arXiv:2601.04804v1 [math.AP] 8 Jan 2026

双曲曲面上磁拉普拉斯算子的半经典分析

THIBAULT LEFEUVRE

摘要。 双曲曲面上的磁拉普拉斯算子提供了丰富的分析框架，各种量子现象由此涌现。本文为*Journées EDP 2025* 论文集撰写，简要概述了 [CL25、CLa、CLb]中取得的主要结果。

1. 引言

1.1. 结果概述。 我们关注特征函数的半经典行为

$$k^{-2}\Delta_k u_k = (E+\varepsilon_k)u_k, \qquad u_k \in C^\infty(\Sigma, L^{\otimes k}),$$

其中 $L \to \Sigma$ 是闭定向双曲曲面 Σ 上的厄米线丛，亏格为 ≥ 2，配备了酉联络 ∇，且 $k \geq 0$ 为整数。 $L^{\otimes k}$ 上的诱导联络 $F_{\nabla^k} = -ikB$的曲率为vol，其中vol为黎曼体积形式；本文始终假设磁场 B 为常数。本文讨论的结果可概括如下：

- 当能量低于临界值 $E < E_c$时，相应的经典哈密顿流完全周期化。在这一情形下，可以证明，每个流不变概率测度都是某个半经典缺陷测度（定理 2.1，第（i）项）。此外，特征函数 L^∞ 的 Hörmander 界可由显式构造的态族达到饱和，我们称之为磁纬向态，并可将其视为球面上带状调和函数的类似物。它们在相空间中的一个二维环面上呈现集中（定理 3.1，第（i）项）。然而，与带状调和函数不同，由于不存在“磁性”共轭点，它们的 L^∞ 范数只会在单点处爆增。

- 在临界能量 $E = E_c$处，情况会突然改变。磁哈密顿流与 horocycle 流共轭，而后者是唯一遍历的。因此，刘维尔测度是唯一可能的半经典缺陷测度（定理 2.1，第 (ii) 项），并且定量唯一遍历性以某种形式成立。更确切地说，期望值 $\langle \mathrm{Op}_k(a)u_k,\ u_k\rangle_{L^2}$ 以多项式收敛速率趋近其刘维尔平均（定理 2.2）。这种定量控制还可用于推导临界能量处特征函数相对于 Hörmander L^∞ 界的多项式改进（定理 3.1，第 (ii) 项）。

- 高于临界阈值 $E > E_c$时，动力学进入真正的双曲型区域：磁流与单位切丛上的测地流的一个重参数化共轭，而后者是阿诺索夫流。此时对特征函数的分析属于负曲率黎曼流形上的量子唯一遍历猜想 [AN07、Ana08、DJ18、DJN22], 的研究范畴；这是量子混沌领域一个核心且在很大程度上尚未解决的问题。具体而言，存在一个密度为 1 的特征函数子集，它们等分布于刘维尔测度（定理2.1，第 (iii) 项）；人们猜想不存在例外子列。

1.2. 设置。 设 $(\Sigma,\ g)$ 为一个亏格为$g\ \geq 2$的紧致连通定向曲面，并赋予其具有常曲率 -1 的双曲度量。设 $L \to \Sigma$ 为一个配备酉联络 ∇ 的厄米复直线丛。其曲率为

$$F_\nabla = -i\,B\,\mathrm{vol} \in C^\infty(\Sigma, \Lambda^2 T^*\Sigma),$$

其中 $B \in C^\infty(\Sigma)$，vol 表示黎曼体积形式。函数 B 将被称为磁场。相应的磁拉普拉斯算子定义为

$$\Delta_L := \tfrac{1}{2}\nabla^*\nabla : C^\infty(\Sigma, L) \longrightarrow C^\infty(\Sigma, L). \tag{1.1}$$

对于任意整数 $k \geq 0$，我们考虑赋予诱导联络 $\nabla^{\otimes k}$ 的张量幂 $L^{\otimes k} \to \Sigma$ ，并以同样方式定义作用于 $L^{\otimes k}$ 的拉普拉斯算子 Δ_k 。将 $k^{-2}\Delta_k$ 按 k^{-2} 缩放后，该算子进入参数为 h 的半经典区域：$= k^{-1}$。

在本文中，我们进一步假设磁场 B 为常数。由高斯–博内定理，这意味着量子化条件 $2B(g-1) \in \mathbb{Z}$。我们的目标是研究归一化特征态的半经典行为

$$k^{-2}\Delta_k u_k = (E + \varepsilon_k)u_k, \qquad u_k \in C^\infty(\Sigma, L^{\otimes k}), \quad \|u_k\|_{L^2} = 1, \tag{1.2}$$

在极限 $k \to +\infty$下，其中 $E \geq 0$ 固定且 $\varepsilon_k \to 0$。

我们称满足 $(u_k)_{k\geq 0}$ （参见 (1.2)）的一列半经典缺陷测度 μ在 $T^*\Sigma$ 上收敛于该测度 $a \in C^\infty(T^*\Sigma)$,

$$\langle \mathrm{Op}_k(a)u_k, u_k\rangle_{L^2} \longrightarrow_{k\to+\infty} \int_{T^*\Sigma} a(x,\xi)\,d\mu(x,\xi), \tag{1.3}$$

其中 Op_k 表示磁半经典量子化。我们用 $u_k \rightharpoonup \mu$ 表示这种收敛。 u_k 的归一化意味着 μ 是一个概率测度，且其支集包含于紧能量超曲面 $\{p = E\} \subset T^*\Sigma$中，其中

$$p(x,\xi) := \tfrac{1}{2}|\xi|_g^2$$

是 $k^{-2}\Delta_k$的主符号。尽管极限（1.3）沿整个序列可能不存在，但沿子序列总是存在的；我们不一定总是重新标记这些子序列。正如我们将看到的，可能的缺陷测度结构关键取决于 E的取值，由此产生三种不同的半经典区域。

1.3. 相空间中的磁流。 令 ω_0 表示 $T^*\Sigma$ 上的典范刘维尔辛形式，并设

$$\Omega := \omega_0 + i\,\pi^* F_\nabla, \tag{1.4}$$

其中 $\pi\colon\ T^*\Sigma \to \Sigma$ 是典范投影。形式 Ω 是辛形式，并包含磁场的贡献。与 p相关联的哈密顿向量场 H_p^Ω定义为

$$dp(\bullet) = \Omega(\bullet, H_p^\Omega),$$

相应的哈密顿流 $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 称为磁流。每个能量超曲面 $\{p = E\}$ 在此流下保持不变，并带有一个自然的光滑不变概率测度，即刘维尔测度，记作 μ_{Liouv}。

设 $S\Sigma$ 是 Σ的单位切丛。我们用 $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 表示 $S\Sigma$上的测地流，用 $(R_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 表示 $S\Sigma$纤维中的 2π-周期旋转，用 $(h_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 表示稳定 horocyclic 流。注意，$S\Sigma = S\mathbb{H}^2/\Gamma = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})/\Gamma$，其中某个格 $\Gamma <$ 是 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$的子群。上面定义的三个流分别由 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ 中的以下元素生成，并将它们视为 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$上的右不变向量场：

$$X = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad U_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

定义临界能量

$$E_c := \tfrac{1}{2}B^2,$$

并设

$$T_E = \begin{cases} (B^2 - 2E)^{-1/2}, & E < E_c, \\ (2E - B^2)^{-1/2}, & E > E_c. \end{cases}$$

众所周知（例如参见 [CL25，命题 2。5] ），对于 $E > 0$，上的磁流光滑共轭于：$\{p = E\}$

(i) 当 $E < E_c$ 时（椭圆情形），重参数化的旋转流（R_{t/T_E}）$_{t\in\mathbb{R}}$；(ii) 当 $E = E_c$ 时（抛物情形），horocycle 流（h_t）$_{t\in\mathbb{R}}$；(iii) 当 $E > E_c$ 时（双曲情形），重参数化的测地流（φ_{t/T_E}）$_{t\in\mathbb{R}}$。

这是以下事实的直接推论：能量壳层 $\{p = E\}$ 上的磁流与 $S\Sigma$ 上由 $\sqrt{2E}X - BV$ 生成的流共轭。于是，给定$Y \in \mathfrak{sl}(2,\ \mathbb{R})$，根据三分法 $\det Y <0$、$\det Y > 0$ 或 $\det Y = 0$，它共轭于上述流之一。

2. 量子极限

2.1. 半经典缺陷测度。 磁流在经典层面的动力学转变，在量子层面有直接对应，概述如下定理。

定理 2.1（三种半经典区域）。 在满足上述关于(Σ, g) 和(L, ∇)的假设下，以下结论成立：

(i)**低能区间**。 若 $0 \leq E < E_c$，则对于每个在$\{p = E\}$ 上且在磁流$(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$下不变的概率测度 μ $(u_k)^{k\geq 0}$ ，存在一个满足 (1.2)的序列

$$u_k \rightharpoonup_{k\to\infty} \mu.$$

(ii)**临界能量区间**。 若 $E = E_c$，那么对于任意满足$(u_k)^{k\geq 0}$ 的序列(1.2)，相应的半经典缺陷测度就是刘维尔测度：

$$u_k \rightharpoonup_{k\to\infty} \mu_{\text{Liouv}}.$$

(iii)**高能区间**。 固定 $E_c < a < b$。对于每个 $k \geq 0$，令$(u_{k,j})_{j\in J_k}$ 为 $k^{-2}\Delta_k$ 的一族标准正交特征函数，其特征值为 $\lambda_{k,j} \in [a, b]$。那么存在一个密度为一的子集 $J_k^* \subset J_k$ ，使得对于任意满足 $j_n \in J_{k_n}^*$ 和 $k_n \to +\infty$的序列(u_{k_n,j_n})，有

$$u_{k_n,j_n} \rightharpoonup_{n\to\infty} \mu_{\text{Liouv}}.$$

在高能区间 $E > E_c$中，磁拉普拉斯算子的谱与 (Σ, g)上的拉普拉斯–贝尔特拉米算子的谱直接相关。在这种情形下，人们猜想刘维尔测度是唯一可能的半经典缺陷测度，这与量子唯一遍历性（QUE）猜想一致；关于进一步讨论，参见 [Dya22] 及其中的参考文献。

低能区间 $E < E_c$ 则更为微妙。这需要构造特征态，使其在微局部意义下沿磁流的指定周期轨道集中。该构造采用了受 Weinstein 启发的平均化论证 [Wei77], 参见 §2.3。

临界区间 $E = E_c$ 呈现了量子遍历性一种尤为直观、尽管略显退化的表现。事实上，任何半经典缺陷测度都必须在磁哈密顿流下保持不变，而该流在 $\{p = E_c\}$ 上与 horocycle 流重合。由于 horocycle 流是唯一遍历的 [Fur73], 刘维尔测度是唯一的不变概率测度，因此也是唯一可能的缺陷测度。

在低能区间，我们还得到了关于扰动算子 $k^{-2}(\Delta_k + V)$ 的更一般结果，其中 $V \in C^\infty(\Sigma)$ 是一个光滑势；详见 [CL25，定理 1。3]，其中有详细讨论。从几何角度看，用势扰动 Δ_k 在某种程度上类似于将球面上的圆度量扰动为佐尔度量。在即将发表的论文 [CLb], 中，算子 $k^{-2}(\Delta_k + V)$ 在负截面曲率曲面（不一定是双曲曲面）上、在 $E \simeq 0$ 的情形下得到研究。

2.2. 定量量子唯一遍历性。 在临界情形下，事实上我们可以对这一收敛得到定量改进。设$0 < \theta < \frac{1}{2}$ 满足$\theta(1-\theta) \leq \lambda_1(\Sigma)$，其中 $\lambda_1(\Sigma)$表示函数空间上拉普拉斯–贝尔特拉米算子的第一非零特征值。记 $S_c^*\Sigma := \{p = E_c\}$ 为临界能量超曲面。

定理 2.2 （临界能量下的多项式收敛速率）。 假设 (1.2)成立，且 $E = E_c$ 并且 $\varepsilon_k \leq h^\ell$ 对某个 $0 < \ell \leq 1/15$成立。那么存在一个常数

$C = C(\ell) > 0$ 使得，对于任意支撑于 $\{p \le 10E_c\}$ 中的符号 $a \in C^\infty(T^*\Sigma)$，有

$$\left| \langle \mathrm{Op}_k(a) u_k, u_k \rangle_{L^2} - \int_{S_c^*\Sigma} a \, d\mu_{\mathrm{Liouv}} \right| \le C\, k^{-\theta\ell/4100} \, \|a\|_{C^{17}(T^*\Sigma)}.$$

余项中的指数预计并非最优，我们也未尝试对其进行改进。当然，可以取 $\ell \ge 1/15$，但此时收敛指数 先验地 不会优于 $\theta\ell(15 \cdot 4100)^{-1}$。

关于 a的紧支撑假设可以放宽：利用特征态 u_k 集中在能量超曲面 $\{p = E_c\}$上的事实，可以等价地考虑符号 $a \in S^m(T^*\Sigma)$。这一修改只会产生可忽略的 $\mathcal{O}(k^{-\infty})$误差。

最后，我们提到，朝向量子遍历性的相关定量结果最近由 Morin和Rivière [MR 25] 在不同的半经典区域中获得；在该区域内，磁场为常数，半经典参数是能量的平方根的倒数，研究背景是环面上的磁拉普拉斯算子。

2.3. 证明思路。 </style}作用于 (, $L^{\otimes k}$) 的 $\Delta_k = \frac{1}{2}\nabla_k^*\nabla_k$ 的前几个特征值是显式的，对于 $0 \le m < N_k := \lfloor kB \rfloor$，其表达式为

$$\lambda_{k,m} = kB(m + \tfrac{1}{2}) - \frac{m(m+1)}{2}. \tag{2.1}$$

当 $k \to \infty$, $\lambda_{k,N_k-1} \sim k^2 E_c$ 其中 $E_c = \frac{1}{2}B^2$ 为临界能量。参见 [CL25，命题 2。8]。

2.3.1. *Weinstein* 周期算子。 *</style}*令 $,_m$ 为从 $C^\infty(M, L^{\otimes k})$ 到 ker($\Delta_k - \lambda_{k,m}$) 的 L^2-正交投影，并定义：

$$\mathbf{A}_k := k^{-1} \sum_{m=0}^{\lfloor kB \rfloor - 1} m \Pi_{k,m}. \tag{2.2}$$

可以证明 $\mathbf{A}_k$ 是一个（扭曲的）紧支撑半经典算子，其支撑位于单位圆盘丛 $D^*\Sigma := \{(x, \xi) \in T^*\Sigma \mid |\xi| < B\}$，参见 [CL25，引理 4。1]。此外，由（2.1），可以验证在空间

$$\mathcal{I}_k := \bigoplus_{m=0}^{\lfloor kB \rfloor - 1} \ker(\Delta_k - \lambda_{k,m}),$$

算子 $\mathbf{A}_k$ 满足代数恒等式

$$k^{-2}\Delta_k = B(\mathbf{A}_k + \tfrac{1}{2}k^{-1}) - \tfrac{1}{2}\mathbf{A}_k(\mathbf{A}_k + k^{-1}). \tag{2.3}$$

令 a 为定义在 $D^*\Sigma$上的函数，其定义关系为

$$p(x, \xi) = \beta(a(x, \xi)), \qquad \forall (x, \xi) \in D^*\Sigma,$$

其中 β: $[0, B] \to [0, \frac{1}{2}B^2]$是函数 $\beta(s) := Bs - \frac{1}{2}s^2$，直接计算可得， a 是$\mathbf{A}_k$的主符号。

由 a 生成的哈密顿流（相对于扭曲辛2形式 Ω定义，见（1.4））是由 2π周期重参数化得到的流，而后者由 p生成。注意，根据构造，$\mathrm{sp}(\mathbf{A}_k) \subset k^{-1}\mathbb{Z}_{\geq 0}$，因此

$$e^{2ik\pi \mathbf{A}_k} = \mathbf{1}. \tag{2.4}$$

最后，注意到

$$\Pi_{k,m} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-imt} e^{itk\mathbf{A}_k} dt. \tag{2.5}$$

这在半经典区域中是一个傅里叶积分算子 $k \to +\infty$，其典范关系可显式表示为

$$C = \{(\Phi_t(x,\xi);(x,\xi)) \ : \ t \in [0, T_E], (x,\xi) \in \{p = E\}\}.$$

参见 [Wei77，Zel97] 以了解相关讨论。

2.3.2.高斯束。 谱投影算子 $\Pi_{k,\ m}$ 可用于构造磁高斯束，即在微局部意义下集中于一条周期性双特征曲线上的截面。我们固定一个能量 $0 < E < E_c$。给定任意一个 $(x,\ \xi) \in \{p = E\} \subset T^*\Sigma$，其磁双特征线 $(\Phi_t(x,\ \xi))_{t\in\mathbb{R}}$ 是 T_E-周期的，其中 $T_E = (B^2 - 2E)^{-1/2}$。可以关联一个高斯波包 $\mathbf{e}_{k,\ x,\ \xi} \in C^\infty(\Sigma,\ L^{\otimes k})$，它在微局部意义下集中于相空间点 $(x,\ \xi)$ 附近。

对于给定的 $k \geq 0$，令 m_k 为一个整数，使得 $\lambda_{k,\ m_k} \to E$。通过应用谱投影算子 $\Pi_{k,\ m_k}$，可得到一个真正的特征函数

$$\mathbf{f}_{k,x,\xi} := k^{1/4}\,\Pi_{k,m_k}\mathbf{e}_{k,x,\xi} \in C^\infty(\Sigma, L^{\otimes k}),$$

满足能量为 1.2 的（ E。这一构造详见 [CL25，命题 4。6]所得特征态 $\mathbf{f}_{k,\ x,\ \xi}$ 是一个 L^2（准）归一化的[1] 磁性高斯光束，其半经典质量集中在由 $(x,\ \xi)$ 生成的周期轨道上。

特别地，经过重新归一化后，它收敛到半经典缺陷测度δ_γ，该测度是支撑在由 $(x,\ \xi)$ 生成的周期双特征线上 $\{p = E\}$ 的狄拉克质量。由于定义在 $\{p = E\}$ 上的任意磁流 $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 不变测度都可以用这样的狄拉克质量逼近，一个简单的论证表明，任意流不变测度都可以作为半经典缺陷测度得到，从而证明定理 2.1 的第 (i) 项。

2.3.3. **定量量子遍历性。** 定理 2.2 的证明依赖于两个关键要素。第一个是 Burger 提出的 horocycle 流经典唯一遍历性的一个定量版本 [Bur90], 它断言，对于所有 $0 < \theta < 1/2$ 满足 $\theta(1-\theta) \leq \lambda_1(\Sigma)$

[1]存在 $C > 1$ 使得 $C^{-1} \leq \|\mathbf{f}_{k,\ x,\ \xi}\|_{L^2} \leq C$。

（函数上的拉普拉斯-贝尔特拉米算子的第一非零特征值），存在一个常数 $C>0$，使得对于所有 $T>0$，以及所有 $a\in H^3(S\Sigma)$，以下估计成立：

$$\sup_{v\in S\Sigma}\left|\frac{1}{T}\int_0^T a(h_t(v))dt-\int_{S\Sigma}a(v)d\mu_{\mathrm{Liouv}}(v)\right|\leq\frac{C\|a\|_{H^3(S\Sigma)}}{T^\theta}. \tag{2.6}$$

第二个要素是埃戈罗夫定理的长时间版本。在其标准形式中，埃戈罗夫定理断言，对于每个可观测量 $a\in C^\infty_{\mathrm{comp}}(T^*\Sigma)$：

$$e^{itk^{-1}\Delta_k}\operatorname{Op}_k(a)e^{-itk^{-1}\Delta_k}=\operatorname{Op}_k(a\circ\Phi_t)+\mathcal{O}(k^{-1}), \tag{2.7}$$

其中余项是一致的，只要 $t\leq T_k:=\varepsilon\log k$，并且 $\varepsilon>0$ 足够小。时间 T_k 称为 埃伦费斯特时间。然而，这还不足以按我们的需要应用（2.6），因为我们希望超越埃伦费斯特时间，并将其用于多项式时间 $t\simeq k^\delta$，其中 $\delta>0$。通常，只有当流满足如下形式的抛物型估计时，这才是可能的：

$$\|f\circ\Phi_t\|_{C^n(T^*\Sigma)}\leq C_n\langle t\rangle^{m_n}\|f\|_{C^n(T^*\Sigma)},\qquad\forall t\geq 0, \tag{2.8}$$

对于所有函数 $f\in C^\infty$（$T^*\Sigma$），其中 $m_n\geq 0$。然而，估计式（2.8）在 $T^*\Sigma$ 上以极其严重的方式失效，因为磁流 $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 在 $\{p>E_c\}$上是双曲的，这意味着对于所有紧 $K\subset T^*\Sigma$，$n\geq 0$以及 $f\in C^\infty_{\mathrm{comp}}$（$T^*\Sigma$）且支集包含于 K中，

$$\|f\circ\Phi_t\|_{C^n(T^*\Sigma)}\leq C_ne^{\gamma nt}\|f\|_{C^n(T^*\Sigma)},\qquad\forall t\geq 0,$$

而且这个估计无法改进。指数 $\gamma>0$ 取决于 K；它称为李雅普诺夫指数，是流的最大膨胀率。

关键的观察是，当 $E\to E_c$ 时，流的双曲性会以这样的方式减弱：限制在临界能量壳层 $\{p=E_c\}$ 上时，抛物型估计（2.8）成立。更精确地说，对于所有 $n\geq 0$，存在常数 $C_n>0$，使得对于所有$f\in C^\infty_{\mathrm{comp}}$（$T^*\Sigma$）且支集包含于 $\{p\leq E\}$：

$$\|f\circ\Phi_t\|_{C^n(T^*\Sigma)}\leq C_n\langle t\rangle^{m_n}e^{(2(E-E_c)_+)^{1/2}nt}\|f\|_{C^n(T^*\Sigma)},\qquad\forall t\geq 0, \tag{2.9}$$

其中 $x_+=\max(x,\,0)$。

由于满足 (1.2) 且 $E=E_c$ 的特征态 $u_k\in C^\infty(\Sigma,L^{\otimes k})$ 集中在能量壳层 $\{p=E_c\}$ 上，因此可以将 $\langle\operatorname{Op}_k(a)u_k,u_k\rangle_{L^2}$ 中的可观测量 a 替换为 $a_k:=a\chi_k$，其中 χ_k 是一个在 $\{p=E_c\}$ 上等于 1、支集包含于 $\{p\in(E_c-k^{-\delta},E_c+k^{-\delta})\}$ 的凸起函数，对某个 $\delta<1/2$ 成立。这样便可以在时间 $t\simeq k^{\delta/2}$ 内应用埃戈罗夫定理，因为 (2.9) 中的指数项此时有界于

$$\exp\left((2(E-E_c)_+)^{1/2}tn\right)\leq\exp\left(\sqrt{2}k^{-\delta/2}k^{\delta/2}n\right)=\mathcal{O}(1).$$

也就是说，我们得到一个与（2.8）类似的估计。因此，对于所有 $t\leq k^{\delta/2}$，模去多项式余项后，以下等式序列成立（这里 $\delta>0$表示一个

一般指数，该指数可能因行而异）：

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{Op}_k(a)u_k, u_k\rangle_{L^2} &\overset{(1.2)}{=} \langle e^{itk^{-1}\Delta_k}\,\mathrm{Op}_k(a)e^{-itk^{-1}\Delta_k}u_k, u_k\rangle_{L^2}\\ &\overset{(2.7)}{=} \langle \mathrm{Op}_k(a_k\circ\Phi_t)u_k, u_k\rangle_{L^2} + \mathcal{O}(k^{-\delta})\\ &= \langle \mathrm{Op}_k\left(T^{-1}\int_0^T a_k\circ\Phi_t dt\right)u_k, u_k\rangle_{L^2} + \mathcal{O}(k^{-\delta})\\ &\overset{(2.6)}{=} \int_{\{p=E_c\}} a(v)d\mu_{\mathrm{Liouv}}(v)\underbrace{\|u_k\|_{L^2}^2}_{=1} + \mathcal{O}(k^{-\delta}),\end{aligned}$$

由此证明了该结论。

3. Hörmander 的 L^∞ 界与磁性带状态

3.1. **L^∞ 范数。** Hörmander 的一项一般性结果 [Hör68] 指出，对于 n维紧流形上的椭圆二阶微分算子，有如下界

$$\|u_k\|_{L^\infty} \le Ck^{-(n-1)/2}\|u_k\|_{L^2},$$

其中 $C>0$ 与 $k\ge 0$ 无关，并且 u_k 是该算子对应于特征值 $\simeq k^2$的特征态。相关估计也可参见 Levitan 和 Avakumović 的早期工作 [Lev52，Ava56]。在本文的设定中，底流形 Σ 是二维的，因此 Hörmander 估计可具体化为

$$\|u_k\|_{L^\infty} \le Ck^{-1/2}\|u_k\|_{L^2}.$$

在 [CLa，定理 1 中，1], 我们证明了以下二分结论：

定理 **定理 3.1 (L^∞ 磁性特征函数的界)。** 以下断言成立 *d.*

(i) **低能区间。** 假设 $0\le E<E_c$。则存在一列特征函数 $(u_k)_{k\ge 0}$ 满足 (1.2)，使得

$$\liminf_{k\to+\infty} k^{-1/2}\|u_k\|_{L^\infty(\Sigma,L^{\otimes k})} > 0. \tag{3.1}$$

(ii) **临界能量区间。** 假设 (1.2) 成立，且 $E=E_c$ 并且 $\varepsilon_k\le h^\ell$对某个 $0<\ell\le 1/15$成立。则存在常数 $C>0$ 使得

$$\|u_k\|_{L^\infty(\Sigma,L^{\otimes k})} \le Ck^{1/2-\theta\ell/155800}. \tag{3.2}$$

在高能区间（$E>E_c$）中，磁流是双曲的。因此，按照现已标准化的论证，应当可以得到类似于拉普拉斯算子作用于函数时的结论，即具有 Bérard 型 $\sqrt{\log}$ 改进，也就是说：

$$\|u_k\|_{L^\infty(\Sigma,L^{\otimes k})} \le C(\log k)^{-1/2}k^{1/2}.$$

参见 [Bér77、Bon17] 以进一步了解相关讨论。

在低能区间，达到 Hörmander 预测的最优增长率的特征函数，与球面上的带状调和函数有着惊人的相似之处。它们

实际上可以借助密切相关的思想来构造，其对应的半经典缺陷测度也可以明确描述；参见 §3.2。受这一类比启发，我们将这些特征函数称为磁纬向态。

出现在（3.2）中的临界能级多项式增益显然并非最优，且我们没有尝试优化该指数。确定最优速率仍然是一个悬而未决的问题。事实上，将定理2.2 与下述关于半经典算子的一般界结合后，这一点是一个直接的推论；该一般界见于 [CLa，命题 3。1]:

命题 3.2。 设 $P_h \in \Psi_h^{\mathrm{comp}}$ （Σ）为一个半经典伪微分算子，并考虑 （u_h）$_{h>0}$ ，使得

$$P_h u_h = (E + o(1))u_h, \qquad \|u_h\|_{L^2} = 1.$$

进一步假设，对于某个 $\delta > 0$， p^{-1}（$E-\delta, E+\delta$）是紧的，并且在 p^{-1}（$E-\delta, E+\delta$）上有 $d_\xi p \neq 0$。那么对于所有 $0 \leq \varepsilon < 1/2$，存在 $C > 0$，使得对于所有 $x \in M$:

$$|u_h(x)|^2 \leq C\left(h^{-(n-1)-\varepsilon}\int_{B(x,Ch^\varepsilon)} |u_h(x)|^2 + h^{-(n-1)+\varepsilon}\right).$$

这一估计最初由 [Don01] 针对黎曼拉普拉斯算子证明，其形式略微更精确，论证则遵循 Bourgain 的方法。要得到多项式改进（定理3.1，第（ii）项），只需将命题 3.2 与定理 2.2结合起来，并将函数 $a = \pi^*\chi$用于定理，其中 π： $T^*\Sigma \to \Sigma$ 是投影，而 $\chi \in C^\infty(\Sigma)$ 是一个局部化在 $B(x,\ Ch^\varepsilon)$ 上的凸起函数（此处 $h = 1/k$）。

据我们所知，这一现象提供了首个例子，表明椭圆算子特征函数的 L^∞ 范数的渐近行为会随能量范围发生如此显著的定性变化。尤其是，理解能量从下方趋近 E_c 时的过渡区间，将会很有意义。

Hörmander估计的更精确版本已在各种几何背景下得到研究，尤其是在负曲率流形上；例如参见 [Bér77、Bon17、CG23]。尽管人们曾在若干情形下猜想负曲率曲面上的多项式改进 [Sar95], ，但要证明这类改进却异常困难，目前仅在特殊情形下有所结果，例如 [IS95、IV24]。

3.2. **磁性带状态**。 现在我们介绍能量范围 $0 < E < E_c$内磁性带状态的构造，它们使（3.1）中的 Hörmander 估计达到饱和。

Fix 是一点 $x \in \Sigma$。在 x 处的余切纤维中，相应的能量壳层，

$$C(x, E) := \{p = E\} \cap T_x^*\Sigma,$$

是一个与圆微分同胚的一维流形（在退化情形 $E = 0$ 下，集合 C(x，0) 退化为单点，需要单独论证）。

由于磁哈密顿流 $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 在能量超曲面$\{p=E\}$上是周期性的，周期为 $T_E=(B^2-2E)^{-1/2}$，每个满足 $\xi\in C(x,\ E)$ 的点 $(x,\ \xi)$ 都生成一条闭合的双特征曲线：

$$\Phi_{T_E}(x,\xi)=(x,\xi).$$

通过典范投影 π 将该轨道投影到底流形上： $T^*\Sigma\to\Sigma$得到一条光滑闭曲线 γ：$[0,T_E]\to\Sigma$。

然后，将这些高斯束在整个能量圆 $C(x,\ E)$ 上取平均，从而定义磁纬向态。更准确地说，固定任意一个 $\xi\in C(x,\ E)$，令

$$\mathbf{u}_{k,x}:=k^{1/4}\int_0^{2\pi}\mathbf{f}_{k,x,R_\theta\xi}\,d\theta, \tag{3.3}$$

其中 R_θ： $T^*\Sigma\to T^*\Sigma$表示余切纤维中旋转角度 θ的旋转。可以验证，对于某个统一常数 $1/C\le\|\mathbf{u}_{k,\ x}\|_{L^2}\le C$ 都有 $C>1$。序列 $u_k:=\mathbf{u}_{k,\ x}$ 恰好是实现定理 3.1 第 (i) 项中所述最大 L^∞ 增长的特征函数族。

然而，确定

$$\Omega:=\limsup_{k\to+\infty}k^{-1/2}\|u_k\|_{L^\infty(\Sigma,L^{\otimes k})}>0,$$

其中 $u_k\in C^\infty(\Sigma,\ L^{\otimes k})$ 满足 $k^{-2}\Delta_k=(E+o(1))u_k$ 对于 $0\le E<E_c$ 以及 $\|u_k\|_{L^2(\Sigma,\ L^{\otimes k})}=1$。在球面上，常数 Ω 是显式的，且等于 $(2\pi)^{-1/2}$。最后需要指出的是，应该可以利用 SL(2，ℝ) 的表示论对这类磁纬向态进行代数构造；这将留待未来研究。

3.3. **磁性带状态的缺陷测度**。 现在，我们来描述与磁性带状态序列（3.3）相关的半经典缺陷测度。从微局部角度看，很容易看出 $(u_k)^{k\ge0}$ 集中在二维不变环面上

$$\begin{aligned}\mathbb{T}^2(x,E):=&\left\{\Phi_t(x,R_\theta\xi)\ :\ \theta\in[0,2\pi],\ t\in[0,T_E]\right\}\\ \simeq&\ \mathbb{R}_t/(T_E\mathbb{Z})\times\mathbb{R}_\theta/(2\pi\mathbb{Z}),\end{aligned}$$

其中 $\xi\in C(x,\ E)$由周期磁轨道叶状分解。我们将 $\mathrm{Leb}_{\mathbb{T}^2}:=d\theta\otimes dt$ 记为 $\mathbb{T}^2(x,\ E)$ 上的勒贝格测度。以下结果证明于 [CLa，定理 1。2]

定理 3.3 （磁性带状态的半经典缺陷测度）。 设 $(u_k)^{k\ge0}$ 为L^2-归一化的磁性带状态序列，定义见 (3.3)。那么：

(i) 半经典缺陷测度 μ 支撑于 $\mathbb{T}^2(x,E)$，并且等于归一化的勒贝格测度 $\mu=(2\pi T_E)^{-1}d\theta\otimes dt$.(ii)其投影 $\nu:=\pi_*\mu$ 相对于黎曼体积 vol_Σ绝对连续，也就是说 $\nu=\alpha\mathrm{vol}_\Sigma$，其中某个显式的上半连续函数

$\alpha \in L^1(\Sigma, \mathrm{vol}_\Sigma)$。此外，在 x 附近，有

$$\alpha(y) \sim_{y\to x} \frac{1}{4\pi T_E E d(x,y)}.$$

当 $E \gg 0$ 足够大时，测度 ν 在 Σ 上具有全支撑。这种情况与球面上的带状调和函数十分相似，其半经典测度支撑在与闭测地线相关的不变环面上。不过，密度 α 只会在 $y = x$ 处发散（而在球面上，它会在两个对跖点处发散，这两个点对应于测地流的共轭点）。这是因为在这种情形下不存在“磁性”共轭点。

参考文献

[AN07] Nalini Anantharaman 和 Stéphane Nonnenmacher. 阿诺索夫流形上拉普拉斯算子特征函数的半去局域化. Annales de l’Institut Fourier, 57(7):2465–2523, 2007.[Ana08] Nalini Anantharaman. 熵与特征函数的局域化. Annals of Mathematics, 168(2):435–475, 2008.[Ava56] G. V. Avakumović. 闭黎曼流形上的特征函数. Mathematische Zeitschrift, 65:327–344, 1956.[Bér77] Pierre H. Bérard. 无共轭点紧黎曼流形上的波动方程. Mathematische Zeitschrift, 155(3):249–276, 1977.[Bon17] Yannick Bonthonneau. 无共轭点流形上的 theta 函数与魏尔定律. Documenta Mathematica, 22:1275–1283, 2017.[Bur90] Marc Burger. 几何有限曲面上的 horocycle 流. Duke Math. J., 61(3):779–803, 1990.[CG23] Yaiza Canzani 和 Jeffrey Galkowski. 特征函数平均的改进：测地束的一项应用. Journal of Differential Geometry, 124(3):443–522, 2023.[CLa] Ambre Chabert 和 Thibault Lefeuvre. 双曲曲面上磁拉普拉斯算子特征函数的改进 l^∞-界. 准备中.[CLb] Laurent Charles 和 Thibault Lefeuvre. 零能量附近曲面上磁拉普拉斯算子的半经典缺陷测度. 准备中.[CL25] Laurent Charles 和 Thibault Lefeuvre. 双曲曲面上磁拉普拉斯算子的半经典缺陷测度. arXiv 电子预印本，第 arXiv:2505.08584 页，2025年5月.[DJ18] Semyon Dyatlov 和 Long Jin. 双曲曲面上的半经典测度具有全支撑. Acta Mathematica, 220(2):297–339, 2018.[DJN22] Semyon Dyatlov、Long Jin 和 Stéphane Nonnenmacher. 变曲率曲面上的特征函数控制. Journal of the American Mathematical Society, 35(2):361–465, 2022.[Don01] Harold Donnelly. 紧黎曼流形上拉普拉斯算子特征函数的界. J. Funct. Anal., 187(1):247–261, 2001.[Dya22] Semyon Dyatlov. 量子遍历性概述. Ann. Math. Qué., 46(1):11–26, 2022.[Fur73] Harry Furstenberg. horocycle 流的唯一遍历性. Recent Advances topol. Dynamics, Proc. Conf. topol. Dynamics Yale Univ. 1972, Lect. Notes Math. 318, 95-115 (1973)., 1973.[Hör68] Lars Hörmander. 椭圆算子的谱函数. Acta Mathematica, 121(1):193–218, 1968.[IS95] Henryk Iwaniec 和 Peter Sarnak. 算术曲面上特征函数的 l^∞ 范数. Annals of Mathematics, 141:301–320, 1995.

[IV24] Maxime Ingremeau 和 Martin Vogel. 负曲率下随机扰动中特征函数界的改进. *arXiv* 电子预印本, 第 arXiv:2403.13739 页，2024年3月.[Lev52] B. M. Levitan. 二阶自伴微分算子的谱函数的渐近行为. 苏联科学院通报·数学系列, 16:325–352, 1952年.[MR25] Léo Morin 和 Gabriel Rivière. 二维环面上磁拉普拉斯算子的量子唯一遍历性. 预印本，arXiv:2411.18449 [math.SP](2025), 2025年.[Sar95] Peter Sarnak. 算术量子混沌. 载于舒尔讲座（*1992*），特拉维夫，第 8 卷以色列数学会议论文集，第 183–236 页. 1995.[Wei77] AlanWeinstein. 拉普拉斯算子加势的特征值簇渐近性质. *Duke Math.J.*, 44:883–892, 1977.[Zel97] Steve Zelditch. 佐尔谱的精细结构. *J. Funct. Anal.*, 143(2):415–460, 1997.

巴黎大学和索邦大学，法国国家科学研究中心，IMJ-PRG，F-75006 巴黎，法国。电子邮箱地址：tlefeuvre@imj-prg.fr