arXiv:2601.04803v1 [math.FA] 8 Jan 2026

有界s变差的算子值傅里叶乘子

CHENXI DENG、EMIEL LORIST 和 MARK VERAAR

Abstract. 本文在加权勒贝格空间、Besov 空间和 Triebel–Lizorkin 空间中建立了一个算子值傅里叶乘子定理。我们假设乘子具有 $\mathcal{R}$ 有界值域，并且其在二进区间上的有界 s变差半范数满足 ℓ^r-可和性条件。指数 r 和 s 反映了底层巴拿赫空间的几何性质（型与余型）和傅里叶乘子算子有界性之间的关系。作为主要工具，我们证明了一个加权向量值变差 Carleson 不等式，并推导出一个 Littlewood–Paley–Rubio de Francia 型估计。

1. Introduction

傅里叶乘子算子是调和分析中的核心工具，在偏微分方程、函数空间理论、数值分析和解析数论中有着广泛的应用。本文关注这一理论的算子值版本。在转向这一框架之前，我们先简要回顾标量值情形的一些经典结果。

在标量值情形下， T_m 关于 m： $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 的傅里叶乘子算子定义为

$$T_m f := \mathcal{F}^{-1}(m \cdot \mathcal{F}(f)), \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

其中 $\mathcal{F}$ 表示傅里叶变换。Marcinkiewicz、 T_m Mihlin L^p 和 HRormander 提出的经典傅里叶乘子定理，为傅里叶乘子算子 [51], 在 [54, 55](¨) 上的有界性提供了充分条件。对于本文而言，Marcinkiewicz 乘子定理的表述是最自然的出发点。这里及下文中 [31]表示 Δ 的二进区间划分 $\mathbb{R}$。

定理 1.1 (Marcinkiewicz [51])。 设 $p \in (1, \infty)$, 并设 m: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 满足：对 $J \in \Delta$,$m|_J \in V^1(J)$ 以及

$$\|m\|_{\ell^\infty(V^1(\Delta))} := \sup_{J \in \Delta} \|m|_J\|_{V^1(J)} < \infty,$$

其中 $V^1(J)$ 是有界变差函数空间。则 T_m 在 $L^p(\mathbb{R})$ 上有界。

在 [15], Coifman、Rubio de Francia 和 Semmes 在定理1.1 中将有界变差的假设放宽为某个 s-有界变差， $s > 1$ （见下文第2.5 节）。有界

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：42A45，次要分类号：42B25，42B35，46B09，46B20，46E35，46E40。*Key words and phrases.* UMD 空间、傅里叶乘子、 s-变差、权、Littlewood–Paley–Rubio de Francia 估计、变差 Carleson 算子、 $\mathcal{R}$-有界性。第二作者获得荷兰研究理事会（NWO）资助，研究项目为“随机偏微分方程的稀疏革命”，项目编号为 VI.Veni.242.057。第三作者获得荷兰科学研究组织（NWO）的 VICI 资助，项目编号为 VI.C.212.027。

s-变差对于较大的 s 较弱，并且可由 $\frac{1}{s}$-H¨older 光滑性推出。Coifman 等人分三个步骤证明了 T_m 在 $L^p(\mathbb{R})$上关于 $m \in \ell^\infty(V^s(\Delta))$的有界性：

（i）首先，他们考虑了 $p \in [2,\infty)$和 $s \in [1,2)$的情形，利用 Rubio de Francia 将 Littlewood–Paley 不等式推广到任意区间的结果 [18]:

$$\Big\| \Big(\sum_{I \in \mathcal{I}} |S_I f|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p(\mathbb{R})} \le C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, \tag{1.1}$$

其中 $p \in [2,\infty)$， $\mathcal{I}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的一族不相交区间，并且对于 $m := \mathbf{1}_I$.

（ii）其次 ，考虑 $p \in$（1 ，2）和 $s \in [1,2)$可由对偶性推出

。（iii）最后注意到，根据 Plancherel 定理，映射 $(m,f) \mapsto T_m f$是从 $L^\infty(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ 到 $L^2(\mathbb{R})$ 的有界映射。因此，他们利用双线性插值得出：若 $m \in \ell^\infty(V^s(\Delta))$，且对 $p,s \in (1,\infty)$ 有 $\frac{1}{s} > |\frac{1}{p} - \frac{1}{2}|$，则 T_m在 $L^p(\mathbb{R})$ 上有界。

相关的乘子结果已在 [7, 44, 45] 中得到研究。

1.1. 向量值情形下的傅里叶乘子。现在设 X 和 Y 为巴拿赫空间。算子值傅里叶乘子算子 T_m 具有如下形式

$$T_m f = \mathcal{F}^{-1}(m \cdot \mathcal{F}(f)), \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R};X),$$

其中 m: $\mathbb{R} \to \mathcal{L}(X,Y)$，空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R};X)$ 表示 X 值施瓦茨函数，而 $\mathcal{F}$ 表示傅里叶变换。

Marcinkiewicz 和 Mihlin 提出的经典乘子定理分两个阶段推广到了 UMD 空间。标量值乘子 m 的情形 $X = Y$ 最早于 20 世纪 80 年代由 McConnell [52] 和 Bourgain [9], 研究，随后由 Zimmermann [71] 推广（另见 [37]）。之后，在 21 世纪初，研究者发展了更一般的情形，即 $X \neq Y$ 且乘子为算子值 m；其动机是这类结果在演化方程中的应用，例如极大 L^p-正则性和半群稳定性（见 [68]）。Weis [69] 证明了算子值 Mihlin 乘子定理的一个类比结果，并将其应用于极大ˇL^p-正则性；不久之后，Strkalj 和 Weis [64] 又证明了 Marcinkiewicz 乘子定理的一个类比结果。这些定理要求其值域满足所谓的 $\mathcal{R}$-有界性条件（见第 8] 章 [39, ），这是对一致有界性的加强；Cl´ement 和 Pr¨uss [14] 证明了这一条件是必要的。关于更多参考文献，请参阅 [39] 第 8 章的注记。

这自然引出了一个问题：Coifman 等人[15] 的上述结果是否可以推广到算子值情形。Hyt¨onen 和 Potapov [35],开启了这一研究计划，并遵循了上述三个主要步骤。

(i) 算子值情形中的第一步基于两个假设： m 的值域是$\mathcal{R}$-有界的，并且存在 Littlewood–Paley–Rubio de Francia 估计 (1.1) 的 X值版本。该版本由 Berkson、Gillespie 和 Torrea [6] 引入，称为 X的 LPR$_p$性质。此估计随后在 [3, 26, 42, 58]中得到了进一步研究。目前，已知只有满足额外几何条件的巴拿赫函数空间才具有 LPR$_p$性质，例如要求 2-凹化X^2 是 UMD 空间（见 [3, 58]）。例如，带有 $t \in [2,\infty)$ 的 Schatten 类 S^t是否具有 LPR$_p$性质，仍是一个公开问题。(ii) 第二步仍可采用对偶论证。(iii) 第三步中，Hyt¨onen 和 Potapov [35] 还要求 X 是一个复插值空间，介于具有 LPR$_p$性质的巴拿赫空间 X_0 与希尔伯特空间 H之间。此外， $\mathcal{R}$-有界性条件必须替换为一个更

复杂的条件：存在一个 $\mathcal{R}$-有界族 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{L}(X_0 \cap H)$，使得 $\mathrm{Ran}(m) \subseteq \mathrm{span}(\mathcal{T})$，且 m 关于 $\mathcal{T}$ 的闵可夫斯基泛函具有有界 s-变差。这个条件可能相当难以验证。

这种方法在巴拿赫函数空间中的进一步推广见 [2]。

1.2. **主要结果的特殊情形**。本文旨在证明一个加权算子值傅里叶乘子定理，适用于具有有界 s-变差且满足 $s > 1$ 的符号 m，其中 s 与底层巴拿赫空间的几何性质有关。我们希望对底层巴拿赫空间提出的假设不仅能在巴拿赫函数空间这一类空间之外得到验证，同时还能避免上述插值论证所引出的复杂算子理论条件。为此，我们将引入一种不同类型的 Rubio de Francia 性质。

我们的主要结果的简化版本如下。若空间 X 可写为 $X = [X_0, H]_\theta$，其中某个 $\theta \in$ 满足 $0, 1]$，则称其为 θ-中间 UMD。对于 $p \in (1, \infty)$，我们将使用 Muckenhoupt 权类 A_p。

定理 1.2。令 $\theta \in (0, 1]$，$t \in (1, 2]$，$q \in [2, \infty)$ 并设 $\frac{1}{r} := \frac{1}{t} - \frac{1}{q}$。令 X 为一个 θ-中间 UMD 巴拿赫空间，其余型为 q，且 Y 为一个 UMD 巴拿赫空间，其型为 t。令 $s \in [1, \frac{2}{2-\theta})$ 并假设 $m: \mathbb{R} \to \mathcal{L}(X, Y)$ 具有 $\mathcal{R}$-有界值域，且

$$\|m\|_{\ell^r(\dot{V}^s(\Delta;\mathcal{L}(X,Y)))} := \Big(\sum_{J\in\Delta} [m|_J]^r_{V^s(J;\mathcal{L}(X,Y))}\Big)^{\frac{1}{r}} < \infty.$$

Th 且 T_m 从 $L^p(\mathbb{R}, w;\ X)$ 到 $L^p(\mathbb{R}, w;\ Y)$ 对所有 $p \in (s, \infty)$ 及 $w \in A_{p/s}$ 均有界。

此外，若进一步假设 Y 是一个 θ-中间 UMD 巴拿赫空间，则 T_m 从 $L^p(\mathbb{R};\ X)$ 到 $L^p(\mathbb{R};\ Y)$ 对所有 $p \in (1, \infty)$ 均有界。

定理 1.2 在正文中作为定理 5.2 予以证明。不失一般性，可假设 $r > s$。此外，该结果适用于 $m(\xi) = \mathrm{sign}(\xi)$，因此一般而言，$X$ 和 Y 的 UMD 性质是必要的（参见 [38, 第 5]章）。

我们的结果是关于一般 θ-中间 UMD 空间的首个此类结果。正如第1.1小节末尾所述，先前算子值情形下的结果，要么仅适用于巴拿赫函数空间，要么对 m 的插值端点 $X = [X_0, H]_\theta$ 附加了假设。

与定理1.1的算子值类比结果（见 [30, 64]和 [39,定理 8.3。9]）相比，我们注意到，若要将 V^1-有界性弱化为 V^s-有界性，就需要通过 ℓ^r-可和性对零点和无穷远处施加衰减条件，除非 $r = \infty$。另一方面，我们不需要使用任何与 $\mathcal{R}$-有界族相关的闵可夫斯基泛函，该族 $\mathcal{T}$ 在其线性张成中包含 m 的值域。

我们不知道定理1.2 中的衰减条件是否必要。例如，若 X 具有余型 2 且 Y 具有型 2，则可以避免该条件。若将 L^p-空间替换为齐次 Besov 空间 $\dot{B}^\alpha_{p,\ q}$，也可以省略该条件；此时，对 m 的条件可简化为

$$\sup_{J\in\Delta} \|m\|_{V^s(J;\mathcal{L}(X,Y))} < \infty.$$

请注意，在这种情况下，型和余型不再是 m 的假设条件中的因素。类似的结果也适用于非齐次 Besov 空间（见定理 5.3），以及 Triebel–Lizorkin 标度（见定理 5.4）。

定理 1.2 给出了若干 Marcinkiewicz 或 Mihlin 乘子定理未涵盖的傅里叶乘子。事实上，对于 $s>1$，空间 V^s 远大于 V^1。此外，还有一种 L^1 方法，可基于 L^1-可积性构造 Marcinkiewicz–Mihlin 类之外的乘子，其中考虑 $\mathscr{F}^{-1}m$ 或 $\mathscr{F}^{-1}(\mathbf{1}_J m)$ 关于强算子拓扑的性质。该L^1 方法在 [27, 28]，中起着核心作用；该文在假设 X 和 Y 具有傅里叶型的条件下，得出了 Besov 空间和 Lebesgue–Bochner 空间上的傅里叶乘子定理。其中一个主要构件是 Steklin 型乘子定理：

$$m\in B^{1/p}_{p,1}(\mathbb{R};\mathcal{L}(X,Y))\to \mathcal{F}^{-1}mx\in L^1(\mathbb{R};Y)\text{ and }\mathcal{F}^{-1}my^*\in L^1(\mathbb{R};X^*),\quad x\in X,y^*\in Y^*.$$

由于 $B^{1/p}_{p\,1}.\,(\mathbb{R};\ \mathcal{L}(X,\ Y))$ 嵌入连续函数空间（[40, 推论 14.4。27]），满足定理1.2假设的乘子不一定连续，因此不适用于这种 L^1方法。

另一方面，在下一个例子中，我们将说明，定理1.2 并未完全涵盖满足算子值 Mihlin 或 Marcinkiewicz 乘子定理假设的所有乘子。这是因为在定理 $r<\infty$ 1.2 中，情形的无穷远衰减条件。

例1.3。令 $X=\ell^p$，其中 $p\in(1,\ \infty)$，并令 $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为 ℓ^p 的典范基。令 A为 ℓ^p 上的乘法算子，其定义为：对于 $n\in\mathbb{N}$，$Ae_n=2^n e_n$，其自然定义域$D(A)=\{x\in\ell^p:\ Ax\in\ell^p\}$。定义

$$m(\xi)=A(i\xi+A)^{-1},\quad \xi\in\mathbb{R}.$$

于是，对于 $n\in\mathbb{N}$，有

$$\begin{aligned}\|m(2^{n+1})-m(2^n)\|_{\mathcal{L}(\ell^p)}&\geq\|m(2^{n+1})e_n-m(2^n)e_n\|_{\ell^p}\\&=|2^n(i2^{n+1}+2^n)^{-1}-2^n(i2^n+2^n)^{-1}|\\&=|(2i+1)^{-1}-(i+1)^{-1}|=\frac{1}{\sqrt{10}}.\end{aligned}$$

由于 m 是连续的，我们得到$[m]_{V^s(J;\,\mathcal{L}(\ell^p))}\geq\frac{1}{\sqrt{10}}$对每个二进区间 $J\in\Delta$均成立。因此，$m\notin\ell^r(V^s(\Delta;\ \mathcal{L}(\ell^p)))$对 $r<\infty$成立。然而，已知 m 满足算子值 Mihlin 或 Marcinkiewicz 乘子定理的条件，参见例如 [43,命题 6.1。3]。

我们以一个似乎不属于任何现有结果涵盖范围的例子结束本小节。据我们所知，最接近的表述是 [2, 例 5。19]，但在那里，对 m 的假设具有不同的性质。在标量值情形下，[2] 中的结果要强得多。

例 1.4. 固定 $t\in(1,2)$，并令 $X=S^t$ 为 ℓ^2上的 Schatten 类。于是 X 具有型 t和余型 2（见 [39, 命题 7.1.11]），并且对于所有 $\theta\in(0,2-\frac{2}{t})$，它都是 θ-中间 UMD（见 [38, 命题 5.4.2 和 D.3.1]）。设定 $\frac{1}{r}=\frac{1}{t}-\frac{1}{2}$ 并选取 $s\in(1,t)$。定理 1.2 遂表明，若 $m\in\ell^r(\dot{V}^s(\Delta;\mathcal{L}(S^t)))$ 且 m 具有 $\mathcal{R}$-有界范围，则对于所有 $p\in(1,\infty)$，T_m 在 $L^p(\mathbb{R};S^t)$ 上有界。对于 $t\in(2,\infty)$，类似结论同样成立，可通过类似论证或对偶性得到。

1.3. **方法**。 为证明定理 1.2，我们建立一种新的 Littlewood–Paley–Rubio de Francia 型向量值估计，从某种意义上说，它比 LPR$_p$-性质更弱，因此更容易验证，详见命题4.3。

定理 1.5。 设 $\theta \in (0,1]$, $q \in (2/\theta, \infty)$, $p \in (q', \infty)$ 且设 $w \in A_{p/q'}$。设 X 为一个θ-中间 UMD 巴拿赫空间，并设 $\mathcal{I}$ 是 $\mathbb{R}$ 的一族两两不相交区间。则存在一个递增函数 $\phi_{X,p,q}\colon [1,\infty) \to [1,\infty)$，使得

$$\Big\| \Big(\sum_{I\in\mathcal{I}} \|S_I f\|_X^q \Big)^{\frac{1}{q}} \Big\|_{L^p(\mathbb{R},w)} \leq \phi_{X,p,q}([w]_{A_{p/q'}}) \|f\|_{L^p(\mathbb{R},w;X)}. \tag{1.2}$$

被排除的端点 $q=2$ 当 $\theta=1$ (即 X 是一个希尔伯特空间）可见 [3,命题 66], ，这是（1.1）的加权向量值扩展。标量情形下 定理 1.5 且 $w=1$ 的情形见 [18] ，权则是在 [44]中加入的。极限情形$p=q'$ 已在 [16]中证明为不成立。

我们将把定理 1.5 作为变差 Carleson 算子加权有界性的一个特例来证明，见定理 4.2。与（1.2）相比，变差 Carleson 算子在 $\mathcal{I}$ 范数内还要对所有 L^p取上确界。对于 $q=\infty$，相应的结论通常称为 Carleson 不等式，是证明傅里叶级数几乎处处收敛的主要工具 [13, 32]。标量值情形下变差 Carleson 算子的（加权）有界性已在 [20, 21, 56]中得到证明。Carleson 算子的无权向量值有界性（即当 1.5 中 $q=\infty$时）已在 [34] 中针对中间 UMD 空间得到证明。变差 Carleson 算子的无权向量值有界性已在 [4], 中得到研究，其中尤其推出了当 1.2且 $w=1$时的结论。

我们将通过将[34] 借助 [49], 扩展到加权情形，进而证明变差 Carleson 算子的加权有界性；随后再将这一结果与变差 Carleson 算子在 $L^p(\mathbb{R};H)$ 上适用于希尔伯特空间 H 的加权界进行插值；相关结果见 [3, 20](另见 [50])。我们指出，式（1.2的以下变体是在 [19, 第 2 节 2]中针对周期情形建立的：

$$\Big(\sum_{I\in\mathcal{I}} \|S_I f\|_{L^p(\mathbb{R};X)}^q \Big)^{\frac{1}{q}} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R};X)}. \tag{1.3}$$

根据 Minkowski 不等式，式（1.2）或式（1.3）较强，具体取决于 p与 q的相对大小。

由定理 1.5 可知，对于 $m \in V^s(\mathbb{R};\mathcal{L}(X,Y))$，若满足 $s \in [1, \frac{2}{2-\theta})$，则 T_m从 $L^p(\mathbb{R},w;X)$ 到 $L^p(\mathbb{R},w;Y)$ 有界，其中 $p \in (s,\infty)$ 均成立，且 $w \in A_{p/s}$取定理 5.1 中的值。在这一结果的证明中， m 值域的 $\mathcal{R}$-有界性并不起任何作用。这相当令人惊讶，因为已知 T_m 的有界性要求 $\mathcal{R}$-有界性（见 [14] 和 [38, 定理 5.3.15]）。在定理 1.2 和定理 5.2 中，$\mathcal{R}$-有界性通过对 m进行分解而间接地发挥作用，其中分解的一部分在二进区间上为常数。

在命题 3.2 中，我们将证明，在定理 1.2 的设定下，实际上任意 $m \in \ell^r(R^r(\mathcal{J};\mathcal{L}(X,Y)))$ 都具有 $\mathcal{R}$- 有界的值域，其中 $\mathcal{J}$ 是 $\mathbb{R}$ 中一族不相交区间。这是关于 $\mathcal{R}$- 有界性的一项新结果，补充了 [36] 的工作，也令作者们感到意外。这里， R^r 是 [15] 中使用的空间，通过某些原子定义；对于该空间，有 $R^s \hookrightarrow V^s \hookrightarrow R^r$，其中 $s<r$。受上述结果启发，我们将在引理 3.3 中证明关于 Besov 空间以及 V^r 和 R^r 的一个一般嵌入结果。

1.4. **组织结构**。 在第 2 节中，我们介绍一些预备知识。此外，我们引入 V^s和 R^s，并证明关于它们的一些新结果。随后，在第 3 节中，我们引入 $\mathcal{R}$-有界性，并根据函数的 V^s 和 R^r-正则性，给出其成立的一个新充分条件。在第 4 节中，我们通过建立向量值变分 Carleson 估计的加权版本，为主要结果作准备；该结果特别蕴含定理 1.5的加权版本。随后，我们在第 5节中建立主要结果。文章最后列出若干未解决问题。

2. Preliminaries

2.1. **记号**。复 Banach 空间 X与 Y之间有界线性算子的空间记为 $\mathcal{L}(X,Y)$，而 $\mathcal{L}(X):=\mathcal{L}(X,X)$。若 X连续嵌入于 Y，则记作 $X\hookrightarrow Y$。 X值温和分布的空间记为 $\mathcal{S}'(\mathbb{R};X)$。 $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R};X)$ 的傅里叶变换记为 $\mathcal{F}f$ 或 $\widehat{f}$。若 $f\in L^1(\mathbb{R};X)$，则

$$\widehat{f}(\xi):=\int_{\mathbb{R}}e^{-2\pi i\xi t}f(t)\,\mathrm{d}t,\quad \xi\in\mathbb{R}.$$

令 Δ 表示 $\mathbb{R}$ 的二进划分，即 $\Delta:=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\pm[2^k,2^{k+1})$。函数 $f\colon\mathbb{R}\to X$ 在 $J\subseteq\mathbb{R}$ 上的限制定义为 $f|_J$。 f 的值域记为 $\mathrm{Ran}(f)$。

依赖于参数 $a,b,\ldots$的常数记为$C_{a,b,\ldots}$，其取值可能随行而变。我们通常省略常数$C_{a,b,\ldots}$，将其写作$\lesssim_{a,b,\ldots}$。我们用 $\phi_{a,b,\ldots}\colon[1,\infty)\to[1,\infty)$ 表示一个仅依赖于参数 $a,b,\ldots$的非递减函数，该函数也可能随行而变。

2.2. **权**。 对于 $p\in(1,\infty)$，我们将 *Muckenhoupt* A_p-类 定义为所有局部可积 $w\colon\mathbb{R}\to(0,\infty)$ 的类，其中的函数满足

$$[w]_{A_p}:=\sup_J\Big(\frac{1}{|J|}\int_J w(x)\,\mathrm{d}x\Big)\Big(\frac{1}{|J|}\int_J w(x)^{1-p'}\,\mathrm{d}x\Big)^{p-1}<\infty,$$

其中上确界取遍所有有界区间 $J\subseteq\mathbb{R}$。Muckenhoupt 类随 p 增大，即若 $p_0<p_1$，则 $A_{p_0}\subseteq A_{p_1}$ 且 $[w]_{A_{p_1}}\le[w]_{A_{p_0}}$。令 $A_\infty=\bigcup_{p>1}A_p$。
我们有如下自改进引理（见 [41, 定理 1。2]和 [29, 推论 7.2。6]）。

引理 2.1。 设 $p\in(1,\infty)$，则对于任意 $w\in A_p$ 我们有

$$[w]_{A_{p-\varepsilon}}\lesssim_p[w]_{A_p},\quad 0\le\varepsilon\le\frac{p-1}{1+C[w]_{A_p}^{(p-1)^{-1}}}.$$

对于巴拿赫空间 X, $p\in(1,\infty)$ 和 $w\in A_p$，我们将 $L^p(\mathbb{R},w;X)$ 定义为所有强可测 f 的空间：$\mathbb{R}\to X$ 满足

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R},w;X)}:=\Big(\int_{\mathbb{R}}\|f(x)\|_X^p w(x)\,\mathrm{d}x\Big)^{1/p}<\infty.$$

回顾 [23, 引理 3.3]， $\mathcal{S}(\mathbb{R};X)$ 在 $L^p(\mathbb{R},w;X)$ 中稠密。

2.3. **UMD 空间**。 关于 UMD 巴拿赫空间的介绍，请读者参阅 [38,第 4 章和 5]以及 [57]。下面简要回顾一些基础知识。设 X 是一个巴拿赫空间。我们用 $\mathcal{H}$ 表示希尔伯特变换，对于 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R};\ X)$ 由主值积分给出

$$\mathcal{H}f(x) := \mathrm{p.v.}\,\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(y)}{x-y}\,\mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

若存在某个（等价地，对所有） $p \in (1,\infty)$，使希尔伯特变换可扩张为 $L^p(\mathbb{R};X)$ 上的有界算子，则称巴拿赫空间具有 UMD 性质 。根据 Burkholder [12]和 Bourgain [8], 的开创性工作，这与 UMD 性质的原始定义等价，后者是以鞅差分的无条件性来表述的。

所有自反的勒贝格空间、索博列夫空间、Besov 空间和 Triebel–Lizorkin 空间都是 UMD 巴拿赫空间。UMD 性质蕴含自反性，因此 $L^1(\mathbb{R})$ 和 $L^\infty(\mathbb{R})$ 不是 UMD 巴拿赫空间。

回顾一下，对于区间 $I \subseteq \mathbb{R}$， S_I 定义为符号为 $m = \mathbf{1}_I$ 的傅里叶乘子算子。针对 UMD 空间的 Littlewood–Paley 不等式的向量值类比由 [9] 得到（另见 [38, 第 5] 章）。以下加权扩展见 [23, 定理 3.4]。

命题 2.2。 设 X 是一个 UMD 巴拿赫空间，$(\varepsilon_J)_{J\in\Delta}$ 是一个 *Rademacher* 序列，$p \in (1,\ \infty)$ 且 $w \in A_p$。那么对于所有 $f \in L^p(\mathbb{R},\ w;X)$，

$$\mathbb{E}\Big\|\sum_{J\in\Delta}\varepsilon_J S_J f\Big\|_{L^p(\mathbb{R},w;X)} \lesssim_{X,p} [w]_{A_p}^{2\max\{1,\frac{1}{p-1}\}}\,\|f\|_{L^p(\mathbb{R},w;X)},$$

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R},w;X)} \lesssim_{X,p} [w]_{A_p}^{2\max\{1,\frac{1}{p-1}\}}\mathbb{E}\Big\|\sum_{J\in\Delta}\varepsilon_J S_J f\Big\|_{L^p(\mathbb{R},w;X)}.$$

在下一个定义中，我们将使用复插值方法 $[X,Y]_\theta$，相关内容请参见 [5]。

定义 2.3。 设 $\theta \in (0,1]$。如果一个巴拿赫空间 X 可以表示为 $X = [Z,H]_\theta$，其中 Z 是一个 UMD 巴拿赫空间， H是一个希尔伯特空间，则称其为 θ-中间 UMD 巴拿赫空间 。

若 $\theta = 1$，则有 $X = H$，即 X 是一个希尔伯特空间。若 X 是 θ-中间 UMD，则其对偶空间也是 θ-中间 UMD（见 [5, 推论 4.5.2]）。由于 UMD 性质在复插值下保持，任何中间 UMD 巴拿赫空间都是 UMD 巴拿赫空间。反过来，根据 Rubio de Francia 的一个结果 [60]，所有 UMD 巴拿赫函数空间都是中间 UMD 巴拿赫函数空间。对于一般的巴拿赫空间，这仍是一个未解决的问题。

2.4. **型与余型**。 设 $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ 为 Rademacher 序列。若巴拿赫空间 X 满足：存在常数 $C \geq 1$，使得对于 X中的所有有限序列 $(x_n)_{n=1}^N$， 均有

$$\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{n=1}^N \varepsilon_n x_n\Big\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq C\Big(\sum_{n=1}^N \|x_n\|^t\Big)^{\frac{1}{t}}.$$

称巴拿赫空间 X 具有余型 $q \in [2,\infty]$，如果存在常数 $C \geq 1$，使得对于 X 中的所有有限序列 $(x_n)_{n=1}^N$， 都有

$$\Big(\sum_{n=1}^N \|x_n\|^q\Big)^{\frac{1}{q}} \leq C\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{n=1}^N \varepsilon_n x_n\Big\|^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

对 $q=\infty$作通常的修改。每个巴拿赫空间都具有型 1 和余型 ∞。空间 X 具有型 2 和余型 2，当且仅当 X 与希尔伯特空间同构（[46,命题 3。1]）。对于 $p\in[1,\infty$，（非交换） L^p-空间已知具有型$p\wedge 2$ 和余型 $p\vee 2$，见 [22, 39]。

最后，我们注意到，对于一个 σ-有限测度空间 (S,μ)，若 X 具有型 t 且 $p\in[1,\infty)$，则 $L^p(S;X)$ 具有型 $t\wedge p$。此外，若 X 具有余型 q 且 $p\in[1,\infty]$，则 $L^p(S;X)$ 具有余型 $p\vee q$。特别地，空间 $L^2(S;X)$ 与 X 具有相同的型和余型（参见 [39,命题 7.1.4]）。

2.5. 函数空间 R^s, V^s 和 C^α。 本小节介绍有界 s-变差空间 V^s（$s\in[1,\infty)$），它们将在本文的主要结果中发挥核心作用。

设 X 为一个巴拿赫空间，且 $J\subseteq\mathbb{R}$, $s\in[1,\infty)$。对于 $f\colon\ \mathbb{R}\to X$，定义

$$[f]_{V^s(J;X)}:=\sup_{t_0<\cdots<t_N}\left(\sum_{i=0}^{N-1}\|f(t_{i+1})-f(t_i)\|_X^s\right)^{1/s}. \tag{2.2}$$

我们记 $f\in V^s(J;X)$，若 (2.2) 有限。我们称 f 具有 有界 s-变差，其中 $s\in[1,\infty)$，记为 $f\in V^s(J;X)$，若

$$\|f\|_{V^s(J;X)}:=\|f\|_{L^\infty(J;X)}+[f]_{V^s(J;X)}<\infty. \tag{2.3}$$

此外，我们采用约定 $V^\infty(J;X):=L^\infty(J;X)$。注意，$V^s(J;X)$ 是一个巴拿赫空间。

给定 $\mathbb{R}$ 和 $r\in[1,\infty]$ 中一族两两不相交的集合 $\mathcal{J}$，令 $\ell^r(V^s(\mathcal{J};X))$ 和 $\ell^r(V^s(\mathcal{J};X))$ 表示所有满足以下条件的 $f\in L^\infty(\mathbb{R};X)$ 所构成的空间：

$$\|f\|_{\ell^r(V^s(\mathcal{J};X))}:=\Big(\sum_{J\in\mathcal{J}}\|f|_J\|_{V^s(J;X)}^r\Big)^{1/r}<\infty,$$

and

$$\|f\|_{\ell^r(\dot V^s(\mathcal{J};X))}:=\Big(\sum_{J\in\mathcal{J}}[f|_J]_{V^s(J;X)}^r\Big)^{1/r}<\infty,$$

$r=\infty$ 的通常相应修改。

现在假设 $J\subseteq\mathbb{R}$ 是一个 区间。我们称函数 $a\colon J\to X$ 为一个 $R^s(J;X)$-原子，记作 $a\in R^s_{\mathrm{at}}(J;X)$，若存在一组 $\mathcal{I}$，它们是 J 的两两不相交子区间，以及一组向量 $(c_I)_{I\in\mathcal{I}}$ 属于 X，使得

$$a=\sum_{I\in\mathcal{I}}c_I\mathbf{1}_I\quad\text{and}\quad\Big(\sum_{I\in\mathcal{I}}\|c_I\|_X^s\Big)^{1/s}\le 1.$$

定义 $R^s(J;X)$ 为

$$R^s(J;X):=\Big\{f\in L^\infty(J;X):f=\sum_{k=1}^\infty\lambda_k a_k,(\lambda_k)_{k\ge1}\in\ell^1,(a_k)_{k\ge1}\subseteq R^s_{\mathrm{at}}(J;X)\Big\},$$

其范数为

$$\|f\|_{R^s(J;X)}:=\inf\Big\{\|(\lambda_k)_{k\ge1}\|_{\ell^1}:f=\sum_{k=1}^\infty\lambda_k a_k\text{ as above}\Big\}.$$

再次令 $R^\infty(J;X)=L^\infty(J;X)$。注意，$R^s(J;X)$ 是一个巴拿赫空间。

对于 $\mathbb{R}$ 和 $r\in[1,\infty]$ 中的一族不相交区间 $\mathcal{J}$，空间 $\ell^r(R^s(\mathcal{J};X))$ 由所有满足以下条件的 $f\in L^\infty(\mathbb{R};X)$ 组成：

$$\|f\|_{\ell^r(R^s(\mathcal{J};X))}:=\Big(\sum_{J\in\mathcal{J}}\|f|_J\|_{R^s(J;X)}^r\Big)^{1/r}<\infty,$$

对 $r=\infty$ 作通常的修改。

对于 $\alpha\in(0,1]$ 我们将 α-*Hölder* 连续函数 $C^\alpha(J;X)$ 的空间定义为如下空间：

所有 f 的空间：$J\to X$ 满足

$$\|f\|_{C^\alpha(J;X)}:=\|f\|_{L^\infty(J;X)}+[f]_{C^\alpha(J;X)},$$

其中

$$[f]_{C^\alpha(J;X)}:=\sup_{t_1,t_2\in J,t_1\neq t_2}\frac{\|f(t_1)-f(t_2)\|_X}{|t_1-t_2|^\alpha}.$$

显然可验证，$C^\alpha(J;X)$ 是一个巴拿赫空间。

以下嵌入结果可见于 [2, 引理 4。3] 以及 [15, 引理 2]。

引理 2.4。设 X 是一个巴拿赫空间，$J\subseteq\mathbb{R}$ 是一个区间，且 $s\in[1,\infty)$。那么 *(i)* $R^s(J;X)\hookrightarrow V^s(J;X)$ 并且对所有 $f\in R^s(J;X)$，

$$\|f\|_{V^s(J;X)}\lesssim\|f\|_{R^s(J;X)}.$$

(ii) $V^s(J;X)\hookrightarrow R^t(J;X)$ 并且对所有 $f\in V^s(J;X)$ 以及 $t>s$，

$$\|f\|_{R^t(J;X)}\lesssim\|f\|_{V^s(J;X)}.$$

(iii) $C_s^{\frac{1}{}}(J;X)\hookrightarrow V^s(J;X)$ 并且对所有 $f\in C_s^{\frac{1}{}}(J;X)$，我们有

$$\|f\|_{V^s(J;X)}\leq\|f\|_{L^\infty(J;X)}+|J|^{\frac{1}{}}[f]_{C^{1/s}(J;X)}.$$

下一个引理给出了 V^s 空间的插值嵌入。关于 R^s 和 V^s 的逆向结果见 [2]。

引理 2.5. 设 X_0,X_1 为巴拿赫空间，且 $J\subseteq\mathbb{R}$。设 $\theta\in[0,1]$，$s_0,s_1\geq1$ 并令 $\frac{1}{s_\theta}=\frac{1-\theta}{s_0}+\frac{\theta}{s_1}$。则

$$[V^{s_0}(J;X_0),V^{s_1}(J;X_1)]_\theta\hookrightarrow V^{s_\theta}(J;[X_0,X_1]_\theta).$$

证明。设 X 是一个巴拿赫空间，并且 $s\in[1,\infty]$。设 $P:=(t_0,\cdots,t_N)$，其中 $t_0,\ldots,t_N\in J$ 满足 $t_0<\cdots<t_N$。定义算子 $\Phi_P\colon V^s(J;X)\to\ell^s(X)$ 如下：

$$\Phi_Pf:=\left(f(t_0),f(t_1)-f(t_0),\cdots,f(t_N)-f(t_{N-1})\right).$$

Then

$$\|\Phi_Pf\|_{\ell^s(X)}=\Big(\|f(t_0)\|_X^s+\sum_{i=0}^{N-1}\|f(t_{i+1})-f(t_i)\|_X^s\Big)^{\frac{1}{s}},$$

因此，对所有这样的 P 取上确界，可得范数的 $V^s(J;X)$ 的如下等价关系：

$$\|f\|_{V^s(J;X)}\eqsim_s\sup_P\|\Phi_Pf\|_{\ell^s(X)}. \tag{2.4}$$

现在注意到，Φ_P 是从 $V^{s_0}(J;X_0)$ 到 $\ell^{s_0}(X_0)$ 以及从 $V^{s_1}(J;X_1)$ 到 $\ell^{s_1}(X_1)$ 的有界线性算子。因此，根据复插值和 [38, 定理 2.2.6]，Φ_P 是从 $[V^{s_0}(J;X_0)\ V^{s_1}(J;X_1)]_\theta$ 到

$$[\ell^{s_0}(X_0),\ell^{s_1}(X_1)]_\theta=\ell^{s_\theta}([X_0,X_1]_\theta).$$

将此与（2.4）结合可得

$$\|f\|_{V^{s_\theta}(J;[X_0,X_1]_\theta)} \lesssim \sup_P \|\Phi_P f\|_{\ell^{s_\theta}([X_0,X_1]_\theta)} \lesssim \|f\|_{[V^{s_0}(J;X_0),V^{s_1}(J;X_1)]_\theta},$$

完成证明。 □

2.6. **Besov 空间和 Triebel–Lizorkin 空间**。 下面回顾带有 A_∞-权的向量值 Besov 空间和 Triebel–Lizorkin 空间的定义。关于 Besov 空间和 Triebel–Lizorkin 空间的更多细节，请参阅 [65, 66]。关于无权的向量值情形，参见 [1, 40, 63, 67]。带权的标量值情形已在 [11],中得到深入研究，而带权的向量值情形可参见 [53]。

取 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，使得 φ 的傅里叶变换 $\widehat{\varphi}$ 满足

$$0 \le \widehat{\varphi}(\xi) \le 1, \quad \xi \in \mathbb{R}, \qquad \widehat{\varphi}(\xi) = 1 \ \text{ if } \ |\xi| \le 1, \qquad \widehat{\varphi}(\xi) = 0 \ \text{ if } \ |\xi| \ge \frac{3}{2}.$$

令 $(\varphi_k)_{k\ge 0} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 定义为

$$\widehat{\varphi_0} = \widehat{\varphi}, \qquad \widehat{\varphi_1} = \widehat{\varphi}(\cdot/2) - \widehat{\varphi}, \qquad \widehat{\varphi_k} = \widehat{\varphi_1}(2^{-k+1}\cdot), \quad k \ge 2.$$

给定 $p \in (1,\infty)$、$q \in [1,\infty]$、$s \in \mathbb{R}$ 和 $w \in A_\infty$，对于 $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R};X)$，定义

$$\|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R},w;X)} = \Big\| \big(2^{ks}\varphi_k * f\big)_{k\ge 0} \Big\|_{\ell^q(L^p(\mathbb{R},w;X))},$$

$$\|f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R},w;X)} = \Big\| \big(2^{ks}\varphi_k * f\big)_{k\ge 0} \Big\|_{L^p(\mathbb{R},w;\ell^q(X))}.$$

使上述范数有限的温和分布空间分别记为$B^s_{p,q}(\mathbb{R},w;\ X)$ 和 $F^s_{p,q}(\mathbb{R},w;\ X)$，它们都是巴拿赫空间。任何其他满足上述条件的 $\widetilde{\varphi}$ 都会导出等价范数。

3. $\mathcal{R}$-BOUNDEDNESS

本节简要介绍 $\mathcal{R}$-有界性的基本性质，这些性质在我们的主要结果中起关键作用。详细内容请参阅 [39,第 8]章。

定义 3.1. 设 X 和 Y 为巴拿赫空间，且$(\varepsilon_n)_{n\ge 1}$ 为一个 *Rademacher* 序列。若存在常数 $C>0$，使得对于 $\mathcal{T}$ 中的任意有限序列$(T_n)_{n=1}^N$ 和 X中的$(x_n)_{n=1}^N$，都有一个算子族 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ 满足 $\mathcal{R}$-有界，

$$\mathbb{E}\Big\| \sum_{n=1}^N \varepsilon_n T_n x_n \Big\|_Y \le C\, \mathbb{E}\Big\| \sum_{n=1}^N \varepsilon_n x_n \Big\|_X.$$

不等式中最小的可取常数称为 $\mathcal{R}$-界，记作 $\mathcal{R}(\mathcal{T})$。

根据 Kahane–Khintchine 不等式，上述内容中的 L^1 阶矩可以替换为任意 L^p 阶矩（ $p \in [1,\infty)$）。由 [39, 命题 8.1.21 和 8.1.22], 可知，若 $\mathcal{T}$在$\mathcal{L}(X,\ Y)$ 中是 $\mathcal{R}$-有界的，则 $\mathcal{T}$ 的凸包的闭包（记为 conv($\mathcal{T}$)）也是 $\mathcal{R}$-有界的，且

$$\mathcal{R}(\mathcal{T}) = \mathcal{R}(\overline{\mathrm{conv}}(\mathcal{T})). \tag{3.1}$$

在下一个结果中，我们证明，对于任意区间 $J \subseteq \mathbb{R}$，在 $R^r(J;\ \mathcal{L}(X,Y))$ 和$V^r(J;\ \mathcal{L}(X,Y))$ 中的函数，在对 X和 Y施加适当条件时，其值域均为 $\mathcal{R}$-有界。

命题 3.2. 设 X、Y 为巴拿赫空间，$\mathcal{J}$ 为 $\mathbb{R}$ 中不相交区间的集合。假设 X 的余型为 $q \in [2,\infty]$，且 Y的型为 $t \in [1,2]$。设 $\frac{1}{r} := \frac{1}{t} - \frac{1}{q}$。那么每个$f \in \ell^r(R^r(\mathcal{J};\mathcal{L}(X,Y)))$ 的值域均为 $\mathcal{R}$-有界，其中

$$\mathcal{R}(\mathrm{Ran}(f)) \lesssim_{X,Y,q,t} \|f\|_{\ell^r(R^r(\mathcal{J};\mathcal{L}(X,Y)))}.$$

此外，对于 $s \in [1,r)$，我们有，每个 $f \in \ell^r(V^s(\mathcal{J};\mathcal{L}(X,Y)))$ 的取值范围都是 $\mathcal{R}$-有界的，其中

$$\mathcal{R}(\mathrm{Ran}(f)) \lesssim_{X,Y,q,s,t} \|f\|_{\ell^r(V^s(\mathcal{J};\mathcal{L}(X,Y)))},$$

证明。若 $r=\infty$，则 $t=q=2$，因此每个一致有界族都是 $\mathcal{R}$-有界的（见[39, 定理 8.1.3]）。现在假设 $r \in [1,\infty)$。设 $J \in \mathcal{J}$ 和 $\mathcal{I}$ 是 J的一个两两不相交子区间族。对于 $a \in R^r_{\mathrm{at}}(J;\mathcal{L}(X,Y))$，记为 $a = \sum_{I\in\mathcal{I}} c_I \mathbf{1}_I$，其中$\{c_I\}_{I\in\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$。由 [25]（另见 [39, 命题 8.1.20]），我们有

$$\mathcal{R}(\mathrm{Ran}(a)) = \mathcal{R}(\{c_I : I\in\mathcal{I}\}) \lesssim \Big(\sum_{I\in\mathcal{I}} \|c_I\|^r\Big)^{1/r} \le 1.$$

现在取 $f \in \ell^r(R^r(\mathcal{J};\mathcal{L}(X,Y)))$。那么 $f|_J \in R^r(J;\mathcal{L}(X,Y))$，因此存在序列 $(\lambda_k)_{k\ge1} \subseteq \mathbb{C}$和 $(a_k)_{k\ge1} \subseteq R^r_{\mathrm{at}}(J;\mathcal{L}(X,Y))$，使得 $f|_J = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k a_k$。由三角不等式可知

$$\mathcal{R}(\mathrm{Ran}(f|_J)) \le \sum_{k=1}^\infty |\lambda_k|\cdot\mathcal{R}(\mathrm{Ran}(a_k)) \lesssim \sum_{k=1}^\infty |\lambda_k|.$$

因此，对 $(\lambda_k)_{k\ge1}$ 和 $(a_k)_{k\ge1}$ 取下确界，并在 $\mathrm{Ran}(f) = \cup_{J\in\mathcal{J}}\mathrm{Ran}(f|_J)$ 上再次应用 [25]，可得

$$\mathcal{R}(\mathrm{Ran}(f)) \lesssim \Big(\sum_{J\in\mathcal{J}} \mathcal{R}\big(\mathrm{Ran}(f|_J)\big)^r\Big)^{1/r} \lesssim \|f\|_{\ell^r(R^r(\mathcal{J};\mathcal{L}(X,Y)))},$$

从而完成 R^r的证明。关于 V^s 的结果现在由引理 2.4得到。 □

注意，如果 $\mathcal{J}$ 仅由一个区间组成，该结果同样成立。此外，该区间可以是 $\mathbb{R}$，此时可得到，对于 $s \in [1,r)$，$V^s(\mathbb{R};\mathcal{L}(X,Y))$ 中的函数具有$\mathcal{R}$-有界的值域。

在 [36] 的 $\mathcal{R}$-有界性的充分条件中，在假设 X 具有余型 q 且 Y 具有型 t的情况下，使用 Besov 和 H¨older 正则性来表述。那里所使用的空间例如是 $B^{d/r}_{r\,1},(\mathbb{R}^d;\mathcal{L}(X,Y))$，后者嵌入到取值于 $\mathcal{L}(X,Y)$ 的有界连续函数空间中。由于 R^r 和 V^s 中的函数不一定连续，命题 3.2 并非由 [36]推出。

在 $d=1$的逆向推导中，这自然引出了一个问题：是否有 $B^{1/r}_{r\,1}$，（$\mathbb{R}$；E）嵌入 R^r（$\mathbb{R}$；E）中；我们将在下文的引理 3.3 中证明这一点。因此，命题 3.2 的结果蕴含了 [36] 中关于 $d=1$的结果。我们的证明可以扩展到 $d\ge2$，这留给感兴趣的读者。

引理 3.3。 设 E 是一个巴拿赫空间，并设 $r \in [1,\infty)$。那么对于 $r>1$，我们有

$$B^{1/r}_{r,1}(\mathbb{R};E) \hookrightarrow R^r(\mathbb{R};E)\cap L^r(\mathbb{R};E) \hookrightarrow V^r(\mathbb{R};E)\cap L^r(\mathbb{R};E) \hookrightarrow B^{1/r}_{r,\infty}(\mathbb{R};E)$$

并且对于 $r=1$，我们有

$$B^1_{1,1}(\mathbb{R};E) \hookrightarrow V^1(\mathbb{R};E)\cap L^1(\mathbb{R};E) \hookrightarrow B^1_{1,\infty}(\mathbb{R};E)$$

注意，并不存在 $B^1_{1,\ 1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow R^1(\mathbb{R})$。事实上， $R^1(\mathbb{R})$ 中的函数至多只能取可数多个值。

证明。 显然 $B^{1/r}_{r\ 1}{}_{,}(\mathbb{R}; E) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}; E)$, 因此对于情形 $r > 1$ 下的第一个嵌入，我们只需证明 $B^{1/r}_{r\ 1}{}_{,}(\mathbb{R}; E) \hookrightarrow R^r(\mathbb{R}; E)$。我们将使用 Besov 空间的原子分解（见 [62, 第 3] 节）。事实上，任意 $f \in B^{1/r}_{r\ 1}{}_{,}(\mathbb{R}; E)$ 都可以写成

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu_{j,k} a_{j,k}, \tag{3.2}$$

其中 $\mu_{j,k}$ 满足

$$\|f\|_{B^{1/r}_{r,1}(\mathbb{R};E)} \eqsim_r \sum_{j=0}^{\infty} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\mu_{j,k}|^r \Big)^{1/r},$$

并且原子 $a_{j,k}$ 的支集包含于以 k 为中心、长度为 2^{-j} 的区间的某个固定倍数伸缩区间上。此外，它们满足 $\|a_{j,k}\|_{L^\infty(\mathbb{R};E)} \le 1$ ，且 $\|a'_{j,k}\|_{L^\infty(\mathbb{R};E)} \le 2^j$。注意

$$\|f+g\|^r_{R^r(\mathbb{R};E)} \le \|f\|^r_{R^r(\mathbb{R};E)} + \|g\|^r_{R^r(\mathbb{R};E)}$$

对于支集不相交的 $f, g\colon\ \mathbb{R} \to E$。因此，由于固定 $j \ge 0$ 时，$a_{j,k}$ 的支集具有有界重叠，我们可以估计

$$\|f\|_{R^r(\mathbb{R};E)} \lesssim_r \sum_{j=0}^{\infty} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|a_{j,k}\mu_{j,k}\|^r_{R^r(\mathbb{R},E)} \Big)^{1/r}$$

因此，只需证明 $\|a_{j,\ k}\|_{R^r(\mathbb{R},\ E)} \lesssim 1$ 与 j， k无关。记 $a_{j,\ k}$ 的支集为 I，这直接由（见引理 2.4）得出

$$\|a_{j,k}\|_{R^r(\mathbb{R},E)} \lesssim \|a_{j,k}\|_{V^1(\mathbb{R},E)} \lesssim \|a_{j,k}\|_{L^\infty(I;E)} + |I|[a_{j,k}]_{C^1(I;E)} \lesssim 1.$$

这就完成了 $B^{1/r}_{r\ 1}{}_{,}(\mathbb{R};\ E) \hookrightarrow R^r(\mathbb{R}; E)$ 的证明。$B^1_{1,\ 1}(\mathbb{R}; E) \hookrightarrow V^1(\mathbb{R}; E)$ 的证明完全相同。

第一条结论中的第二个嵌入由引理 2.4 得出。为证明两条结论中的最后一个嵌入，取 $r \in [1, \infty)$。利用 Besov 空间众所周知的差分范数（见 [65, 第 2.5 节。12]），只需证明对所有 $h > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} \|f(x+h) - f(x)\|^r \,\mathrm{d}x \le h[f]^r_{V^r(\mathbb{R};E)}.$$

为验证这一点，请注意，

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \|f(x+h) - f(x)\|^r dx &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{jh}^{(j+1)h} \|f(x+h) - f(x)\|^r \,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_0^h \|f(y+(j+1)h) - f(y+jh)\|^r \,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^h \sum_{j\in\mathbb{Z}} \|f(y+(j+1)h) - f(y+jh)\|^r \,\mathrm{d}y \\
&\le \int_0^h [f]^r_{V^r(\mathbb{R};E)} \,\mathrm{d}y = h[f]^r_{V^r(\mathbb{R};E)},
\end{aligned}$$

从而完成第二个嵌入的证明。 □

有界区间情形下，与引理 3.3 类似的标量值结果可见于 [59] ，向量值情形的推广见于 [48]。此外，关于$W^{s,r} = B^s_{r,r}$ 且 $s > 1/r$ 的结果可见于 [24, 推论 A.3]。

注 3.4。 由 Besov 空间和 Triebel–Lizorkin 空间包含无界函数这一事实（见 [61,定理 4.6.4/1]）可知

$$B^{1/r}_{r,q}(\mathbb{R}) \not\hookrightarrow V^r(\mathbb{R}) \quad \text{for all } r \in [1,\infty) \text{ and } q \in (1,\infty],$$
$$F^{1/r}_{r,q}(\mathbb{R}) \not\hookrightarrow V^r(\mathbb{R}) \quad \text{for all } r \in (1,\infty) \text{ and } q \in [1,\infty].$$

这证明了引理 $B^{1/r}_{r,1}$ 中的 -嵌入 3.3 的尖锐性。

嵌入到 $B^{1/r}_{r,\infty}$ 中同样是尖锐的。事实上，有

$$V^r(\mathbb{R}) \cap L^r(\mathbb{R}) \not\hookrightarrow B^{1/r}_{r,q}(\mathbb{R}) \quad \text{for all } r \in [1,\infty] \text{ and } q \in [1,\infty),$$
$$V^r(\mathbb{R}) \cap L^r(\mathbb{R}) \not\hookrightarrow F^{1/r}_{r,q}(\mathbb{R}) \quad \text{for all } r \in [1,\infty) \text{ and } q \in [1,\infty].$$

事实上，有 $f = \mathbf{1}_{[0,1]} \in V^r(\mathbb{R}) \cap L^r(\mathbb{R})$，但不属于 $B^{1/r}_{r,q}(\mathbb{R})$（当 $q < \infty$ 时（见 [61, 引理 4.6.3/2]）。要得到 $F^{1/r}_{r,q}(\mathbb{R})$ 的结果，只需考虑 $q = \infty$，对于这种情形可以使用 [40, 例 14.6.33]中的论证。

4. Weighted, vector-valued variational Carleson estimates

本节中，我们通过建立向量值变分 Carleson 估计的加权版本，为主要结果做准备。首先，我们将向量值 Carleson 算子的有界性从 [34] 推广到加权情形。对于 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}; X)$ 和 $a \in \mathbb{R}$，定义

$$\mathcal{C}_a f(x) := \int_{-\infty}^{a} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} \, \mathrm{d}\xi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

The*Carleson* 极大算子定义为

$$\mathcal{C}_* f(x) := \sup_{a \in \mathbb{R}} \|\mathcal{C}_a f(x)\|_X, \quad x \in \mathbb{R}.$$

命题 4.1。设 $\theta \in (0,1]$，设 X 是一个 θ-中间UMD 巴拿赫空间，并设$p \in (1,\infty)$。存在一个非递减函数 $\phi_{X,p}\colon [1,\infty) \to [1,\infty)$，使得对所有$w \in A_p$和 $f \in L^p(\mathbb{R}, w; X)$，均有

$$\|\mathcal{C}_* f\|_{L^p(\mathbb{R},w)} \le \phi_{X,p}([w]_{A_p}) \, \|f\|_{L^p(\mathbb{R},w;X)}.$$

证明。为避免强可测性方面的问题，取 $(q_j)_{j\ge1}$ 为 $\mathbb{R}$ 中的稠密序列，并令$Q_n = \{q_1, \dots, q_n\}$，其中 $n \ge 1$。由于 $\mathcal{C}_a f = f - S_{[a,\infty)} f$，由稠密性、单调收敛和连续性，只需证明存在一个非递减函数 $\phi_{X,p}\colon [1,\infty) \to [1,\infty)$，使得对所有 $n \ge 1$、$w \in A_p$ 和 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}; X)$，

$$\Big\| \sup_{a \in Q_n} \|S_{[a,\infty)} f\|_X \Big\|_{L^p(\mathbb{R},w)} \le \phi_{X,p}([w]_{A_p}) \, \|f\|_{L^p(\mathbb{R},w;X)}. \tag{4.1}$$

定义 $\mathcal{M}^a f := x \mapsto e^{-2\pi i x a} f(x)$，并注意到

$$\|S_{[0,\infty)} \mathcal{M}^a f\|_X = \|\mathcal{M}^a S_{[a,\infty)} f\|_X = \|S_{[a,\infty)} f\|_X.$$

令 $\mathcal{H}$ 表示希尔伯特变换。由于 $i\mathcal{H}+I=2S_{[0,\infty)}$，只需证明存在一个非递减函数 $\phi_{X,\ p}:[1,\infty)\to[1,\infty)$，使得对于所有 $n\geq 1$、$w\in A_p$ 和 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R};X)$，

$$\Big\|\sup_{a\in Q_n}\|\mathcal{H}\mathcal{M}^a f\|_X\Big\|_{L^p(\mathbb{R},w)}\leq \phi_{X,p}([w]_{A_p})\,\|f\|_{L^p(\mathbb{R},w;X)}\,. \tag{4.2}$$

固定 $n\geq 1$。为证明（4.2），我们希望应用 [49] 中的稀疏控制结果。为此，令 $p_0\in(1,\infty)$，并定义 T： $L^{p_0}(\mathbb{R};\ X)\to L^{p_0}(\mathbb{R};\ \ell^\infty(Q_n;\ X))$ 如下

$$Tf(x,a):=\mathcal{H}\mathcal{M}^a f(x),\quad x\in\mathbb{R},\,a\in Q_n.$$

若 $w\equiv 1$， [34, 定理 11] 表明（4.1）成立，因此（4.2）也成立，这意味着 T 由稠密性可知定义良好且有界。对于 $f\in L^{p_0}(\mathbb{R};\ X)$，我们还定义

$$M_T^{\#}f(x):=\sup_{I\ni x}\operatorname*{ess\,sup}_{x_1,x_2\in I}\big\|T(f\mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus 5I})(x_1)-T(f\mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus 5I})(x_2)\big\|_{\ell^\infty(Q_n;X)},\quad x\in\mathbb{R},$$

上确界取遍所有包含 x的区间 I。

固定 $x\in\mathbb{R}$，并取一个包含 x 的区间 I。取 $x_1,\ x_2\in I$，并将 I 的长度记为 ε。注意，对于 $y\in\mathbb{R}\setminus 5I$,

$$|x-y|\eqsim|x_1-y|\eqsim|x_2-y|\gtrsim 2\varepsilon.$$

于是由（2.1），对于 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R};\ X)$，我们有

$$\begin{aligned}
&\big\|T(f\mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus 5I})(x_1)-T(f\mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus 5I})(x_2)\big\|_{\ell^\infty(Q_n;X)}\\
&\qquad=\sup_{a\in Q_n}\frac{1}{\pi}\Big\|\int_{\mathbb{R}\setminus 5I}\Big(\frac{1}{x_1-y}-\frac{1}{x_2-y}\Big)e^{-2\pi iya}f(y)\,\mathrm{d}y\Big\|_X\\
&\qquad\lesssim\int_{\mathbb{R}\setminus 5I}\frac{|x_1-x_2|}{|x_1-y||x_2-y|}\,\|f(y)\|_X\,\mathrm{d}y\\
&\qquad\lesssim\varepsilon\int_{\mathbb{R}\setminus 5I}\frac{1}{|x-y|^2}\,\|f(y)\|_X\,\mathrm{d}y\\
&\qquad\lesssim\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^k\varepsilon<|x-y|\leq 2^{k+1}\varepsilon}\frac{1}{|x-y|^2}\,\|f(y)\|_X\,\mathrm{d}y\\
&\qquad\lesssim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{2}{2^{k+1}\varepsilon}\int_{|x-y|\leq 2^{k+1}\varepsilon}\|f(y)\|_X\,\mathrm{d}y\\
&\qquad\lesssim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot M\big(\|f\|_X\big)(x)\lesssim M\big(\|f\|_X\big)(x),
\end{aligned}$$

其中 M 是 Hardy-Littlewood 极大算子。因此我们得到

$$M_T^{\#}f(x)\lesssim M(\|f\|_X)(x),\quad x\in\mathbb{R}.$$

由于 M 根据 [38, 定理 2.3.2]弱 L^1有界， $M_T^{\#}$ 也弱 L^1有界。至此，我们已验证 [49, 定理 3.2] 的所有假设，其中 $p_1=p_0$、$p_2=1$、$r=1$和（S、d、μ）构成了配备欧几里得度量和勒贝格测度的 $\mathbb{R}$。根据 [49, 推论 1.2],，我们得出，对于所有 $p\in$（p_0、∞），$w\in A_{p/p_0}$以及 $f\in L^p$（$\mathbb{R}$、w；X），

$$\Big\|\sup_{a\in Q_n}\big\|\mathcal{H}\mathcal{M}^a f\big\|_X\Big\|_{L^p(\mathbb{R},w)}\lesssim\frac{p^2}{p-p_0}\cdot C_{X,p_0}\cdot[w]_{A_{p/p_0}}^{\max\{\frac{1}{p-p_0},1\}}\,\|f\|_{L^p(\mathbb{R},w;X)}\,, \tag{4.3}$$

其中因子 $\frac{p^2}{p-p_0}$ 源自 [49, 命题 4.1] 的证明，且 $C_{X,\,p_0}$ 是（4.2）中 $w\equiv 1$的情形下的常数，也就是 [34, 定理 1.1]中的常数。通过检查证明可知，$C_{X,\,p_0}\to\infty$ 因为 $p_0\downarrow 1$。

现在，固定 $w\in A_p$，取 $p_0\in(1,p)$，使得 $\frac{p}{p_0}=p-\varepsilon$，且 $\varepsilon>0$ 满足引理 2.1 中的条件。结合式（4.3），我们得出存在一个非递减函数 $\phi_{X,\,p}\colon[1,\infty)\to[1,\infty)$，使得式（4.2）成立，从而完成证明。□

我们将利用命题 4.1 将向量值变差 Carleson 算子的有界性从 [4] 推广到加权情形。注意，在证明中我们仅依赖命题4.1 （因此也依赖 [34] 的主要结果）。因此，我们还提供一种替代证明方法，用以证明向量值变差 Carleson 算子的无权有界性，该结果最初由 [4] 证明。

对于 $q\in[1,\infty)$ 和 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R};X)$，我们将 变差 *Carleson* 算子 定义为

$$\mathcal{C}_*^q f(x):=[a\mapsto\mathcal{C}_a f(x)]_{V^q(\mathbb{R};X)}=\sup_{\mathcal{I}}\Big(\sum_{I\in\mathcal{I}}\|S_I f(x)\|_X^q\Big)^{\frac{1}{q}},\quad x\in\mathbb{R},$$

其中，上确界取遍 $\mathbb{R}$中的所有有限个两两不相交的区间 $\mathcal{I}$。

定理 4.2. 设 X 是一个 θ-中间 UMD 巴拿赫空间，其中 $\theta\in(0,1]$。设 $q\in(2/\theta,\infty)$和 $p\in(q',\infty)$。那么存在一个非递减函数 $\phi_{X,p,q}\colon[1,\infty)\to[1,\infty)$，使得对所有 和 $(\mathbb{R},w;X)$，

$$\|\mathcal{C}_*^q f\|_{L^p(\mathbb{R},w)}\le\phi_{X,p,q}([w]_{A_{p/q'}})\,\|f\|_{L^p(\mathbb{R},w;X)}\,.\tag{4.4}$$

若 $X=\mathbb{C}$ （因而 $\theta=1$），则此类结果可见于 [20, 21, 47, 56]。

证明。 由稠密性，只需证明结论对 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R};X)$成立。令 $(Q_n)_{n\ge1}$ 如命题 4.1的证明中所述。令 $n\in\mathbb{N}$，定义 $J_n:=[-n,n]\cap Q_n$ 并

$$\mathcal{C}_{*,n}^q f(x):=[a\mapsto\mathcal{C}_a f(x)]_{V^q(J_n;X)},\quad x\in\mathbb{R}.$$

根据单调收敛定理和连续性，只需证明该结论对$\mathcal{C}_{*,\,n}^q f$成立。

固定 $u\in(2,\,q)$。我们先证明希尔伯特空间 H上的一个估计。注意到 H 与 L^2同构，因此 u'-凹化 $H^{u'}$ 是一个 UMD 巴拿赫函数空间，因为 $L^{2/u'}$是一个 UMD 巴拿赫函数空间。对于任意 $p_0>u'$，根据 [3, 定理 5。2] 和命题 4.1，存在一个非递减函数$\phi_{H,\,p_0,\,u}\colon[1,\infty)\to[1,\infty)$，使得对所有 $v\in A_{p_0/u'}$和 $f\in L^{p_0}(\mathbb{R},\,v;H)$，

$$\big\|\mathcal{C}_{*,n}^u f\big\|_{L^{p_0}(\mathbb{R},v)}\le\phi_{H,p_0,u}([v]_{A_{p_0/u'}})\,\|f\|_{L^{p_0}(\mathbb{R},v;H)}\,,$$

and

$$\begin{aligned}\|(x,a)\mapsto\mathcal{C}_a f(x)\|_{L^{p_0}(\mathbb{R},v;V^u(J_n;H))}&\le\Big\|\|a\mapsto\mathcal{C}_a f(\cdot)\|_{\ell^\infty(J_n;H)}\Big\|_{L^{p_0}(\mathbb{R},v)}\\&\quad+\Big\|[a\mapsto\mathcal{C}_a f(\cdot)]_{V^u(J_n;H)}\Big\|_{L^{p_0}(\mathbb{R},v)}\\&\le\phi_{H,p_0,u}([v]_{A_{p_0/u'}})\,\|f\|_{L^{p_0}(\mathbb{R},v;H)}\,.\end{aligned}\tag{4.5}$$

设 X_0 为一个 UMD 巴拿赫空间， H 为一个希尔伯特空间，且 $X:=[X_0,H]_\theta$。令$\theta_0:=\frac{u}{q}$。那么，根据重迭代，存在一个足够小的 $\eta\in(0,1)$，使得 $X_1:=[X_0,H]_\eta$且

$$X=[X_0,H]_\theta=[X_1,H]_{\theta_0}.$$

命题 4.1 表明，对所有 $p_1 \in (1,\infty)$，存在一个非递减函数 $\phi_{X_1,p_1}:[1,\infty) \to [1,\infty)$，使得对于 $v \in A_{p_1}$, $f \in L^{p_1}(\mathbb{R},v;X_1)$,

$$\|(x,a) \mapsto \mathcal{C}_a f(x)\|_{L^{p_1}(\mathbb{R},v;\ell^\infty(J_n;X_1))} \le \phi_{X_1,p_1}([v]_{A_{p_1}}) \|f\|_{L^{p_1}(\mathbb{R},v;X_1)}. \tag{4.6}$$

固定 $w \in A_{p/q'}$，取 $p_0 := \frac{p}{q'}w' > w'$ 和 $p_1 := \frac{p}{q'} > 1$. 于是

$$\tfrac{1-\theta_0}{p_1} + \tfrac{\theta_0}{p_0} = \tfrac{1}{p}, \quad \text{and} \quad \tfrac{\theta_0}{u} = \tfrac{1}{q},$$

因此由引理 2.5 和 [38,定理 2.2。6]可得

$$[L^{p_1}(\mathbb{R},w;\ell^\infty(J_n;X_1)), L^{p_0}(\mathbb{R},w;V^u(J_n;H))]_{\theta_0} \hookrightarrow L^p(\mathbb{R},w;V^q(J_n;X)).$$

因此，在 (4.5) 和 (4.6) 之间应用复插值，可得存在一个非递减函数 $\phi_{X,\,p,\,q}\colon [1,\infty) \to [1,\infty)$，使得对所有 $f \in L^p(\mathbb{R},\ w;X)$,

$$\|(x,a) \mapsto \mathcal{C}_a f(x)\|_{L^p(\mathbb{R},w;V^q(J_n;X))} \le \phi_{X,p,q}([w]_{A_{p/q'}}) \|f\|_{L^p(\mathbb{R},w;X)}$$

证明完毕。 □

作为定理 4.2的直接推论，我们得到定理 1.5。也就是说，我们还可以得出，对于任意一族不相交区间 $\mathcal{I}$属于 $\mathbb{R}$ 以及 $f \in L^p(\mathbb{R},\ w;X)$,

$$\Big\| \Big(\sum_{I\in\mathcal{I}} \|S_I f\|_X^q \Big)^{1/q} \Big\|_{L^p(\mathbb{R},w)} \le \phi_{X,p,q}([w]_{A_{p/q'}}) \|f\|_{L^p(\mathbb{R},w;X)}. \tag{4.7}$$

反过来，我们可以问， X 的哪些几何性质可由（4.7）推出。在下一个命题中，我们证明它蕴含余型 q。

命题 4.3。 设 X 是一个巴拿赫空间， w 是一个权。设 $p \in [1,\infty)$ 且 $q \in [2,\infty)$。假设存在常数 $C>0$，使得对所有 $f \in L^p(\mathbb{R},w;X)$ 以及 $\mathbb{R}$中的所有不相交区间族 $\mathcal{I}$，

$$\Big\| \Big(\sum_{I\in\mathcal{I}} \|S_I f\|_X^q \Big)^{\frac{1}{q}} \Big\|_{L^p(\mathbb{R},w)} \le C \|f\|_{L^p(\mathbb{R},w;X)}.$$

那么 X 具有余型 q。

证明。取一个有限序列 $(x_n)_{n=1}^N$，属于 X。令 $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 为 $[0,1]$ 上的三角系统，并将其周期延拓至 $\mathbb{R}$。令 $(\varepsilon_n)_{n\ge1}$ 为 Ω 上的一列复 Rademacher（或 Steinhaus）随机变量（见 [39]）。定义 $f := \varphi \cdot \sum_{n=1}^N e_{3n}\varepsilon_n x_n$，其中 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 非零且 $\operatorname{supp}(\widehat{\varphi}) \subseteq [0,1]$。令 $I_n = [3n-1, 3n+1]$。那么 $S_{I_n} f = \varphi \cdot e_{3n}\varepsilon_n x_n$ 在 Ω 中逐点成立，因此

$$\Big\| \Big(\sum_{n=1}^N \|S_{I_n} f\|_X^q \Big)^{1/q} \Big\|_{L^p(\mathbb{R},w)} = \|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R},w)} \Big(\sum_{n=1}^N \|x_n\|_X^q \Big)^{1/q}.$$

因此，应用（4.7），并对两边取 p 阶矩，我们得到

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R},w)} \Big(\sum_{n=1}^N \|x_n\|_X^q \Big)^{1/q} &\lesssim \big(\mathbb{E}\, \|f\|_{L^p(\mathbb{R},w;X)}^p \big)^{1/p} \\ &\lesssim \Big(\mathbb{E} \Big\| \varphi \cdot \sum_{n=1}^N e_{3n}\varepsilon_n x_n \Big\|_{L^p(\mathbb{R},w;X)}^p \Big)^{1/p} \end{aligned}$$

$$\lesssim \Big(\mathbb{E}\Big\|\varphi\cdot\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n x_n\Big\|^p_{L^p(\mathbb{R},w;X)}\Big)^{1/p}$$
$$\lesssim \|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R},w)}\mathbb{E}\Big\|\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n x_n\Big\|_X,$$

这里我们用到，对于固定的 $t\in\mathbb{R}$，由于幺模不变性，$(\varepsilon_n e_{3n}(t))_{n=1}^N$ 与 $(\varepsilon_n)_{n=1}^N$ 具有相同的分布。因此， X 的余型为 q。□

LPR^p 性质由 [6] 引入，它断言对于任意 $p\in[2,\infty)$ 以及任意一族不相交区间 $\mathcal{I}$、一个 Rademacher 序列 $(\varepsilon_I)_{I\in\mathcal{I}}$和 $f\in L^p(\mathbb{R};X)$ 都有

$$\mathbb{E}\Big\|\sum_{I\in\mathcal{I}}\varepsilon_I S_I f\Big\|_{L^p(\mathbb{R};X)}\le C_{X,p}\|f\|_{L^p(\mathbb{R};X)}. \tag{4.8}$$

根据 [42] 我们知道，（4.8）蕴含型 2。相比之下，我们的向量值 Littlewood–Paley–Rubio de Francia 型估计（4.7）并不蕴含型 2，因为它对任意 θ-中间 UMD 空间都成立。不过，它确实蕴含余型 q。如果 X 具有 LPR^p 性质且余型为 q，那么估计式（4.7）对 $w=1$成立。事实上，根据余型 q、Kahane–Khintchine 不等式和 LPR^p ，我们可以估计

$$\Big\|\Big(\sum_{I\in\mathcal{I}}\|S_I f\|_X^q\Big)^{\frac{1}{q}}\Big\|_{L^p(\mathbb{R})}\lesssim\mathbb{E}\Big\|\sum_{I\in\mathcal{I}}\varepsilon_I S_I f\Big\|_{L^p(\mathbb{R};X)}\lesssim\|f\|_{L^p(\mathbb{R};X)}.$$

因此，在（4.7）成立的情况下，LPR^{p}性质在定量意义上强于（4.7）。另一方面，除了同构于某个巴拿赫函数空间的闭子空间的空间之外，目前尚无已知空间具有 LPR^{p}性质。相比之下，（4.7）对许多巴拿赫空间都成立，正如定理4.2所示。

对于巴拿赫函数空间 X，Rubio de Francia 原始估计（1.1）向量值情形的另一种推广已在 [3, 44]中研究。事实上，在巴拿赫函数空间中，可以研究如下估计

$$\Big\|\Big(\sum_{I\in\mathcal{I}}|S_I f|^q\Big)^{\frac{1}{q}}\Big\|_{L^p(\mathbb{R},w;X)}\lesssim\|f\|_{L^p(\mathbb{R},w;X)}.$$

对于 $\mathcal{I}$ 中的任意一族不相交区间 $\mathbb{R}$。在巴拿赫函数空间中， [3,定理 12] 的结果强于定理 1.5。事实上，若 $X=[X_0,L^2(S)]_\theta$ ，其中 X_0 是测度空间（S， μ）上的 UMD 巴拿赫函数空间，那么 X 是 q-凹且 q'-凸的，其中$q=2/\theta$。此外， q'对 X 的 -凹化由下式给出

$$X^{q'}=[X_0,L^1(S)]_{\frac{\theta}{2-\theta}}.$$

利用 X_0 的 UMD 性质的自改进（见 [60, 定理 4]） ，可以将 $L^1(S)$ 替换为 $L^{1+\varepsilon}(S)$，其中 $\varepsilon>0$ 因此 $X^{q'}$ 具有 UMD 性质。故定理 1.5 的假设蕴含 [3, 定理 12] 的假设。此外，由于 q- 凹性，我们注意到

$$\Big\|\Big(\sum_{I\in\mathcal{I}}\|S_I f\|_X^q\Big)^{\frac{1}{q}}\Big\|_{L^p(\mathbb{R})}\lesssim\Big\|\Big(\sum_{I\in\mathcal{I}}|S_I f|^q\Big)^{\frac{1}{q}}\Big\|_{L^p(\mathbb{R};X)},$$

因此， [3, 定理 12] 的结论1.5蕴含定理第 5] 节将比较定理4.2 与 [3, 定理 52]中的巴拿赫函数空间情形。

5. Main Result

5.1. 作用于 L^p空间上的傅里叶乘子。 在证明了加权向量值变差 Carleson 估计，并由此得到所需的 Rubio de Francia 型不等式后，我们现在转向关于傅里叶乘子的第一个主要结果。

定理 5.1. 设 $\theta \in (0,1]$. 设 X 为一个 θ-中间 UMD 巴拿赫空间，且设 Y 为一个巴拿赫空间。设 $s \in [1, 2_{-\theta})$，$p \in (s,\infty)$ 且设 $m \in V^s(\mathbb{R};\mathcal{L}(X,Y))$。存在一个非递减函数 $\phi_{X,Y,p,s}\colon [1,\infty) \to [1,\infty)$，使得对所有 $w \in A_{p/s}$，

$$\|T_m\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R},w;X),L^p(\mathbb{R},w;Y))} \le \phi_{X,p,s}([w]_{A_{p/s}}) \cdot \|m\|_{V^s(\mathbb{R};\mathcal{L}(X,Y))}.$$

注意，如定理 m 中所示，5.1 的值域是 $\mathcal{R}$-有界的，这由命题 3.2得出。不过，我们在证明中不会用到这一事实。

证明。 我们先对 $m \in R^s(\mathbb{R};\mathcal{L}(X,Y))$ 证明该结论。记

$$m = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k, \quad a_k = \sum_{I\in\mathcal{I}_k} c_I \mathbf{1}_I,$$

其中，对于 $c_I \in \mathcal{L}(X,Y)$，$\mathcal{I}_k$ 是一族两两不相交的子区间 $I \subseteq \mathbb{R}$，使得 $\sum_{I\in\mathcal{I}_k} \|c_I\|^s_{\mathcal{L}(X,Y)} \le 1$ 且

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| \le \|m\|_{R^s(\mathbb{R};\mathcal{L}(X,Y))}.$$

于是，对于 $f \in L^p(\mathbb{R},w;X)$，有

$$\begin{aligned}
\|T_m f\|_{L^p(\mathbb{R},w;Y)} &= \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sum_{I\in\mathcal{I}_k} c_I S_I f \Big\|_{L^p(\mathbb{R},w;Y)} \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| \Big\| \sum_{I\in\mathcal{I}_k} c_I S_I f \Big\|_{L^p(\mathbb{R},w;Y)} \\
&\lesssim \|m\|_{R^s(\mathbb{R};\mathcal{L}(X,Y))} \cdot \sup_{k\in\mathbb{N}} \Big\| \sum_{I\in\mathcal{I}_k} c_I S_I f \Big\|_{L^p(\mathbb{R},w;Y)}
\end{aligned}$$

对于后者，固定 $k \in \mathbb{N}$，由 H¨older 不等式可得估计

$$\Big\| \sum_{I\in\mathcal{I}_k} c_I S_I f \Big\|_Y \le \sum_{I\in\mathcal{I}_k} \|c_I\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|S_I f\|_X \le \Big(\sum_{I\in\mathcal{I}_k} \|S_I f\|_X^{s'} \Big)^{1/s'}.$$

因此，应用定理 1.5 可得

$$\begin{aligned}
\|T_m f\|_{L^p(\mathbb{R},w;Y)} &\lesssim \|m\|_{R^s(\mathbb{R};\mathcal{L}(X,Y))} \cdot \sup_{k\in\mathbb{N}} \Big\| \Big(\sum_{I\in\mathcal{I}_k} \|S_I f\|_X^{s'} \Big)^{1/s'} \Big\|_{L^p(\mathbb{R},w)} \\
&\le \|m\|_{R^s(\mathbb{R};\mathcal{L}(X,Y))} \cdot \phi_{X,p,s}([w]_{A_{p/s}}) \|f\|_{L^p(\mathbb{R},w;X)},
\end{aligned}$$

从而完成了 R^s 的证明。

要得到 V^s的结果，注意根据引理 2.1 可选取 $s_1 \in (s, 2_{-\theta} \wedge p)$，其依赖于 p, s 和 $[w]_{A_{p/s}}$，使得 $w \in A_{p/s_1}$ 且 $[w]_{A_{p/s_1}} \lesssim_{p,s} [w]_{A_{p/s}}$. 由于 $V^s \hookrightarrow R^{s_1}$根据引理2.4，将前一种情形中的 s_1 替换为 s，即可得出所需结果。 □

结合定理5.1 与 Littlewood–Paley 定理，可得到以下关于在零点和无穷远处具有一定衰减的乘子的结果（用 ℓ^r-范数在 Δ上度量）。这是定理 1.2的定量版本。注意，定理 1.2 中的第二个结论可由对偶性推出。

定理 5.2. 设 $\theta \in (0,1]$，$t \in (1,2]$，$q \in [2,\infty)$，并令 $\frac{1}{r} := \frac{1}{t} - \frac{1}{q}$。设 X 为一个 θ-中间 *UMD* 巴拿赫空间，余型为 q，且 Y 为一个型为 t的 *UMD* 巴拿赫空间。设 $s \in [1, \frac{2}{2-\theta})$，并假设 $m \in \ell^r(\dot{V}^s(\Delta; \mathcal{L}(X,Y)))$ 的值域有界于 $\mathcal{R}$。那么，对于所有$p \in (s,\infty)$，存在一个非递减函数 $\phi_{X,Y,p,q,s,t}\colon [1,\infty) \to [1,\infty)$，使得对所有$w \in A_{p/s}$，

$$\|T_m\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R},w;X),L^p(\mathbb{R},w;Y))} \le \phi_{X,Y,p,q,s,t}([w]_{A_{p/s}})\big(\|m\|_{\ell^r(\dot{V}^s(\Delta;\mathcal{L}(X,Y)))} + \mathcal{R}(\mathrm{Ran}(m))\big).$$

注意，定理 5.2 中的假设 $r > s$蕴含 X 具有余型 $q = \frac{2}{\theta}$ （参见 [39, 命题 7.1。3]），因此$\frac{1}{r} \le 1 - \frac{\theta}{2} < \frac{1}{s}$。

证明。 根据重标度 Rubio de Francia 外推（见 [17, 推论 3.14]），只需考虑 $p = 2$。我们先证明将 V^s替换为 V^s 时的结论。

取 $m \in \ell^r(V^s(\Delta; \mathcal{L}(X, Y)))$，对于 $J \in \Delta$，定义 $k_J := \|\mathbf{1}_J m\|_{V^s(J;\, \mathcal{L}(X,\, Y))}$ 并令

$$C_m := \|(k_J)_J\|_{\ell^r} = \|m\|_{\ell^r(V^s(\Delta;\mathcal{L}(X,Y)))}.$$

取 $f \in L^2(\mathbb{R},\ w; X)$，使得 $\widehat{f}$ 在 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$中具有紧支撑，因此下文对Δ的求和是有限的。

根据命题 2.2 以及 $L^2(\mathbb{R},\ w; Y)$ 的型 t，我们可以写成

$$\begin{aligned}\|T_m f\|_{L^2(\mathbb{R},w;Y)} &\le \phi_Y([w]_{A_2})\mathbb{E}\Big\|\sum_{J\in\Delta}\varepsilon_J T_{\mathbf{1}_J m} S_J f\Big\|_{L^2(\mathbb{R},w;Y)}\\ &\le \phi_{Y,t}([w]_{A_2})\Big(\sum_{J\in\Delta}\|T_{\mathbf{1}_J m}S_J f\|^t_{L^2(\mathbb{R},w;Y)}\Big)^{1/t}\end{aligned}$$

利用定理 5.1 可得

$$\|T_{\mathbf{1}_J m}S_J f\|_{L^2(\mathbb{R},w;Y)} \le \phi_{X,Y,s}([w]_{A_{2/s}})\cdot k_J\cdot\|S_J f\|_{L^2(\mathbb{R},w;X)}.$$

因此，利用 Hölder 不等式、 $A_{2/s}\subseteq A_2$ 以及 $L^2(\mathbb{R},\ w; X)$ 的余型 q，我们得到

$$\begin{aligned}\|T_m f\|_{L^2(\mathbb{R},w;Y)} &\le \phi_{X,Y,s,t}([w]_{A_{2/s}})\Big(\sum_{J\in\Delta}k_J^t\cdot\|S_J f\|^t_{L^2(\mathbb{R},w;X)}\Big)^{1/t}\\ &\le \phi_{X,Y,s,t}([w]_{A_{2/s}})\cdot\|(k_J)_J\|_{\ell^r}\cdot\Big(\sum_{J\in\Delta}\|S_J f\|^q_{L^2(\mathbb{R},w;X)}\Big)^{1/q}\\ &\le \phi_{X,Y,q,s,t}([w]_{A_{2/s}})\cdot C_m\cdot\mathbb{E}\Big\|\sum_{J\in\Delta}\varepsilon_J S_J f\Big\|_{L^2(\mathbb{R},w;X)}\\ &\le \phi_{X,Y,q,s,t}([w]_{A_{2/s}})\cdot C_m\cdot\|f\|_{L^2(\mathbb{R},w;X)}.\end{aligned}$$

根据稠密性（见 [23, 引理 3。3]），这就完成了对 V^s 的证明。

现在取 $m \in \ell^r(\ \dot{V}^s(\Delta;\ \mathcal{L}(X,\ Y)))$ 并定义

$$\widetilde{m} = \sum_{J\in\Delta}\mathbf{1}_J(m - m_J),$$

其中 $m_J = |J|^{-1}\int_J m(y)\,\mathrm{d}y$ 对于 $J \in \Delta$。那么 $[\widetilde{m}]_{V^s(J;\mathcal{L}(X,Y))} = [m]_{V^s(J;\mathcal{L}(X,Y))}$ 对所有 $J \in \Delta$以及

$$\begin{aligned}\|\widetilde{m}\|_{L^\infty(J;\mathcal{L}(X,Y))} &\le \frac{1}{|J|}\int_J \|x \mapsto m(x) - m(y)\|_{L^\infty(J;\mathcal{L}(X,Y))}\,\mathrm{d}y \\ &\le [m]_{V^s(J;\mathcal{L}(X,Y))}.\end{aligned}$$

因此，$\widetilde{m} \in \ell^r(V^s(\Delta;\mathcal{L}(X,Y)))$ 且

$$\|T_{\widetilde{m}}f\|_{L^2(\mathbb{R},w;Y)} \le \phi_{X,Y,q,s,t}([w]_{A_{2/s}}) \cdot \|m\|_{\ell^r(V^s(\Delta;\mathcal{L}(X,Y)))} \cdot \|f\|_{L^2(\mathbb{R},w;X)}.$$

为完成证明，只需证明 $T_{\bar{m}}$ 在 $\bar{m}$ 下的有界性：$= \sum_{J\in\Delta} \mathbf{1}_J m_J$。由于 $\mathrm{Ran}(m)$ 是 $\mathcal{R}$-有界的，由 (3.1) 可知，$\mathrm{conv}(\mathrm{Ran}(m))$ 也是 $\mathcal{R}$-有界的。由于$m_J \in \mathrm{conv}(\mathrm{Ran}(m))$（[38, 命题 1.2。12]），由命题 2.2 可得

$$\begin{aligned}\|T_{\bar{m}}f\|_{L^2(\mathbb{R},w;Y)} &\le \phi_Y([w]_{A_2}) \cdot \mathbb{E}\Big\|\sum_{J\in\Delta} \varepsilon_J m_J S_J f\Big\|_{L^2(\mathbb{R},w;Y)} \\ &\le \phi_Y([w]_{A_2}) \cdot \mathcal{R}(\mathrm{Ran}(m)) \cdot \mathbb{E}\Big\|\sum_{J\in\Delta} \varepsilon_J S_J f\Big\|_{L^2(\mathbb{R},w;X)} \\ &\le \phi_{X,Y}([w]_{A_2}) \cdot \mathcal{R}(\mathrm{Ran}(m)) \cdot \|f\|_{L^2(\mathbb{R},w;X)},\end{aligned}$$

从而完成证明。 □

5.2. **Besov 空间和 Triebel–Lizorkin 空间上的傅里叶乘子。** 若将 L^p 替换为 Besov 空间或 Triebel–Lizorkin 空间，我们的乘子定理便会简化。事实上，型、余型和 $\mathcal{R}$-有界性不再起任何作用。此外，也不再需要 m 的衰减。我们给出非齐次 Besov 空间 $B^\alpha_{p,\,q}$ 上的结果。关于齐次情形所需的修改，请读者参阅定理下方的正文。我们定义

$$\begin{aligned}J_0 &:= (-1,1), \\ J_n &:= \{\xi \in \mathbb{R} : 2^{n-1} \le |\xi| < 2^n\}, \quad n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

定理 5.3（Besov 空间上的傅里叶乘子）。 固定 $\theta \in (0,1]$。设 X 是一个 θ-中间UMD 巴拿赫空间，Y 是一个UMD 巴拿赫空间。设 $s \in [1, \frac{2}{2-\theta})$ 并假设$m\colon \mathbb{R} \to \mathcal{L}(X,Y)$ 满足

$$C_m := \sup_{n\ge 0} \|m\|_{V^s(J_n;\mathcal{L}(X,Y))} < \infty.$$

设 $p \in (s,\infty)$ 以及 $q \in [1,\infty]$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}$。那么存在一个非递减函数$\phi_{X,\,Y,\,p,\,q,\,s}\colon [1,\infty) \to [1,\infty)$，使得对所有 $w \in A_{p/s}$，

$$\|T_m\|_{\mathcal{L}(B^\alpha_{p,q}(\mathbb{R},w;X),B^\alpha_{p,q}(\mathbb{R},w;Y))} \le \phi_{X,Y,p,q,s}([w]_{A_{p/s}}) \cdot C_m.$$

证明。 令 $f \in B^\alpha_{p,\,q}(\mathbb{R},\,w;\,X)$。记 $f_n = \varphi_n * f$ 且 $m_n = \widehat{\varphi}_n m$，其中 $(\varphi_n)_{n\ge 0}$ 是一个非齐次 Littlewood–Paley 序列，如 [40, 第 14]章所述。于是，根据 $(\varphi_n)_{n\ge 0}$ 的性质，我们可以写成

$$\|T_m f\|_{B^\alpha_{p,q}(\mathbb{R},w;Y))} \le \sum_{j=-1}^{1} \Big\|\Big(2^{\alpha k}\|T_{m_{n+j}} f_n\|_{L^p(\mathbb{R},w;Y)}\Big)_{n\ge 0}\Big\|_{\ell^q},$$

其中我们令 $m_{-1} = 0$。因此，只需证明对于任意 $n \ge 0$，

$$\|T_{m_n} g\|_{L^p(\mathbb{R},w;Y)} \le \phi_{X,Y,p,s}([w]_{A_{p/s}}) \cdot C_m \|g\|_{L^p(\mathbb{R},w;X)}, \quad g \in L^p(\mathbb{R},w;X).$$

由定理 5.1 以及 $\widehat{\varphi}_n$ 的支集条件，只需估计 $\|m_n\|_{V^s(\widetilde{J}_n;\,\mathcal{L}(X,\,Y))}$，
其中 $J_n := J_n \cup J_{n+1}$，并注意到 $\operatorname{supp}(\widehat{\varphi}_n) \subseteq J_n$。由于 $|\widehat{\varphi}_n| \le 1$，显然

$$\|m_n\|_{L^\infty(\widetilde{J}_n;\mathcal{L}(X,Y))} \le \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R};\mathcal{L}(X,Y))} \le C_m.$$

此外，我们有

$$[m_n]_{V^s(\widetilde{J}_n;\mathcal{L}(X,Y))} \le \|\widehat{\varphi}_n\|_{L^\infty(\widetilde{J}_n)}\|m\|_{V^s(\widetilde{J}_n;\mathcal{L}(X,Y))} + \|\widehat{\varphi}_n\|_{V^s(\widetilde{J}_n)}\|m\|_{L^\infty(\widetilde{J}_n;\mathcal{L}(X,Y))} \lesssim C_m,$$

证明至此完成。

□

若使用 Δ 代替 $(J_n)_{n\ge0}$，则齐次 Besov 空间也有类似的结果。在傅里叶型 s 条件下并使用 $m \in B^{1/s}_{s\,1}(J;\ \mathcal{L}(X,\ Y))$ 的一个相关结果见 [27]。注意，空间 $V^s(J;\ \mathcal{L}(X,\ Y))$ 更大，如引理 3.3所示。特别地，它包含不连续乘子。

接下来，我们讨论 Triebel–Lizorkin 空间的情形。关于该情形的乘子定理，可见 [65]（标量情形），以及 [10]（向量值情形）。我们利用 Rubio de Francia 外推，从 Besov 空间的情形推导出这一结果。

定理 5.4（Triebel–Lizorkin 空间上的傅里叶乘子）. 令 $\theta \in (0,1]$。令 X 为一个θ-中间 UMD 巴拿赫空间，Y 为一个 UMD 巴拿赫空间。令 $s \in [1, \frac{2}{2-\theta})$ 并假设 $m\colon \mathbb{R} \to \mathcal{L}(X,Y)$ 满足

$$C_m := \sup_{n\ge0}\|m\|_{V^s(J_n;\mathcal{L}(X,Y))} < \infty.$$

令 $p, q \in (s, \infty)$ 以及 $\alpha \in \mathbb{R}$。那么存在一个非递减函数 $\phi_{X,Y,p,q,s}\colon [1,\infty) \to [1,\infty)$，使得对所有 $w \in A_{p/s}$，

$$\|T_m\|_{\mathcal{L}(F^\alpha_{p,q}(\mathbb{R},w;X),F^\alpha_{p,q}(\mathbb{R},w;Y))} \le \phi_{X,Y,p,q,s}([w]_{A_{p/s}}) \cdot C_m.$$

证明。 按照定理5.3证明中的记号，我们需要证明

$$\|(\varphi_n * T_m f)_{n\ge0}\|_{L^p(\mathbb{R},w;\ell^q(Y))} \le \phi_{X,Y,p,q,s}([w]_{A_{p/s}}) \cdot C_m \|(\varphi_n * f)_{n\ge0}\|_{L^p(\mathbb{R},w;\ell^q(X))}.$$

由于 $q \in (s,\ \infty)$ 可通过重标度 Rubio de Francia 外推得到（参见 [17, 推论 3.14]），因此只需考虑 $p = q$。此情形可直接由定理 5.3 得出。 □

Open problems

问题 1. 能否用关于 X 的其他几何条件来刻画向量值 *Rubio de Francia* 型估计，或其逆命题？ (1.2)

注意，(1.2) 蕴含 S_I 在 $L^p(\mathbb{R};X)$ 上有界，其中 I是某个区间。通过缩放论证可知，这意味着 Riesz 投影有界，进而希尔伯特变换有界，也就意味着 UMD 性质。命题 4.3 中我们还证明了余型 q 是 (1.2) 的必要条件。此外，我们预计可以采用类似于 [19,第 2 节4]中的方法导出傅里叶型性质。

有必要了解定理 5.2 中的衰减条件能否去除。 [28, 33]中使用了一种实现这一点的技巧。

问题 2. 定理 5.2中的衰减条件能否去掉？换言之，假设 m 的值域是 $\mathcal{R}$-有界的，且$\sup_{J\in\Delta}\|m\|_{\dot V^s(J;\mathcal{L}(X,Y))} < \infty$，是否足以推出 $T_m\colon L^p(\mathbb{R};\ X) \to L^p(\mathbb{R},Y)$的有界性？

在标量情形下， [15] 的一些高维类比已由[44, 47, 70]获得。在向量值情形下，定理 1.1 的高维类比见 [30, 64]以及 [39, 定理 8.3。19]。

问题 3。 在 $\mathbb{R}^d$ 中，定理 *5.1*、*5.2*、*5.3*和*5.4*的乘子结果有哪些类似结论？

大语言模型的使用： 作者使用了 ChatGPT 和 Gemini 进行证明检查，并生成了一些想法。

References

[1] H. Amann。 *Linear and quasilinear parabolic problems. Volume II: Function spaces* 106 *Monogr.*，第 卷，。查姆: *Math. Basel* ¨ 2019 Birkhauser，。[2] A. Amenta、E. Lorist 和 M. Veraar。具有 UMD 凹化的巴拿赫函数空间中的傅里叶乘子。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，371(7):4837–4868，2019。[3] A. Amenta、E. Lorist 和 M. Veraar。向量值函数的重标度外推。 *Publ. Mat.*，63 1 155 182，2019 ( ): – 。[4] A. Amenta 和 G. Uraltsev。UMD 空间中的变差型 Carleson 算子。 *Journal of the London Mathematical Society* 105 3 1363 1417, 2022 ，( ): – 。[5] J. Bergh 和 J. L¨ofstr¨om。 *Interpolation spaces. An introduction*。Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften，第 223 号。施普林格出版社，柏林–纽约，1976。[6] E. Berkson、T. A. Gillespie 和 J. L. Torrea。向量值传递。载于 *its applications (Wuhan, 2003)* 1 27, 2003 *Functional Space Theory and* ，第 – 页。[7] E. Berkson 和 T.A. Gillespie。加权 L^p- 空间上的乘子、传递以及函数的 q- 变差。 *Bull. Sci. Math.*，122(6):427–454，1998。[8] J. Bourgain。关于鞅差序列无条件的巴拿赫空间的一些评论。*Ark. Mat.*，21(2):163–168，1983。[9] J. Bourgain。向量值奇异积分与 H^1-BMO 对偶性。载于 *Probability theory and harmonic analysis (Cleveland, Ohio, 1983)* 98 *Monogr. Textbooks Pure Appl. Math.* 1 19 ，第 卷，第 – 页。

Dekker，纽约，1986。[10] S. Bu 和 J. Kim。特里贝尔空间上的算子值傅里叶乘子定理。 *Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed.* 25 4 599 609, 2005 ，( ): – 。[11] H.-Q. Bui。加权贝索夫空间与特里贝尔空间：用实方法进行插值。 *Hiroshima Math. J.*，12 3 581 605，1982 ( ): – 。[12] D.L. Burkholder。蕴含某些巴拿赫空间值函数奇异积分存在性的几何条件。载于 *Conference on harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund II Vol. I, (Chicago, Ill., 1981)* 270 286 1983

Wadsworth Math. Ser.，第 – 页。Wadsworth，美国加利福尼亚州贝尔蒙特，。[13] L. Carleson。关于傅里叶级数部分和的收敛性与增长。 *Acta Math.*，116:135–157，1966。[14] P. Cl´ement 和 J. Pr¨uss。向量值 L_p-空间上的算子值传递原理与最大正则性。载于 *Evolution equations and their applications in physical and life sciences (Bad Herrenalb, 1998)*，第 215 卷，*Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*，第 67–87 页。Dekker，纽约，2001。[15] R. Coifman、J.L. Rubio de Francia 和 S. Semmes。 L^p(R) 的傅里叶乘子与平方估计。 *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*，306(8):351–354，1988。[16] M. Cowling 和 T. Tao。关于 Littlewood–Paley理论的一些见解。 *Math. Ann.*，321(4):885–888，2001。[17] D.V. Cruz-Uribe、C. Martell、J.M.and P´erez。 *Weights extrapolation and the theory of Rubio de Francia*，第 215 卷，*Operator Theory: Advances and Applications*。Birkh¨auser/Springer Basel AG，巴塞尔，2011。[18] J. L. Rubio de Francia。任意区间上的 Littlewood–Paley不等式。 *Revista Matematica Iberoamericana* 2 1 ，I( ): –14，1985。[19] C. Deng、E. Lorist 和 M.C. Veraar。UMD 巴拿赫空间中的强克赖斯有界算子。 *Semigroup Forum* 108 3 594 625, 2024 ，( ): – 。[20] F. Di Plinio、Y. Do 和 G.N. Uraltsev。变差型 Carleson 算子的正稀疏控制。 *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)* 18 4 1443 1458, 2018 ，( ): – 。[21] Y. Do 和 M. Lacey。变差型傅里叶级数的加权界。 *Stud. Math.*，211(2):153–190，2012。

[22] T. Fack。非交换 L^p 17 2 255 279, -空间的型与余型不等式。1987 *J. Operator Theory*, ( ): – 。[23] S. Fackler、T. P. Hyt¨onen 和 N. Lindemulder。算子值傅里叶乘子的加权估计。*Collect. Math.*, 71(3):511–548, 2020。[24] P.K. Friz 和 N.B. Victoir。 *Multidimensional stochastic processes as rough paths* 120 *Cambridge* , 第 卷, 。剑桥大学出版社, 剑桥, 。理论与应用。[25] O. van Gaans。关于算子集并的 R -有界性。载于 , 第 卷, *Studies in Advanced Mathematics* 2010 *Partial differential equations and functional analysis* 168 *Oper. Theory Adv. Appl.* 97 111 ¨ 2006 R -有界性。载于 , 第 – 页。 *Partial differential equations and functional analysis* 168 *Oper. Theory Adv. Appl.* 97 111 ¨ 2006 Birkhauser, 巴塞尔, 。[26] T.A. Gillespie 和 J.L. Torrea。Littlewood–Paley–Rubio不等式的传递与维数无关估计。 *Rev. Un. Mat. Argentina*, 45(1):1–6 (2005), 2004。[27] M. Girardi 和 L. Weis。Besov 空间上的算子值傅里叶乘子定理。 *Math. Nachr.*, 251 34 51, 2003: – 。[28] M. Girardi 和 L. Weis。 $L_p(X)$上的算子值傅里叶乘子定理与巴拿赫空间的几何。 *J. Funct. Anal.*, 204(2):320–354, 2003。[29] L. Grafakos。 *Classical Fourier analysis*, 第 249 卷, *Graduate Texts in Mathematics*。施普林格, 纽约, 第三版, 2014。[30] R. Haller、H. Heck 和 A. Noll。 n 变量中的算子值傅里叶乘子的米赫林定理。*Math. Nachr.*, 244:110–130, 2002。[31] L. H¨ormander。 L^p 空间中平移不变算子的估计。 *Acta Math.*, 104:93–140, 1960。[32] R.A. Hunt。关于傅里叶级数的收敛性。载于 *Orthogonal Expansions and their Continuous Analogues (Proc. Conf., Edwardsville, Ill., 1967)* 235 255 1968 , 第 – 页。南伊利诺伊大学出版社, 美国伊利诺伊州卡本代尔, 。[33] T. Hyt ¨ onen。傅里叶嵌入与米赫林型乘子定理。 274 275 74 103, 2004 *Math. Nachr.*, / : – 。[34] T. Hyt¨onen 和 M. Lacey。向量值傅里叶级数的逐点收敛。 *Mathematische Annalen*, 357 4 1329 1361, 2013 ( ): – 。[35] T. Hyt¨onen 和 D. Potapov。科伊夫曼–鲁比奥·德·弗朗西亚–塞姆斯型向量值乘子定理。 *Archiv der Mathematik*, 87:245–254, 2006。[36] T. Hyt ¨ onen 和 M. Veraar。光滑算子值函数的 R -有界性。 , ( ): – 。[37] T.P. Hyt ¨ onen。关于向量值米赫林–霍尔曼德乘子定理的新思考。 , ( ): – 。[38] T.P. Hyt ¨ onen、J.M.A.M. van Neerven、M.C. Veraar 和 L. Weis。 , 施普林格, 查姆, 2016。[39] T.P. Hyt ¨ onen、J.M.A.M. van Neerven、M.C. Veraar 和 L. Weis。 , 施普林格, 查姆, 2017。[40] T.P. Hyt ¨ onen、J.M.A.M. van Neerven、M.C. Veraar 和 L. Weis。 , 施普林格, 查姆, 2023。[41] T.P. Hyt¨onen、C. P´erez 和 E. Rela。齐次型空间上 A_∞ 权的尖锐反向 H¨older 性质。 *J. Funct. Anal.*, 263(12):3883–3899, 2012。[42] T.P. Hyt¨onen、J.L. Torrea 和 D.V. Yakubovich。等长区间情形下巴拿赫空间的 Littlewood–Paley–Rubio de Francia 性质。 *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 139(4):819–832, 2009。[43] N.J. Kalton、E. Lorist 和 L. Weis。巴拿赫空间中的欧几里得结构与算子理论。 *Mem.* , ( ):vi, 。[44] S. Kr´ol。加权 L^p 空间上的傅里叶乘子。 *Amer. Math. Soc.* 288 1433 +156 2023 *Math. Res. Lett.*, 21(4):807–830, 2014。[45] D. S. Kurtz。加权 L^p 空间上的 Littlewood–Paley 与乘子定理。 *Trans. Amer. Math. Soc.*, 259 1 235( ): –254, 1980。[46] S. Kwapie´n。通过带向量值系数的正交级数对内积空间的同构刻画。 *Studia Math.*, 44:583–595, 1972。[47] M.T. Lacey。 *Issues related to Rubio de Francia's Littlewood–Paley inequality*, 第 2 卷, *NYJM Monogr.* 奥尔巴尼, 纽约: 纽约州立大学奥尔巴尼分校, 2007。[48] C. Liu、D.J. Pr ¨ omel 和 J. Teich mann。非线性Besov空间的刻画。 , ( ): – 。 *Trans. Am. Math. Soc.* 373 1 529 550, 2020

[49] E. Lorist。《齐次型空间中的逐点 ℓ^r-稀疏控制》。 *J. Geom. Anal.*，31(9):9366–9405，2021。[50] E. Lorist 和 Z. Nieraeth。《稀疏控制蕴含向量值稀疏控制》。 *Math. Z.*，301 35，2022 1 1( ): – 。[51] J. Marcinkiewicz。《关于傅里叶级数的乘子》。 *Studia Mathematica*，8(1):78–91，1939。[52] T.R. McConnell。《关于巴拿赫值函数的傅里叶乘子变换》。

Trans. Amer. Math. ，( ): *Soc.* 285 2 739 757, 1984
– 。[53] M. Meyries 和 M.C. Veraar。《带幂权的光滑函数空间的尖锐嵌入结果》。*Stud. Math.*，208(3):257–293，2012。[54] S. G. Mihlin。《关于傅里叶积分的乘子》。 *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)*，109:701–703，1956。[55] S. G. Mihlin。《傅里叶积分与多重奇异积分》。

Vestnik Leningrad. Univ. Ser. Mat. Meh. ，( ): *Astronom.* 12 7 143 155, 1957
– 。[56] R. Oberlin 、 A. Seeger 、 T. Tao 、 C. Thiele 和 J. Wright。《变差范数卡尔松定理》。

J. Eur. Math. ，( ): *Soc. (JEMS)* 14 2 421 464, 2012
– 。[57] G. Pisier。《 *Martingales in Banach spaces* 》， *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* 第155卷。剑桥大学出版社，剑桥，2016。[58] D. Potapov、F. Sukochev 和 Q. Xu。《关于向量值利特尔伍德-佩利-鲁比奥·德·弗朗西亚不等式》。*Rev. Mat. Iberoam.*，28(3):839–856，2012。[59] M. Rosenbaum。《一阶 p-变差与 Besov 空间》。 *Stat. Probab. Lett.*，79(1):55–62，2009。[60] J.L. Rubio de Francia。《巴拿赫空间值函数的鞅变换与积分变换》。载于 *Probability and Banach spaces (Zaragoza, 1985)* 1221 *Lecture Notes in Math.* 195 222 ，第 卷，页码 –。施普林格，柏林，1986。[61] T. Runst 和 W. Sickel。《 *Sobolev spaces of fractional order Nemytskij operators and nonlinear partial* 》， ， *differential equations* 3 *De Gruyter Ser. Nonlinear Anal. Appl.* 1996 柏林：德·格鲁伊特出版社，第 卷。[62] B. Scharf、H.-J. Schmeißer 和 W. Sickel。《向量值索伯列夫空间的迹》。 *Math. Nachr.*，285(8- 9):1082–1106，2012。[63] H.-J. Schmeisser 和 W. Sickel。《向量值函数空间的迹、Gagliardo-Nirenberg 不等式与索伯列夫型嵌入》。耶拿手稿，2004。[64] ˇZ. ˇStrkalj 和 L. Weis。《关于算子值傅里叶乘子定理》。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，359 8 3529( ): –3547，2007。[65] H. Triebel。《 *Theory of function spaces* 》， *Monographs in Mathematics*第78卷。Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，1983。[66] H. Triebel。《 *Interpolation theory* 》， *function spaces*， *differential operators*。约翰·安布罗修斯·巴特出版社，海德堡，第二版，1995。[67] H. Triebel。《 *Fractals and spectra related to Fourier analysis and function spaces* 91 *Monogr.* 》， *Math. Basel* ¨ 1997 第 卷，。巴塞尔：Birkhauser Verlag，。[68] L. Weis。《通过乘子定理研究半群的稳定性定理》。载于 *Differential equations asymptotic* ， ， ， *analysis and mathematical physics (Potsdam, 1996)* 100 *Math. Res.* 407 411 第 卷，页码 –。学术出版社，柏林，1997。[69] L.W. Weis。《算子值傅里叶乘子定理与最大 L_p-正则性》。 *Math. Ann.*，319(4):735–758，2001。[70] Q. Xu。《通过 q-变差研究 $L_p(\mathbb{R}^n)$ 的傅里叶乘子》。 *Pac. J. Math.*，176(1):287–296，1996。[71] F. Zimmermann。《关于向量值傅里叶乘子定理》。 *Studia Math.*，93(3):201–222，1989。(C. Deng) Delft Institute of Applied Mathematics, Delft University of Technology, P.O. Box5031, 2600 GA Delft, The Netherlands*Email address*: c.deng@tudelft.nl (E. Lorist) Delft Institute of Applied Mathematics, Delft University of Technology, P.O. Box5031, 2600 GA Delft, The Netherlands*Email address*: e.lorist@tudelft.nl (M.C. Veraar) Delft Institute of Applied Mathematics, Delft University of Technology, P.O.Box 5031, 2600 GA Delft, The Netherlands*Email address*: m.c.veraar@tudelft.nl