arXiv:2601.04818v1 [nlin.CD] 8 Jan 2026

混沌重置：确定性混沌系统的一种重置策略

Julia Cantisán,[1,*] Alexandre R. Nieto,[2] 和 Jesús M. Seoane[2]

[1]非线性物理学组（FQM-280），综合科学系及物理、数学与计算高级研究中心，韦尔瓦大学，西班牙韦尔瓦 21071

[2]非线性动力学、混沌与复杂系统组，生物学与地质学、物理学与无机化学系，胡安·卡洛斯国王大学，Tulipán s/n，西班牙马德里莫斯托莱斯 28933

摘要

重新启动随机搜索过程，可以让系统在每次重置时都有机会选择更有利的路径，从而加快搜索完成。这种策略称为随机重置，在随机过程中已得到充分研究。在此，我们提出混沌重置——一种从根本上不同、专为确定性混沌系统设计的重置策略。与随机性内在于动力学之中的随机重置不同，混沌重置利用了混沌运动固有的对初始条件的极端敏感性：重置条件中不可避免的不确定性，实际上会产生确定性过程的新实现。这一拓展并非简单易行，因为有些实现可能显著加快搜索，而另一些则可能显著拖慢搜索。我们研究了混沌重置要持续发挥优势所需的条件，并得出结论：这要求存在混合相空间，其中分形区域与光滑区域共存。我们通过证明，在采用最优重置间隔时，平均搜索时间可大幅缩短40%至90%，量化了其效果。这些结果在确定性混沌与搜索优化之间建立了清晰的概念桥梁，为加速现实世界中的混沌系统开辟了新途径；在这类系统中，无法实现对初始条件的完美控制或完全了解。

* julia.cantisan@dci.uhu.es

一、引言

随机重置（SR）是一种有效的策略，可加快随机搜索过程；其基本思想是，通过反复为系统提供选择更有利路径的新机会，重新启动搜索便能加快搜索完成。SR的概念源头可追溯到20世纪70年代提出的数学模型，尤其是种群动力学领域；当时，人们考虑通过种群重置来实现害虫控制的优化 [1]。后来，重置方案被用于提升随机化算法的性能[2]。关于这些早期发展的全面历史回顾见 [3]。然而，直到2011年，随着 Evans 和 Majumdar 的重要研究 [4] ，随机重置才被正式提出并得名。他们研究中最引人注目的结果之一是，采用随机重置后，扩散粒子在无限域中找到目标所需的时间会变为有限值。此外，在特定的重置率下，这种加速效果达到最佳，此时平均搜索时间最短。

此后，随机重置（SR）从多个角度得到了广泛拓展：例如探索多个目标 [5], 多个搜索者 [6], 主动搜索者 [7], 非扩散过程 [8, 9], 或受限于某种势的搜索者 [10–12], 。近年来，随机重置也发展出了有趣的应用，例如分子动力学模拟的增强采样 [13] ，或将随机重置应用于伊辛模型 [14], 或量子力学 [15, 16]等物理问题。详细综述请参见 [17] 。

以往关于重置的研究仅关注随机系统，因为在纯确定性系统中，重置到相同（或几乎相同）的初始状态并无优势：只会再次产生相同（或几乎相同）的轨迹和搜索时间。然而，这一局限并不适用于混沌系统。混沌系统是确定性动力系统，其特点是对初始条件极为敏感：初始条件中哪怕是无限小的差异，也可能导致系统演化完全不同。在现实世界的系统中，精确的初始条件无法完美复现，甚至无法测量。此外，数值计算中也存在同样的情况，舍入误差不可避免。在混沌系统中，这些微小差异会随时间呈指数级增长，使得起初任意接近的轨迹最终显著分离。初始差异越小，分离变得

明显所需的时间就越长。然而，只要时间足够，即使初始条件发生最细微的变化，也会造成显著偏差。基于这一点，重置可以成为加速混沌搜索过程的有效策略。

在此，我们提出一种用于混沌系统重置的策略：混沌重置（CR）。在这种方法中，每次重置都会启动一条新轨迹，其初始条件相对于原始初始条件仅受到一个微小量的扰动，该扰动称为不确定性。我们研究混沌重置在何种条件下有益，并分析搜索时间如何随不确定性变化。为展示该方法的有效性，我们将其应用于一个搜索过程——具体而言，即从势中逃逸——并比较重置前后的逃逸时间。为此，我们考察亨农–海莱斯势中的一个混沌散射问题；该系统为我们的方法提供了理想的研究环境：混沌与混合相空间。

传统上，人们通过基于局域扰动的主动控制策略，来解决控制混沌过程持续时间的问题。例如，参考文献 [18]，对空间扩展系统施加专门设计的扰动，并选取演化轨迹最接近预期目标状态的轨迹。相关方法还通过施加局部加速度 [19]，来调节自驱动粒子的集体动力学；通过间歇性扰动，使系统趋向计算得到的空间控制线 [20]，，从而减少长时间瞬态；以及运用部分控制方法，将混沌轨迹限制在预设的相空间区域（即所谓的安全集）内 [21]。与这些基于控制的方法相比，我们提出的方法侵入性显著更低，也不需要对底层动力学有大量细致了解，因为它仅依赖于重新启动过程，而非持续施加经过精细调节的扰动。

本文结构如下。第二节中，我们介绍用于展示该方法的系统，即海农–海尔斯系统。第三节中，我们探讨混沌重置作为一种有效策略所适用的条件。第四节中，我们实施该方法并展示结果。随后，在第五节中，我们介绍一些衡量混沌重置有效性的指标。最后，第六节中，我们给出总结性评述，并讨论更广泛的影响。

II. 玩具模型：海农–海尔斯系统

为了检验混沌重置的有效性，我们选择了海农–海尔斯哈密顿量。尽管该系统最初是为研究恒星在星系势中的运动而提出的，但由于其在不同能量值下呈现出丰富多样的动力学行为，如今已成为非线性动力学中的典型范例 [22, 23]。随着时间推移，它也被应用于量子混沌 [24, 25], 广义相对论 [26, 27],和化学物理 [28, 29], 等领域。此外，该系统还常被用作数值技术 [30], 、混沌检测算法 [31, 32], 、混沌控制 [33, 34], 和机器学习算法 [35]的测试平台。

海依–海利斯哈密顿量表示为

$$\mathcal{H}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2 y - \frac{1}{3}y^3, \tag{1}$$

其中， x 和 y 是空间坐标， $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 是速度分量。最后三项对应于海农–海尔斯势。由于哈密顿量没有

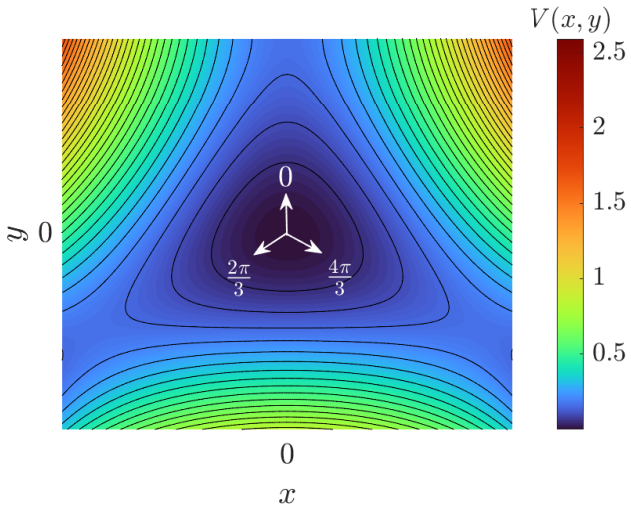

图 1. 玩具模型（海农–海尔斯系统）的势和等势曲线。当总能量低于逃逸阈值 $E_e = 1/6$ 时，等势曲线是闭合的，运动受到限制。当能量为 $E > E_e$ 时，等势曲线会开放，形成三个对称的逃逸通道，其角度分别为 $\theta = 0$, $2\pi/3$, 和 $4\pi/3$。在此状态下，轨迹可以逃逸至无穷远，该系统因此成为混沌散射的典型例子。

显式时间依赖时，能量是一个守恒量（即 $\mathcal{H}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = E$），而

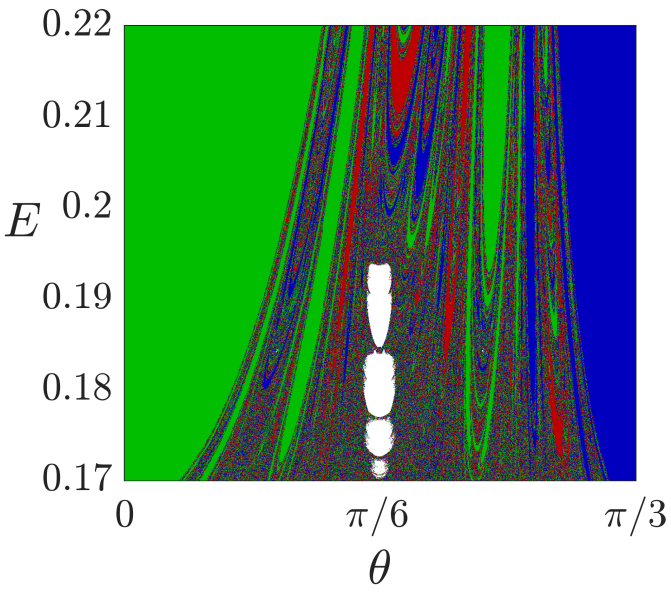

图2. 海农–海尔斯系统在（θ，E）平面上的出口盆图。对于大于 E_e 的给定能量，粒子从原点（x，y）=(0，0) 出发，初始角为 θ。颜色表示粒子根据 E 和 θ 的取值所呈现的渐近行为。绿色、蓝色和红色分别表示粒子从上方、右侧和左侧出口逃逸（见图1）。白色表示粒子处于KAM环面内，保持动力学俘获状态，永不逃逸。

运动方程可表示为

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -x - 2xy, \\ \ddot{y} &= -y - x^2 + y^2. \end{aligned} \tag{2}$$

本文所有数值模拟中，均采用固定时间步长 $h = 0.001$，使用四阶 Runge-Kutta 方法对这些方程进行积分。

我们在图1中表示了亨农–海莱斯势及若干条等势曲线。这些曲线表明，对于给定的 E，构形空间中的哪些区域是可达的，因为运动被限制在势能不超过 E的区域内。当能量值低于阈值 $E_e = 1/6$ 时，轨迹是有界的；而对于 $E > E_e$，势具有三个对称出口，使粒子能够向$\pm\infty$逃逸。在这一状态下，规则（非混沌）运动与暂态混沌运动并存。在本文中，我们关注高于 E_e的能量，此时逃逸成为可能。这使我们能够评估重置是否可以有效缩短逃逸时间。

在图2中，我们展示了能量高于 E_e时的出口盆图。每个区域的颜色（红色、绿色或蓝色）表示给定轨迹逃逸所经过的出口。白色表示粒子不会逃逸。所有轨迹均从原点（x_0, y_0） = （0，0）出发，初始角为 θ。由于能量守恒，速度固定为（$\dot{x}_0$， $\dot{y}_0$） = （$\sqrt{2E}$ sin θ， $\sqrt{2E}\cos\theta$）。如图2所示，对于所有能级 $E > E_e$，系统都呈现出混合相空间，其中，与混沌轨道相关的分形区域和对应于规则轨道的光滑区域共存。后者对应于能够快速逃逸的初始条件。例如，在 $\theta = 0$ 附近跨越较大角度范围的光滑区域，表明规则轨迹会通过上方出口快速逃逸。相反，初始条件落在分形区域内的轨迹会经历瞬态混沌，从而导致较长的逃逸时间。这是因为这些轨迹从分形盆边界（即混沌鞍的稳定流形 [22]）附近开始。除大面积光滑区域外，分形海中还嵌有其他性质相同的区域，但由于图像分辨率的限制，它们并不明显。正如我们稍后将要展示的，盆边界并未占据整个相空间这一事实，对于混沌重置的有效性起着至关重要的作用。

此外，在所考虑的能量范围内，由于存在图2中以白色显示的柯尔莫哥洛夫-阿诺德-莫泽（KAM）岛 [36], ，动力学会更加复杂。这些岛对应于被动态限制在不变环面内、因而不会逃逸的非混沌轨迹。这些岛在 $E \approx 0.195$ 处消失。

III. 方法可行性

本节将探讨在混沌系统中，重置在何种条件下可能成为缩短搜索（逃逸）时间的有效策略。我们指出了许多不同系统共有的性质，而不仅仅是当前所研究的系统。

在随机搜索过程中，找到目标所需的时间 T 是一个随机变量，通常具有重尾分布。衡量其变异程度的一个实用指标是变异系数（CV），定义为标准差与均值之比：$CV = \sigma(T)/T$。CV越小，表示相对于均值的变异程度越低；而CV越大，则表明变异程度越高。已有研究证实，只有当 $CV > 1$ [37]时，重置才能加快搜索过程。其原因在于，重置会中断漫长且低效的搜索轨迹，

并从重置点开始新的尝试，以取而代之。这种截断会减轻首次通过时间分布的重尾特征，从而降低搜索时间的变异程度。基于这一点，我们现在来考察这一问题中的该指标。

我们在发射角 θ 中引入不确定性 δ 。因此，我们计算从原点出发、具有 $\theta = \theta_0 + \delta U$ 的轨迹的逃逸时间，其中 U 是一个服从均匀分布 $\mathcal{U}(-1,\ 1)$ 的随机变量。因此，逃逸时间分布同时取决于不确定性和发射角。在不失一般性的前提下，在本文余下部分中，我们将能量固定为 $E = 0.17$，略高于 E_e。

在上一节中，我们分析了相空间结构，并发现了丰富的动力学图景，其中包括呈现瞬态混沌的分形区域、快速逃逸的光滑区域以及 KAM岛。直观而言，如果一条具有给定 θ_0 的轨迹呈现瞬态混沌，但 θ_0 周围的 δ-邻域包含一个光滑区域，那么最终的逃逸时间分布将同时包含长寿命和短寿命轨迹。这种变化可能导致 $CV > 1$，因此重置是一种很有前景的策略。重置使系统有机会进入属于光滑区域且能够快速逃逸的轨迹。这只是混沌重置有益的若干情形之一。

在图3(a)中，我们将 CV 表示为不确定性 δ的函数，针对 $\theta_0 = 0.112$ 。该角度对应一条具有暂态混沌运动的轨迹。当不确定性 δ足够小时，我们观察到 CV 仅略大于 1。这是因为不确定性太小，无法到达任何较大的光滑区域，而初始条件仍处于分形区域中，在这里，两条初始时彼此接近的轨迹会呈现截然不同的逃逸时间。因此，如果一条轨迹需要很长时间才能逃逸，重置到附近的初始条件可能有利。然而，要确定重置是否始终有益，我们必须考察给定 δ邻域内所有初始条件的平均行为。计算这一均值时，我们发现逃逸时间分布大致呈指数分布，这表明该系统在局部表现为双曲混沌系统 [38]。在此类系统中，标准差等于均值，因此得到 $CV = 1$。因此，在分形区域内进行重置，平均而言并不会带来系统性的优势。由此可见，如果系统完全混沌（即吸引域边界覆盖整个相空间），混沌重置就无效。然而，在大多数系统中，光滑区域与分形区域并存，因而偏离严格的双曲性。因此，在大多数情况下， CV略大

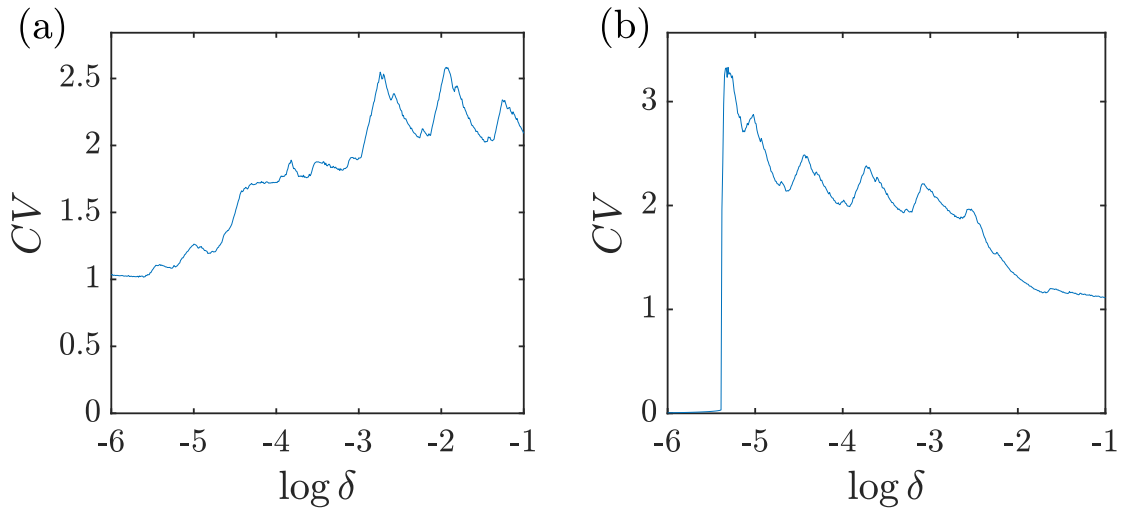

图3. 两个代表性情景下，变异系数（CV）随不确定性 δ 的以 10 为底的对数变化关系。在这两种情况下，粒子均以 $\theta = \theta_0 + \delta U$ 形式的初始角度发射，其中 U 是一个均匀分布随机变量。对于 δ 的每个取值，均根据 5×10^5 条轨迹计算 CV。面板（a）展示了以角度 θ_0 发射的粒子的典型行为，该角度对应一条混沌轨迹，即属于相空间分形区域的角度（$\theta_0 = 0.112$）。面板（b）展示了以角度 θ_0 发射的粒子的典型行为，该角度来自相空间的光滑区域（$\theta_0 = 0.294$）。在这两种情况下，当 δ 邻域与同时包含分形结构和光滑结构的相空间混合区域发生重叠时，CV 均超过 1。对于 $\delta < 10^{-5}$，会出现这种情况；这一范围与物理系统中的固有不确定性相一致，表明 CR 是缩短逃逸时间的有效策略。

大于 1。这正是当前的情况：狭窄的光滑区域嵌入在混沌海中。

当 δ增大时，平均逃逸时间会减少，而 CV 会增加，这表明已到达一个光滑区域。CV 中的连续峰值对应于相空间中的特定区域在所选 θ_0的 δ邻域内变得可达。这种行为是一条起点相对靠近光滑区域边界的轨迹所具有的特征。

另一种相关情形是，轨迹从光滑区域开始。当 δ 小于该区域的宽度时，所有轨迹的逃逸时间都相同，从而导致 $\sigma(T) = 0$。然而，随着 δ 增大，轨迹会进入分形区域，且 CV 增大。图3(b) 展示了 $\theta_0 = 0.294$ 时的这一行为。值得注意的是，这种转变发生在 $\delta < 10^{-5}$,

相对于我们系统的特征尺度而言，这个值小得惊人。这表明，这种效应并非人为诱发的现象，而是自然不确定性固有且不可避免的结果。对于更大的 δ，分形区域占据了 δ 邻域的大部分，从而形成一个受扰动的双曲区间，其中 CV 仍略高于 1。

总而言之，当不确定性延伸至相空间中同时包含平滑区域和分形区域的范围时，重置可以有效避免轨迹长时间滞留在分形区域中。这通常适用于具有混合相空间的系统。在第五节中，我们将进一步探究这种情形在我们的系统中出现得有多普遍，以及它在混沌系统中更广泛的普遍性。

最后，KAM岛的存在引出了第三种可能的情形。如果某个KAM岛落在 δ邻域内，重置便会适得其反，因为这些轨迹会被困在其中。在这种情况下， CV 就成了毫无意义的度量，因为平均逃逸时间趋于无穷大。再加上KAM岛的存在是我们所用特定模型的性质，这就是本文不再进一步探讨这种情形的原因。值得注意的是，在初始条件位于KAM岛内的特定情况下，如果 δ邻域延伸至KAM岛之外，重置则是有益的。

IV. 混沌重置

本节介绍应用混沌重置技术所得到的结果。每次重置系统时，初始条件均由 $(x_0,\ y_0,\ \dot{x_0},\ \dot{y_0}) = (0,\ 0,\ \sqrt{2E}\sin\theta,\ \sqrt{2E}\cos\theta)$ 给出，其中角度扰动为 $\theta = \theta_0 + \delta U$。根据应用该技术的具体情境，重置既可以理解为将同一个粒子重新定位到新的初始条件，也可以理解为发射一个新粒子并舍弃之前的粒子。这两种方式各有代价：第一种方式涉及不应期 [39, 40]，，而第二种方式则意味着发射一条新轨迹的成本。

在图4中，我们展示了一条截至给定时间 t_r 尚未逃逸的轨迹（浅蓝色）。因此，它在位置 $(x(t_r)\ y(t_r))$ 被舍弃，该位置在图中以红色叉号标出。随后，另一条轨迹（深蓝色）以一个受不确定性 δ 扰动的角度出发（如插图中的灰色区域所示）。这第二条轨迹在达到重置时间 t_r 之前便已逃逸。关于重置时间，文献中已经探讨了许多时间分布

[6, 41–43]。为简便起见，我们着重采用尖锐重启，即以固定时间间隔进行重置。

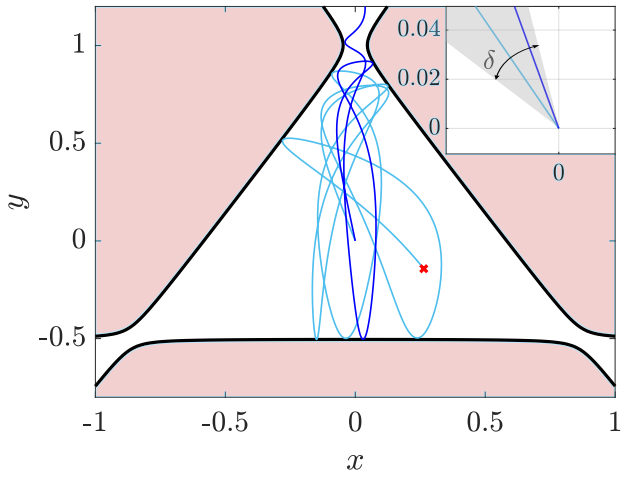

图4. 海农–海尔斯系统中的混沌重置。浅蓝色轨迹以角度 θ_0 从原点发射，并持续演化，直到在某一时刻 t_r停止，停止位置用红叉标出。随后重复该实验，从相同的初始位置发射一条新的（深蓝色）轨迹。由于物理上不可能精确复现相同的发射角，新的轨迹以略有不同的角度 $\theta = \theta_0 + \delta U$ 发射（如插图放大部分所示）。这条新轨迹很快便从上方出口逃逸。

¯我们采用混沌重置，并测量不同重置时间间隔 t_r 下的平均逃逸时间 T。结果如图 5 所示。我们展示了两种不同不确定性取值下的动力学，并将结果与无重置时的平均逃逸时间进行比较；每种情况下，无重置时的平均逃逸时间均以水平虚线表示。我们观察到随机重置的典型行为。当 t_r 较小时，平均逃逸时间发散，因为系统在最快的轨迹来得及逃逸之前就被重置了。¯当 t_r 非常大时，T 趋近于无重置时的平均逃逸时间。在这两种极端情形之间，存在一个最小值，对应于最优重置时间间隔 t_r^*。对于 $\delta = 10^{-2}$，$\bar{T}(t_r^*)$ 显示出 89% 的降幅；而对于 $\delta = 10^{-4}$，$\bar{T}(t_r^*)$ 显示出 83% 的降幅。该降幅是相对于无重置时的平均逃逸时间计算的。为了计算这一平均值，我们考虑 δ 邻域内的初始条件，因此逃逸时间取决于 δ 的值（$\delta = 10^{-2}$ 时为 $\bar{T} = 181.4$，$\delta = 10^{-4}$ 时为 $\bar{T} = 321.2$）。在这两种情况下，逃逸时间的降幅都很显著，且最小值出现在

非常接近 $T \to \infty$ 的不期望情形。鉴于这种行为，从实际角度来看，选择略大于 t_r^* 的重置时间会更加可靠。

为便于复现，我们在附录 A 中提供了伪代码，总结了本研究中使用的混沌重置策略。具体而言，图5所示结果可通过运行算法 5×10^4 次复现，其中 t_r 取从 0.5 到 300 的 600 个值。

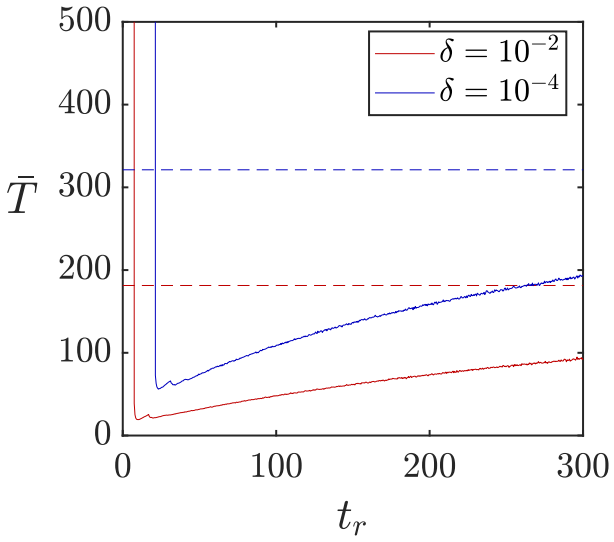

图5. 平均逃逸时间随重置间隔 t_r 变化的关系，针对两个不确定性水平：$\delta = 10^{-2}$ （红色）和 10^{-4} （蓝色）。水平虚线表示无重置时的平均逃逸时间。当平均逃逸时间低于同色虚线时，重置策略具有优势；这一条件在较宽的 t_r 取值范围内均成立。在最优重置间隔下，相较于无重置情形，平均逃逸时间的降幅超过 80%。本次模拟使用了对应于混沌轨迹的发射角（$\theta_0 = 0.112$，与图3中的取值相同），考虑了 t_r 的 600 个值，并针对 t_r的每个取值计算了 5×10^4次实现。

我们展示了特定角度下的结果；然而，在研究过程中，我们发现，对于许多不同的角度，使用 $CV > 1$ 也能得到类似的结果。

V. 重置的有效性

本节将深入探讨混沌重置的效能，并考察其如何随不确定性变化。

A. 混沌重置在什么条件下有益?

我们在第三节中部分探讨了这个问题，并证实对于具有 $CV > 1$ 的角度，混沌重置是缩短搜索时间的有效策略。对于给定角度，我们展示了 CV 如何随不确定性增加而演变。然而，现在我们提出一个互补的问题：对于给定的不确定性，有多少个角度会呈现 $CV > 1$? 图6展示了各个角度对应的 CV，其中考虑了不确定性为 (a) $\delta = 10^{-4}$ 和 (b) 10^{-2} 的情况。正如预期，靠近出口的角度（$\theta_0 = 0$ 和 $\theta_0 = 2\pi/3$），以及几乎垂直撞上势壁并立即逃逸的角度（$\theta_0 = \pi/3$），其 CV 始终为零。对于 $\delta = 10^{-4}$，其他 θ_0 值也有同样的情况，因为 δ 足够小，能使初始条件保持在嵌入分形相空间的某个光滑区域内。在两个面板中，我们都观察到 CV 值聚集在 1 附近。这反映出，在相空间完全分形化的区域内，系统在局部表现为双曲，这一点此前已有讨论。

现在，我们计算具有 $CV > 1$、 f的初始条件所占的比例，并考察不同不确定性取值下的结果。结果如图7所示。可以看出，不确定性越大，重置有益的初始条件数量就越多。随着不确定性增加，系统更有可能到达某个区域的边界；该区域包含截然不同的逃逸时间，既可能更长，也可能更短，从而提高标准偏差并增加 CV。换言之， δ邻域更有可能位于混合相空间内。图7所示结果表明，具有 $CV > 1$ 的初始条件比例随不确定性变化，遵循幂律。这种行为在任何具有混合相空间的混沌系统中都可预期。这种依赖关系并不令人意外，因为正如Grebogi等人[44]所确立的那样，不确定初始条件的比例也遵循类似的标度律，随不确定性变化。事实上，只有当一个初始条件具有不确定性时，它才会有$CV > 1$ 。

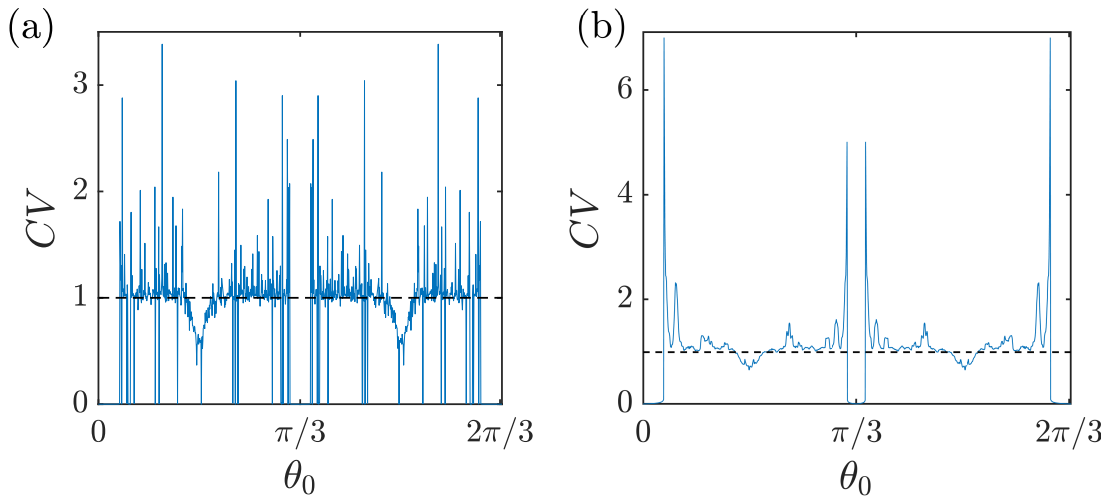

图6. 发射角 θ_0 对不确定性取值 (a) $\delta = 10^{-4}$ 和 (b)$\delta = 10^{-2}$的变异系数依赖性。对于每个角度 θ_0，实验重复 5×10^5 次，每次使用略有不同的角度 $\theta = \theta_0 + \delta U$。因此，每个角度 CV均根据这 5×10^5 次发射的逃逸时间计算得出。具有 $CV > 1$的角度所占百分比，即重置会成为有利策略的角度占比，(a) 中为 52%，(b) 中为 72%。图 (b) 中的曲线更平滑，因为每个角度的 δ邻域更大，覆盖的区域彼此更相似，逃逸时间的变异性也较小。与此同时，在图 (a) 中，某个角度的 δ邻域较窄，导致一个 δ邻域可能包含一个光滑区域，其中的轨迹逃逸很快，而相邻的 δ邻域则可能与存在长时间瞬态的区域重叠。这种变异性导致了 CV 曲线中观察到的类分形结构。在两个面板中，均计算了 1000 个不同的发射角 θ_0 。

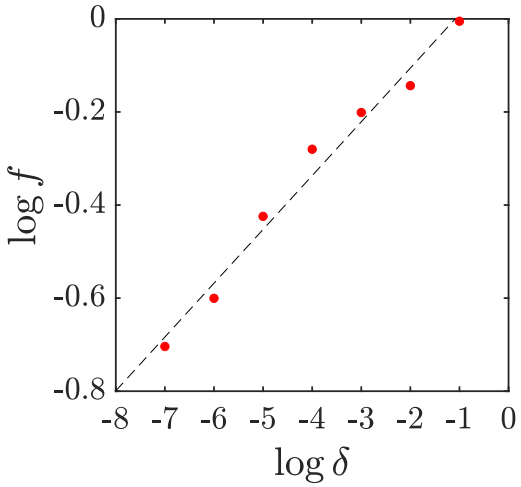

图7. 双对数图显示，随着不确定性增大，具有 $CV > 1$ 的初始条件所占比例也随之增加。直线表明这些变量之间存在$f \propto \delta^{\alpha}$形式的关系，其中 α 是一个正常数。这说明，不确定性越大，无论初始条件如何，CR 成为良好策略的概率就越高。这是因为 δ邻域包含混合相空间的可能性更大。根据这些数据，我们计算得出 $\alpha = 0.116(7)$，其线性相关系数为 $r = 0.990$。对数以10为底。

B. 最小化逃逸时间

一旦确定重置有益，接下来的问题是：它对搜索时间有何影响？为此，我们使用最优重置时间 t_r^* 来衡量平均逃逸时间的缩短幅度：$R_T(t_r^*) = (T - T_r)/T$，其中 T 是不重置时的平均逃逸时间，而 T_r 是重置时的平均逃逸时间。

我们在图8中展示了与图3相同角度下的这一缩短幅度：面板(a)中，初始条件属于分形区域；面板(b)中，初始条件属于光滑区域。值得注意的是，即使在图8(a)中，对于 CV 仅略大于1的不确定性取值，搜索时间的缩短也十分显著。这是因为，进入嵌入分形区域中的小型光滑区域就足以使重置具有优势，缩短幅度超过40%。逃逸时间的缩短在 $\delta \approx 10^{-5}$ 处达到峰值，也就是说，此时能够到达较大的光滑区域。在图8(b)中，初始条件属于光滑区域；只有当不确定性大于吸引域的宽度时，搜索时间才会缩短。无论如何，在这种情况下都没有必要重置，因为逃逸时间本来就很短。

我们得出结论，在无法或不便详细分析底层动力学的实际决策场景中，对系统行为进行初步探索，就足以评估混沌重置是否适用。具体而言，在初始条件受到一定不确定性影响、且我们观察到完成时间存在差异的实验中，估算与快速轨迹相关的特征时间尺度，可作为可靠的判断标准。如果某条给定轨迹持续时间显著超过这一快速时间尺度，却仍未完成逃逸（或搜索）过程，那么实施混沌重置预计会带来优势。

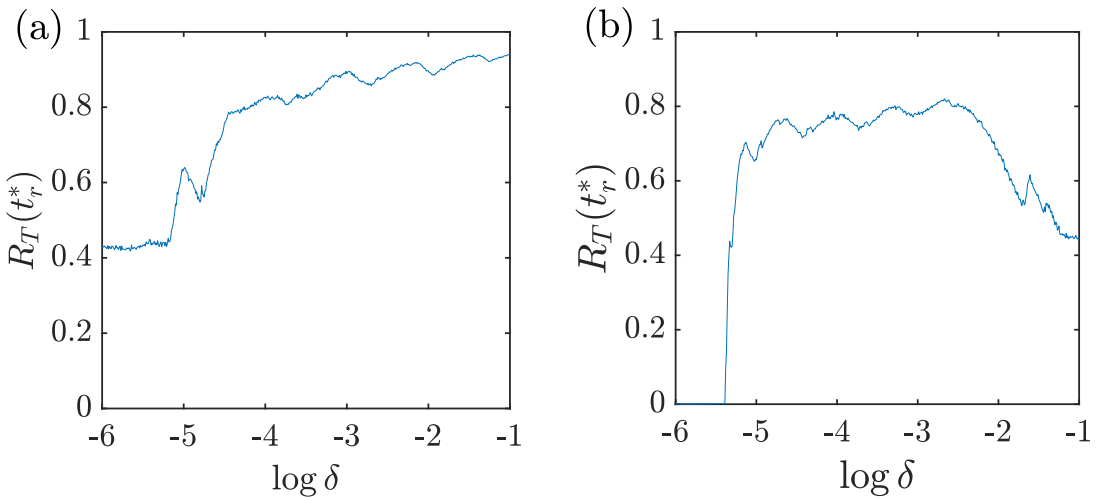

图8. 使用最优重置间隔 t_r^* 所获得的平均逃逸时间 R_T 的减少量，随不确定性的以 10 为底的对数变化。图中展示了两个具有代表性的案例：(a) 混沌轨迹和 (b) 规则轨迹。为便于直接比较，各面板中的 θ_0 值与图3中使用的值相同。除面板 (b) 中 δ 邻域较小且完全位于相空间的光滑区域内、因此所有轨迹无需重置便已能快速逃逸的情况外，各种情形下的减少量都十分显著。实际而言，这表明，如果某条轨迹所需时间长于快速逃逸轨迹的特征时间，那么混沌重置总是有益的。

VI. 结论与讨论

本研究证实，重置策略不仅能加速随机系统中的过程，也能加速确定性混沌系统中的过程。随机重置利用扩散过程中固有的随机性，而混沌重置则利用同样根本、但具有确定性的对初始条件的敏感性。这一概念上的拓展连接了此前相互独立的两个领域——随机优化与确定性混沌，并为混沌系统中的过程加速开辟了新的途径。

我们通过一个粒子从二维势中逃逸的混沌散射问题，展示了这一方法。我们发现，混沌重置要发挥作用，关键在于系统必须呈现混合相空间，其中规则区域与混沌区域并存。这样，重置便能以更快的规则轨道替代缓慢的混沌轨道。这一条件并非特定于某个系统，因此表明，混沌

重置或许适用于广泛的问题和系统，可用于缩短瞬态过程。例如，它可以缩短多阱势中的首次通过时间；缩短受迫摆、磁摆、洛伦兹系统或种群模型等动力系统中的瞬态过程；减少哈密顿映射中的回归时间；并加快反应扩散模型或活性粒子系统中的图案形成。

传统的混沌控制方法侧重于稳定不稳定周期轨道、主动控制轨迹或彻底抑制混沌。混沌重置采取了截然不同的方法：它不与混沌对抗，而是接受并利用混沌。通过系统地中断不利轨迹，并利用对初始条件敏感性所产生的自然变异性，我们可以大幅缩短完成时间（在海农–海尔斯系统中缩短 40% 至 90%），而无需详细了解系统的动力学，也不需要精确控制初始条件。因此，在此类控制能力有限的实验环境中，这种方法尤其有价值。事实上，从实验角度来看，是否应用重置可以依据一个简单实用的标准来决定：评估同一实验重复实现之间完成时间的变异程度。完成时间分散程度较大，表明 δ-邻域（受不确定性影响的相空间区域）位于混合相空间之内。在这种情况下，应对完成时间显著超过快速完成轨迹所对应的特征时间尺度的轨迹应用重置。

总而言之，混沌重置不仅是解决特定问题的技术工具，更是一种加速确定性混沌过程的概念框架，它通过策略性地利用这类过程的本质特征——对初始条件的敏感性——来实现这一目标。

CRediT 作者贡献声明

Julia Cantisán：概念构思、方法学、软件、可视化、撰写——初稿。Alexandre R. Nieto：概念构思、方法学、软件、可视化、撰写——初稿。Jesús M. Seoane：概念构思、方法学、撰写——审阅与编辑。

利益冲突声明

作者声明，他们不存在已知的、可能影响本文所报告研究工作的财务利益冲突或个人

关系　　可能被认为会影响本文所报告工作的关系　　.

致谢

本研究经费由 MCIN/AEI/10.13039/501100011033 以及“ERDF 建设欧洲之道”（资助编号：PID2023-148160NB-I00）提供。

数据可用性

支持本研究结论的数据可根据合理请求向通讯作者索取。

附录 A

在算法 1 中，我们给出了伪代码，说明如何通过混沌重置计算单个粒子的逃逸时间。本研究采用以下参数值：$h = 0.001$、$E = 0.17$ 和 $t_{max} = 10^4$。这里，逃逸条件基于粒子的位置。具体而言，当粒子的位置超出半径为 2 的圆时，我们认为粒子已经逃逸。任何半径大于 1 的圆都适用，因为势的混沌鞍点位于该圆周内。同一方案也可应用于不同问题，只需更改中断条件即可。

算法 1：通过混沌重置计算单个粒子的逃逸时间。输入： E, t_r, δ, h, θ_0, t_{max}输出： t // 过程的总逃逸时间$t_{last} = 0$; // 上次重置的时间$x = 0$; $y = 0$; $\dot{x} = \sqrt{2E}\sin\ \theta_0$; $\dot{y} = \sqrt{2E}\cos\theta_0$; // 初始条件 for ($t = 0$ to t_{max} step h) do $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ = RK4($x, y, \dot{x}, \dot{y}, h$) // 四阶龙格-库塔法数值步进 if 粒子逃逸 then break if ($t - t_{last}$) $\geq t_r$ then // 应用重置$\theta = \theta_0 + \delta\mathcal{U}(-1, 1)$; // 考虑不确定性扰动角度$x = 0$; $\overline{y = 0}$; $\dot{x} = \sqrt{2\overline{E}}\sin\ \theta$; $\dot{y} = \sqrt{2E}\cos\theta$;$t_{last} = t$; // 更新上次重置时间

[1] E. G. Kyriakidis 和 A. Abakuks, 《通过灾变实现最优害虫控制》, 《应用概率杂志》26, 873–879（1989）。

[2] M. Luby、A. Sinclair 和 D. Zuckerman, 《拉斯维加斯算法的最优加速》, 《信息处理快报》47，173–180（1993年）。

[3] A. Masó-Puigdellosas, 《从更新过程视角研究随机重置下的随机游走》, 博士论文，巴塞罗那自治大学（2023）。

[4] M. R. Evans 和 S. N. Majumdar, 《带随机重置的扩散》, 《物理评论快报》106, 160601（2011）。

[5] P. C. Bressloff, 《带随机重置和多个目标的搜索过程》, 《物理评论 E》102, 10.1103/PhysRevE.102.022115（2020年）。

[6] U. Bhat、C. D. Bacco 和 S. Redner, 《泊松重置与确定性重置下的随机搜索》, 《统计力学杂志：理论与实验》2016，10.1088/1742- 5468/2016/08/083401（2016）。

[7] V. Kumar、O. Sadekar 和 U. Basu，随机重置下二维中的主动布朗运动, 《物理评论E》102，052129（2020年）。

[8] L. Kuśmierz、S. N. Majumdar、S. Sabhapandit 和 G. Schehr，带重置的 Lévy 飞行最优搜索时间的一级相变，《物理评论快报》113，220602（2014）。[9] J. Masoliver，随机重置下的电报过程，《物理评论E》99，012121（2019）。[10] R. K. Singh、R. Metzler 和 T. Sandev，约束势中的重置动力学，Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 53，505003（2020年）。[11] J. Cantisán、J. M. Seoane 和 M. A. F. Sanjuán，Kramers问题中的随机重置：蒙特卡洛方法，Chaos, Solitons and Fractals 152，111342（2021）。[12] J. Cantisán、A. R. Nieto、J. M. Seoane 和 M. F. Sanjuán，基于能量的随机重置可以避免噪声增强稳定性，《物理评论E》109，024201（2024）。[13] O. Blumer、S. Reuveni 和 B. Hirshberg，用于增强采样的随机重置，J. Phys. Chem. Lett. 13，11230–11236（2022年）。[14] M. Magoni、S. N. Majumdar 和 G. Schehr，具有随机重置的伊辛模型，Physical Review Research 2，033182（2020年）。[15] R. Yin 和 E. Barkai，重启加快量子行走的命中时间，《物理评论快报》130，050802（2023）。[16] R. Yin、Q. Wang 和 E. Barkai，量子重启问题中的不稳定性，《物理评论E》109，064150（2024）。[17] M. R. Evans、S. N. Majumdar 和 G. Schehr，随机重置及其应用，Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 53，193001（2020年）。[18] T. Lilienkamp 和 U. Parlitz，终止空间扩展系统中的瞬态混沌，Chaos 30，051108（2020年）。[19] E. S. Medeiros 和 U. Feudel，自驱动粒子集体动力学的局部控制，《物理评论E》109，014312（2024）。[20] A. Ray、A. Pal、D. Ghosh、S. K. Dana 和 C. Hens，通过重置缓解确定性系统中的长瞬态时间，Chaos 31，011103（2021）。[21] R. Capeáns、J. Sabuco、M. A. F. Sanjuán 和 J. A. Yorke，部分控制 Lorenz方程中的瞬态混沌，Philosophical Transactions of the Royal Society A 375，2088（2017）。

[22] J. Aguirre、J. C. Vallejo 和 M. Sanjuán, 《海农–海尔斯系统中的 Wada 盆地与混沌不变集》, 《物理评论E》64，066208（2001年）。[23] R. Barrio、F. Blesa 和 S. Serrano, 《海农–海尔斯哈密顿量中的分形结构》, EPL 82，10003（2008年）。[24] C. Efthymiopoulos 和 G. Contopoulos, 《玻姆量子力学中的混沌》, 《物理学杂志A》39，1819（2006年）。[25] M. Brack、R. K. Bhaduri、J. Law 和 M. V. Murthy, 《海农–海尔斯哈密顿量中的量子拍与混沌》, 《物理评论快报》70，10.1103/PhysRevLett.70.568（1993年）。[26] K. Veselý 和 J. Podolský, 《描述引力波中测地线的修正海农–海尔斯系统中的混沌》, 《物理快报A辑：普通、原子与固体物理》271，368（2000年）。[27] E. E. Zotos、W. Chen、J. F. Navarro 和 T. Saeed, 《一种含附加奇异引力项的海农–海尔斯势的新表述》, 《国际分岔与混沌杂志》30，2050197（2020年）。[28] M. D. Feit 和 J. A. Fleck, 《海农–海尔斯系统中的波包动力学与混沌》, 《化学物理学杂志》80，2578（1983年）。[29] B. A. Waite 和 W. H. Miller, 《单分子反应动力学中的模态特异性：海农–海尔斯势能面》, 《化学物理学杂志》74，3910（1981年）。[30] R. Barrio 和 F. Blesa, 《双自由度哈密顿系统中对称周期轨道的系统搜索》, Chaos, Solitons and Fractals 41，560（2009年）。[31] M. Hillebrand、S. Zimper、A. Ngapasare、M. Katsanikas、S. Wiggins 和 C. Skokos, 《利用拉格朗日描述符量化混沌》, 《混沌》32，123122（2022年）。[32] E. E. Zotos, 《经典海农–海尔斯哈密顿系统中的轨道分类》, 《非线性动力学》79，1665（2015年）。[33] M. Coccolo、J. M. Seoane 和 M. A. Sanjuán, 《控制随机驱动的海农–海尔斯系统中的不可预测性》, 《非线性科学与数值模拟通讯》18，3449（2013年）。[34] A. R. Nieto、T. Lilienkamp、J. M. Seoane、M. A. Sanjuán 和 U. Parlitz, 《双自由度开放哈密顿系统中的逃逸控制》, 《混沌》32，063118（2022年）。[35] A. M. Escobar-Ruiz、L. Jiménez-Lara、P. M. Juárez-Flores、F. Montoya-Molina、J. Moreno-Sáenz 和 M. A. Quiroz-Juárez, 《混沌动力学方程的数据驱动重构》:

Hénon–Heiles 型系统，《混沌、孤子与分形》184，115025（2024年）。[36] E. Ott，《动力系统中的混沌》，第2版（剑桥大学出版社，2002）。[37] A. Pal 和 S. Reuveni，《重启下的首次通过》，《物理评论快报》118，030603（2017）。[38] L. G. Burton、H. R. Dullin 和 E. G. Altmann，《耗散性混沌散射的概率描述》，《物理评论E》108，054223（2023）。[39] M. R. Evans 和 S. N. Majumdar，《不应期对随机重置的影响》，Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 52，01LT01（2019）。[40] J. C. Sunil、R. A. Blythe、M. R. Evans 和 S. N. Majumdar，《随机重置的代价》，Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 56，395001（2023）。[41] A. Nagar 和 S. Gupta，《幂律时间下的随机重置扩散》，《物理评论E》93，060102（2016）。[42] I. Eliazar 和 S. Reuveni，《锐重启的平均性能 I：统计学路线图》，Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 53，405004（2020）。[43] O. Tal-Friedman、T. D. Keidar、S. Reuveni 和 Y. Roichman，《智能重置：随机搜索过程的节能策略》，Physical Review Research 7，013033（2025）。[44] C. Grebogi、S. W. McDonald、E. Ott 和 J. A. Yorke，《终态敏感性：可预测性的障碍》，《物理学快报A》99，415（1983年）。