)时，附加项(w)对于 $R^{(\infty)}$ 会消失，但对于 $R^{(0)}$则不会。□

4. A General Two-Point Hermite-Padé Problem of Type I

再次设 $\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^r$ 和 $\boldsymbol{m}\in\mathbb{N}^r$ 已给定。现在我们考虑两点 Hermite– Pad´e 问题，它可视为上一节中问题 (52)、(53)、(54) 的对偶问题。

令 $F_{(0)\,j}$, $F_j^{(\infty)}$为与（25）中的线性泛函 L_j相关联的形式级数（49）。与前文一样，如果 L_j 对应于相对于概率测度进行积分（如（26）所示），那么 $F_{(0)\,j}$和 $F_j^{(\infty)}$ 就是 Carath´eodory 函数

$F_j(z)$（7）在 0 和 ∞处的幂级数展开。我们关注以下逼近问题的解:

$$\sum_{j=1}^{r} \Xi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(z) F_j^{(0)}(z) + \Upsilon_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) = \mathcal{O}(z^{|\boldsymbol{m}|}), \qquad z \to 0, \tag{76}$$

$$\sum_{j=1}^{r} \Xi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(z) F_j^{(\infty)}(z) + \Upsilon_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) = \mathcal{O}(z^{-|\boldsymbol{n}|}), \qquad z \to \infty, \tag{77}$$

对于 Laurent 多项式

$$\Xi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(z) \in \operatorname{span}\left\{z^k\right\}_{k=-n_j}^{m_j-1}, \qquad \Upsilon_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) \in \operatorname{span}\left\{z^k\right\}_{k=-N}^{M-1}, \tag{78}$$

其中 $N := \max\{n_1, \ldots, n_r\}$, $M := \max\{m_1, \ldots, m_r\}$。

定理 4.1。 若 *Laurent* 多项式 $\boldsymbol{\Xi}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}} = (\Xi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},\,1}, \ldots, \Xi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},\,r})$ 和 $\Upsilon_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$满足 (76)、(77)、(78)，则 $\boldsymbol{\Xi}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$ 满足正交关系 (34a)，且 $\Upsilon_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$由下式给出

$$\Upsilon_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) = \sum_{j=1}^{r} L_j\Big[\frac{w+z}{w-z}\big(\Xi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(w) - \Xi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(z)\big)\Big] + \delta_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}} \sum_{j=1}^{r} L_j[\Xi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(w)], \tag{79}$$

其中常数 $\delta_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$ 由下式给出

$$\delta_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}} = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{m} = \boldsymbol{0} \ \textit{and} \ \boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{0}, \\ -1, & \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0} \ \textit{and} \ \boldsymbol{m} \neq \boldsymbol{0}, \\ 0, & \textit{otherwise}. \end{cases} \tag{80}$$

反过来，任何满足 $\Xi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},\ j} \in$张成空间 $\left\{z^k\right\}_{k=-n_j}^{m_j-1}$ 且满足 (34a) 的向量 $\boldsymbol{\Xi}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}} = (\Xi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},\,1}, \ldots, \Xi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},\,r})$，连同 *Laurent* 多项式 (79)，均满足 ***Hermite–Padé*** 问题 (76)、(77)、(78) 。

证明。 将$\Xi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},\ j}$ 和 $\Upsilon_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$ 写成如下形式

$$\Xi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(z) = \kappa_{-n_j,j} z^{-n_j} + \kappa_{-n_j+1,j} z^{-n_j+1} + \ldots + \kappa_{m_j-1,j} z^{m_j-1},$$
$$\Upsilon_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) = \lambda_{-N} z^{-N} + \lambda_{-N+1} z^{-N+1} + \ldots + \lambda_{M-1} z^{M-1}.$$

我们令 $\kappa_{k,j} = 0$ ，若 $k \geq m_j$ 或 $k \leq -n_j - 1$，并令 $\lambda_k = 0$ ，若 $k \geq M$ 或 $k \leq -N - 1$。于是有

$$\Xi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j} F_j^{(0)} = a_{-n_j,j} z^{-n_j} + \ldots + a_{|\boldsymbol{m}|-1,j} z^{|\boldsymbol{m}|-1} + \mathcal{O}(z^{|\boldsymbol{m}|}), \qquad z \to 0,$$
$$\Xi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j} F_j^{(\infty)} = b_{m_j-1,j} z^{m_j-1} + \ldots + b_{-|\boldsymbol{n}|+1,j} z^{-|\boldsymbol{n}|+1} + \mathcal{O}(z^{-|\boldsymbol{n}|}), \quad z \to \infty,$$

其中有

$$a_{k,j} = \kappa_{k,j} c_{0,j} + 2\kappa_{k-1,j} c_{1,j} + \ldots + 2\kappa_{-n_j,j} c_{n_j+k,j} \tag{81}$$

对于 $k = -n_j, \ldots, |\boldsymbol{m}| - 1$，以及 $a_{k,j} = 0$ 对于 $k < -n_j$，并且

$$b_{k,j} = -\kappa_{k,j} c_{0,j} - 2\kappa_{k+1,j} c_{-1,j} - \ldots - 2\kappa_{m_j-1,j} c_{-m_j+k+1,j} \tag{82}$$

对于 $k = -|\boldsymbol{n}| + 1, \ldots, m_j - 1$，以及 $b_{k,j} = 0$ 对于 $k > m_j - 1$。

为了得到 (76) 和 (77)，我们必然需要

$$\lambda_k + \sum_{j=1}^{r} a_{k,j} = 0, \qquad k \le |\boldsymbol{m}| - 1, \tag{83}$$

$$\lambda_k + \sum_{j=1}^{r} b_{k,j} = 0, \qquad k \ge |\boldsymbol{n}| - 1. \tag{84}$$

特别地，这意味着

$$\sum_{j=1}^{r} a_{k,j} = \sum_{j=1}^{r} b_{k,j}, \quad k = -|\boldsymbol{n}| + 1, \dots, |\boldsymbol{m}| - 1, \tag{85}$$

将其与 (81)、(82) 和 (25) 结合，即得到 (34a)。由 (83) 和 (84) 还可知，$\Upsilon_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$ 由 $\boldsymbol{\Xi}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$唯一确定。注意，若 $k \ge M$，则 (83) 和 (84) 与 $\lambda_k = 0$ 相容（此时对所有 j，$b_{k,\,j} = 0$）；或者若 $k \le -N - 1$，则 (83) 和 (84) 与 $\lambda_k = 0$ 相容（此时对所有 j，$a_{k,\,j} = 0$）。

现在考虑形式幂级数

$$R^{(0)}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) = \sum_{j=1}^{r} \Big(L_j[\Xi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(w)] + 2 \sum_{k=1}^{\infty} z^k L_j[\Xi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(w) w^{-k}] \Big), \tag{86}$$

$$R^{(\infty)}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) = -\sum_{j=1}^{r} \Big(L_j[\Xi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(w)] + 2 \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} L_j[\Xi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(w) w^{k}] \Big). \tag{87}$$

利用 (36a)，得到

$$R^{(0)}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) = \sum_{j=1}^{r} L_j[\Xi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(w)] + \mathcal{O}(z^{|\boldsymbol{m}|}), \qquad z \to 0, \tag{88}$$

$$R^{(\infty)}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) = -\sum_{j=1}^{r} L_j[\Xi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(w)] + \mathcal{O}(z^{-|\boldsymbol{n}|}), \qquad z \to \infty. \tag{89}$$

只有当 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$ 时，(88) 中的常数项才相关，否则可以去掉。同样，只有当 $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{0}$时，(89) 中的常数项才相关。

现在记 $\widetilde{\Upsilon}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z)$为 (79) 的右端。显然，它是张成空间 $\{z^k\}_{k=-N}^{M-1}$中的一个 Laurent 多项式。将 (79) 的右端代数地展开为幂级数，得到

$$\widetilde{\Upsilon}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) = R^{(0)}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) - \sum_{j=1}^{r} \Xi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(z) F^{(0)}_j(z) + \delta_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}} \sum_{j=1}^{r} L_j[\Xi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(w)], \tag{90}$$

$$\widetilde{\Upsilon}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) = R^{(\infty)}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) - \sum_{j=1}^{r} \Xi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(z) F^{(\infty)}_j(z) + \delta_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}} \sum_{j=1}^{r} L_j[\Xi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(w)]. \tag{91}$$

将其与 (88) 和 (89) 结合，我们看到 (76)–(77) 对相同的 $\boldsymbol{\Xi}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$仍然成立，但将 $\Upsilon_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$ 替换为 $\widetilde{\Upsilon}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$。然而，证明表明，这唯一确定了 $\Upsilon_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$的所有系数 $\widetilde{\Upsilon}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$。这说明 $\Upsilon_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}} = \widetilde{\Upsilon}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$，并证明了 (79)。

反过来，给定 $\boldsymbol{\Xi}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$ 以及 (79) 中相应的 $\Upsilon_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$ ，按 (86)–(87) 定义 $R_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$ 。如上所述，我们证明它满足 (88) 和 (89)，由此便得到 (76)、(77)。□

“带星号”多项式对应的 I 型问题如下。我们要寻找 Laurent 多项式

$$\Xi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(z) \in \operatorname{span}\left\{z^k\right\}_{k=-n_j+1}^{m_j}, \qquad \Upsilon^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) \in \operatorname{span}\left\{z^k\right\}_{k=-N+1}^{M}, \tag{92}$$

满足条件的

$$\sum_{j=1}^{r} \Xi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(z) F_j^{(0)}(z) - \Upsilon^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) = \mathcal{O}(z^{|\boldsymbol{m}|}), \qquad z \to 0, \tag{93}$$

$$\sum_{j=1}^{r} \Xi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(z) F_j^{(\infty)}(z) - \Upsilon^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) = \mathcal{O}(z^{-|\boldsymbol{n}|}), \qquad z \to \infty. \tag{94}$$

定理 4.2。 满足 (92)、(93) 的任意向量 $\boldsymbol{\Xi}^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}} = (\Xi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},\,1}、\ldots、\Xi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},\,r})$ 必须满 (94) 足正交关系 (36a)，且 $\Upsilon^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$ 由下式给出

$$\Upsilon^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) = \sum_{j=1}^{r} \Big(L_j\Big[\frac{w+z}{w-z}\big(\Xi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(z) - \Xi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(w)\big)\Big] + \delta_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}} L_j[\Xi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(w)]\Big), \tag{95}$$

其中， $\delta_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$ 与(79)中相同。

反之，任何满足的向量 $\boldsymbol{\Xi}^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$ ，其中 $\Xi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},\,j} \in$ 张成空间 $\left\{z^k\right\}_{k=-n_j+1}^{m_j}$ ， (36a) 都与 （92）、（93）、（94） 以及 （95） 一起构成解。

5. Szegő Recurrence Relations

再次允许 $(\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}) \in \mathfrak{C}_{2r}$ ，如第 2 节所述。在此我们证明，Laurent 多项式 $\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$ 满足一族递推关系，这些关系可直接由我们在 [16] 中的早期结果推出。该工作仅限于如式 (26) 所示关于正测度的正交性，以及 非 *Laurent* 多项式。然而，其中的论证只需稍作修改，便可推广到矩泛函 (25) 的一般情形。由此得到以下推广结果。

定理 5.1。 假设以下方程中出现的所有 $\mathfrak{C}_{2r}$-指标都是正规的，我们有 *Szeg˝o* 递推关系

$$\Phi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) = \Phi^*_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}}(z) + \beta_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}} z \Phi_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}}(z), \tag{96}$$

$$\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) = \alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}} \Phi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) + \sum_{j=1}^{r} \rho_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j} z \Phi_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{m}}(z), \tag{97}$$

and

$$\boldsymbol{\Xi}^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) = \boldsymbol{\Xi}^*_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}}(z) - \alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}} z \boldsymbol{\Xi}_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}}(z), \tag{98}$$

$$\boldsymbol{\Xi}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) = -\beta_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}} \boldsymbol{\Xi}^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) + \sum_{j=1}^{r} \rho_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j} z \boldsymbol{\Xi}_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{m}}(z), \tag{99}$$

对于某些复数 $\rho_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},\ j}$。

若保持第一个指标不变，则可得到另一组关系。

定理 5.2. 假设下列方程中出现的指标均为正规指标，则有 *Szeg˝o* 递推关系

$$\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) = \Phi_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}-\boldsymbol{e}_k}(z) + \alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}} z^{-1} \Phi^*_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}-\boldsymbol{e}_k}(z), \tag{100}$$

$$\Phi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) = \beta_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}} \Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) + \sum_{j=1}^{r} \sigma_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j} z^{-1} \Phi^*_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}-\boldsymbol{e}_j}(z), \tag{101}$$

and

$$\boldsymbol{\Xi}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) = \boldsymbol{\Xi}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_k}(z) - \beta_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}} z^{-1} \boldsymbol{\Xi}^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_k}(z), \tag{102}$$

$$\boldsymbol{\Xi}^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) = -\alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}} \boldsymbol{\Xi}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) + \sum_{j=1}^{r} \sigma_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j} z^{-1} \boldsymbol{\Xi}^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_j}(z), \tag{103}$$

对于某些复数 $\sigma_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}$。

注 5.3. 可以形式上令 $\Phi_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{m}} = 0$ 和 $\rho_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j} = 0$，其中 $(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{m}) \notin \mathfrak{C}_{2r}$。作此选择后，即使某些指标 $(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j;\ \boldsymbol{m})$ 不属于 $\mathfrak{C}_{2r}$，等式 (97) 仍然成立。类似的修改也适用于 (101)。

定理 *5.1* 和 *5.2* 的证明。 递推关系 (96) 和 (97) 的证明与 [16,定理 3.1 和推论 3.3] 完全相同。

关系 (100) 和 (101) 则由定理 2.4 得出。

递推关系 (98) 和 (99) 的证明与 [16,定理 4.3] 中的论证类似，但根据备注 2.5 和 2.6 中的讨论作了相应修改。下面的命题 5.4 总结了将 [16,节 4]中的证明加以调整所需的主要修改。□

命题 5.4. 假设下列相应关系中出现的指标均为正规。

(i) 令$\kappa_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},\ j}$ 为$\Xi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},\ j}(z)$ 的 z^{-n_j} 系数，并令$\ell_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},\ j}$ 为$\Xi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},\ j}(z)$的 z^{m_j} 系数。则

$$\kappa_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{m},j} = \frac{1}{L_j[\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(w) w^{-n_j}]}, \tag{104}$$

$$\ell_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{m},j} = \frac{1}{L_j[\Phi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(w) w^{m_j}]}. \tag{105}$$

(ii) 我们有如下关系

$$\rho_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j} = \frac{L_j[\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(w)w^{-n_j}]}{L_j[\Phi_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{m}}(w)w^{-n_j+1}]}, \tag{106}$$

$$\sigma_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j} = \frac{L_j[\Phi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(w)w^{m_j}]}{L_j[\Phi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}-\boldsymbol{e}_j}(w)w^{m_j-1}]}. \tag{107}$$

此外，$\rho_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j} \neq 0$ 当且仅当 $(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{m})$ 正规时成立。同样，$\sigma_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j} \neq 0$ 当且仅当 $(\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_j)$ 正规时成立。

(iii) 以下关系成立：

$$\sum_{j=1}^{r} L_j\left[\Xi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(w)w^{-|\boldsymbol{m}|}\right] = -\beta_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}, \tag{108}$$

$$\sum_{j=1}^{r} L_j\left[\Xi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(w)w^{|\boldsymbol{n}|}\right] = -\alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}. \tag{109}$$

备注 *5.5*。注意，*(106)* 的右端只要求 $(\boldsymbol{n};\boldsymbol{m})$ 和 $(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{m})$ 正规。无需借助形如 $(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_\ell;\boldsymbol{m})$，$\ell \neq j$ 的指标的正规性，也可以推导出 *(97)*。在这种情况下，任意选择多项式 $\Phi_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_\ell;\boldsymbol{m}}$，$\ell \neq j$，都能使该关系成立。对于给定的 j，当 $(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{m})$ 正规时，$\rho_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}$ 唯一定义，并可通过 *(106)* 计算得出。同样，只要 $(\boldsymbol{n};\boldsymbol{m})$ 和 $(\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}-\boldsymbol{e}_j)$ 正规，$\sigma_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$ 就有定义。

注 5.6。容易看出，在定理 *2.4* 的设定下，我们有

$$\rho_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(\boldsymbol{L}^\sharp) = \bar{\sigma}_{\boldsymbol{m};\boldsymbol{n},j}(\boldsymbol{L}), \qquad \sigma_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}(\boldsymbol{L}^\sharp) = \bar{\rho}_{\boldsymbol{m};\boldsymbol{n},j}(\boldsymbol{L}), \tag{110}$$

并且如果每个 L_j 都与一个概率测度相关联，那么

$$\rho_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j} = \bar{\sigma}_{\boldsymbol{m};\boldsymbol{n},j}. \tag{111}$$

6. Compatibility relations

命题 6.1。假设下列方程中出现的指标均为正规，且 $k \neq \ell$，那么存在一个复数 $\gamma^{k\ell}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$ 使得

$$\Phi_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}} - \Phi_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_\ell;\boldsymbol{m}} = \gamma^{k\ell}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}, \tag{112}$$

$$\boldsymbol{\Xi}_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}} - \boldsymbol{\Xi}_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_\ell;\boldsymbol{m}} = \gamma^{k\ell}_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_k-\boldsymbol{e}_\ell;\boldsymbol{m}}\boldsymbol{\Xi}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}. \tag{113}$$

类似地，对于某个复数 $\eta^{k\ell}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$，

$$\Phi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_k} - \Phi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_\ell} = \eta^{k\ell}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}\Phi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}, \tag{114}$$

$$\boldsymbol{\Xi}^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}-\boldsymbol{e}_k} - \boldsymbol{\Xi}^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}-\boldsymbol{e}_\ell} = \eta^{k\ell}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}-\boldsymbol{e}_k-\boldsymbol{e}_\ell}\boldsymbol{\Xi}^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}. \tag{115}$$

证明。检查 $\Phi_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}} - \Phi_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_\ell;\boldsymbol{m}}$ 的正交关系和次数限制，并与 $\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$ 进行比较。由 $(\boldsymbol{n};\boldsymbol{m})$ 的正规性可得第一个关系，同样的论证也可证明其他关系。□

注 6.2。 与上一节类似，对于 $k \neq \ell$，我们有：

$$\gamma_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}^{k\ell} = \frac{L_\ell[\Phi_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}}(w)w^{-n_\ell}]}{L_\ell[\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(w)w^{-n_\ell}]}, \tag{116}$$

$$\eta_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}^{k\ell} = \frac{L_\ell[\Phi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_k}(w)w^{m_\ell}]}{L_\ell[\Phi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(w)w^{m_\ell}]}, \tag{117}$$

and

$$\gamma_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}^{k\ell}(\boldsymbol{L}^\sharp) = \bar{\eta}_{\boldsymbol{m};\boldsymbol{n}}^{k\ell}(\boldsymbol{L}), \qquad \eta_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}^{k\ell}(\boldsymbol{L}^\sharp) = \bar{\gamma}_{\boldsymbol{m};\boldsymbol{n},j}^{k\ell}(\boldsymbol{L}). \tag{118}$$

此外，当且仅当$(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k+\boldsymbol{e}_\ell;\boldsymbol{m})$ 是正规时，$\gamma_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}^{k\ell} \neq 0$ 成立；当且仅当$(\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_k+\boldsymbol{e}_\ell)$ 是正规时，$\eta_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}^{k\ell} \neq 0$ 成立。即使$(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_k-\boldsymbol{e}_\ell;\boldsymbol{m})$（分别是$(\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}-\boldsymbol{e}_k-\boldsymbol{e}_\ell)$）不正规，(113) 和 (115) 中的常数仍然存在（详情见 [16]）。

定理 6.3。 假设递推系数所需的所有指标均正规，从而这些系数有定义，则有以下偏差分方程

$$\alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}\beta_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}} + \sum_{j=1}^{r} \rho_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j} = 1, \tag{119}$$

$$\alpha_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}} - \alpha_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_\ell;\boldsymbol{m}} = \alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}\gamma_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}^{k\ell}, \tag{120}$$

$$\beta_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_\ell;\boldsymbol{m}} - \beta_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}} = \beta_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_\ell+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}}\gamma_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}^{k\ell}, \tag{121}$$

$$\rho_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},k}\gamma_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}^{k\ell} = \rho_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_\ell;\boldsymbol{m},k}, \gamma_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}}^{k\ell}. \tag{122}$$

同样，

$$\alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}\beta_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}} + \sum_{j=1}^{r} \sigma_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j} = 1, \tag{123}$$

$$\alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_\ell} - \alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_k} = \alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_\ell+\boldsymbol{e}_k}\eta_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}^{k\ell}, \tag{124}$$

$$\beta_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_k} - \beta_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_\ell} = \beta_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}\eta_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}^{k\ell}, \tag{125}$$

$$\sigma_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},k}\eta_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}^{k\ell} = \sigma_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_\ell,k}, \eta_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}-\boldsymbol{e}_k}^{k\ell}. \tag{126}$$

证明。 (119) 可通过比较 (97) 中的首项系数得出，而 (120) 可通过比较 (112) 中的最低次系数得出。(121) 可由 (113) 和 (108) 得到。(122) 可直接由 (106) 和 (116) 得出。类似的论证随后可推出对偶关系 (123)-(126)。□

7. Consequences of the Szegő Relations

除了前几节中的主要递推关系外，我们还想提及一些可能有用的其他递推关系。在第 10 节证明 Szeg˝o 映射的杰罗尼穆斯关系时，我们用到了其中两个。

命题7.1. 假设下列方程中出现的所有指标都是正规的，则有如下递推关系

$$\Phi^*_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}}(z) = (1-\alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_k}\beta_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}})\Phi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) + \beta_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}} z\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_k}(z), \tag{127}$$

$$\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_k}(z) = (1-\alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_k}\beta_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}})\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) + \alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_k} z^{-1}\Phi^*_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}}(z), \tag{128}$$

and

$$\Xi^*_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}}(z) = (1-\alpha_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}}\beta_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}-\boldsymbol{e}_k})\Xi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) - \alpha_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}} z\Xi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}-\boldsymbol{e}_k}(z), \tag{129}$$

$$\Xi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}-\boldsymbol{e}_k}(z) = (1-\alpha_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}}\beta_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}-\boldsymbol{e}_k})\Xi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) - \beta_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}-\boldsymbol{e}_k} z^{-1}\Xi^*_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}}(z). \tag{130}$$

证明. 将指标 $(\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_k)$ 对应的 (100) 式乘以 $\beta_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}}z$，并利用 (96) 式代入项 $\beta_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}}z\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z)$，即可得到 (127)。其余方程可类似推出。□

推论7.2. 假设下文出现的指标均具有正规性，则有

$$\frac{L_k[\Phi_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_k}(w)w^{-n_k}]}{L_k[\Phi_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}}(w)w^{-n_k}]} = \frac{L_k[\Phi^*_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{m}}(w)w^{m_k}]}{L_k[\Phi^*_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}}(w)w^{m_k}]} = 1-\alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_k}\beta_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}}. \tag{131}$$

此外，$\alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_k}\beta_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}} \neq 1$ 当且仅当$(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\ \boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_k)$ 是正规时成立。

备注7.3. 若每个泛函均由关于 $\partial\mathbb{D}$ 上的某个概率测度的积分给出，则结合命题 *2.4* 可知 $|\alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k}| \neq 1$ 和$|\beta_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{n}}| \neq 1$。

证明。将（127）两边乘以 z^{m_k}，将（128）乘以 z^{-n_k}，然后应用 L_k得到（131）。若这些表达式为零，则$\Phi_{\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_k}$ 满足（$\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_k$）的所有正交关系，这与正规性矛盾。□

命题7.4. 假设下列相应方程中出现的所有指标均具有正规性，我们得到递推关系

$$z\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) = \Phi_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}}(z) - \alpha_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}}\Phi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) + \sum_{j=1}^{r}\rho_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}\gamma^{jk}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}} z\Phi_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{m}}(z), \tag{132}$$

$$z^{-1}\Phi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) = \Phi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_k}(z) - \beta_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_k}\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) + \sum_{j=1}^{r}\sigma_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}\eta^{jk}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}} z^{-1}\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}-\boldsymbol{e}_j}(z), \tag{133}$$

and

$$z\Xi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) = \Xi_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}}(z) + \beta_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}}\Xi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) + \sum_{j=1}^{r}\rho_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}\gamma^{jk}_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_k+\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{m}} z\Xi_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{m}}(z),$$

$$z^{-1}\Xi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) = \Xi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}-\boldsymbol{e}_k}(z) + \alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}-\boldsymbol{e}_k}\Xi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) + \sum_{j=1}^{r}\sigma_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}\eta^{jk}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}-\boldsymbol{e}_k+\boldsymbol{e}_j} z^{-1}\Xi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_j}(z)$$

证明。 由 (97) 和 (112)，我们有

$$\begin{aligned}\Phi_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}}(z) &= \alpha_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}}\Phi^*_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}}(z) + \sum_{j=1}^{r}\rho_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m},j}z\Phi_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k-\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{m}}(z)\\ &= \alpha_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}}\Phi^*_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}}(z) + \sum_{j\neq k}\rho_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m},j}z(\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) + \gamma^{kj}_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{m}}\Phi_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{m}}(z))\\ &\qquad + \rho_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m},k}z\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z).\end{aligned}$$

By 将和式中的两项分开，然后利用（119）和（122），最终得到

$$\begin{aligned}\Phi_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}}(z) = \alpha_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}}\Phi^*_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}}(z) + (1-\alpha_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}}\beta_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}})z\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z)\\ - \sum_{j=1}^{r}\rho_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}\gamma^{jk}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}z\Phi_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{m}}(z).\end{aligned}$$

这与 (96) 结合即可得到第一个等式。再由命题 2.4 可得第二个等式。I 型公式也可以用类似的方法推导。□

注 7.5。 递推关系也可以直接由正交关系推导，例如，验证 $\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) - z^{-1}\Phi_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}} + \alpha_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}}z^{-1}\Phi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z)$ 的正交关系和次数限制（使用与 [16] 的 *Szegˊo* 递推关系证明中类似的论证），即可得到第一个关系；随后应用 (106) 和 (116)。这种方法不需要指标为$(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k-\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{m})$的正规性， $j\neq k$。

若将 (132) 两边乘以 $\alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$，即可消去其中的系数 $\gamma^{jk}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$ 。应用 (120)，再利用 (97)，可得

$$\begin{aligned}\alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}z\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z) = \alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}\Phi_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}}(z) - \alpha_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}}\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z)\\ + \sum_{j=1}^{r}\alpha_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{m}}\rho_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}z\Phi_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{m}}(z). \quad (134)\end{aligned}$$

因此，最终结果将 $z\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z)$ 表示为最近邻项的函数，无须借助任何 Φ^*-多项式或 β-系数。在 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{0}$ 情形下，这是 [6] 的主要结果。用我们的递推系数表示时，在 $r=1$ 情形下，这恰好转化为单位圆正交多项式的三项递推关系 [23, 第 1.5] 节。在退化情形 $\alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}=0$ 下，这个关系基本上无法提供任何信息。

当然，也可以推导出 I 型多项式的类似公式，以及通过命题 2.4 得到的反向版本。

8. Heine formulas

假设 $(\boldsymbol{n};\boldsymbol{m})$ 是正规的，很容易验证行列式公式

$$\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z)=\frac{1}{\det T_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}}\det\begin{pmatrix} c_{|\boldsymbol{m}|-m_1,1} & \cdots & c_{-|\boldsymbol{n}|-m_1,1}\\ c_{|\boldsymbol{m}|-m_1+1,1} & \cdots & c_{-|\boldsymbol{n}|-m_1+1,1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{|\boldsymbol{m}|+n_1-1,1} & \cdots & c_{-|\boldsymbol{n}|+n_1-1,1}\\ \hdashline & \vdots & \\ \hdashline c_{|\boldsymbol{m}|-m_r,r} & \cdots & c_{-|\boldsymbol{n}|-m_r,r}\\ c_{|\boldsymbol{m}|-m_r+1,r} & \cdots & c_{-|\boldsymbol{n}|-m_r+1,r}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{|\boldsymbol{m}|+n_r-1,r} & \cdots & c_{-|\boldsymbol{n}|+n_r-1,r}\\ \hdashline z^{-|\boldsymbol{m}|} & \cdots & z^{|\boldsymbol{n}|} \end{pmatrix}, \tag{135}$$

其中 $T_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$ 由 (28) 给出。事实上，很容易看出，(135) 的右端具有 (29) 的形式。然后将其与 z^{-k} 相乘，对给定的 $k=-m_j$、……、n_j-1 应用 L_j，即可得到一个含有两行相同的行列式，从而推出 (30)。

类似地，

$$\Phi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z)=\frac{(-1)^{|\boldsymbol{n}|+|\boldsymbol{m}|}}{\det T_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}}\det\begin{pmatrix} c_{|\boldsymbol{m}|-m_1+1,1} & \cdots & c_{-|\boldsymbol{n}|-m_1+1,1}\\ c_{|\boldsymbol{m}|-m_1+2,1} & \cdots & c_{-|\boldsymbol{n}|-m_1+2,1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{|\boldsymbol{m}|+n_1,1} & \cdots & c_{-|\boldsymbol{n}|+n_1,1}\\ \hdashline & \vdots & \\ \hdashline c_{|\boldsymbol{m}|-m_r+1,r} & \cdots & c_{-|\boldsymbol{n}|-m_r+1,r}\\ c_{|\boldsymbol{m}|-m_r+2,r} & \cdots & c_{-|\boldsymbol{n}|-m_r+2,r}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{|\boldsymbol{m}|+n_r,r} & \cdots & c_{-|\boldsymbol{n}|+n_r,r}\\ \hdashline z^{-|\boldsymbol{m}|} & \cdots & z^{|\boldsymbol{n}|} \end{pmatrix}. \tag{136}$$

可以用与 [18]中相同的方法，为 I 型多项式 $\boldsymbol{\Xi}_{\boldsymbol{m};\boldsymbol{n}}$ 和 $\boldsymbol{\Xi}^*_{\boldsymbol{m};\boldsymbol{n}}$ 建立类似的公式。

由此可得第 5 节和第 6 节中所有递推系数的行列式表达式。下文中，我们将由（wL）$[w^k]:=L[w^{k+1}]$, $w\boldsymbol{L}=(wL_1,\ \ldots\ldots,\ wL_r)$定义的线性泛函（Christoffel 变换）记为 wL，类似地，$w^{-1}L$ 和 $w^{-1}\boldsymbol{L}$也采用同样的记法。最后，对于任意线性泛函系统 $\boldsymbol{M}$，我们将（28）中的矩阵记为 $T_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{M})$。

定理 8.1。

(i) 若$(\boldsymbol{n}<\text{style id='6'};\ \boldsymbol{m})\in\mathfrak{C}_{2r}$ 是正规，则

$$\alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}=(-1)^{|\boldsymbol{n}|+|\boldsymbol{m}|}\frac{\det T_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(w\boldsymbol{L})}{\det T_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{L})},\tag{137}$$

$$\beta_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}=(-1)^{|\boldsymbol{n}|+|\boldsymbol{m}|}\frac{\det T_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(w^{-1}\boldsymbol{L})}{\det T_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{L})}.\tag{138}$$

(ii) 若$(\boldsymbol{n};\,\boldsymbol{m})$、$(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j;\,\boldsymbol{m})\in\mathfrak{C}_{2r}$ 均为正规，则

$$\rho_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}=\frac{\det T_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{m}}\det T_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{m}}}{(\det T_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}})^2},\tag{139}$$

并且若$(\boldsymbol{n};\,\boldsymbol{m})$、$(\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}-\boldsymbol{e}_j)\in\mathfrak{C}_{2r}$ 均为正规，则

$$\sigma_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}=\frac{\det T_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_j}\det T_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}-\boldsymbol{e}_j}}{(\det T_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}})^2}.\tag{140}$$

(iii) 若$(\boldsymbol{n};\,\boldsymbol{m})$、$(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\,\boldsymbol{m})$、$(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_\ell;\,\boldsymbol{m})\in\mathfrak{C}_{2r}$ 均为正规，且 $k<\ell$，则

$$\gamma^{k\ell}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}=\frac{\det T_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_\ell+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}}\det T_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}}{\det T_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_\ell;\boldsymbol{m}}\det T_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}}},\tag{141}$$

并且若$(\boldsymbol{n};\,\boldsymbol{m})$、$(\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_k)$、$(\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_\ell)\in\mathfrak{C}_{2r}$ 均为正规，且 $k<\ell$，则

$$\eta^{k\ell}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}=\frac{\det T_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_\ell+\boldsymbol{e}_k}\det T_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}}{\det T_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_\ell}\det T_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_k}}.\tag{142}$$

(iv) 若$(\boldsymbol{n};\,\boldsymbol{m})$，$(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\,\boldsymbol{m})$，$(\boldsymbol{n};\,\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_k)\in\mathfrak{C}_{2r}$ 均为正规

$$1-\alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_k}\beta_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}}=\frac{\det T_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_k}\det T_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}}{\det T_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{m}}\det T_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_k}}.\tag{143}$$

证明。对于 (i) 和 (ii)，我们只需找出 (135) 的 $z^{-|\boldsymbol{m}|}$ 系数以及 (136) 的 $z^{|\boldsymbol{n}|}$系数。

现在注意到，由 (135) 和 (136) 可得

$$L_j[\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(w)w^{-n_j}]=(-1)^{\sum_{s=j+1}^{r}(n_s+m_s)}\frac{\det T_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{m}}}{\det T_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}},\tag{144}$$

$$L_j[\Phi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(w)w^{m_j}]=(-1)^{\sum_{s=1}^{j-1}(n_s+m_s)}\frac{\det T_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_j}}{\det T_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}}.\tag{145}$$

然后，将这一结果与 (106) 和 (107) 结合即可得到 (ii)；与 (116) 和 (117) 结合即可得到 (iii)；与 (131) 结合即可得到 (iv)。□

9. The Christoffel–Darboux formula

按照 [16, 定理 6.1] 中相同的论证，我们可以建立广义 Christoffel–Darboux 公式。在这一表述中，路径可以从 0 以外的点出发；由于我们采用了 $\boldsymbol{\Xi}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}$ 的定义，最终表达式也更为简洁，详见注释2.5、2.6。

定理 9.1。设 $\boldsymbol{m}\in\mathbb{N}^r$ 为固定值，并将 $(\boldsymbol{n}_k;\boldsymbol{m})_{k=0}^{N}$ 视为一条由 $\mathfrak{C}_{2r}$-多重指标构成的路径，其中 $\boldsymbol{n}_0=-\boldsymbol{m}$，且对某个 $1\le l_k\le r$有 $\boldsymbol{n}_{k+1}-\boldsymbol{n}_k=\boldsymbol{e}_{l_k}$。假设所有

路径上的多重指标以及属于 $\mathfrak{C}_{2r}$ 的所有相邻指标均为正规。则有克里斯托费尔–达布公式

$$\begin{aligned}&(\xi - z)\sum_{k=0}^{N-1}\Phi_{\boldsymbol{n}_k;\boldsymbol{m}}(z)\Xi_{\boldsymbol{n}_{k+1};\boldsymbol{m}}(\xi)\\&\quad=\Phi^*_{\boldsymbol{n}_N;\boldsymbol{m}}(z)\Xi^*_{\boldsymbol{n}_N;\boldsymbol{m}}(\xi) - z\xi\sum_{j=1}^{r}\rho_{\boldsymbol{n}_N;\boldsymbol{m},j}\Phi_{\boldsymbol{n}_N-\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{m}}(z)\Xi_{\boldsymbol{n}_N+\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{m}}(\xi)\end{aligned}\tag{146}$$

and

$$\begin{aligned}&(z - \xi)\sum_{k=0}^{N-1}\Phi^*_{\boldsymbol{m};\boldsymbol{n}_k}(z)\Xi^*_{\boldsymbol{m};\boldsymbol{n}_{k+1}}(\xi)\\&\quad=z\xi\Phi_{\boldsymbol{m};\boldsymbol{n}_N}(z)\Xi_{\boldsymbol{m};\boldsymbol{n}_N}(\xi) - \sum_{j=1}^{r}\sigma_{\boldsymbol{m};\boldsymbol{n}_N,j}\Phi^*_{\boldsymbol{m};\boldsymbol{n}_N-\boldsymbol{e}_j}(z)\Xi^*_{\boldsymbol{m};\boldsymbol{n}_N+\boldsymbol{e}_j}(\xi).\end{aligned}\tag{147}$$

证明。 在表达式中

$$\Phi_{\boldsymbol{n}_k;\boldsymbol{m}}(z)\Xi_{\boldsymbol{n}_{k+1};\boldsymbol{m}}(\xi) - z\xi^{-1}\Phi_{\boldsymbol{n}_k;\boldsymbol{m}}(z)\Xi_{\boldsymbol{n}_{k+1};\boldsymbol{m}}(\xi)$$

对第一项使用 Szeg˝o 递推关系（97），然后使用（98）；接着使用（99），再使用（96）。随后，证明 [16, 定理 6.1] 中的论证便可直接套用。

第二个公式（147）在应用命题 2.4 和备注 5.6 后，由（146）推出。□

10. Szegő Mapping

我们来回顾一下实数轴上正交多项式和多重正交多项式理论中的主要概念。这些多项式相对于作用于复多项式空间（具有非负幂，与（25）中的 Laurent 情形相反）的矩泛函而言。为此，令 M 定义如下:

$$M[x^k] = m_k, \qquad k \in \mathbb{N},\tag{148}$$

其中 m_k 是任意复数 s.

通常， M 由实数轴 $\mathbb{R}$ 上的概率测度 γ 诱导，且该测度具有所有有限阶矩

$$M[x^k] = \int_{\mathbb{R}} x^k d\gamma(x), \qquad k \in \mathbb{N}.\tag{149}$$

关于 M 的正交多项式由 $\deg P_n = n$ 定义，并且

$$M[P_n(x)x^k] = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

回忆一下，若对每个正整数 n，都存在唯一的首一P_n 且 $\deg P_n = n$，则称矩泛函 M 是拟定的。这等价于所有汉克尔矩阵 $(m_{j+\ell})_{j}^{n-1}$，$_{\ell=0}$ 均可逆。若 M 与 $\mathbb{R}$ 上的正测度相关，且该测度具有有限阶矩和无限支撑，如式（149）所示，则这一条件自动成立。

类似地，若在 Laurent多项式空间 (25) 上的矩泛函 L 对每个 Φ_n 都存在且唯一一个次数为 $\Phi_n = n$ 的首一多项式,

$$L[\Phi_n(z)z^{-k}] = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

则称其为拟定的。这等价于所有 Toeplitz矩阵 $(c_{j-\ell})_{j,\ell=0}^{n-1}$ 均可逆；如果 L 与 $\partial\mathbb{D}$ 上具有无限支撑的正测度相关联（如 (26) 所示），则这一性质自动成立。

给定一个由矩泛函 $\boldsymbol{M}=(M_1, \ldots\ldots, M_r)$（148）组成的系统，关于多重指标 $\boldsymbol{n}$ 和系统 $\boldsymbol{M}$ 的第二类多重正交多项式 $P_{\boldsymbol{n}}$ 是次数至多为 $|\boldsymbol{n}|$ 的非零多项式，并满足正交关系

$$M_j[P_{\boldsymbol{n}}(x)x^k]=0, \qquad k=0,\ldots,n_j-1, \qquad j=1,\ldots,r. \tag{150}$$

这样的多项式总是存在。若存在唯一的 $P_{\boldsymbol{n}}$，且其 $x^{|\boldsymbol{n}|}$系数等于 1，我们就称指标 $\boldsymbol{n}$ 是正规的。

I 型多项式是非零向量 $\boldsymbol{A_n}=(A_{\boldsymbol{n},\,1}, \ldots\ldots, A_{\boldsymbol{n},\,r})$，但 $\boldsymbol{A_0}=\boldsymbol{0}$ 除外，其中 $A_{\boldsymbol{n},\,j}$ 对每个 $j=1, \ldots\ldots, r$ 都是次数至多为 n_j-1 的多项式，并且

$$\sum_{j=1}^{r} M_j[A_{\boldsymbol{n},j}(x)x^k]=0, \qquad k=0,\ldots,|\boldsymbol{n}|-2. \tag{151}$$

$\boldsymbol{n}\neq\boldsymbol{0}$ 是正规的，当且仅当存在唯一的 $\boldsymbol{A_n}$，满足

$$\sum_{j=1}^{r} M_j[A_{\boldsymbol{n},j}(x)x^{|\boldsymbol{n}|-1}]=1. \tag{152}$$

当 $\boldsymbol{n}$ 是正规的时，我们总是采用上述 I 型和 II 型多项式的归一化。

假设所有指标都是正规的（此时称该系统为完美系统），则存在 $[11,28]$ 个系数 $a_{\boldsymbol{n},\,j}$，$b_{\boldsymbol{n},\,j}$，称为最近邻递推系数，使得

$$xP_{\boldsymbol{n}}(x)=P_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k}(x)+b_{\boldsymbol{n},k}P_{\boldsymbol{n}}(x)+\sum_{j=1}^{r} a_{\boldsymbol{n},j}P_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j}(x), \tag{153}$$

以及

$$x\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{n}}(x)=\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_k}(x)+b_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_k,k}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{n}}(x)+\sum_{j=1}^{r} a_{\boldsymbol{n},j}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_j}(x). \tag{154}$$

回顾第 1.3 节中针对测度的 Szeg˝o 映射定义。将这一构造推广到线性泛函是很容易的。事实上，等式

$$L[(w+w^{-1})^k]=M[x^k], \qquad k\in\mathbb{N} \tag{155}$$

在多项式空间上的所有线性泛函 M （即（148））与 Laurent 多项式空间上的所有线性泛函 L （即（25））之间建立了一一对应关系，并满足对称性

$$L[w^k]=L[w^{-k}], \qquad k\in\mathbb{N}. \tag{156}$$

我们将这一对应记为 $L=\mathsf{Sz}(M)$，其逆对应记为 $M=\mathsf{Sz}^{-1}(L)$。

具有对称性（156）的 Laurent 多项式上的泛函表现出许多与我们在命题 2.4 和备注 5.6 中观察到的性质相似的性质。

命题 10.1。设 $L_1, \ldots, L_r$ 是 *Laurent* 多项式空间上的线性泛函，每个泛函都满足对称条件 (156)。

当且仅当 $(\boldsymbol{m};\,\boldsymbol{n})$ 正规时，$(\boldsymbol{n};\boldsymbol{m})$ 也正规，并且

$$\Phi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z)=\Phi_{\boldsymbol{m};\boldsymbol{n}}(1/z),\qquad \Xi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}(z)=\Xi_{\boldsymbol{m};\boldsymbol{n}}(1/z), \tag{157}$$

$$\alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}=\beta_{\boldsymbol{m};\boldsymbol{n}},\qquad \rho_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}=\sigma_{\boldsymbol{m};\boldsymbol{n},j},\qquad \gamma^{kl}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m},j}=\eta^{kl}_{\boldsymbol{m};\boldsymbol{n},j}, \tag{158}$$

持有。

特别地，在每个 L_j 都对应于单位圆上关于一个在 $e^{i\theta}\mapsto e^{-i\theta}$ 下保持不变的正测度进行积分这一特殊情形中，命题 2.4 和 10.1 合起来意味着 $\alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}=\beta_{\boldsymbol{m};\boldsymbol{n}}$ 和 $\rho_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{m}}=\sigma_{\boldsymbol{m};\boldsymbol{n}}$ 为实数。现在我们可以建立实数轴上的多重正交性与单位圆上的多重正交性之间的关系。对于 $r=1$，这种关系可追溯至 Szeg˝o [27]（对于泛函而言，这一关系实际上见于 [8, 9], ，另见 [24, 第 13] 节和 [7]）。

定理 10.2。设 $\boldsymbol{L}=(L_1,\ldots,L_r)$ 是定义在 $\partial\mathbb{D}$ 上的线性泛函系统，满足(156)，并令 $\boldsymbol{M}$ 由 $M_j=\mathrm{Sz}^{-1}(L_j)$，$j=1,\ldots,r$ 定义。

如果 $(\boldsymbol{n};\ \boldsymbol{n})$ 和 $(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_j;\ \boldsymbol{n})$ 对于所有 $\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^r$ 以及 $j=1$、...、r 都是 $\boldsymbol{L}$ 的正规情形，那么 $\boldsymbol{M}$ 是完美的（即，每个 $\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^r$ 对于 $\boldsymbol{M}$ 都是正规的），并且

$$P_{\boldsymbol{n}}(z+z^{-1})=\frac{1}{(1+\alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}})}\Big(\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}}(z)+\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}}(1/z)\Big) \tag{159}$$

$$=\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j}(z)+\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j}(1/z). \tag{160}$$

此外，$\alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}}$ 必然是 $\neq-1$。

证明。Laurent 多项式 $f_{\boldsymbol{n}}(z)=\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}}(z)+\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}}(1/z)$ 属于张成空间 $(z^{-|\boldsymbol{n}|},\ \ldots,\ z^{|\boldsymbol{n}|})$，并满足 $f_{\boldsymbol{n}}(z)=f_{\boldsymbol{n}}(1/z)$。因此（例如参见 [24, 引理 13.1。4]），存在某个次数至多为 $|\boldsymbol{n}|$ 的多项式 $Q_{\boldsymbol{n}}(z)$，使得 $Q_{\boldsymbol{n}}(z+z^{-1})=\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}}(z)+\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}}(1/z)$。

由于每个 $L_j[w^k]=L_j[w^{-k}]$，我们处于命题 10.1 的情形中，因此 $\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}}(1/z)=\Phi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}}(z)$。于是

$$M_j[Q_{\boldsymbol{n}}(x)x^k]=L_j[Q_{\boldsymbol{n}}(w+w^{-1})(w+w^{-1})^k] \tag{161}$$

$$=L_j[\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}}(w)(w+w^{-1})^k]+L_j[\Phi^*_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}}(w)(w+w^{-1})^k] \tag{162}$$

$$=0,\qquad k=0,\ldots,n_j-1, \tag{163}$$

根据（30）和（32），因此 $Q_{\boldsymbol{n}}$ 满足位于 $\boldsymbol{n}$ 处的 $\boldsymbol{M}$II 型正交条件（150）。

现在让我们结合 $k=n_j$ 考虑（161）–（162）。我们得到

$$M_j[Q_{\boldsymbol{n}}(x)x^{n_j}]=L_j[\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}}(w)w^{-n_j}]+L_j[\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}}(1/w)w^{n_j}] \tag{164}$$

$$=2L_j[\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}}(w)w^{-n_j}], \tag{165}$$

$$=\frac{2\det T_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{n}}}{\det T_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}}}, \tag{166}$$

在最后两步中，我们先使用了对称性 (156)，然后使用了 (144)。根据命题 2.1(i) 以及 $(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{n})$ 的正规性，我们得到最后一个表达式非零。现在可以应用判据 [15, Thm 2.19]，从而得出 $\boldsymbol{M}$ 是完美的。注意，$Q_{\boldsymbol{n}}$ 的 $z^{|\boldsymbol{n}|}$ 系数等于 $1+\alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}}$。这证明了 $1+\alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}}\neq0$，并且 (159) 成立。

最后，对 $f(z) = \Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j}(z) + \Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j}(1/z)$ 应用相同的论证（注意，根据假设，$(\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j) = ((\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j)+\boldsymbol{e}_j;\ \boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j)$ 是正规的），重复 (161)–(163) 中的论证，并注意到f 的 $z^{|\boldsymbol{n}|}$ 系数为 1，即可看出 (159) 成立。□

在下一个结果中，我们建立 Geronimus 关系的一般化形式，该关系将 μ的 Verblunsky系数与 γ的雅可比系数联系起来；并与原始的 [8]Geronimus 关系 (19)–(20) 作比较。

定理 10.3. 在前一定理的设定下，我们有

$$a_{\boldsymbol{n},j} = \frac{(1+\alpha_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j})(1-\alpha^2_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{n}})\rho_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n},j}}{1+\alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}}}, \tag{167}$$

$$b_{\boldsymbol{n},j} = \sum_{\ell=1}^{r} \rho_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n},\ell}\gamma^{\ell j}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}} + \alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j} - \alpha_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{n}} - \alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}}\alpha_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{n}} - \alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}}\alpha_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{n}}. \tag{168}$$

注记 10.4. 当 $\alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}} \neq 0$ 时，我们可以消去 $\gamma^{\ell j}_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}}$，得到

$$b_{\boldsymbol{n},j} = \frac{1}{\alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}}}\left(-\alpha_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{n}} + \sum_{\ell=1}^{r}\alpha_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_\ell;\boldsymbol{n}}\rho_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n},\ell}\right) + \alpha_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j} - \alpha_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{n}} - \alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}}\alpha_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{n}}. \tag{169}$$

证明。 由 (153) 和 (150)，再由 (154) 和 (151)–(152)，可得

$$a_{\boldsymbol{n},j} = \frac{M_j[P_{\boldsymbol{n}}(x)x^{n_j}]}{M_j[P_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j}(x)x^{n_j-1}]}, \tag{170}$$

$$b_{\boldsymbol{n},j} = k_{|\boldsymbol{n}|-1}(P_{\boldsymbol{n}}) - k_{|\boldsymbol{n}|}(P_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_j}), \tag{171}$$

其中， $k_j(P)$ 表示多项式 P 的 z^j 系数。

利用 (170)、(159) 和 (165)，我们得到

$$a_{\boldsymbol{n},j} = \frac{1+\alpha_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j}}{1+\alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}}}\frac{2L_j[\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}}(z)z^{-n_j}]}{L_j[\Phi_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{n}}(z)z^{-n_j+1}]}\frac{L_j[\Phi_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{n}}(z)z^{-n_j+1}]}{2L_j[\Phi_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j}(z)z^{-n_j+1}]}. \tag{172}$$

现在，由（106）、（131）以及对称性（158）可得（167）。

对于第二个关系，我们采用证明 [24, Thm 13.1.7] 中的技巧。由（171）和（160），我们得到

$$b_{\boldsymbol{n},j} = (k_{|\boldsymbol{n}|-1}(\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j}) + \alpha_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j}) - (k_{|\boldsymbol{n}|}(\Phi_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{n}}) + \alpha_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{n}}) \tag{173}$$

$$= (k_{|\boldsymbol{n}|-1}(\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}}) - k_{|\boldsymbol{n}|}(\Phi_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{n}})) + (\alpha_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j} - \alpha_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{n}}) - \alpha_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}}\beta_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_j}, \tag{174}$$

其中最后一行用到了（100）。现在，由于可直接根据（132）计算$k_{|\boldsymbol{n}|-1}(\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}}) - k_{|\boldsymbol{n}|}(\Phi_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{n}})$，得到（168），再利用对称性（158），因此结论成立。对于该注记，我们则通过（134）计算 $k_{|\boldsymbol{n}|-1}(\Phi_{\boldsymbol{n};\boldsymbol{n}}) - k_{|\boldsymbol{n}|}(\Phi_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_j;\boldsymbol{n}})$。□

References

[1] A.I. Aptekarev，多重正交多项式，计算与应用数学杂志 **99** （1998），423– 447。

[2] G.A. Baker 和 P. Graves-Morris，$Pad\acute{e}$ 逼近，第二版，《数学及其应用百科全书》第 59 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1996年。

[3] B. Beckermann、J. Coussement 和 W. Van Assche，多重 Wilson 与 Jacobi-Pi ˜ neiro 多项式，逼近理论杂志 132 (2005)，第 2 期，155–181。[4] A. Bultheel，Laurent 级数及其 Pad ´é 逼近，《算子理论：进展与应用》第 27 卷，Birkh¨äuser 出版社，巴塞尔，1987年。[5] T.S. Chihara，《正交多项式导论》，《数学及其应用》第 13 卷，Gordon and Breach 科学出版社，1978年。[6] R. Cruz-Barroso、C. D´íaz Mendoza 和 R. Orive，单位圆上的多重正交多项式：正规性与递推关系，计算与应用数学杂志 284 (2015)，115–132。[7] M. Derevyagin 和 B. Simanek，不定度量下正交多项式的渐近性质，数学分析与应用杂志 460 (2018)，第 2 期，777–793。[8] Ya.L. Geronimus，关于三角矩问题，数学年刊（第 2 辑）47 (1946)，742–761。[9] Ya.L. Geronimus，《正交多项式理论》，国家技术理论文献出版社，莫斯科—列宁格勒，1950年。[10] E.J. Huertas 和 M. Ma˜nas，单位圆上的混合型多重正交 Laurent 多项式，计算与应用数学杂志 475 (2026)，论文编号 117037。[11] M.E.H. Ismail，《单变量经典与量子正交多项式》，《数学及其应用百科全书》第 98 卷，剑桥大学出版社，2005年。[12] W.B. Jones、O. Nj˚astadt 和 W.J. Thron，单位圆相关的矩理论、正交多项式、求积与连分数，伦敦数学会通报 21 (1989)，第 2 期，113–152。[13] R. Kozhan，单位圆上的 Nikishin 系统，审稿中，arXiv:2410.20813。[14] R. Kozhan 和 M. Vaktn¨as，单位圆上的 Angelesco 系统与 AT 系统，审稿中，arXiv:2410.12094。[15] R. Kozhan 和 M. Vaktn¨as，Christoffel 变换与多重正交多项式，计算与应用数学杂志 476 (2026)，论文编号 117121。[16] R. Kozhan 和 M. Vaktn¨as，单位圆上多重正交多项式的 Szeg ˝o 递推关系，美国数学会会刊 152 (2024)，第 11 期，2983–2997。[17] R. Kozhan 和 M. Vaktn¨as，多重正交多项式的零点：位置与交错，伦敦数学会通报，即将刊出，arXiv:2503.15122。[18] A.B.J. Kuijlaars，多重正交多项式系综，《正交多项式与逼近理论的最新趋势》，《当代数学》第 507 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯（2010），155–176。[19] A. Mart´ínez-Finkelshtein 和 W. Van Assche，什么是……多重正交多项式？，美国数学会通讯 63 (2016)，1029–1031。[20]J. M´ínguez Ceniceros 和 W. Van Assche，单位圆上的多重正交多项式，构造性逼近 28 (2008)，173–197。[21] E.M. Nikishin 和 V.N. Sorokin，有理逼近与正交性，《数学专著译丛》第 92 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1991年。俄文版由 Ralph P. Boas 翻译。[22] F. Peherstorfer 和 R. Steinbauer，关于泛函的正交多项式的刻画，《计算与应用数学杂志》65 (1995)，339–355。[23] B. Simon，《单位圆上的正交多项式》，第 1 部分：经典理论，《专题讲座》第 54 卷，美国数学会，2004年。[24] B. Simon，《单位圆上的正交多项式》，第 2 部分：谱理论，《专题讲座》第 54 卷，美国数学会，2005年。[25] B. Simon，Szeg ˝o 定理及其后续发展：正交多项式扰动的谱理论 L^2，《Porter 讲座》，普林斯顿大学出版社，2011年。

[26] G. Szeg˝o，正交多项式，《美国数学会讨论会出版物》，第XXIII卷，第4版，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1975年。.[27] G. Szeg˝o，关于按正交系统的多项式展开解析函数，《数学年刊》**82**(1921年)，188-212。[28] W. Van Assche，多重正交多项式的最近邻递推关系，逼近理论杂志 **163**(2011年)，1427–1448。