初等托普斯的 Rezk 完备化

Kobe Wullaert ✉ 🏠 代尔夫特理工大学，荷兰

Niels van der Weide ✉ 🏠 奈梅亨拉德堡德大学，荷兰

摘要

单值基础中的范畴论发展及其形式化是一个活跃的研究领域。在这一背景下，范畴通常被假定为单值的，这意味着对象的恒等与同构相一致。由此可得，单值范畴中的等价与恒等相一致，而且单值范畴上的结构可以沿等价传递。然而，Kleisli范畴、Karoubi包络和 tripos 到 topos 构造等构造，并不一定会得到单值范畴。为了解决这一问题，可以使用 Rezk 完备化，将一个范畴完备化为单值范畴。不过，在研究带结构的范畴时使用 Rezk 完备化，还需要证明 Rezk 完备化继承了原范畴的结构。

本文提出了一个模块化框架，用于将 Rezk 完备化从范畴提升到带结构的范畴。我们通过分阶段将 Rezk 完备化从范畴提升到初等托普斯，展示了该框架的模块化特性。

2012年美国计算机协会学科分类计算理论 → 类型论；计算理论→ 逻辑与验证

关键词与短语单值基础；单值范畴；Rezk 完备化；UniMath；形式化；初等托普斯

资助*Niels van der Weide*：本研究得到荷兰科学研究组织（NWO）项目“平等的力量” OCENW.M20.380 的资助，该项目由荷兰研究理事会（NWO）资助。

致谢我们感谢 Benedikt Ahrens 对本文各版本提出宝贵意见，并参与了许多富有帮助的讨论。此外，我们感谢 Arnoud van der Leer 审阅形式化工作，并重构了有关笛卡尔闭范畴的材料。我们衷心感谢 Rocq 开发团队提供 Rocq 证明助手及其配套基础设施，并感谢他们帮助确保 UniMath 与 Rocq 保持兼容。

arXiv:2601.04814v1 [cs.LO] 8 Jan 2026

1 引言

单值基础 [21, 5] 已证明自身足以作为数学，尤其是范畴论发展的基础。在这样的基础中，结构遵循相等与结构的等价相一致这一原则，因此等价的结构无法区分。这个原则称为单值性原理[5]。

对于集合层级结构，这一原则是单值性公理的直接 推论；该公理为类型规定了这一原则。然而，对于范畴等高维结构，情况则更为微妙 [2, 21]。要使范畴遵循这一原则，我们需要恒等类型 ($\mathcal{A} = \mathcal{C}$) 与等价类型 ($\mathcal{A} \simeq \mathcal{C}$) 之间存在等价。单值性公理蕴含 ($\mathcal{A} = \mathcal{C}$) 与同构类型 ($isomorphisms$ ($\mathcal{A} \cong \mathcal{C}$)) 之间存在等价。因此，范畴的单值性原理可以重新表述为存在一个等价 ($\mathcal{A} \cong \mathcal{C}$) $\simeq^{(1)}$ ($\mathcal{A} \simeq \mathcal{C}$)。然而，除非考虑单值范畴——即对象的恒等与同构等价的范畴——否则 (1) 通常并不成立。

许多自然出现的范畴都满足范畴的单值性条件，而单值范畴对应于 Voevodsky 的同伦类型论单纯集合模型中的范畴 [12]。不过，不同的构造并不总能产生单值范畴；参见第 2 节。这时就需要*Rezk* 完备化 。

抽象地说，Rezk 完备化指的是范畴 [2] 的单值完备化。也就是说，范畴 $\mathcal{C}$ 的 Rezk 完备化是一个单值范畴 RC($\mathcal{C}$)，以及一个函子$\mathcal{C} \xrightarrow{\eta_{\mathcal{C}}}$RC($\mathcal{C}$)，它满足以下泛性质。对于每个单值范畴$\mathcal{E}$，任意类型为 $\mathcal{C} \to \mathcal{E}$ 的函子都唯一地经由 $\eta_{\mathcal{C}}$ 分解。在 [2]，中，证明了这一泛性质等价于要求 $\eta_{\mathcal{C}}$ 是一个弱等价。然而，这种等价的弱性意味着 $\eta_{\mathcal{C}}$ 不一定具有逆函子。特别地，$\mathcal{C}$ 上的结构无法保证沿着 $\eta_{\mathcal{C}}$ 传递为 RC($\mathcal{C}$) 上的结构。

在本文中，我们提出了一种模块化方法，将 Rezk 完备化从范畴提升到结构化范畴，例如初等托普斯。具体而言，我们证明了一个范畴的 Rezk 完备化继承了拓扑斯的结构，并且泛性质可以扩展到拓扑斯层面。此外，本文还附带了在 Rocq 库 UniMath 中进行的形式化；我们的方法正是考虑到这种形式化而设计的。具体而言，我们的方法具有模块化特性，旨在适用于范畴可能具有的大量结构。此外，我们预计，该方法对于在任何基于同伦类型论的证明助手中对本文内容进行形式化都具有实用性。

1.1 先前工作

对于（1-）范畴，高维范畴被认为应满足额外的单值性条件，从而遵循单值性原理。 [5] 中发展出了一套一般理论，使这一点得以精确定义；该理论为有限维范畴结构提出了签名，并为这类结构制定了等价（不可辨别性）的概念。以范畴为例，这一概念与等价的概念一致。

单值基础中发展出了多种范畴理论，包括幺半范畴理论 [31], 、富集范畴理论 [23], 、双范畴理论 [1], 以及双重（双）范畴理论 [26, 18]。尤其是，这些工作为此类范畴结构提出了单值性的概念，该概念与 [5]给出的概念一致。

Rezk 完备化 [2] 已推广到多种范畴结构，其中包括上述提及的一些结构 [1, 31, 23]。此外， [28], 还为带结构的群胚构造了 Rezk 完备化，其中结构是通过高阶归纳类型定义的。

此外，单值范畴论，尤其是 Rezk 完备化，已被用于指称语义的研究。例如，Rezk 完备化被用于将一个带有预层可表示映射的范畴转化为一个单值带族范畴 [4]。此外，Rezk 完备化还被用于关联 Scott 表示定理的两种不同构造，它们为无类型 λ-演算 [22] 建模。最后，文献 [25] 在单值框架下，基于理解范畴构造了多种拓扑斯及其内在逻辑。

1.2 概述与贡献

本文结构如下：

1. 第 2 节介绍单值范畴和 Rezk 完备化的背景知识。**2.** 在第3节中，我们将讨论如何将 Rezk 完备化从范畴提升到结构化范畴的框架和策略。我们首先简要回顾一些

展示双范畴的基础知识。然后，我们将定义展示泛箭头的概念，作为模块化构造双伴随的中间步骤。之后，我们将讨论在提升 Rezk 完备化的情形下，这类箭头如何具体化。

3. 在第4节中，我们将第3节介绍的框架应用于把 Rezk 完备化从范畴提升到各种结构化范畴，并逐步推广至 W-拓扑斯。具体而言，我们考虑有限余完备/完备范畴（第 4.1 节）、笛卡尔闭闭范畴（4.2）、初等托普斯（第 4.3 节）以及 W-拓扑斯（第 4.4 节）。

4. 在第5节和第6节中，我们详细讨论文献中提出的将 Rezk 完备化推广到带结构的范畴的不同方法，以及本工作可能的扩展方向。

1.3 形式化与基础

本工作附有基于单值数学 [20, 29] 的 Rocq 库 UniMath 中的形式化。UniMath 库所依据的逻辑是一种内涵依赖类型论，其宇宙满足单值性公理。除引理 37 外，我们不依赖选择公理，也不依赖排中律。我们依赖命题截断。

本形式化工作大量借鉴了 UniMath 库中已有的（双）范畴论材料以及相关文献 [2, 1]。标注有 a 的环境表示相应结果已经过形式化。点击 后，读者将跳转至 HTML文档。生成该文档所依据的提交编号为 94b49c3。

2 关于范畴的 Rezk 完备化

本节回顾并详细阐述范畴的 Rezk 完备化。本节的大部分内容已见于 [2]。首先，我们回顾定义 1 中单值范畴的定义。然后回顾弱等价（定义 2），并以弱等价的形式回顾 Rezk 完备化（定义 4）。随后，我们将重点介绍一些 Rezk 完备化发挥作用的范畴构造示例。最后，我们讨论 Rezk 完备化的双范畴表述，并在第 3 节和第 4 节中利用它将范畴的 Rezk 完备化提升至结构化范畴。

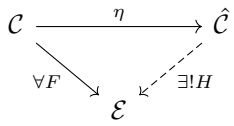
单值范畴 在单值基础中，范畴 C 尤其由一个对象类型 ob(C) 构成，并且对于每一对对象 x, y : ob(C)，都有一个态射类型 C(x, y)。此外，范畴 C 还包含定义在态射上的复合运算 $(- \cdot -)$: C$(x, y) \to$ C$(y, z) \to$ C(x, z) 、恒等态射 id$_x$: C(x, x)，且复合满足结合律和幺半群单位律。最后，每个 C(x, y) 都是一个集合，这意味着态射之间的等式构成一个命题；回忆一下，如果对于任意 x, y : A，每个恒等类型$x = y$ 都等价于单位类型，那么类型 A 就是一个命题。

然而，正如引言中所提到的，这类范畴并不遵循相等与等价相一致这一原则。也就是说，单值性公理蕴含范畴的相等与同构相一致 [2, 引理 6.16]，但对于范畴而言，相等和同构并不与等价相一致。等价恰好与上述两者相一致的范畴，正是**单值范畴**。在这类范畴中，两个对象之间的恒等与同构相一致。更确切地说，设$\mathcal{C}$ 为一个范畴，并用 $(x \cong y)$ 表示从 x 到 y 的同构类型，其中 x, y : ob($\mathcal{C}$)。根据路径归纳，我们有一个函数 idtoiso$_{x,y}$: $(x = y) \to (x \cong y)$。

▶**定义 1** (定义 3.6. [2]). 若对于每个 $x, y : \mathrm{ob}(C)$，$\mathrm{idtoiso}_{x,y}$ 都是类型等价，则称范畴 C 为单值的 。

根据单值性公理，许多范畴（例如集合范畴、群范畴等）都是单值的。注意，单值性意味着 $\mathrm{ob}(\mathcal{C})$ 是一个群胚，即类型 $x = y$ 是集合。

Rezk 完备化 Rezk 完备化指范畴[2, 21]的单值完备化。也就是说，若$\mathcal{C}$ 是一个范畴，则其 Rezk 完备化是一个单值范畴 $\hat{\mathcal{C}}$，连同一个函子 $\eta : \mathcal{C} \to \hat{\mathcal{C}}$，它在从$\mathcal{C}$ 到单值范畴的函子中是始对象；也就是说，对于每个单值范畴$\mathcal{E}$，前复合函子 $(\eta \cdot -) : [\hat{\mathcal{C}}, \mathcal{E}] \to [\mathcal{C}, \mathcal{E}]$ 都是范畴同构，其中 $[-, -]$ 表示函子范畴。特别地，这意味着每个到单值范畴的函子都能唯一地沿着 η 分解:



我们首先回顾弱等价，它使我们能够描述 Rezk 完备化的泛性质。

▶ **定义 2** （定义 3.7。 [2]）。 设 C、E 为范畴。一个弱等价 是一个函子F： $C \to E$，它是全忠实的，并且在对象上本质满 ； 其中，本质满射性（ ）意味着，对于余域中的每个对象 y ： E，仅仅存在一个对象 x： C 以及一个类型为 $F\,x \cong y$ 的同构。

注意，本质满射性并不意味着对于每个 $y : \mathcal{E}$，都可以选择原像中的一个对象 $x : \mathcal{C}$，这是由于仅仅存在中的截断所致。特别地，不一定存在一个函数 $F^{-1} : \mathrm{ob}(\mathcal{E}) \to \mathrm{ob}(\mathcal{C})$，使得 $F(F^{-1}(y)) \cong y$。对于那些函子$F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$，如果对于每个 $y : \mathrm{ob}(\mathcal{E})$，我们都可以选择一个对象 $x : \mathrm{ob}(\mathcal{C})$，使得 $F\,x \cong y$，则称它们为**分裂满**（ ）。此外，分裂满且全忠实等价于 F 具有一个右伴随，且其单位和余单位都是同构。因此，这样的F被称为**（伴随）等价**。然而，与弱等价不同，成为等价通常不是一个命题。特别地，弱等价不一定是等价。事实上，在对象类型为集合的范畴（集合范畴）之间，弱等价是分裂满的陈述等价于选择公理（[21, 页 309]）。但是，在单值范畴之间，弱等价、等价，甚至同构（[2,定义 6.9，引理 6.10]）都是一致的。更多细节请参见 [2] 。

▶ **命题 3** (定理 3.4. [2])。 设 $G : C_0 \to C_1$ 是任意两个不一定单值的范畴之间的弱等价。那么对于每个单值范畴 C_2, , 前复合函子 $(G \cdot -) : [C_1, C_2] \to [C_0, C_2]$ 是单值范畴之间的等价。

关于用弱等价刻画单值性，参见 [2, 定理 8.9]。

Rezk完备化 [2] 指的是单值完备化的一种构造（见备注 5）。不过，我们只依赖于用弱等价描述的 Rezk 完备化。因此，在下述定义中，我们将把它称为*Rezk* 完备化：

▶**定义 4**。 设 C 是一个范畴。C 的一个***Rezk*** 完备化 由一个单值ˆ
ˆ 范畴 C 和一个弱等价 $\eta : C \to C$ 构成。

Rezk 完备化确实满足单值完备化的泛性质，这正是命题 3。此外，对于每个范畴，其 Rezk 完备化类型是一个

命题。特别地，Rezk 完备化在恒等意义下唯一，因此我们可以说这个Rezk 完备化。给定一个范畴$\mathcal{C}$，我们将 RC($\mathcal{C}$) := $\hat{}\mathcal{C}$ 记作单值范畴，并将 $\eta_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to$ RC($\mathcal{C}$）记作弱等价。

▶ 备注 5。Rezk 完备化有两种构造方式 [2, 21]。在 [2], 中，范畴 $\mathcal{C}$ 的 Rezk 完备化被构造为预层范畴的一个满子范畴 [$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$,Set]，其中包含那些仅仅与可表函子同构的函子。然而，这种构造会提升宇宙层级，因为 [$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$,Set] 的宇宙层级高于 $\mathcal{C}$。更准确地说，回忆一下存在一个宇宙层级体系，设 $\mathcal{U}_k$ 为层级 k的宇宙，并用 Cat$^{(i,j)}$ 表示对象类型属于 $\mathcal{U}^{(i)}$ 且每个 $\mathcal{C}(x, y)$ 都属于 $\mathcal{U}i$的范畴类型。每当我们有 $\mathcal{C}$: Cat$^{(i,j)}$时，就有 RC($\mathcal{C}$) : Cat$^{(i\vee(j+1),i\vee j)}$，其中 $\vee$ 是宇宙层级的最小上界。

我们还可以考虑第二种构造 [21], ，假设同一宇宙中存在高阶归纳类型。在这里，我们可以将 RC($\mathcal{C}$) 的对象类型定义为一种高阶归纳类型，其中尤其包含一个项构造子 i : ob($\mathcal{C}$) $\to$ ob(RC($\mathcal{C}$)) 和一个路径构造子 $\prod_{xy:\mathcal{C}}(x \cong y) \to (i\,x = i\,y)$。这种构造的优点是，Rezk 完备化仍处于同一宇宙中。

例子 现在我们讨论一些范畴及其构造的例子，以说明 Rezk 完备化的以下几个方面。例 6 表明，Rezk 完备化推广了集合论结构（如群和偏序集）上的某些构造。例 7 和例 8 表明，在单值基础中工作会区分一些在经典理论中等价的构造。例 9 是本研究的动机示例：我们有一种拓扑斯构造，而它通常不会产生单值拓扑斯。因此，要构造与之相应的另一种单值构造，Rezk 完备化必不可少。具体而言，例 9 表明，我们需要关于如何将结构从一个范畴传递到其 Rezk 完备化的充分结果。当然，这一观察在其他例子中也发挥作用。

▶ **例 6** (集合范畴)。集合范畴是指对象类型为集合的范畴。此类范畴通常不是单值的。

1. 游走同构范畴，即具有两个不同但同构对象的范畴，不是单值的。它的 Rezk 完备化是终对象范畴。更一般地，我们可以考虑带有预序的集合；这等价于同态集都是命题的集合范畴。当且仅当该预序是反对称的时，这样的范畴才是单值的 [2,例 3。14] 因此，预序的 Rezk 完备化就是它的偏序完备化。

2. 一个幺半群 M 等价地说是一个单对象集合范畴 BM。如果 M 含有多个可逆元，那么这个范畴就不是单值的。如果 M 是一个阿贝尔群，那么 BM 的 Rezk 完备化就是 M [14, 7]的 Eilenberg-MacLane 空间，在单值基础中，它通过高归纳类型构造。尤其是，预序集的 Rezk 完备化可以理解为选取每个等价类的一个代表，而这个例子则说明还会添加非平凡的恒等。此外， η : $BM \to$ RC(BM) 是一个没有逆的弱等价示例。

3. Rezk 完备化允许构造集合的商。事实上，设 A 是一个配备了等价关系 $\simeq$ （即一个集合胚）的集合。那么 A 可以构造成一个范畴，其对象是 A 中的元素，态射类型为 $a \to b$ 见证$a \sim b$。这样就使得 A 成为一个群胚。对 A 进行 Rezk 完备化后得到一个群胚

其对象是 $\sim$的等价类。更一般地，Rezk 完备化可以看作群胚商 [28] 的一种推广。

此外，许多由语法或图生成的自由范畴都是集合范畴。

▶ **例 7**（Kleisli 范畴）。 单子是函数式编程中的重要工具，因为它们提供了恰当的抽象来对带效应程序进行建模。直观而言，给定一个由数据类型和程序构成的范畴$\mathcal{C}$，以及一个指定效应的单子 T，其 Kleisli 范畴包含相同的对象（数据类型），但其中的态射是已整合该效应的程序。

T 的 Kleisli 范畴可以通过 Kleisli 态射或自由代数构造。后一种构造会产生一个单值范畴；而如果$\mathcal{C}$ 是单值的，前一种构造则不会 [24, 5]。然而，Kleisli 态射构造的 Rezk 完备化恰好就是自由代数构造。

▶ **例 8**（幂等完备化）。（分裂）幂等完备化是许多领域中的基本构造。例如，在范畴论中，可以利用这种完备化研究预层范畴之间的等价 [6, 定理 6.5.11]。此外，这种构造推广了度量空间的柯西完备化 [13]。幂等完备化还可用于构造无类型 λ 演算的模型 [10]。我们讨论幂等完备化的两种构造：柯西完备化 和*Karoubi*包络。

为了构造范畴 $\mathcal{C}$ 的 Karoubi包络，我们使用分裂幂等元的概念。态射 $f\colon \mathcal{C}(x,x)$ 若满足 $f\cdot f = f$，则称为幂等的；若幂等态射 f 可分解为复合 $x \xrightarrow{\pi} y \xrightarrow{\iota} x$，其中 $y : \mathcal{C}$，且满足 $\mathrm{id}_y = \iota\cdot\pi$，则称其为可分裂的 。Karoubi包络的对象是 $\mathcal{C}$ 中的幂等态射。

一般来说，*Karoubi* 包络 不是单值的。

柯西完备化是作为预层范畴的一个满子范畴构造出来的。柯西完备化总是单值的，并且恰好是 Karoubi 包络的 Rezk 完备化。更多详情见 [22]。

▶ **例 9**（tripos 到 topos 构造）。 tripos 到 topos 构造是拓扑斯理论中的基础构造 [17, 11]。它可用于构造可实现性拓扑斯 [27]，也可用于对完备Heyting代数上的层范畴给出另一种描述 [4]。直观而言，tripos 和拓扑斯都表示高阶直觉主义逻辑的模型，但二者有一个关键区别：在拓扑斯中，公式被表示为指向子对象分类器的态射，而 tripos 则提供了更大的灵活性。具体而言，在 tripos 中，我们有一个函子 $\mathbb{P}\colon \mathrm{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{HA}$，它为每个集合赋予一个公式构成的 Heyting 代数。从本质上说，拓扑斯 $\mathcal{E}$ 中的公式概念是内在于$\mathcal{E}$的，但 tripos 并非如此。tripos 到 topos 构造从每个 tripos $\mathbb{P}\colon \mathrm{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{HA}$ 构造出相应的拓扑斯 PER($\mathbb{P}$)。

为了更好地理解 tripos 到 topos 构造，我们来看一个例子。每个完备Heyting代数 $\mathcal{H}$ 都会导出一个 tripos，使得集合 X 上的公式与函数 $X \to \mathcal{H}$相同。应用 tripos 到 topos 构造后，我们得到 H 值集合 [9], 范畴，而它不一定是单值的。

一般而言，tripos 到 topos 构造并不会产生单值范畴。

▶ **例 10**（函子范畴）。 设$\mathcal{A}$ 和$\mathcal{C}$ 为范畴。单值性在取函子范畴时得以保持。也就是说，如果$\mathcal{C}$ 是单值的，那么由函子构成的范畴 $[\mathcal{A},\mathcal{C}]$ 也是单值的 [2, 定理 4。15]然而，尽管函子范畴保持单值性，它们却不保持 Rezk 完备化。也就是说，函子范畴 $[\mathcal{A},\mathcal{C}]$ 的 Rezk 完备化并不是函子范畴 $[\mathcal{A}, \mathrm{RC}(\mathcal{C})]$。事实上，后复合

函子 $(-\cdot\eta_{\mathcal{C}}) : [\mathcal{A},\mathcal{C}] \to [\mathcal{A},\mathrm{RC}(\mathcal{C})]$ 是全忠实的，但不是本质满的。然而， $[\mathcal{A},\mathcal{C}]$ 的 Rezk 完备化可以构造为 $(-\cdot\eta_{\mathcal{C}})$ 的充实像。

双范畴视角 为了将范畴的 Rezk 完备化提升到结构化范畴，我们以双范畴的方式表述 Rezk 完备化。

类似于带结构的集合（例如幺半群）构成其各自范畴中的对象，具有额外结构的范畴构成双范畴[1]中的对象。采用双范畴的一个优势在于，我们可以统一处理结构。此外，Rezk 完备化的泛性质可以在范畴、函子和自然变换组成的双范畴 Cat 中内化，因为 Rezk 完备化使由单值范畴组成的双范畴 $\mathrm{Cat}_{\mathrm{univ}}$ 成为 Cat 的反射子双范畴。也就是说，$\mathrm{Cat}_{\mathrm{univ}}$ 到 Cat 的包含具有一个左双伴随（命题 12）。

▶ 定义 *11*（）。若我们有一个函数 $L : B_2 \to B_1$，、一族态射 $\eta : \prod_{X:B_2} X \to R(L(X))$（称为单位），并且对于每个 $X : B_2$ 和 $Y : B_1$，，函子 $\eta_X \cdot R(-) : B_1(L\,X, Y) \to B_2(X, R\,Y)$ 是范畴的伴随等价，则称拟函子 $R : B_1 \to B_2$ 具有左双伴随 L 。我们记作 $L \dashv R$，表示 L 是 R的左双伴随。

▶ **命题 12**。 $\mathrm{Cat}_{\mathrm{univ}}$ 到Cat 的包含具有一个左双伴随RC： $\mathrm{Cat} \to \mathrm{Cat}_{\mathrm{univ}}$。特别地，其在对象上的作用由 $\mathcal{C} \mapsto \mathrm{RC}(\mathcal{C})$给出，而单位逐点给出为$\eta_{\mathcal{C}}$。

在第 3.2 节和第 4 节中，我们详细阐述如何将（展示的）双范畴理论与命题 12 相结合，从而模块化地构造带结构的范畴的Rezk 完备化。

3 双伴随的提升

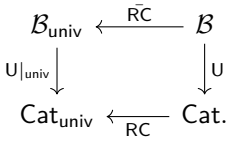
第 2 节中给出的例子说明，范畴中经常出现的各种构造会产生一个不一定是单值的范畴。Rezk完备化为这个问题提供了一个解决方案。然而，虽然范畴上的结构可以沿同构传递，但我们需要手动验证这种传递对于弱等价也成立。

现在我们可以将 Rezk 完备化及其作为左双伴随的泛性质描述如下。也就是说，Rezk 完备化形成一个拟函子 $\mathrm{RC} : \mathrm{Cat} \to \mathrm{Cat}_{\mathrm{univ}}$，它是遗忘拟函子 $\iota : \mathrm{Cat}_{\mathrm{univ}} \to \mathrm{Cat}$ 的左双伴随。随后，可以如下描述将结构从范畴传递到其 Rezk 完备化。考虑范畴上的一个结构，并令 $\mathcal{B}$ 为由配备该结构的范畴及保持该结构的态射组成的双范畴。例如，考虑具有有限积的范畴。那么$\mathcal{B}$ 就是由有限积以及保持这些积的函子组成的双范畴。我们有一个包含 $\bar{\iota} : \mathcal{B}_{\mathrm{univ}}$，$\to \mathcal{B}$，其中$\mathcal{B}$ 是配备有限积的单值范畴组成的双范畴。通过遗忘积，我们得到遗忘拟函子 $\mathrm{U} : \mathcal{B} \to \mathrm{Cat}$ 和 $\mathrm{U}|_{\mathrm{univ}} : \mathcal{B}_{\mathrm{univ}} \to \mathrm{Cat}_{\mathrm{univ}}$。此外，以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_{\mathrm{univ}} & \xrightarrow{\bar{\iota}} & \mathcal{B} \\ {\scriptstyle \mathrm{U}|_{\mathrm{univ}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{U}} \\ \mathrm{Cat}_{\mathrm{univ}} & \xrightarrow{\iota} & \mathrm{Cat} \end{array}$$

因此，Rezk 完备化对有限积的传递与保留-¯对应于存在一个左双伴随 RC，作用于 $\bar{\iota} : \mathcal{B}_{\mathrm{univ}}$，$\to \mathcal{B}$。我们称 Rezk 完备化**提升**

¯从范畴到配备该结构的范畴，若左双伴随 RC 存在，且以下图表可交换：



本节将介绍一种构造此类提升的框架和策略，我们将在第4节中用它将 Rezk 完备化从范畴提升到初等托普斯。该方法建立在展示双范畴理论 [1] 之上。第3.1节讨论如何通过展示双范畴来表示范畴上的结构。此外，我们在第3.2节引入展示泛箭头，从而能够将 Rezk 完备化从范畴提升到结构化范畴。在第3.3节中，我们注意到，将其提升到例如初等托普斯时，通常至少可以通过两种方式简化，由此得到命题 24。

3.1 展示双范畴与结构化范畴

在本文余下部分，我们将大量使用展示双范畴，首先回顾这一概念。展示双范畴有多种用途，其中之一是，我们可以用它们模块化地构造双范畴，并模块化地证明其单值性 [1, 3]。为了理解展示双范畴是什么，我们先回顾一个展示范畴的例子。我们可以通过为 Set 的对象和态射赋予额外的结构和性质，构造由幺半群及其同态组成的范畴 Mon。具体而言，对于每个集合，都有一个表示其上幺半群结构的类型；对于具有幺半群结构的集合之间的每个函数，都有一个类型，用来表达该函数是同态。还必须证明恒等函数是同态，并且同态在复合下封闭。展示范畴将此类范畴描述推广开来。具体而言，对于范畴 $\mathcal{D}$ 在范畴 $\mathcal{C}$ 上的展示范畴，对每个对象 $x:\mathcal{C}$，都有一个类型 $\mathcal{D}(x)$，其中包含其上的展示对象；对于每个态射 $f\colon x \to y$，以及展示对象 $\bar{x}\colon \mathcal{D}(x)$ 和 $\bar{y}:\mathcal{D}(y)$，都有一个展示态射的集合 $\bar{x} \to_f \bar{y}$。展示双范畴将展示范畴推广到双范畴情形（另见注 14）。

▶**定义 13** ( )。 设 B 为一个双范畴。一个在 B 上的<*styl e id='8'*>展示双范畴 （具有可缩的 2-胞腔）D 由以下部分组成：
1. 对于每个 x*: B*，都有一个类型 $D(x)$；其项称为展示对象；*2.* 对于每个 $f : B(x, y)$、 $x : D(x)$ 和 $y : D(y)$，都有一个类型 $x \to_f \bar{y}$；其项称为展示态射；*3.* 对于每个 $x : B$ 和 $x : D(x)$，都有一个类型为 $_x \to_{\mathsf{id}_x} x$ 的展示态射；*4.* 对于每个 $f : _x \to_f \underline{y}$ 以及 $g : y \to_g z$，都有一个类型为 $_x \to_{f\cdot g} z$ 的展示态射。

▶ 注 14。与 [1]相比，定义 13 中给出的展示双范畴定义是一个简化版本。之所以进行这种简化，是因为对于我们所考虑的展示双范畴（例如初等托普斯），无需对自然变换要求相容性条件。也就是说，初等托普斯的双范畴中的 2-胞腔就是自然变换。

从现在起，我们默认展示双范畴具有可缩的 2-胞。特别是，无须验证双范畴定律，因为这些定律是用 2-胞的相等来表述的。例如，复合的结合律在可逆 2-胞意义下成立，这直接由范畴中的相应结论推出。

▶**定义 15** ( )。 展示双范畴 D 的总双范畴 记为 $\int D$，它是这样一个双范畴：其对象是（依赖）有序对(x, x)，其中 $x : B$，且 $x : D(x)$。其态射是有序对(f, f)，其中 $: B(x, y)$，且：$x \to_f y$。其2-胞是 B 中的2-胞。

▶**定义 16** ( )。 设$\mathcal{D}$ 是 B 上的一个展示双范畴。我们有一个（严格）拟函子$U :\ \int D \to B$，称为遗忘拟函子。

▶ **例 17 (** 初等托普斯的展示双范畴)。 初等托普斯是具有许多结构的范畴，例如有限极限、指数对象和子对象分类器（这些结构的定义见第4节）。我们分几个步骤，将初等托普斯与逻辑函子构成的双范畴构造为 Cat 上的一个展示双范畴。首先，我们定义有限极限的展示双范畴，其中展示对象为范畴赋予选定的有限极限，而展示态射表示函子保持这些极限。接着，有限完备范畴构成的双范畴 FinLim 就是该展示双范畴的总双范畴。其次，我们以类似方式定义子对象分类器和指数对象的展示双范畴 FinLim_Ω（分别为 CCC），其基双范畴为 FinLim。然后，双范畴 ElTop 构造为 FinLim_Ω 和 CCC 在 FinLim 上的积（[1, 定义 6.6]）的总双范畴。

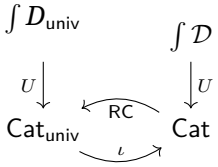
▶ 注释 18（ $\sum$ 构造）。下文介绍的框架旨在处理 Cat 上的展示双范畴。然而，其中构造的初等托普斯的展示双范畴（例 17）是一个位于 $\int_{\mathsf{Cat}}\mathcal{D}$ 上的展示双范畴。尽管如此，如果 $\mathcal{E}$ 是位于 $\int_{\mathsf{Cat}} \mathcal{D}$ 上的展示双范畴，则总双范畴 $\int\int_{\mathsf{Cat}\mathcal{D}} \mathcal{E}$ 等价于一个$\int_{\mathsf{Cat}}\sum_{\mathcal{D}} \mathcal{E}$，它通过对展示双范畴应用 $\sum$ 构造（[1,定义 6.6]）而展示在 Cat 上。因此，我们所说的初等托普斯的展示双范畴，是指位于 Cat 上的那个展示双范畴。

▶ **例 19** （单值初等拓扑斯的展示双范畴与展示双范畴的限制）。 单值拓扑斯是指其底层范畴为单值的拓扑斯。因此，单值拓扑斯的双范畴 $\mathsf{ElTop}_{\mathsf{univ}}$ 可以构造成 ElTop（例 17）的一个全子双范畴。于是，构造 $\mathsf{ElTop}_{\mathsf{univ}}$ 的一种方式，就是将定义 ElTop 的展示双范畴限制到 $\mathsf{Cat}_{\mathsf{univ}}$。更一般地，如果$\mathcal{D}$ 是 Cat 上的展示双范畴，我们可以将 $\mathcal{D}$ 限制为一个位于 $\mathsf{Cat}_{\mathsf{univ}}$ 上的展示双范畴$\mathcal{D}_{\mathsf{univ}}$，其中展示对象和态射就是$\mathcal{D}$中的那些；参见 。

下文中，我们有时会使用以下术语。设$\mathcal{D}$ 是一个展示双范畴。那么，我们称范畴$\mathcal{C}$ 上的$\mathcal{D}$-结构是$\mathcal{C}$上的一个$\mathcal{D}$-展示对象。

3.2 展示双伴随

此前，我们讨论过，结构化范畴是 Cat 上展示双范畴$\mathcal{D}$ 中的对象。此外，可以将$\mathcal{D}$ 限制为 $\mathsf{Cat}_{\mathsf{univ}}$ 上的展示双范畴$\mathcal{D}_{\mathsf{univ}}$。也就是说，$\int \mathcal{D}_{\mathsf{univ}}$ 是$\mathcal{D}$ $\int$的全子双范畴，其对象是带有$\mathcal{D}$-结构的单值范畴。因此，我们得到如下双范畴图表。



现在，我们将把提升双伴随 RC $\dashv \iota$ 的问题约化到展示双范畴层面。首先，我们回顾定义20中的展示伪函子 [1] 概念。

10 初等托普斯的 Rezk 完备化

其次，我们定义（左）展示泛箭头定义 22，并在第3.3节中将其专门应用于 RC $\dashv \iota$ 。

注意，我们有一个拟函子 $\bar{\iota}$ 从 $\int \mathcal{D}_{\mathsf{univ}}$ 到 $\int \mathcal{D}$，它由恒等给出。事实上，$\mathcal{D}_{\mathsf{univ}}$ 是将 $\mathcal{D}$ 限制在一个全子双范畴上得到的，而 ι 是一个拟函子。更一般地，我们有这样的结论：总双范畴之间的拟函子$\mathcal{F}$ 通常可以由基双范畴之间的拟函子$\mathcal{G}$ 以及覆盖$\mathcal{G}$的展示伪函子 构造得到：

▶ **定义20** ( )。 设 $F: B_1 \to B_2$ 是一个拟函子，D_i 是覆盖 B_i的一个展示双范畴，其中 $i = 1, 2$。一个覆盖 F 的展示伪函子 F 由以下数据组成：
1. 对于每个 $x : B_1$，一个函数 $F_0 : D_1(x) \to D_2(F\,x)$；*2.* 对于每个 $f : B_1(x, y)$ 以及 $x : D_1(x)$ $y : D_1(y)$，一个函数 $F_1 : (x \to_f y) \to (F_0\,x \to_{F\,f} F_0\,y)$；

赋值$(x, x) \to (F\,x, F\,x)$ 归并为一个拟函子 $\int_F F : \int D_1 \to \int D_2$，称为总伪函子。

有关展示伪函子的完整定义（即不要求 2-胞腔可缩），请参见[1]或。

▶ **例21** （从 $\mathcal{D}_{\mathsf{univ}}$ 到 $\mathcal{D}$的展示伪函子）。 包含伪函子 $\bar{\iota}$ 从$\int \mathcal{D}_{\mathsf{univ}}$ 到 $\int \mathcal{D}$ 是一个关于 ι的总伪函子，其中记作ι的展示伪函子在展示对象和态射上的作用都是平凡的。

在第4节中，我们为具体的$\mathcal{D}$构造一个左双伴随 $\bar{\iota}$ 。类似于总双范畴之间拟函子的构造，双伴随可以分两步构造。也就是说，我们首先构造基双范畴之间的双伴随，然后在展示双范畴的层面进行构造。用于表述展示层面构造的要素被归入定义22「**展示泛箭头**」的定义中。

关于（1-）范畴之间的展示伴随等价的定义，请参阅形式化（关于展示双范畴之间的此类等价，也请参见 [3], 第8-9 页 [1] ）。当底层双伴随由 RC 给出，并且考虑具有可缩 2-胞的展示双范畴时，成为展示伴随等价的条件会变得特别简单（参见第3.3节）。因此，我们不再回顾这一概念。

▶ **定义 22** ( )。 设 R 是从 B_1 到 B_2 的拟函子，并具有左双伴随 (L, η)。设 $\hat{R}$ 是从 D_1 到 D_2，、位于 R 之上的展示伪函子。对于 $\hat{R}$ （位于 (R, L, η) 之上）的一个（左）展示泛箭头由以下内容组成：

1. $\hat{L} : \prod_{x:\, B_2} \mathcal{D}_2(x) \to \mathcal{D}_1(L\,x)$，记作 $\hat{L}(x) =: \hat{L}(x,\ x)$；
2. 一族 $\hat{\eta}_x : _\ x \to_{\eta\,x} \hat{R}(\hat{L}(x))$ 对所有 (x, x) 属于 $\int \mathcal{D}_2$；

并且使得展示同态范畴之间的展示函子

$$\hat{\eta}_{\overline{x}} \cdot \hat{R}(-) : \mathcal{D}_1(\hat{L}\,\overline{x}, \overline{y}) \to \mathcal{D}_2(\overline{x}, \hat{R}\,\overline{y}),$$

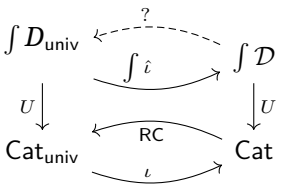
是一个展示伴随等价，其展示基底为伴随等价 $\eta_x \cdot R(-)$，由 (R, L, η) 给出。

▶ 命题 *23* ( )。设 $(\hat{R}, \hat{L}, \hat{\eta})$ 是 (R, L, η) 的一个展示泛箭头。那么，总伪函子 $\int_R \hat{R} : \int B_1\ D^1 \to \int B_2\, D_2$, 有一个左双伴随，由 $(x, x) \mapsto (L\,x, \hat{L}\,x)$ 给出，其单位由 $(\eta_x, \hat{\eta}_x)$ 给出。

3.3 Rezk 完备化上的展示泛箭头

在第3.2节中，我们定义了展示泛箭头的概念；特别是，这一概念为双伴随的模块化构造提供了恰当的表述。由于双范畴的定义方式，通常可以进行简化；例如，在拓扑斯的情形中，与 2-胞腔相关的结构变得无关紧要。此外，RC 完全由弱等价刻画，因此还可以进一步简化。本节中，我们针对这些考量对展示泛箭头的概念作出具体化。特别地，我们得出结论：要将 Rezk 完备化提升到 ElTop 这样的双范畴时，展示泛箭头会变得格外简单（命题 24）。

回顾一下，范畴上的结构由 Cat 上的展示双范畴 $\mathcal{D}$ 表示，其中展示对象体现该结构，展示态射体现对该结构的保持。于是，这类结构化范畴所成的双范畴就是总双范畴 $\int_{\mathsf{Cat}}\mathcal{D}$。此外，单值结构化范畴所成的全子双范畴为$\int_{\mathsf{Cat}_{\mathsf{univ}}}\mathcal{D}_{\mathsf{univ}}$。此外，我们有以下图表：



因此，带 $\mathcal{D}$ 结构的范畴的 Rezk 完备化构造，对应于包含 $\bar{\iota} = \int \hat{\iota}$ 的左双伴随构造。若这样的左双伴随存在，我们就说（范畴的）Rezk 完备化可以提升到带结构的范畴。

根据命题 23，构造这样的左双伴随等价于为 RC 构造一个展示泛箭头。也就是说，对于每个 $\mathcal{C} \in \mathsf{Cat}$，以及其上的每个展示对象 $x : \mathcal{D}(\mathcal{C})$（即 $\mathcal{C}$ 具有给定的 $\mathcal{D}$-结构），我们都必须在 $\mathsf{RC}(\mathcal{C})$ 上构造一个 $\mathcal{D}$-结构，并证明 $\eta_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathsf{RC}(\mathcal{C})$ 保持 $\mathcal{D}$-结构。第 4 节将说明如何在具体情形中进行这些构造。此外，我们还必须证明展示预合成函子 $\hat{}\eta_x \cdot \hat{}R(-)$（见定义 22）确实是一个展示伴随等价。在 ElTop 这样的双范畴中，这个等价条件可归结为以下陈述：如果一个保结构函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ 映入一个单值范畴，并且可经由 $\eta_{\mathcal{C}}$ 分解，那么函子 $\mathsf{RC}(\mathcal{C}) \to \mathcal{E}$ 也保结构。更一般地：

▶**命题 24** ( )。 设 D 是 Cat 上的一个展示双范畴，并且对于每个余域为单值的范畴的弱等价 $G : C_0 \to C_1$, , 都有：

1. 对于 $x : D(C_0)$，存在一个 $\hat{}x : D(C_1)$ 以及一个 $\hat{}G : x \to_G \hat{}x$；*2.* 对于每个单值范畴 C_2, , 函子 $F : C_0 \to C_2$ 和 $H : C_1 \to C_2$, , 以及自然同构 $\alpha : G \cdot H \Rightarrow F$，若 $x_i : D(C_i)$ 且 $\hat{}F : x_0 \to_F x_2$，则存在一个 $\hat{}H : x_1 \to_H x_2$。那么拟函子 $RC : Cat \to Cat_{\mathsf{univ}}$ 可提升为左双伴随，作用于 $\int D_{\mathsf{univ}} \to \int \mathcal{D}$.

4 例子

本节中，我们将 Rezk 完备化从范畴提升到各种范畴结构，从而得到 (W-)托扑斯的 Rezk 完备化。为构造这一提升，我们使用命题 24。

首先，我们在第 4.1 节考察具有有限极限的范畴。命题 34 总结了相应的提升。对偶地，推论 36 总结了有限余极限的提升。此外，我们在引理 37 中讨论无限极限的提升。

12 初等托普斯的 Rezk 完备化

随后，我们考察初等托普斯。具体而言，我们将 Rezk 完备化提升到笛卡尔闭范畴以及具有子对象分类器的范畴中。相应的提升分别由命题 41 和定理 47 总结。此外，在第 4.4 节中，我们考察范畴具有参数化自然数对象的情形；结合前述结果，这为 W-拓扑斯提供了 Rezk 完备化。

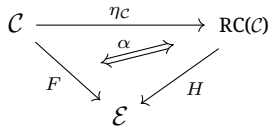
4.1 有限完备范畴

现在，我们将 Rezk 完备化从范畴提升到有限（余）完备范畴。众所周知，有限极限的存在性可由有限积和等化子的存在性推出。因此，只需提升 Rezk 完备化，使其适用于这些极限。我们将讨论二元积的提升；关于终对象和等化子的提升，请读者参阅形式化内容。

▶**定义 25** ( ).**/style}令 D为展示双范畴 Cat，其在 C 上的展示对象见证 C 配备了二元积，而在函子:**$C \to D$ 上的展示态射见证 F 在同构意义下保二元积。总双范畴记为 $\mathsf{Cat}^{\times}$，它是由配备二元积的范畴及保积函子构成的双范畴。

因此，本小节的目标是将 $\mathsf{RC} : \mathsf{Cat} \to \mathsf{Cat}_{\mathsf{univ}}$ 提升为 ${\mathsf{Cat}^{\times}}_{\mathsf{univ}} \hookrightarrow \mathsf{Cat}^{\times}$之间的左双伴随。根据命题 24，只需证明:

▶**定理 26.** 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有二元积的范畴。那么
1. $\mathcal{C}$ 的 *Rezk* 完备化 $\mathsf{RC}(\mathcal{C})$ 具有 $\mathcal{C}$ 所具有的二元积；2. 弱等价 $\eta_{\mathcal{C}}$: $\mathcal{C} \to \mathsf{RC}(\mathcal{C})$ 保二元积。
此外，设 $\mathcal{E}$ 是一个具有二元积的单值范畴，且 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ 是一个保二元积至同构的函子。假设 F 如以下图表所示，经由 $\eta_{\mathcal{C}}$ 分解。



(1)

那么 H 保二元积。

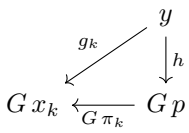
定理 26 的证明分为两步。首先，我们在命题 29 中证明，条目 1 可由“弱等价保二元积”这一陈述推出（命题 27），而这正是条目 2。也就是说，积的像仍是积。其次，我们在引理 31 中证明，最后一个陈述可由“弱等价反映二元积”这一陈述推出。

我们用“积”指二元积。

积的构造 现在我们证明，若$\mathcal{C}$ 是一个具有积的范畴，则 $\mathsf{RC}(\mathcal{C})$ 也具有积，且这些积由 $\eta_{\mathcal{C}}$保持。首先，我们证明弱等价保持积。

▶ **命题 27** ( )。 设 $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个弱等价，且 $(x_1 \xrightarrow{\pi_1} p \xleftarrow{\pi_2} x_2)$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个积。那么 $(G\,x_1 \xleftarrow{G\,\pi_1} G\,p \xrightarrow{G\,\pi_2} G\,x_2)$ 是 $\mathcal{D}$ 中的一个积。

证明。 设 $(G\,x_1 \xrightarrow{g_1} y \xleftarrow{g_2} G\,x_2)$ 是 $\mathcal{D}$中的一个锥。我们需要构造一个态射$h : \mathcal{D}(y, G\,p)$，它满足如下性质，并且在此条件下唯一：对于 $k = 1, 2$，下图交换：



(2)

从类型论角度，我们需要证明下述类型是可缩的：

$$A := \sum h : \mathcal{D}(y, G\,p),\ h \cdot G(\pi_1) = g_1 \times h \cdot G(\pi_2) = g_2. \tag{3}$$

为了证明 A 有元素，我们利用 G 的本质满射性，得到一个 $x : \mathcal{C}$ 以及一个同构 $i : G\,x \cong y$。注意，我们可以构造 x 和 i，因为可缩性是一个命题。

我们断言， h由 $y \xrightarrow{i^{-1}} G\,x \xrightarrow{G\langle f_1, f_2\rangle} G\,p$给出，其中 $f_k := G^{-1}(i \cdot g_k)$，而 $\langle f_1, f_2\rangle$是由 p的泛性质给出的唯一态射。

由以下计算可知， h 是 A 的一个元素（）：

$$\begin{aligned}
h \cdot G(\pi_k) &= i^{-1} \cdot G(\langle f_1, f_2\rangle) \cdot G(\pi_k), && \text{by dfn. of } h,\\
&= i^{-1} \cdot G(\langle f_1, f_2\rangle \cdot \pi_k), && \text{by functoriality of } G,\\
&= i^{-1} \cdot G(f_k), && \text{by dfn. of } \langle f_1, f_2\rangle\\
&= i^{-1} \cdot G(G^{-1}(i \cdot g_k)) = g_1, && \text{by dfn. of } f_k.
\end{aligned}$$

接下来需要验证类型 A 是一个命题（）。令 $\phi_1 := (h_1, q_1)$ 和 $\phi_2 := (h_2, q_2)$ 属于 A。由于 A 是 $\mathcal{D}(y, G\,p)$ 的子类型，只需证明 $h_1 = h_2$。这等价于证明 $G^{-1}(i \cdot h_1) = G^{-1}(i \cdot h_2)$，因为 i 是同构，而且全忠实函子反映态射相等。由积的泛性质以及假设 $h_1 \cdot G(\pi_k) = h_2 \cdot G(\pi_k)$，即可得到所需结果。◀

注意到，命题 27 蕴含：若$\mathcal{C}$ 和$\mathcal{D}$ 都配备了二元积，且$\mathcal{D}$ 是单值的（即$\mathcal{D} = \mathrm{RC}(\mathcal{C})$），那么 $G(x \times_{\mathcal{C}} y) = G(x) \times_{\mathcal{D}} G(y)$ 。

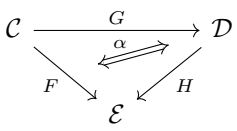
在得出结论 RC($\mathcal{C}$) 若$\mathcal{C}$ 配备了积则也配备积之前，请注意：

▶**引理 28** ( )。在单值范畴中，若积存在，则在恒等意义下唯一。

▶**命题 29** ( )。 若 $\mathcal{C}$配备了二元积，则RC($\mathcal{C}$) 也配备了二元积。

证明。设 y_1, y_2 : RC(C)。我们需要构造 y_1 和 y_2的二元积。由 RC(C) 的单值性可知，y_1 和 y_2 的积若存在，则必唯一。因此，我们可以利用 $\eta_{\mathcal{C}}$ 的本质满射性构造 x_1 和 x_2，使得 $\eta_{\mathcal{C}}(x_k) \cong y_k$。由于积在同构下封闭，只需构造 $G(x_1)$ 与 $G(x_2)$ 的积；我们已在命题 27 中构造了该积。◀

泛性 将 RC 提升到具有二元积的范畴的最后一步，是定理 26 中的“此外”条款。因此，考虑下面的范畴图表：



(4)

14 初等托普斯的 Rezk 完备化

我们需要证明，如果 G 是弱等价，并且 F 保持二元积，那么 H 保持二元积。

▶**引理 30** ( )。全忠实函子反映积。

▶**引理 31** ( )。假设 G 是弱等价，且 F 保留二元积。那么 H 保留二元积。

证明。 我们需要证明：如果 $(y_1 \xrightarrow{\pi_1} p_y \xleftarrow{\pi_2} y_2)$ 是 $\mathcal{D}$ 中的积锥，那么 $(H\,y_1 \xrightarrow{H\,\pi_1} H\,p_y \xleftarrow{H(\pi_2)} H\,y_2)$ 是 $\mathcal{E}$ 中的积。

由于 G 是本质满的，存在对象 $x_1, x_2, p_x : \mathcal{C}$，使得 $G\,x_1 \cong y_1, G\,x_2 \cong y_2$和 $G\,p_x \cong p_y$。注意，我们可以构造出这样的对象和同构，因为「是积」是一个命题。现在，由于 α 是自然同构，我们有同构$H(y_k) \cong F(x_k)$，其中 $k = 1, 2$，且 $H(p_y) \cong F(p_x)$。

根据引理 30， p_x 是 x_1 和 x_2的积。接着，根据对 F的假设， $F(p_x)$是 $F(x_1)$和 $F(x_2)$的积。由于积在同构下封闭，且下图交换，结论由此得出：

$$\begin{array}{ccccc} F(x_1) & \xrightarrow{F(\pi_1)} & F(p_x) & \xleftarrow{F(\pi_2)} & F(x_2) \\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\ H(y_1) & \xrightarrow[H(\pi_1)]{} & H(p_y) & \xleftarrow[H(\pi_2)]{} & H(y_2) \end{array}$$

◀

因此，引理 31 表明，$\mathsf{RC} : \mathsf{Cat} \to \mathsf{Cat}_{\mathsf{univ}}$ 对态射（函子）的作用保持积的保持性。定理 26 的证明至此完成。

提升的双伴随 现在我们得出结论：范畴的 Rezk 完备化可以提升到带有二元积的范畴。此外，对于更一般的有限极限，我们也得到相同的结果；更准确地说，是终对象和等化子。在形式化中，我们还考虑了拉回，因为这用于提升子对象分类器。

▶ **命题 32** ( )。 包含$(\mathsf{Cat}^{\times})_{\mathsf{univ}} \to \mathsf{Cat}^{\times}$ 具有左双伴随。

证明。 该结果由命题 24 得出，其假设已在引理 31 和命题 29 中得到证明。 ◀

▶**定义 33** ( )。 设$\mathcal{D}^{\mathsf{lim}}$ 是 $\mathcal{D}^{\times}$ 与展示双范畴 $\mathcal{D}^{1}$ 和 $\mathcal{D}^{\mathsf{eq}}$ 的积。其中，在范畴 $\mathcal{C}$ 上方的展示对象分别表明 $\mathcal{C}$ 配备了一个终对象和等化子；在函子上方的展示态射分别表明该函子保终对象和等化子。$\mathcal{D}^{\mathsf{lim}}$ 的总双范畴记作FinLim，它是有限完备范畴及保有限极限函子构成的双范畴。

▶ **命题 34** ( )。 包含$\mathsf{FinLim}_{\mathsf{univ}} \to \mathsf{FinLim}$ 有一个左双伴随。

余极限 此前，我们已经构造了有限完备范畴的 Rezk 完备化。极限与余极限之间的对偶性意味着，有限余完备范畴也有相同的结果，这可由以下引理推出：

▶ **引理35** ( )。 设 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个函子。那么， F 是弱等价，当且仅当$F^{\mathsf{op}} : \mathcal{C}^{\mathsf{op}} \to \mathcal{D}^{\mathsf{op}}$ 是弱等价。

我们仿照有限完备范畴的双范畴，定义有限余完备范畴的双范畴 FinColim。也就是说，它是二元余积和余等化子的展示双范畴的积：

▶ **推论 36** ( )。 包含 $\mathsf{FinColim}_{\mathsf{univ}} \to \mathsf{FinColim}$ 有一个左双伴随。

无限极限 Rezk 完备化提升到有限完备范畴，但对于无穷极限，同样的结果未必成立。

回想一下，(n,m)-选择公理表示命题 [21, Exer. 7.8.]

$$\prod_{X:\mathsf{Set}} \prod_{Y:X\to\mathcal{U}_n} \left(\prod_{x:X} \|Y(x)\|_m\right) \to \|\prod_{x:X} Y(x)\|_m,$$

其中 $-1 \leq n,m \leq \infty$ 和 $\mathcal{U}_n$ 表示 n-类型的类型。

▶ **引理 37**。 假设 $(\infty,-1)$-选择公理成立。设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴，配备了以集合范畴 $\mathcal{A}$ 为指标的极限。那么 $\mathsf{RC}(\mathcal{C})$ 具有所有以 $\mathcal{A}$ 为指标的极限。

证明。 设 $\mathcal{J}:\mathcal{A}\to\mathsf{RC}(\mathcal{C})$ 是一个图表。我们希望得出结论：$\mathcal{J}$ 具有一个极限。令 $X:\equiv \mathsf{ob}(\mathcal{A})$，并令 $Y:\mathcal{A}\to\mathcal{U}_\infty : a \mapsto \sum_{x:\mathcal{C}} \mathcal{J}(a) \cong \eta_{\mathcal{C}}(x)$。注意，$\mathcal{J}(a) \cong \eta_{\mathcal{C}}(x)$ 是一个集合，但 $\mathsf{ob}(\mathcal{C})$ 的同伦层级确实可能是无限的。

由选择，我们有一个函数：

$$\left(\prod_{a:\mathcal{A}} \|\sum_{x:\mathcal{C}} \mathcal{J}(a) \cong \eta_{\mathcal{C}}(x)\|\right) \to \|\prod_{a:\mathcal{A}} \sum_{x:\mathcal{C}} \mathcal{J}(a) \cong \eta_{\mathcal{C}}(x)\|,$$

由于 $\eta_{\mathcal{C}}$ 是本质满的，其定义域是有元素的。因此，我们只需构造

$$\|\prod_{a:\mathcal{A}} \sum_{x:\mathcal{C}} \mathcal{J}(a) \cong \eta_{\mathcal{C}}(x)\| \to \lim(\mathcal{J}),$$

其中 $\lim(\mathcal{J})$ 是 $\mathcal{J}$ 的极限类型。由于根据 $\mathsf{RC}(\mathcal{C})$ 的单值性，$\lim(\mathcal{J})$ 是一个命题，我们得到

$$k' : \prod_{a:\mathcal{A}} \sum_{x:\mathcal{C}} \mathcal{J}(a) \cong \eta_{\mathcal{C}}(x).$$

特别地，我们有一个图表 $\mathcal{K}:\mathcal{A}\to\mathcal{C}$，根据对$\mathcal{C}$ 的假设，它具有一个极限锥 $\lim(\mathcal{K})$。我们断言，$\eta_{\mathcal{C}}(\lim(\mathcal{K}))$ 是 $\mathcal{J}$的一个极限。

首先，$\eta_{\mathcal{C}}$ 保持极限。因此，$\eta_{\mathcal{C}}(\lim(\mathcal{K}))$ 是图表 $\mathcal{K}\cdot\eta_{\mathcal{C}}$ 的一个极限。由于极限在同构图表下封闭，若 $\mathcal{J} \cong \mathcal{K}\cdot\eta_{\mathcal{C}}$，则结论成立。这样的同构确实由 k' 给出。

注意，由于我们可以假设$\mathcal{J}$ 是离散的，因此无需验证自然性和函子性条件。◀

4.2 笛卡尔闭范畴

现在我们将 Rezk 完备化提升到笛卡尔闭范畴。为此采取的方法与提升极限时相同。具体而言，我们依赖第 4.1 节中的结果。

回顾一下，在具有二元积的范畴中，若对象 $x:\mathcal{C}$ 是**可指数化的**，则$-\times x:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ 有一个右伴随，记作 $(-)^x:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$。也就是说，对于每个$y:\mathcal{C}$，都给定一个对象 $y^x:\mathcal{C}$ 和一个态射 $\mathsf{ev}:\equiv \mathsf{ev}_{x,y}:\mathcal{C}(y^x\times x,y)$，它是

泛的，即 (y^x,ev) 是这样的终对象。对象 y^x 称为 x 关于 y 的指数对象，而 $\mathrm{ev}_{x,y}$ 称为求值态射。如果一个范畴具有所有有限积和所有指数对象，我们就称它为**笛卡尔闭的**。

此外，回想一下，保二元积函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{E}$ 在笛卡尔闭范畴之间是一个**笛卡尔闭函子**，它**保指数对象**。也就是说，对于每个 $x,y:\mathcal{C}$，从 $F(y^x)$ 到 $F(y)^{F(x)}$ 的唯一态射是一个同构。

回想定义 25，我们用 $\mathsf{Cat}^\times$ 表示具有二元积的范畴构成的双范畴。

▶**定义 38**（）。令 $\mathcal{D}^{\mathsf{exp}}$ 为 $\mathsf{Cat}^\times$-展示双范畴，其展示对象 *over*$\mathcal{C}\mathcal{C}$ 表明 $\mathcal{C}$ 是笛卡尔闭的，其展示态射表明指数对象得以保留。总双范畴记作 CCC，它是由笛卡尔闭范畴及笛卡尔闭函子构成的双范畴。

因此，要将 Rezk 完备化提升到笛卡尔闭范畴，我们将 $\mathsf{RC}:\mathsf{Cat}^\times\to\mathsf{Cat}^\times{}_{\mathsf{univ}}$ 提升为 $\mathsf{CCC}_{\mathsf{univ}}\hookrightarrow\mathsf{CCC}$ 的左双伴随。与之前类似，我们使用命题 24，并采取相同的步骤。

回顾一下，Rezk 完备化可以提升到带有二元积的范畴。特别地，对于每个 $x,y:\mathcal{C}$，存在必然唯一的同构 $\mu:=\mu_{x,y}\colon\ \eta(x)\times\eta(y)\cong\eta(x\times y)$，并且它关于 x 和 y 是自然的。

▶ **引理 39**（）。设 $\mathcal{C}$ 是一个笛卡尔闭范畴，且 $G:\mathcal{C}\to\mathcal{E}$ 是一个弱等价。则指数对象在 G 下的像仍然是指数对象。也就是说，如果 (y^x,ev) 是 x 关于 y 的一个指数对象，则 $(G(y^x)\ G(\mathsf{ev}))$ 是 $G(x)$ 关于 $G(y)$ 的一个指数对象。

▶**命题 40**（）。如果 $\mathcal{C}$ 是一个笛卡尔闭范畴，那么 $\mathsf{RC}(\mathcal{C})$ 是笛卡尔闭的。此外，$\eta_{\mathcal{C}}:\mathcal{C}\to\mathsf{RC}(\mathcal{C})$ 是一个笛卡尔闭函子。

证明。由于指数对象在同构意义下唯一，指数对象的保持等价于如下命题：正如引理 39 中所述，一个指数对象的像仍然是一个指数对象。◀

现在我们可以得出结论：Rezk 完备化可以从范畴提升到笛卡尔闭范畴。

▶ **命题 41**（）。包含 $\mathsf{CCC}_{\mathsf{univ}}\hookrightarrow\mathsf{CCC}$ 具有一个左双伴随。

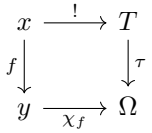
证明。同样，我们使用命题 24 来 $\mathcal{D}:=\mathcal{D}^{\mathsf{exp}}$。其中前两个条件恰好是命题 40。最后一个条件（泛性）成立，因为弱等价会反映指数对象。◀

4.3 初等托普斯

现在，我们将 Rezk 完备化提升到初等托普斯：带有等化子和子对象分类器的笛卡尔闭范畴。注意，初等托普斯必然是有限完备的。根据命题34和41，我们知道笛卡尔闭结构和等化子都已得到提升。因此，剩下的就是提升子对象分类器。

设 $\mathcal{C}$ 是一个带有终对象 T 的范畴。回顾一下，**子对象分类器** 由一个对象 $\Omega:\mathcal{C}$ 和一个单态射 $\tau:\mathcal{C}(T,\Omega)$ 组成，并且满足以下泛性质。对于每个单态射 $f:\mathcal{C}(x,y)$，都存在唯一的态射 $\chi_f:\mathcal{C}(y,\Omega)$，使得

下图交换且构成一个拉回方块：



我们将 τ 称为真值映射。

此外，回顾一下：设 $F:\mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}_1$ 是两个具有终对象（记作 T_i，其中 $i = 0,1$）和子对象分类器（Ω_i, τ_i）的范畴之间的函子。若F 保留终对象，并且满足以下两个等价条件之一，则称其保留子对象分类器：

1. $\left(F(\Omega_0)\ T_1 \xrightarrow{!} F(T_0) \xrightarrow{F(\tau_0)} F(\Omega_0)\right)$ 是$\mathcal{C}_1$中的子对象分类器；

2. 存在一个同构 $i\colon F(\Omega_0) \simeq \Omega_1$ 使得 $F(\tau_0)\cdot i = !^{-1}\cdot \tau_1$;

其中，！表示由 $F(T_0)$ 的终对象性给出的唯一态射。

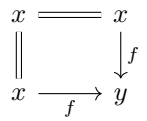
回顾定义 33，我们将具有终对象的范畴所成的双范畴记为 Cat^1 。

▶**定义 42** ( )。令$\mathcal{D}^{\Omega}$ 为 Cat^1-展示双范畴，其在具有终对象的范畴 $\mathcal{C}$ 上方的展示对象见证 $\mathcal{C}$ 配备了子对象分类器，而其展示态射见证子对象分类器的保持。其总双范畴记为 Cat^{Ω}，由具有终对象和子对象分类器的范畴构成，其态射为保持终对象和子对象分类器的函子。

回顾一下，我们将有限完备范畴所成的双范畴记为 FinLim，它的构造方式为 $\mathsf{FinLim} :\equiv \int_{\mathsf{Cat}} \mathcal{D}^{\mathsf{lim}}$。此外，注意到 $\mathcal{D}^{\mathsf{exp}}$ 和 $\mathcal{D}^{\Omega}$ 可以看作 FinLim 上的展示双范畴。

▶**定义 43** ( )。令 D^{top} 为 FinLim-展示双范畴 D^{exp} 与 D^{Ω} 的积。D^{top} 的总双范畴记为 ElTop，由初等托普斯、逻辑函子和自然变换构成。

回忆一下，态射 $f : \mathcal{C}(x,\ y)$ 是单态射，当且仅当



是一个拉回方块。

▶**引理 44** ( )。弱等价保持并反映单态射。

注意，反映单态射只需全忠实性，而不需要本质满射性。

回忆一下，如果 G 是一个弱等价，且 T_0 是一个终对象，那么 $G(T_0)$ 是终对象。引理 45 成立，因为弱等价保持拉回：

▶ **引理 45** ( )。设 $G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ 是具有终对象的范畴之间的弱等价，分别记为 $T_{\mathcal{C}}$ 和 $T_{\mathcal{E}}$。假设 $(\Omega\ \tau\colon T_{\mathcal{C}} \to \Omega)$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个子对象分类器。那么 $G(\Omega)$ 是一个子对象分类器，其真值映射为 $!\cdot G(\tau)\colon T_{\mathcal{E}} \to G(\Omega)$，其中 $!$ 是从 $T_{\mathcal{E}}$ 到 $G(T_{\mathcal{C}})$ 的唯一态射。

▶ **命题 46** ( )。 包含 $\mathsf{Cat}^{\Omega}_{\mathsf{univ}} \hookrightarrow \mathsf{Cat}^{\Omega}$ 有一个左双伴随。

因此我们得出，$\mathsf{RC} : \mathsf{FinLim} \to \mathsf{FinLim}_{\mathsf{univ}}$ 可提升为 $\mathsf{ElTop}_{\mathsf{univ}} \to \mathsf{ElTop}$ 的左双伴随。

▶**定理 47** ( )。 $(\mathsf{ElTop})_{\mathsf{univ}} \hookrightarrow \mathsf{ElTop}$ 的包含函子有一个左双伴随 RC^{top}。特别地：

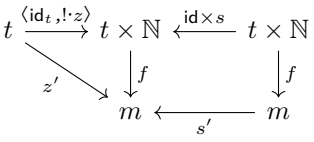
1. 初等拓扑斯 $\mathcal{E}$ 的 *Rezk* 完备化是一个初等拓扑斯 $\mathsf{RC}^{top}(\mathcal{E})$；**2.** 弱等价 $\eta_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to \mathsf{RC}^{top}(\mathcal{E})$ 是一个逻辑函子；**3.** 并且，$(\mathsf{RC}^{top}(\mathcal{E}) \ \eta_{\mathcal{E}})$ 在单值初等拓扑斯中是泛的。

4.4 W-拓扑斯

作为最后一个例子，我们将 Rezk 完备化提升到带有（参数化）自然数对象的范畴。结合命题 46，我们得出 Rezk 完备化可从范畴提升到带有自然数对象的初等拓扑斯。由于带有自然数对象的初等拓扑斯具有 W-类型 [16,命题 3.6。], 我们称这类拓扑斯为**W-拓扑斯**。

在范畴中解释或公理化自然数对象，最常见的方式导出自然数对象的定义。然而，在缺少指数对象的情况下，通过加强递归原理来作出更恰当的解释，这称为参数化自然数对象 [15]。我们采用更一般的版本。

具有有限积的范畴 $\mathcal{C}$ 中的参数化自然数对象 （pNNO）是一个元组 $(\mathbb{N}, z, s)$，其中 $\mathbb{N}$：$\mathcal{C}$ 是一个对象， $z : \mathcal{C}(T, \mathbb{N})$ 、 $s : \mathcal{C}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ 是满足以下泛性质的态射：对于每个元组 $(t : \mathcal{C} \ m : \mathcal{C} \ z' : \mathcal{C}(t, m) \ s' : \mathcal{C}(m, m))$，存在唯一的 $f : \mathcal{C}(t \times \mathbb{N}, m)$，使得以下图表交换：



回忆一下，终对象在弱等价下的像仍然是终对象。

▶ 引理 *48 ( )*。设 $G : C_0 \to C_1$ 是一个弱等价，且 C_0 和 C_1 都有有限积。假设给定了 $\mathbb{N} : C0$、$z : C_0(T_0, \mathbb{N})$ 和 $s : C_0(\mathbb{N}, \mathbb{N})$。那么，$(\mathbb{N}, z, s)$ 是一个参数化自然数对象，当且仅当 $(G(\mathbb{N}) \ G(z) \ G(s))$ 是一个参数化自然数对象。

令 $\mathsf{Cat}_{\mathbb{N}}$ 为如下双范畴：其对象是带有有限积和参数化自然数对象的范畴，其态射是保终函子 $F : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}_1$，且由参数化自然数对象的泛性质所诱导的从 $\mathbb{N}_1 \to F(\mathbb{N}_0)$ 出发的唯一态射是同构。

▶ **命题 49** ( )。 包含 $(\mathsf{Cat}_{\mathbb{N}})_{\mathsf{univ}} \hookrightarrow \mathsf{Cat}_{\mathbb{N}}$ 有一个左双伴随。

▶**推论 50** ( )。 左双伴随 RC 可提升至带有（参数化）自然数对象的初等托普斯。

5 相关工作

我们详细阐述了文献中将 Rezk 完备化扩展到带结构的范畴的不同方法。

在 [4], 中，Rezk 完备化已被推广至多个领域，尤其是族范畴（CwFs）。也就是说，他们证明了，任何指向单值范畴（即 Rezk 完备化）的弱等价，都会诱导一个映射，将定义域上的 CwFs 类型映至余域上的 CwFs 类型。此外，他们还针对每个弱等价，构造了相关范畴上可表示映射结构之间的一个等价。这些结果使他们得以构造范畴上的预层可表示映射与其 Rezk 完备化上的 CwFs 之间的一个等价。尽管我们关注的是具有可缩 2-胞的展示双范畴，CwFs 和可表示映射却需要命题性 2-胞。不过，命题 24 可以略作推广，使其具有命题性 2-胞。特别是，我们预期我们的方法也适用于这些结构。

在 [28], 中，已有证明表明，单值群胚的双范畴到所有群胚的双范畴的包含具有一个左双伴随。此外，研究还表明，这个双伴随可以提升到群胚上的多种结构。不过，我们并未像 [28] 那样逐一考察每种结构，而是提出了一种高阶归纳类型签名，用以编码群胚上的结构；随后证明，由此类高阶归纳类型所定义的结构，会为带结构的单值群胚到带结构的群胚的包含诱导一个左双伴随。具体而言， [28] 考察的是代数 结构，而我们考察的是通过泛性质定义的结构。此外，我们用同态范畴之间的等价来刻画双伴随，而 [28] 则采用单位-余单位描述来刻画双伴随。

在 [31], 中，Rezk 完备化已推广到幺半范畴。具体而言，他们也证明了由 Rezk 完备化给出的双伴随可以从范畴提升到幺半范畴，不过表述方式并不完全相同。本文采用的方法有以下不同之处。首先，我们不依赖弱等价和 Rezk 完备化的泛性质，而是通过弱等价来进行提升。其次，在 [31], 中，他们依靠显示范畴来提升同态范畴之间的等价；而我们则依靠显示双范畴来表述显示双伴随和泛箭头。

除了通过抽象的 *Rezk* 完备化进行提升之外，也可以尝试通过具体实现 来构造 Rezk 完备化，方法可以是使用预层构造，也可以是使用高阶归纳类型。在 [31], 中还概述了如何通过考察预层范畴上的 Day 卷积结构，使预层构造继承幺半结构。在 [23], 中，Rezk 完备化的这两种实现都已扩展到富集范畴的情形。不过，与幺半情形不同的是，这里做了一些修改。首先，必须调整全忠实性（以及由此而来的弱等价）的概念，以将富集结构考虑在内。尽管如此， [23] 表明，这类弱等价会在富集函子范畴上诱导等价，这与（非富集）弱等价的情形类似。其次，与幺半 Rezk 完备化不同， [23] 考察的是富集预层，而非集合值预层。请注意，尽管富集预层构造先验上并不对应于普通预层构造，但富集 Rezk 完备化的 HIT 构造表明，富集 Rezk 完备化的底层范畴与普通 Rezk 完备化一致。

6 结论

结论 我们提出了一种模块化方法，借助展示泛箭头（定义 22），将 Rezk 完备化从范畴提升到

20 初等托普斯的 Rezk 完备化

结构化范畴。我们通过将 Rezk 完备化从范畴提升到拓扑斯（推论 50），展示了这一方法及其模块化特性。特别是，我们注意到，Rezk 完备化的提升本质上归结为弱等价的保持与反映性质。此外，本文提出的方法不依赖于显式构造，而是基于其以弱等价表述的刻画。然而，尽管初等托普斯已表明各种结构确实可以提升，引理 37 也说明，对于某些结构，我们的逻辑基础还需要额外假设。最后，拓扑斯是范畴逻辑和语义学中的重要概念，因为它们能够诠释各种类型构造子和逻辑构造。因此，我们的结果意味着 Rezk 完备化保持这些运算，这也意味着 Rezk 完备化可用于构造单价模型。

未来方向 这项工作有多种拓展方式。首先，[1], 证明了，（1-）范畴的 Rezk 完备化的预层构造在推广到（局部单值的）双范畴时，也会导出类似的结果。因此，本文所述结果如何范畴化到高阶范畴和拓扑斯，便成为一个值得探讨的问题（例如参见[19, 30]）。

其次，我们的结果表明，tripos 到 topos 构造（例 9）可以扩展为*tripos*到单价拓扑斯构造。因此，这可用于构造可实现性拓扑斯。然而，所得拓扑斯是否满足 [8, 定理 4.6]的假设，仍有待考察。

第三，可以考虑更多范畴结构。其中一个例子是局部笛卡尔闭性，它用于解释 Π-类型。我们预计，这可以由上文关于笛卡尔闭范畴的结果，以及切片范畴在弱等价下表现良好的事实推出。此外，本文介绍的方法也适用于其他范畴结构。例如，阿贝尔范畴可以通过（有限）泛构造以无富集的方式刻画，其保持性质应可由上述结果推出。

参考文献

1 Benedikt Ahrens、Dan Frumin、Marco Maggesi、Niccolò Veltri 和 Niels van der Weide。单值基础中的双范畴。《计算机科学中的数学结构》，31(10):1232–1269，2021年 doi:10.1017/S0960129522000032。2 Benedikt Ahrens、Krzysztof Kapulkin 和 Michael Shulman。单值范畴与 Rezk 完备化。《计算机科学中的数学结构》，25(5):1010–1039，2015年。 doi:10.1017/S0960129514000486。3 Benedikt Ahrens 和 Peter LeFanu Lumsdaine。显示范畴。《计算机科学中的逻辑方法》，第15卷，第1期，2019年3月。网址: https://lmcs.episciences.org/4308,doi:10.23638/LMCS-15(1:20)2019。4 Benedikt Ahrens、Peter LeFanu Lumsdaine 和 Vladimir Voevodsky。单值基础中类型论的范畴结构。《计算机科学中的逻辑方法》，第14卷，第3期，2018年9月。网址： https://lmcs.episciences.org/4801, doi:10.23638/LMCS-14(3:18)2018。5 Benedikt Ahrens、Paige North、Michael Shulman 和 Dimitris Tsementzis。《单值性原理》，第305卷。美国数学学会，2025年。网址: https://doi.org/10.1090/memo/1541。6 Francis Borceux。《范畴代数手册：第1卷，基础范畴论》。《数学及其应用百科全书》。剑桥大学出版社，1994年。7 Ulrik Buchholtz、Floris van Doorn 和 Egbert Rijke。同伦类型论中的高阶群。载于第33届 ACM/IEEE 计算机科学逻辑年度研讨会论文集，LICS '18，第205–214页，纽约，美国，2018年。计算机协会。 doi:10.1145/3209108.3209150。8 Jonas Frey。分区组装与可实现性拓扑斯的刻画。《纯粹与应用代数杂志》，223(5):2000–2014，2019年。网址： https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022404918302093, doi:https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2018.08.012。9 Denis Higgs。完备海廷代数值集合拓扑斯中的内射性。《加拿大数学杂志》，36(3):550–568，1984年。 doi:10.4153/CJM-1984-034-4。10 J. Martin E. Hyland。经典 λ 演算的现代面貌。《计算机科学中的数学结构》，27(5):762–781，2017年。 doi:10.1017/S0960129515000377。11 John Martin Elliott Hyland、Peter Tennant Johnstone 和 Andrew Mawdesley Pitts。Tripos 理论。《剑桥哲学学会数学会报》，88(2):205–232，1980年。doi:10.1017/S0305004100057534。12 Krzysztof Kapulkin 和 Peter LeFanu Lumsdaine。单值基础的单纯形模型（据 Voevodsky）。《欧洲数学学会杂志》，23(6):2071–2126，2021年。13 F. William Lawvere。度量空间、广义逻辑与闭范畴。《米兰数学与物理研讨班报告》，43(1):135–166，1973年12月。 doi:10.1007/BF02924844。14 Daniel R. Licata 和 Eric Finster。同伦类型论中的 Eilenberg-MacLane 空间。载于第二十三届 EACSL 计算机科学逻辑年会（CSL）与第二十九届 ACM/IEEE 计算机科学逻辑研讨会（LICS）联合会议论文集，CSL-LICS '14，纽约，美国，2014年。计算机协会。 doi:10.1145/2603088.2603153。15 Maria Emilia Maietti。作为列表算术预拓扑斯的 Joyal 算术宇宙。《范畴理论及其应用》，24，2010年1月。 doi:10.70930/tac/qee78enb。16 Ieke Moerdijk 和 Erik Palmgren。范畴中的良基树。《纯粹与应用逻辑年刊》，104(1):189–218，2000年。网址： https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168007200000129, doi:https://doi.org/10.1016/S0168-0072(00)00012-9。17 Andrew Mawdesley Pitts。回顾 Tripos 理论。《计算机科学中的数学结构》，12(3):265–279，2002年。 doi:10.1017/S096012950200364X。18 Nima Rasekh、Niels van der Weide、Benedikt Ahrens 和 Paige Randall North。单值基础的洞见：一个双范畴案例研究。载于 Jörg Endrullis

以及 Sylvain Schmitz，编者，《第33届 EACSL 计算机科学逻辑年会》（CSL 2025），莱布尼茨国际信息学会议论文集（LIPIcs）第326卷，第45:1–45:18页，德国达格施图尔，2025年。Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik。URL: https://drops.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.CSL.2025.45, doi:10.4230/LIPIcs.CSL.2025.45。19 Ross Street。二维层理论。《纯粹与应用代数杂志》，23(3):251–270，1982年。 doi:https://doi.org/10.1016/0022-4049(82)90101-3。20 Rocq 开发团队。Rocq 定理证明器，2025年4月。 doi:10.5281/zenodo.15149629。21 单值基础计划。《同伦类型论：数学的单值基础》。 https://homotopytypetheory.org/book，高等研究院，2013年。22 Arnoud van der Leer、Kobe Wullaert 和 Benedikt Ahrens。Scott 表示定理与单值 Karoubi 包络。载于 Yannick Forster 和 Chantal Keller 编，《第16届交互式定理证明国际会议》（ITP 2025），冰岛雷克雅未克，2025年9月28日至10月1日，LIPIcs第352卷，第33:1–33:20页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2025年。URL: https://doi.org/10.4230/LIPIcs.ITP.2025.33, doi:10.4230/LIPICS.ITP.2025.33。23 Niels van der Weide。单值富集范畴与富集雷茨克完备化。载于 Jakob Rehof 编，《第9届计算与演绎形式结构国际会议》（FSCD 2024），2024年7月10日至13日，爱沙尼亚塔林，LIPIcs第299卷，第4:1–4:19页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2024年。URL: https://doi.org/10.4230/LIPIcs.FSCD.2024.4, doi:10.4230/LIPICS.FSCD.2024.4。24 Niels van der Weide。单子的单值形式理论。《计算机科学中的逻辑方法》，第21卷，第1期，2025年2月。URL: https://lmcs.episciences.org/13005, doi:10.46298/lmcs-21(1:16)2025。25 Niels van der Weide。单值范畴的内语言。载于《2025年 ACM/IEEE 第40届计算机科学逻辑研讨会》（LICS），第112–126页，2025年。 doi:10.1109/LICS65433.2025.00016。26 Niels van der Weide、Nima Rasekh、Benedikt Ahrens 和 Paige Randall North。单值双范畴。载于《第13届 ACM SIGPLAN 认证程序与证明国际会议论文集》（CPP 2024），第246–259页，美国纽约，2024年。计算机协会。 doi:10.1145/3636501.3636955。27 Jaap van Oosten。《可实现性》第152卷：范畴论侧面的导论。爱思唯尔科学出版社，美国加利福尼亚州圣迭戈，2008年。28 Niccolò Veltri 和 Niels van der Weide。将高阶归纳类型构造为群胚商。《计算机科学中的逻辑方法》，第17卷，第2期，2021年4月。URL:https://lmcs.episciences.org/6607, doi:10.23638/LMCS-17(2:8)2021。29 Vladimir Voevodsky、Benedikt Ahrens、Daniel Grayson 等。UniMath——经计算机验证的单值数学库。可见 http://unimath.github.io/UniMath/，2024年。doi:10.5281/zenodo.13828995。30 Mark Weber。来自2-托普斯的 Yoneda 结构。《应用范畴结构》，15(3):259–323，2007年6月。doi:10.1007/s10485-007-9079-2。31 Kobe Wullaert、Ralph Matthes 和 Benedikt Ahrens。单值幺半范畴。载于 Delia Kesner 和 Pierre-Marie Pédrot 编，《第28届证明与程序类型国际会议》（TYPES 2022），2022年6月20日至25日，法国南特大学 LS2N，LIPIcs第269卷，第15:1–15:21页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2022年。URL: https://doi.org/10.4230/LIPIcs.TYPES.2022.15, doi:10.4230/LIPICS.TYPES.2022.15。