arXiv:2601.04788v1 [physics.flu-dyn] 8 Jan 2026

湍流级联多分支壳模型中的不动点集合

Flavio Tuteri[a], Sergio Chibbaro[b], Alexandros Alexakis[a]

[a]法国巴黎高等师范学院物理实验室，*ENS*，*PSL*大学，法国国家科学研究中心，索邦大学，巴黎西岱大学，巴黎，*F-75005*，法国[b]数字科学跨学科实验室，*LISN*，巴黎萨克雷大学，法国国家科学研究中心，*CentraleSupélec*，法国国家信息与自动化研究院，奥赛，*F-91405*，法国

摘要

本文研究定义在二叉树拓扑上的湍流壳模型的定常解。每个节点的振幅表示为其祖先对应的振幅乘子的乘积，从而为级联过程提供递归表示。树的生长遵循一条几何规则；我们证明存在一族连续的不动点（包括柯尔莫哥洛夫解），它们维持着严格的正向能量级联。沿随机选取的分支进行采样，可定义一个齐次马尔可夫链，并借助相关费曼–卡茨算子的谱性质，对扩展自相似性和间歇性进行随机刻画。数值模拟证实了理论预测，并表明多分支壳模型为探索跨尺度非线性能量传递的复杂性提供了一个简约而又富有物理内涵的框架。

关键词：壳层模型、p进拓扑、能量传递、不动点

1. 引言

解释湍流中守恒量跨尺度传递的现象学，仍是非平衡物理中的一个核心问题[1]。Richardson级联图景 [2]描述了能量从大尺度涡旋向逐渐更小尺度涡旋的渗流。要直接从纳维–斯托克斯方程追踪这一过程颇具挑战，因为非线性平流将所有尺度耦合在一起，而

电子邮箱地址：flavio.tuteri@phys.ens.psl.eu (Flavio Tuteri)

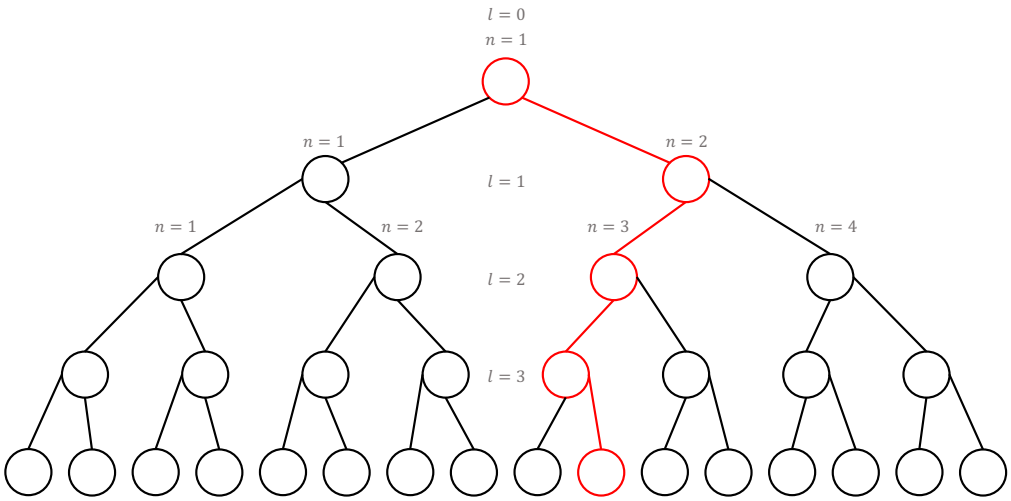

图 1：2进树的示意图，其中一条向下的路径以高亮显示。

压力场通过维持不可压缩性，将所有空间位置耦合起来。壳层模型 [3]提供了一个易于处理的框架，能够捕捉三维湍流的典型特征——正向平均能量通量、非高斯统计特性和混沌动力学，同时在数值上仍易于实现。

经典的单分支模型将级联编码为跨尺度的线性层级结构。它们通过将傅里叶空间粗粒化为按对数间隔排列的壳层，以启发式方式推导而来；每个壳层都对应一个动力学变量，用以表示相应尺度的速度振幅。随后，这些动力学变量彼此耦合，只保留最近邻之间的相互作用，并始终与 [4]保持一致。然而，这种表述抹平了流动的几何与拓扑结构，使得间歇性只能体现在动力学变量的时间行为中。

对湍流的观测揭示了空间局域且具有间歇性的能量传递，暗示着更复杂的分支结构。将壳层动力学嵌入多分支拓扑（如图 1 所示），为研究空间间歇性 [5] （与类理查森分裂相关）以及标准壳层链中观察到的时间间歇性 [6, 7]提供了一个统一框架。早期的数值研究——

——受到计算成本迅速攀升的阻碍：在解析更小尺度时，模态数量呈指数增长，因此难以研究定义在此类树结构上的壳模型 [8, 9, 10] 。近来，研究者利用 Desnianskii–Novikov 模型[12]的最近邻相互作用，在这一拓扑中构造出一组精确的定常解 [11], 。这些解使得探测任意小尺度成为可能，并表明该模型能够呈现间歇行为。此外，多分支方法与多分辨率小波分析 [8]自然相连；事实上，借助小波变换，可以从启发式角度论证这类层级模型源自流体方程。

在此，我们介绍并分析一种具有 GOY 型耦合[13, 14, 15] 的壳模型，该模型定义在 p进树上：从一个根节点出发，通过为每个节点分配 p 个子节点来生成各层。借助一种几何构造，我们建立了一组能够维持严格正向级联的定常解。我们的主要理论结果是明确证明这类状态构成一个连续统，其中包括柯尔莫哥洛夫解；证明还表明，通过归纳，对任意给定层级之前的可容许构型，总能将其扩展至下一层。值得注意的是，与单分支情形不同，多分支情形会产生无穷多个不动点。此外，这组解十分丰富，其中包含间歇解。

除了存在性之外，我们还考察了沿随机选取的分支进行采样的过程，由此得到一条齐次马尔可夫链。采用随机动力系统的视角，可以通过遍历性质 [16]以及对费曼–卡茨算子 [17] 的谱分析，研究自相似性和间歇性，并为计算能够考虑层间相关性的标度指数提供一种途径。正如 [18, 19], 所指出的，算子分析是研究非线性系统标度性质的有力框架。采用几何采样器进行的数值实验证实了理论预测。

研究结果表明，多分支壳层模型虽在文献中鲜有研究 [8, 9, 10, 11], ，却是一个极简且可进行解析控制的框架，局域能量正向传递与强烈的间歇统计特性可在其中共存。

2. 基础

本节介绍一种定义在树拓扑上的湍流壳模型，并分析在物理上

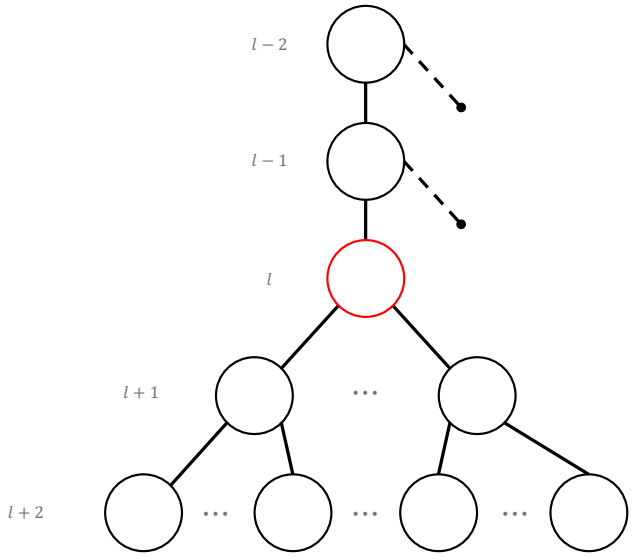

图 2：类 GOY 模型中影响红色高亮节点的非线性相互作用示意图，展示了来自第一邻居和第二邻居的贡献。

受启发的约束。

2.1. 系统定义

固定壳层间比率 $\lambda > 1$，并将壳层波数定义为 $k_l = \lambda^l$。系统定义在一棵 p 进制树上（$p = 2$ 的情况见图 1），其节点集为

$$\{(l, n);\, l = 0, \ldots, l_{max},\, n = 1, \ldots, p^l\}. \tag{1}$$

每个节点 (l, n) 除根节点（0,1）外，都有一个父节点 $(l-1, \lceil n/p \rceil)$，其中 $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x\}$ 是上取整函数。所有非末端节点都与其子节点 $(p, p(n-1)+1), \ldots, (l+1, pn)$ 相连。该拓扑上的 GOY 模型写作

$$\left[\frac{d}{dt} + \nu {k_l}^2\right] u_{l,n} = i N_{l,n}[u]^* + f_{l,n}, \tag{2}$$

其中 ν 是黏度， f 是大尺度强迫，非线性耦合定义为

$$\begin{aligned} N_{l,n} = k_{l-1}\Bigg[a\,\lambda\,\frac{1}{p}\sum_{h=0}^{p-1}\left(u_{l+1,pn-h}\,\frac{1}{p}\sum_{m=0}^{p-1}u_{l+2,p(pn-h)-m}\right) \\ + b \qquad\qquad u_{l-1,\lceil n/p\rceil}\,\frac{1}{p}\sum_{m=0}^{p-1}u_{l+1,pn-m} \\ + c\,\lambda^{-1} \qquad u_{l-2,\lceil n/p^2\rceil} \qquad u_{l-1,\lceil n/p\rceil}\Bigg], \end{aligned} \tag{3}$$

满足边界条件 $u_{-2,\bullet} = u_{-1,\bullet} = 0 = u_{l_{max}+1,\bullet} = u_{l_{max}+2,\bullet}$。 图 2 阐明了非线性相互作用的结构：通过改变水平指标得到的所有 GOY 类组合贡献相同。无黏、无强迫动力学守恒总能量，其定义为局部能量密度的体积加权和，

$$E = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{l_{max}}\frac{1}{{k_l}^D}\sum_{n=1}^{p^l}|u_{l,n}|^2, \tag{4}$$

前提是

$$a + b + c = 0, \tag{5}$$

and

$$D^{-1} = \log_p \lambda, \tag{6}$$

其中， D 表示有效空间维数。关系式 (6) 具有明确的物理意义：对于填充空间的级联，子结构的数量 p等于连续尺度之间的体积缩减因子。可观测量的定义遵循以下解释： l 是尺度指标， n是空间指标。此外，为确保类螺旋度不变量守恒，

$$H = \sum_{l=0}^{l_{max}}(-1)^l {k_l}^{1-D}\sum_{n=1}^{p^l}|u_{l,n}|^2, \tag{7}$$

我们选择

$$a = 1, \quad b = -(1-\lambda^{-1}), \quad c = -\lambda^{-1}. \tag{8}$$

跨越一条边的局部能量传递（即跨越连接 $(l-1,\ \lceil n/p \rceil)$ 与 $(l,\ n)$ 的分支）定义为 $(l,\ n)$ 中及所有后代节点所包含能量的变化率：

$$\Pi_{l,n} = \mathrm{Im}\Big[\sum_{j=l}^{l_{max}} \frac{1}{{k_j}^D} \sum_{m=p^{j-l}(n-1)+1}^{p^{j-l}n} u_{j,m} N_{j,m}[u] \Big] \tag{9}$$

$$= \frac{k_{l-1}}{{k_l}^D}\ \mathrm{Im}\Big[-a\, u_{l-1,\lceil n/p \rceil} u_{l,n}\, \frac{1}{p} \sum_{m=0}^{p-1} u_{l+1,pn-m} + c\, \lambda^{-1}\, u_{l-2,\lceil n/p^2 \rceil} u_{l-1,\lceil n/p \rceil} u_{l,n} \Big]. \tag{10}$$

我们利用能量守恒式（5）推导出了表达式（10），并将经典壳层模型中使用的代数方法加以拓展 [20]。下文中，我们将研究范围限定在二叉情形（$p=2$）。

2.2. 问题陈述

我们研究无黏系统的稳态，其特征条件为 $N_{l,\ n}[u] = 0$。由于强迫作用于大尺度，因此可以将其纳入非线性项的边界条件中。假设壳层振幅均非零，我们引入归一化速度乘子

$$r_{l,n} = \lambda^{1/3} \frac{u_{l,n}}{u_{l-1,\lceil n/2 \rceil}}, \qquad l \geq 1. \tag{11}$$

由（3）定义的非线性动力学可改写为涉及连续四个层级的递推关系：

$$\frac{a}{4}\Big[{r_{l+1,2n-1}}^2 (r_{l+2,4n-3} + r_{l+2,4n-2}) + {r_{l+1,2n}}^2 (r_{l+2,4n-1} + r_{l+2,4n}) \Big] + \frac{b}{2}\, {r_{l,n}}^{-1} (r_{l+1,2n-1} + r_{l+1,2n}) + c\, {r_{l-1,\lceil n/2 \rceil}}^{-1} {r_{l,n}}^{-2} = 0. \tag{12}$$

这可以视为 l中的递推关系：给定截至第$l+1$级的树，即可构造第 $l+2$级。随后，壳层变量可以表示为这些乘子的乘积：

$$u_{l,n} = \lambda^{-l/3}\, u_0 \prod_{j=0}^{l-1} r_{l-j,\lceil n/2^j \rceil}. \tag{13}$$

由于非线性耦合具有二次齐次性，该系统在振幅均匀缩放下保持不变。因此，我们通过设定 $u_0 = i$来固定全局相位和归一化。在这一约定下，并考虑实值乘子，局部能量传递（10）变为

$$\Pi_{l,n} = \frac{k_{l-1}}{2^l}(-iu_{l,\,n})^3\left[\frac{a}{2}\,r_{l,n}{}^{-1}(r_{l+1,\;2n-1}+r_{l+1,\;2n}) - c\,r_{l-1,\;\lceil n/2\rceil}{}^{-1}r_{l,n}{}^{-2}\right]. \quad (14)$$

我们假设局部能量通量非零，因此可以引入右通量乘子

$$\begin{aligned}\pi_{l+1,2n} &= \frac{\Pi_{l+1,2n}}{\Pi_{l,n}} = \frac{\Pi_{l+1,2n}}{(-iu_{l+1,2n})^3}\,\frac{r_{l+1,2n}{}^3}{\lambda}\,\frac{(-iu_{l,n})^3}{\Pi_{l,n}} \\ &= \frac{1}{2}\,r_{l+1,2n}{}^2\,\frac{a(r_{l+2,4n-1}+r_{l+2,4n})/2 - c\,r_{l,n}{}^{-1}r_{l+1,2n}{}^{-1}}{a\,r_{l,n}{}^{-1}(r_{l+1,2n-1}+r_{l+1,2n})/2 - c\,r_{l-1,\lceil n/2\rceil}{}^{-1}r_{l,n}{}^{-2}} \quad (15)\end{aligned}$$

以及类似地，左通量乘子 $\pi_{l+1,\;2n-1}$。通过约束通量乘子为正，局部能量通量在整棵树上保持同一符号；其符号取决于初始条件。根据这一几何表述，可以递归求出所有乘子 $r_{l,\;n}$ ，前提是式 (12) 的允许解不为零，且条件 $\pi_{l,\;n} > 0$ 不被违反。由于我们考虑的是定常解，后一种情况将对应于更小尺度上存在能量源这一不符合物理实际的情形。接下来，我们希望证明存在一个有界集合 $I \subset \mathbb{R}$ ，使得如果所有 $r_{j,\;\bullet} \in I$ 对于 $j \le l+1$ 成立，那么式 (12) 的解 $(r_{l+2,\;4n-3},\; r_{l+2,\;4n-2},\; r_{l+2,\;4n-1},\; r_{l+2,\;4n})$ 中同时满足通量不等式的解与 I 有非空交集。若此结论成立，就总能递归地找到式 (12) 的解，并构造出完整的树几何。更确切地说，这个问题可以表述如下。

问题 2.2.1. 我们寻找满足（*12*）的定常解，使其在区间 $I = [-\xi,-\eta]\cup[\eta,\xi]$ 内保持有界，且 $\xi > 1 > \eta > 0$，从而确保正则性，并使柯尔莫哥洛夫不动点 $r \equiv 1$ 包含在允许的系综中。具有物理意义的定常态还必须维持正的局部能量通量，这对应于能量向更小尺度的直接传递，并且符合小尺度处不存在能量源这一条件。从几何角度看，需要进行归纳构造：对于截至给定层级的每一种构型，都必须能够在由所有施加的约束所定义的目标子区域内迭代递推关系。

2.3. 几何解释

只要不会产生歧义，为简洁起见省略指标。递推关系（12）在 $\mathbb{R}^4$ 中有一种自然的几何解释。我们构造

$$\mathbf{x} = (r_{l+2,4n-3}, r_{l+2,4n-2}, r_{l+2,4n-1}, r_{l+2,4n}) \tag{16}$$

受限于仿射超平面 A，该超平面由 $\langle \boldsymbol{\alpha},\ \mathbf{x}\rangle = \beta$定义；对于.....，这恰好就是式 (12)

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{a}{4}\Big({r_{l+1,2n-1}}^2, {r_{l+1,2n-1}}^2, {r_{l+1,2n}}^2, {r_{l+1,2n}}^2 \Big), \tag{17}$$

$$\beta = -b\, {r_{l,n}}^{-1} \frac{1}{2}(r_{l+1,2n-1} + r_{l+1,2n}) - c\, {r_{l,n}}^{-2}\, {r_{l-1,\lceil n/2 \rceil}}^{-1}. \tag{18}$$

参数 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 β 由祖先乘子确定。一致有界性条件将可容许构型限制在区域I^4内。通量正性通过通量乘子 (15) 表示，并施加了额外的几何约束：可容许构型必须位于由以下条件定义的两个半空间的交集内

$$\sigma\left[\frac{1}{2}(x_1 + x_2) - \psi_1\right] > 0, \qquad \sigma\left[\frac{1}{2}(x_3 + x_4) - \psi_2\right] > 0, \tag{19}$$

其中 σ 是.....的符号

$$\phi = \frac{a}{2}\, {r_{l,n}}^{-1}(r_{l+1,2n-1} + r_{l+1,2n}) - c\, {r_{l-1,\lceil n/2 \rceil}}^{-1} {r_{l,n}}^{-2}, \tag{20}$$

它是式 (15) 中的分母，而

$$\psi_1 = \frac{c}{a}\, {r_{l,n}}^{-1} {r_{l+1,2n-1}}^{-1}, \qquad \psi_2 = \frac{c}{a}\, {r_{l,n}}^{-1} {r_{l+1,2n}}^{-1}. \tag{21}$$

接下来，我们推导超平面 A的参数化。到 A 的仿射正交投影算子为

$$\mathcal{P}\mathbf{x} = \mathbf{x} - \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x}\rangle - \beta}{\|\boldsymbol{\alpha}\|^2}\, \boldsymbol{\alpha}. \tag{22}$$

现在注意到，切空间 $\{\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_2)\}^{\perp}$ 具有正交基

$$\mathbf{b}_1 = (1, -1, 0, 0), \quad \mathbf{b}_2 = (0, 0, 1, -1), \quad \mathbf{b}_3 = (\alpha_2, \alpha_2, -\alpha_1, -\alpha_1). \tag{23}$$

因此， A 中的任意点都可以表示为

$$\mathbf{x} = \mathcal{P}\mathbf{0} + \sum_{i=1}^{3} t_i \mathbf{b}_i \tag{24}$$

其中 $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$。因此，代入后，通量正性条件变为 (19)

$$L_0 := \frac{\sigma}{\alpha_2}\left[\psi_1 - \frac{\beta}{\|\boldsymbol{\alpha}\|^2}\alpha_1\right] < \sigma t_3 < \frac{\sigma}{\alpha_1}\left[\frac{\beta}{\|\boldsymbol{\alpha}\|^2}\alpha_2 - \psi_2\right] := U_0. \tag{25}$$

这个区间始终非空，因为

$$U_0 - L_0 = \sigma\left[\frac{\beta}{\|\boldsymbol{\alpha}\|^2}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) - \frac{1}{\alpha_1\alpha_2}(\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2)\right] = \frac{|\phi|}{2\alpha_1\alpha_2} > 0, \tag{26}$$

其中，最后一个等号用到了

$$\beta - \phi = 2(\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2), \tag{27}$$

这由能量守恒条件 (5) 得出。最后，我们陈述一个基本结果：关于如何构造一棵无穷树，作为问题 2.2.1 的归纳解。

命题 2.3.1。 给定 $\lambda > 1$，对于任意 $\eta \in (0,1)$ 以及任意 $\xi > \xi_0(\lambda,\eta)$，其中

$$\xi_0 = \max\left\{3\eta, \frac{1}{\eta^2}\left[\frac{1}{\lambda\eta^3} + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\right]\right\}, \tag{28}$$

存在连续统多个递推关系 *(12)* 的容许迭代，它们满足 I 中的有界性条件以及通量正性约束 *(19)*。

证明完全基于几何方法，见附录 A。我们指出，让 η 趋近于零需要 ξ 取越来越大的值。因此，这些参数控制所得解的容许涨落：允许的区间 I 越大，出现更多间歇行为的可能性就越高。

3. 采样

在上一节中，我们证明了可以通过在允许范围内随机或确定性地选取实参数 t_1、 t_2 和 t_3 ，并迭代使用式（12），构造出一族连续统的定常解。接下来，我们将说明这些解可以足够复杂，从而呈现间歇标度，这与纳维–斯托克斯方程解中观察到的现象相同。我们首先介绍一个用于理论分析和数值探索这些定常解的框架。

3.1. 乘法随机游走

我们考虑树中随机选取的一条向下路径，如图 1 中红色所示，并以 n_l 为参数，给出该路径在第 l 层的水平索引 n。这个过程是一个三阶马尔可夫链，因为第 $l+2$ 步取决于第 $l+1$、 l 和 $l-1$ 步；不过，我们可以扩展状态，定义一个状态空间为 $\Omega = I^4$ 上的标准一阶齐次马尔可夫链:

$$Z_l = \left(r_{l-1,\lceil n_l/2\rceil},\, r_{l,n_l},\, r_{l+1,2n_l-1},\, r_{l+1,2n_l}\right). \tag{29}$$

该链通过拒绝采样更新演化。令 $(L,\ U)$ 表示 t_3 的最终可行区间，以满足

$$\pi_{l+1,2n-1} > \epsilon, \qquad \pi_{l+1,2n} > \epsilon, \tag{30}$$

其中 $\epsilon \in (0,\ 1/2)$。这一附加约束有助于在模拟中限制系综规模，相关讨论见附录 A。每一步均按照 (24) 生成新状态，具体如下。首先,

$$t_3 \text{ is drawn uniformly from } (L, U), \tag{31}$$

从而得到 $\boldsymbol{\gamma} = \mathcal{P}\mathbf{0} + t_3\mathbf{b}_3 = (\gamma_1,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_2)$。然后,

$$\begin{aligned} |t_i| \text{ is drawn uniformly from } |\gamma_i| + \eta + [0, \tau_1] \text{ if } |\gamma_i| \le \eta, \\ \text{and from } [0, \tau_2] \text{ otherwise,} \end{aligned} \tag{32}$$

对于 $i = 1,\ 2$. 落入禁区条带 $\{|x_i| < \eta\}$ 内的样本将被拒绝。下一个节点 n_{l+1} 的索引将以相同概率选为 $2n_l - 1$ 或 $2n_l$ ，相当于进行一次公平抛硬币。图3展示了这一过程的一个示例实现，其中显示了速度和通量乘子,

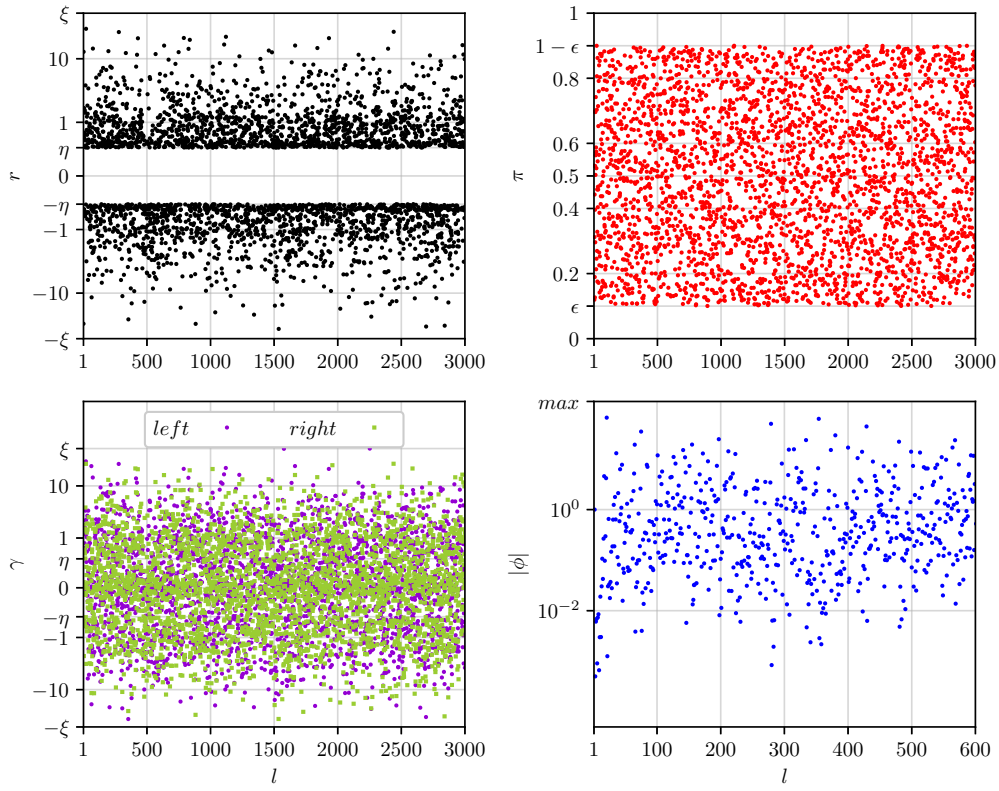

图3：马尔可夫链3000步的模拟。左上面板显示了振幅乘子的演化，表明其始终处于规定区域内。右上面板展示了通量乘子的轨迹，其范围被限制在ϵ 和 $1-\epsilon$之间。底部面板说明了构造中涉及的其余几何函数。特别是，右侧插图展示了 $|\phi|$的一段放大区域，突出了与扩展自相似性相关的模式缺失。

新猜测的振幅乘子的中间阶段 $\boldsymbol{\gamma}$ ， 以及 ϕ，系综规模的一种度量。

该过程中的能量守恒确保

$$\mathbb{E}[2\pi_{l+1,n_{l+1}}|Z_l] = \mathbb{E}[\pi_{l+1,2n_l-1} + \pi_{l+1,2n_l}|Z_l] = 1, \tag{33}$$

因此，为了计算通量的期望，可以利用鞅性质

:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[2^l\Pi_{l,n}\big] &= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big[2^l\Pi_{l,n}|Z_{l-1}\big]\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big[2^{l-1}\Pi_{l-1,\lceil n/2\rceil}2\pi_{l,n}|Z_{l-1}\big]\big] \\ &= \mathbb{E}\big[2^{l-1}\Pi_{l-1,\lceil n/2\rceil}\mathbb{E}\big[2\pi_{l,n}|Z_{l-1}\big]\big] = \mathbb{E}\big[2^{l-1}\Pi_{l-1,\lceil n/2\rceil}\big] = C. \quad (34)\end{aligned}$$

常数 C 不依赖于 l，表示平均能量注入率。我们将局部通量乘以该层级中的节点数，这正是重构系综平均所需的，因为它与空间平均（即水平平均）等价。

(31)、(32) 中给出的抽样过程定义了一个转移核

$$K(\mathbf{z}, B) = \mathbb{P}(Z_{l+1} \in B \mid Z_l = \mathbf{z}), \quad (35)$$

其中，$B \subset \Omega$ 是一个博雷尔集，即在给定 $Z_l = \mathbf{z}$ 的条件下，$K(\mathbf{z}\ B)$ 是 $Z_{l+1} \in B$ 的概率。该转移核控制着沿树进行的乘法随机游走。于是，在初始条件 $Z_0 = \mathbf{z}$ 下，$Z_l \in B$ 的概率是 l 次迭代转移核 K^l，其形式为

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_l \in B|Z_0 = \mathbf{z}) &= \int_\Omega d\mathbf{w}_1\, \mathbb{P}(Z_1 = \mathbf{w}_1|Z_0 = \mathbf{z}) \cdots \\ &\cdots \int_\Omega d\mathbf{w}_{l-1}\, \mathbb{P}(Z_{l-1} = \mathbf{w}_{l-1}|Z_{l-2} = \mathbf{w}_{l-2})\mathbb{P}(Z_l \in B|Z_{l-1} = \mathbf{w}_{l-1}) \\ &= \int_\Omega K(\mathbf{z}, d\mathbf{w}_1) \cdots \int_\Omega K(\mathbf{w}_{l-2}, d\mathbf{w}_{l-1})K(\mathbf{w}_{l-1}, B). \quad (36)\end{aligned}$$

方程（36）提供了任意层级 l 上 Z_l 的全部统计特性。其在 $l \to \infty$ 时的渐近行为将在下一小节中考察。

3.2. 遍历性与间歇性

当 K^l 对于较大的 l 时，其渐近行为可由马尔可夫链的遍历定理揭示，例如 [16], 中的定理 1。2，该定理保证存在唯一的不变测度 μ_∞，满足

$$\|K^l - \mu_\infty\| \xrightarrow{l\to\infty} 0, \qquad \text{for any initial state } \mathbf{z} \in \Omega, \quad (37)$$

这意味着，随着 $l \to \infty$，迭代核变得与 Z_0 无关，且乘子的分布变得与 l 无关，即具有自相似性。

然而，为了量化间歇性，我们需要 u_l 的矩，$_n$或 $\Pi_{l,\ n}$，这相当于计算乘子乘积的矩。假设我们关注可观测量 O的 p阶矩，它可表示为 Z_l 和 Z_{l+1} 的函数 g_O 。为此，我们引入作用于 Ω 上连续函数 f 的费曼–卡茨算子，其定义如下

$$[\mathcal{J}_p f](\mathbf{z}) = \int_\Omega |g_O(\mathbf{z}, \mathbf{z}')|^p f(\mathbf{z}') K(\mathbf{z}, d\mathbf{z}'), \tag{38}$$

因此

$$\mathbb{E}[|O(Z_l, Z_{l+1})|^p | Z_l = \mathbf{z}] = [\mathcal{J}_p \mathbf{1}](\mathbf{z}). \tag{39}$$

对于速度乘子 $r_{l,\ n_l}$，相应的函数 g_r 就是

$$g_r(\mathbf{z}, \mathbf{z}') = {z_2}', \tag{40}$$

而对于能量通量，我们需要 $2\pi_{l,\ n_l}$，通过将 g_π 定义为

$$\begin{aligned} g_\pi(\mathbf{z}, \mathbf{z}') &= \frac{z_2/2}{a(z_3+z_4)/2 - c{z_1}^{-1}{z_2}^{-1}} \\ &\times \left\{ {z_3}^2 \Big[a(z_1'+z_2')/2 - c{z_2}^{-1}{z_3}^{-1} \Big] + {z_4}^2 \Big[a(z_3'+z_4')/2 - c{z_2}^{-1}{z_4}^{-1} \Big] \right\}. \end{aligned} \tag{41}$$

此处定义的费曼–卡茨算子使我们能够运用谱理论。感兴趣的量（此处为局部能量通量乘以体积）与之之间的联系由方程（39）给出。通过迭代此算子，我们可以得到乘子的乘积:

$$\mathbb{E}\left[\prod_{j=2}^{l+1} |2\pi_{j,n_j}|^p \right] = \mathbb{E}\big[{\mathcal{J}_p}^l \mathbf{1} \big]. \tag{42}$$

各层级间的统计相关性已由费曼–卡茨算子考虑在内，因为该算子是根据转移核定义的。利用大 l 时的渐近谱分解 [17] ，

$${\mathcal{J}_p}^l f = \mathcal{R}(\mathcal{J}_p)^l \left\{ \varphi_p \left[\int_\Omega f \, d\nu_p \right] + o(1) \right\}, \tag{43}$$

其中， ν_p 是 Ω 上的概率测度（用量子力学术语来说，是左矢），φ_p 是 Ω 上的连续正函数（右矢），其归一化满足 $\int_\Omega \varphi_p \, d\nu_p =$

1， $\mathcal{R}$ 表示谱半径，即谱中各元素模的上确界。因此，

$$\mathbb{E}\big[{\mathcal{J}_p}^l \mathbf{1}\big] \sim \mathbb{E}[\varphi_p]\, \mathcal{R}(\mathcal{J}_p)^l \propto \lambda^{-l\tau_p}, \tag{44}$$

with

$$\tau_p = -\log_\lambda \mathcal{R}(\mathcal{J}_p). \tag{45}$$

上述结果表明，可观测量 $\Pi_{l,\ n_l}$ 的矩遵循关于 l的幂律标度。此外，由于一般而言 $\mathcal{R}(\mathcal{J}_p) \neq 1$，指数 τ_p 并不全为零；换言之，这些解呈现出间歇标度。我们注意到，尽管模型中存在复杂的层间相关性，该标度律仍然成立。虽然我们能够证明幂律的存在，但上述指数 τ_p 的表达式在数值上并不容易计算。在下一节中，我们将直接计算标度。

4. 模拟

我们对第3.1节中描述的乘法随机游走进行了蒙特卡洛模拟。具体而言，我们考察了 $\lambda = 2$的情形，该情形对应于 [8]中的 $D = 1$ 。图3展示了步数为3000、参数为 $\epsilon = 0.1$、 $\tau_1 = \tau_2 = 0.1$、 $\eta = 0.4$和 $\xi = 52$的一次运行结果。对于这一长轨迹，乘子约束得到了验证。此外，对于 $|\phi|$而言， l 中不存在模式，这一点十分重要，因为它与扩展自相似性性质有关。这由以下关系得出

$$\lambda\, 2^l \Pi_{l,n} = k_l |u_{l,n}|^3\, |\phi_{l,n}| \tag{46}$$

这直接源于定义以及通量的正性。

图4展示了不同层级 l下 $|r|$、 $|\gamma|$、 π 和 $|\phi|$ 的分布。当 l 足够大时，塌缩现象验证了预测（37）。这种塌缩发生得非常迅速。事实上，在 $l = 30$ 之后，振幅乘子的分布已无法区分。振幅乘子的概率密度单调递减，而通量乘子呈现均匀分布。

与单个乘子不同，它们的乘积（表示为$u_{l,\ n_l}$和$\Pi_{l,\ n_l}$）并非自相似。图5展示了测得的这些乘积分布，说明了这一点。 $|u|$ 和 Π 的概率密度

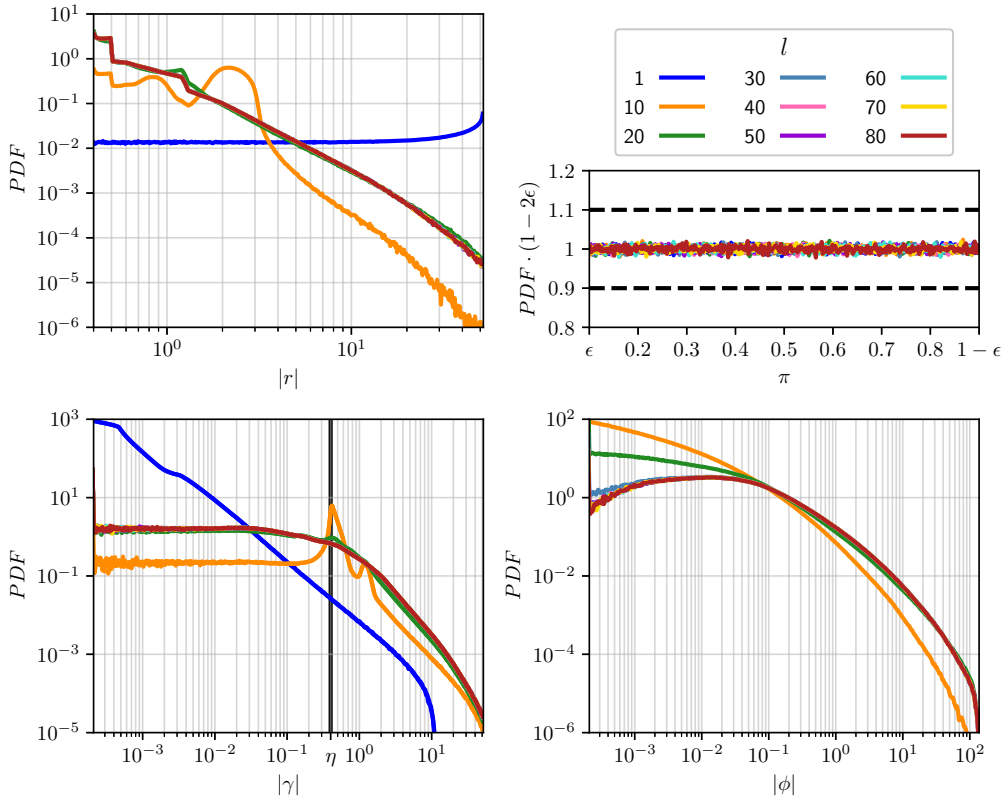

图4：抽样过程中定义的乘子和几何函数的概率分布。结果来自 10^7 个样本，当 l 足够大时呈现塌缩。右上图中，能量通量乘子呈均匀分布；虚线表示支撑集上的概率与均匀分布相差 10%。

经过线性缩放，使峰值在垂直方向上对齐。相应的缩放因子列于下方的面板中。随着 l 增大，尾部变得更厚，表明出现了更多极端事件。

图6展示了能量通量各阶矩的测量值。这些值来自一次参数为 $\epsilon = 0.4$ 的模拟。所有考察的矩均呈现出明显的幂律：

$$\mathbb{E}\left[|2^l \Pi_{l,n}|^{p/3}\right] \propto \lambda^{-l\tau_{p/3}}. \tag{47}$$

为计算指数，我们采用了 [21]，中提出的精确误差分析方法，同时考虑统计不确定性和系统不确定性。

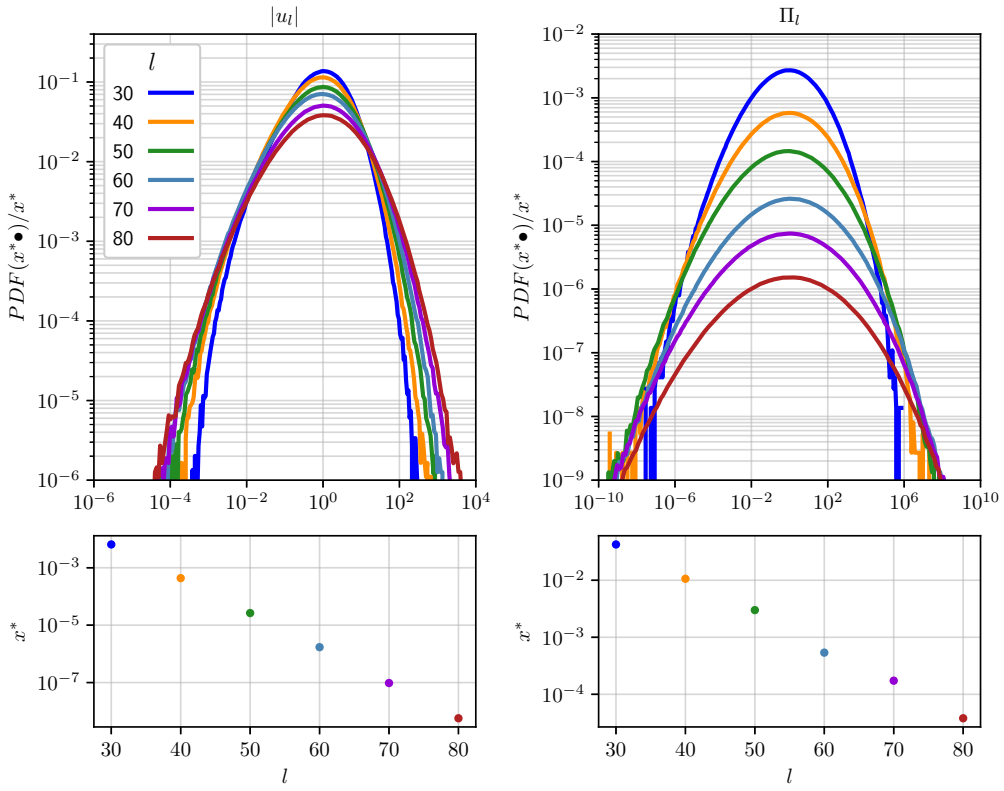

图5：速度和能量通量的概率分布，为便于可视化，已按各自的最大值重新缩放。缩放因子标示在下方。

结果（包括误差条）清楚地表明，与柯尔莫哥洛夫标度 $\tau_{p/3} = 0$ 对应的维度预测不成立，从而证实了这一平稳系统存在间歇性。根据式 (34) 的预测，唯一未进行间歇性修正的指数是 $\tau_1 = 0$。观察到的整体行为与纳维–斯托克斯方程 [22] 的研究结果一致。不过，我们注意到，$\tau_{p/3}$ 的取值取决于 ϵ 的选择；ϵ 越小，与柯尔莫哥洛夫标度的偏离越明显。速度指数也得到了类似的结果：

$$\mathbb{E}\left[|u_{l,n_l}|^p\right] \propto \lambda^{-l\zeta_p}. \tag{48}$$

尽管在这种情况下误差条要宽得多。

最后，我们指出，采用不同于

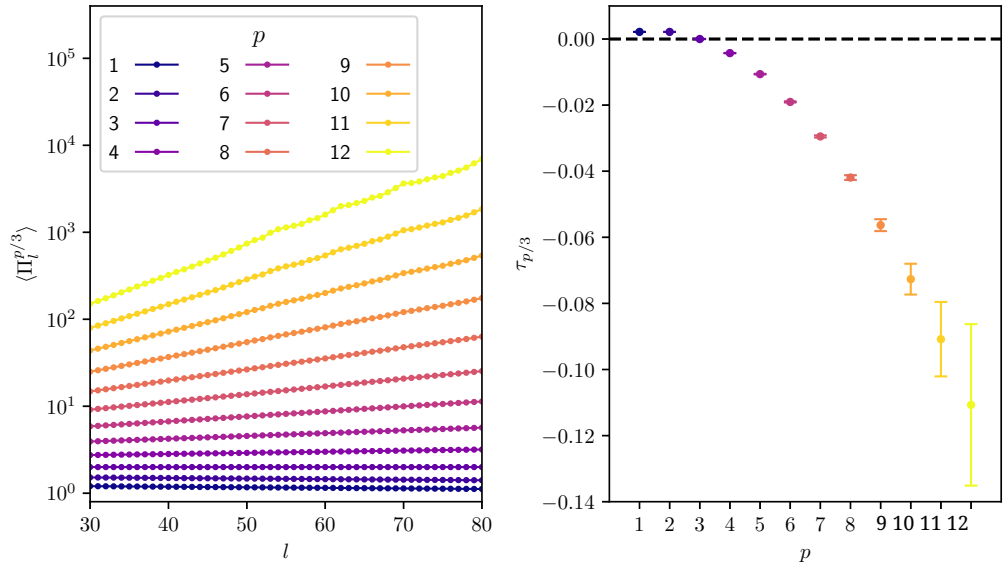

图6：能量传递结构函数及其对应的反常标度指数。

第3.1节所述的方法进行采样时，我们还发现了一些解，它们违反了量纲分析所揭示的能量通量标度与速度振幅立方标度之间的联系 $\zeta_p = \tau_{p/3} + \frac{p}{3}$。在多分支 Desnianskii–Novikov 模型中并未观察到这一现象[11]。在该模型中，只有一个随机自由度，即分配给两个子节点的能量份额，因此一旦通量的间歇性特性确定，速度标度也随之确定。而在这里，存在三个随机自由度，但只有一个控制能量分配。这源于 GOY 相互作用的局域性不如 Desnianskii–Novikov 模型中的相互作用，因而定常解拥有大得多的自由度。

5. 结论

我们引入了一种具有 GOY 型耦合的多分支壳层模型，并证明定常无黏问题具有简洁的几何表述。在乘子变量中，四元组位于一个仿射超平面上，而物理可容许性（有界性和正向正能量传递）则归结为与两个半空间的交集。这一结构带来了

清晰的级联约束几何，并为主要存在性结果奠定了基础。

几何视角清晰揭示了湍流类级联的选择机制：通量约束界定出一个高维可行域，其非平凡交集保证了平稳正向传输态。此外，沿分支进行马尔可夫采样，为通过正算子的谱理论推导标度关系提供了有原则的途径，从而连接了确定性约束与随机现象学。

这一构造也可以扩展到 GOY–Desnianskii–Novikov 模型，例如 [18] 中针对单分支情形研究的模型；也可以通过引入水平相互作用，产生乘子乘积，其因子数量取决于它们的最近共同祖先，从而体现出潜在的超度量结构。

我们还展示了间歇性如何在此处考察的多分支拓扑中显现，并据此将观测到的反常指数与相关费曼–卡茨算子的谱联系起来。尽管这种方法无法直接应用于纳维–斯托克斯方程，但它仍为未来研究指明了一个颇有前景的方向。

总之，我们提出并分析了一种比标准单分支壳层模型更丰富的层级模型。此外，该模型再现了湍流纳维–斯托克斯动力学的大部分典型特征，尤其是级联机制，同时在解析和计算上都远比完整的纳维–斯托克斯系统简单。因此，我们认为，当前模型为完整的纳维–斯托克斯方程提供了一种有价值的替代方案，可用于检验理论构想并理解级联背后的机制。未来的工作将聚焦于该模型的动力学，以进一步评估这一观点。

附录 A. 归纳构造

这里给出命题 2.3.1 的证明，该命题陈述于第 2.3 节。

证明。归纳基。 考虑非线性项 (3) 的零边界条件，第一次迭代为

$$ {r_{1,1}}^2(r_{2,1} + r_{2,2}) + {r_{1,2}}^2(r_{2,3} + r_{2,4}) = 0, \tag{A.1} $$

这与.....的正性不相容

$$\Pi_{1,n} = \frac{a}{4}\,\lambda^{-1}\,{r_{1,n}}^{2}(r_{2,2n-1} + r_{2,2n}) \tag{A.2}$$

对于两条边。数学上，这个问题通过沿着对应向下通量的分支进行，并舍弃树的另一部分来解决；这等价于对非线性项施加一组不同的边界条件。从物理上说，正如前面提到的，我们考虑一种在大尺度注入能量的强迫，而新的边界条件起到这种大尺度强迫的作用。由于参数的形式有所简化，下一步也具有特殊性，

$$\beta = -b\,{r_{1,n}}^{-1}\frac{1}{2}(r_{2,2n-1} + r_{2,2n}), \quad \phi = -\frac{a}{b}\,\beta \neq 0. \tag{A.3}$$

不过，推理过程与归纳步骤类似。
归纳步骤。令 $\boldsymbol{\gamma}(t_3) := \mathcal{P}\mathbf{0} + t_3\mathbf{b}_3 = (\gamma_1, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_2)$，其中 $\sigma t_3 \in (L_0, U_0) = I_0$；由 (26) 可知其非空。若 $|\gamma_1| < \eta$，则在 A 内应用切向平移 $t_1\mathbf{b}_1$，其中 $t_1 \in [\eta + |\gamma_1|, \xi - |\gamma_1|]$；只要.....，该集合便非空

$$\xi \geq 3\eta. \tag{A.4}$$

如果 $|\gamma_2| < \eta$，同样的论证也适用。否则，必须强制保证有界性。回想一下，这些条件可以写成

$$\sigma\gamma_1 > \sigma\psi_1, \quad \sigma\gamma_2 > \sigma\psi_2, \quad -\xi < \sigma\gamma_1 < \xi, \quad -\xi < \sigma\gamma_2 < \xi. \tag{A.5}$$

同时满足所有这些条件的 σt_3 值构成三个区间的交集： I_0 由通量约束给出，而 I_1、 I_2 则来自有界性要求。这些区间在实数轴上均为非空、开且连通的，因此，所有两两交集非空是充要条件。回想一下，两个开且连通的区间重叠，当且仅当它们中心之间的距离小于其半宽之和。我们有 $I_0 = (C_0 - \Delta_0, C_0 + \Delta_0)$，其中

$$C_0 = \frac{\sigma}{\alpha_2}\left[\psi_1 - \frac{\beta}{\|\boldsymbol{\alpha}\|^2}\alpha_1\right] + \frac{|\phi|}{4\alpha_1\alpha_2} \tag{A.6}$$

$$= \frac{\sigma}{\alpha_1}\left[\frac{\beta}{\|\boldsymbol{\alpha}\|^2}\alpha_2 - \psi_2\right] - \frac{|\phi|}{4\alpha_1\alpha_2}, \tag{A.7}$$

$$\Delta_0 = \frac{|\phi|}{4\alpha_1\alpha_2}; \tag{A.8}$$

$I_1 = (C_1 - \Delta_1, C_1 + \Delta_1)$，其中

$$C_1 = -\sigma \frac{\beta}{\|\boldsymbol{\alpha}\|^2} \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \tag{A.9}$$

$$\Delta_1 = \frac{\xi}{\alpha_2}; \tag{A.10}$$

以及 $I_2 = (C_2 - \Delta_2,\ C_2 + \Delta_2)$，其中

$$C_2 = \sigma \frac{\beta}{\|\boldsymbol{\alpha}\|^2} \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \tag{A.11}$$

$$\Delta_2 = \frac{\xi}{\alpha_1}. \tag{A.12}$$

W现在我们来计算两两交集。首先，$I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$ 当且仅当

$$|C_1 - C_2| = \frac{|\beta|}{\|\boldsymbol{\alpha}\|^2} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) < \xi \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} \right) = \Delta_2 + \Delta_1 \tag{A.13}$$

或者等价地，

$$\xi > \frac{|\beta|}{2(\alpha_1 + \alpha_2)}. \tag{A.14}$$

为了得到一致界，我们利用归纳假设估计左侧：

$$\frac{|\beta|}{2(\alpha_1 + \alpha_2)} \leq \frac{|c| + |b|\eta^3}{a\eta^5} \tag{A.15}$$

其次，$I_0 \cap I_1 \neq \emptyset$ 当且仅当

$$|C_0 - C_1| = \left| \frac{\sigma}{\alpha_2} \psi_1 + \frac{|\phi|}{4\alpha_1\alpha_2} \right| < \frac{\xi}{\alpha_2} + \frac{|\phi|}{4\alpha_1\alpha_2} = \Delta_1 + \Delta_0. \tag{A.16}$$

最坏情况要求

$$|\psi_1| < \xi \tag{A.17}$$

再次地，在归纳假设下进行估计可得

$$\xi > \frac{|c|}{a\eta^2}. \tag{A.18}$$

同样的推理适用于最后一个交集，$I_0 \cap I_2 \neq \emptyset$。汇总所有要求后，即可得到最小 ξ_0的表达式。 □

同样的思路很容易推广到对通量乘子更严格的约束,

$$\pi_{l+1,2n-1} > \epsilon, \qquad \pi_{l+1,2n} > \epsilon, \tag{A.19}$$

取 $\epsilon \in (0, 1/2)$。于是我们得到 σt_3 的新界:

$$L_0^{(\epsilon)} = \frac{\sigma}{\alpha_2}\left[\psi_1 - \frac{\beta}{\|\boldsymbol{\alpha}\|^2}\alpha_1 + \epsilon\frac{\phi}{2\alpha_1}\right], \quad U_0^{(\epsilon)} = \frac{\sigma}{\alpha_1}\left[\frac{\beta}{\|\boldsymbol{\alpha}\|^2}\alpha_2 - \psi_2 - \epsilon\frac{\phi}{2\alpha_2}\right] \tag{A.20}$$

因此区间宽度为

$$U_0^{(\epsilon)} - L_0^{(\epsilon)} = \frac{|\phi|}{2\alpha_1\alpha_2}(1 - 2\epsilon). \tag{A.21}$$

致谢

本研究获得法国国家科学研究中心通过 MITI 跨学科倡议提供的资金支撑，资助来自其探索性研究计划。SC 感谢法国国家研究署 SPEED 项目（ANR-20-CE23-0025-01）的资助。

参考文献

[1] A. Alexakis, L. Biferale, 《湍流中的级联与转变》，《物理学报告》767（2018）1–101。[2] L. F. Richardson, 《数值天气预报》，第2版，剑桥大学出版社，2007。[3] L. Biferale, 《湍流能量级联壳层模型》，《流体力学年度评论》35（2003）441–468。[4] G. L. Eyink, 《湍流级联的局域性》，Physica D: Nonlinear Phenomena 207（1-2）（2005）91–116。[5] U. Frisch, 《湍流：A. N. Kolmogorov 的遗产》，剑桥大学出版社，1995。[6] S. Aumaître, S. Fauve, 间歇性是能量通量定常性约束的结果，Physical Review Letters 132（11）（2024）114002。

[7] A. A. Mailybaev，爆破解作为壳层模型中湍流的驱动机制，Physical Review E 87（5）（2013）053011。[8] R. Benzi, L. Biferale, R. Tripiccione, E. Trovatore，（1+1）维湍流，Physics of Fluids 9（8）（1997）2355–2363。[9] E. Aurell, P. Frick, V. Shaidurov，二维湍流的层级树模型，Physica D: Nonlinear Phenomena 72（1–2）（1994）95–109。[10] E. Aurell, E. Dormy, P. Frick，高雷诺数湍流的二叉树模型，Physical Review E 56（2）（1997）1692–1698。[11] B. Ajzner, A. Alexakis，多分支壳层模型中的精确间歇解，Atmosphere 14（8）（2023）1316。[12] N. Desnianskii, V. A. Novikov, E. 湍流级联过程模拟，Journal of Applied Mathematics and Mechanics 38（3）（1974）468–475。[13] E. B. Gledzer，具有两个二次运动积分的流体动力学类型系统，载于：Soviet Physics Doklady，第18卷，美国物理联合会，1973，第216–217页。[14] A. M. Obukhov，非均匀温度大气中的湍流，Boundary-Layer Meteorology 2（1）（1971）7–29。[15]M. Yamada, K. Ohkitani，二维湍流模型的李雅普诺夫谱，Journal of the Physical Society of Japan 56（1987）4210–4213。[16] M. Hairer, J. C. Mattingly，再论马尔可夫链的 Harris 遍历定理，载于：Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications VI，Progress in Probability第63卷，Springer Basel，2011，第109–117页。[17] L. Hervé, H. Hennion，马尔可夫链的极限定理与动力系统的随机性质：准紧性方法，Lecture Notes in Mathematics第1766卷，Springer Berlin Heidelberg，2001。[18] L. Biferale, M. Blank, U. Frisch，具有 Kolmogorov 1941标度律的混沌级联，Journal of Statistical Physics 75（1994）781–795。

[19] A. A. Mailybaev, 《壳模型中湍流的隐藏尺度不变性：从强迫到耗散尺度》, Physical Review Fluids 8 (5) (2023) 054605。[20] D. Pisarenko、L. Biferale、D. Courvoisier、U. Frisch、M. Vergassola, 《壳层模型中多重分形性的更多结果》, Physics of Fluids A 5(10) (1993) 2533–2538。[21] X. M. de Wit、G. Ortali、A. Corbetta、A. A. Mailybaev、L. Biferale、F. Toschi, 《湍流动力学模型中的极端统计与极端事件》, Physical Review E 109 (2024) 055106。[22] Q. Chen、S. Chen、G. L. Eyink、D. D. Holm, 《能量与螺旋度联合级联中的间歇性》, Physical Review Letters 90 (21) (2003) 214503。