此处将显示与文章类型相对应的横幅

arXiv:2601.04847v1 [physics.flu-dyn] 8 Jan 2026

湍流扩散-级联相互作用

E. Fuentes Noriega[1] 和 J.C. Vassilicos[1]†

[1]里尔大学、法国国家科学研究中心、法国国家航空航天研究局、法国国立高等工艺学校、里尔中央理工学院，UMR 9014，里尔流体力学实验室，里尔流体力学实验室，Kamp´e de F´eriet，F-59000 里尔，法国

（收到日期：xx；修订日期：xx；接受日期：xx）

在三种性质不同的湍流平面尾流中心线附近的衰减区内，湍流呈非均匀性，两点湍流扩散始终与湍流级联相抗衡，甚至延伸至小于泰勒长度的尺度。研究发现，在惯性区内，水平两点湍动能的空间间传递率与尺度间传递率的水平分量之和，近似正比于湍流耗散率；比例常数介于–0.6 和 –1 之间，具体取值取决于尾流及其内部位置，但衰减区近场边缘处除外。

关键词： 尾流，湍流理论

1. 引言

尺度间湍流传递和湍流级联在湍流中至关重要。对于统计平稳均匀湍流，在一段惯性长度尺度范围内，平均尺度间传递率与湍流耗散率相平衡；随着雷诺数增加，这段范围会不断拓宽。这种逐尺度平衡是柯尔莫哥洛夫理论的预测，而该理论专为统计平稳均匀湍流而构建（见 Frisch 1995）。然而，湍流通常是非均匀的，空间间湍流传递（两点湍流扩散）的平均值不一定为零。在这种情况下，它们会对平均逐尺度湍动能收支作出贡献，因此必须予以考虑。事实上，Marati 等（2004）早在二十多年前就通过充分发展湍流通道流的直接数值模拟，发现了尺度间传递与空间间传递同时发生的现象。Cimarelli 等（2013、2016、2021、2024）研究了湍流能量如何在物理空间和尺度空间中演化，并在壁面湍流和平面射流中确定了这种演化的路径。空间发展的尾流中也有研究报告了空间非均匀性和相干结构对尺度间传递率的直接影响（见 Thiesset 与 Danaila 2020）。即使在统计均匀湍流中，空间间传递率在所有长度尺度上的平均值都为零，若不考虑空间间传递率，也无法完整描述尺度间传递率的涨落。事实上，近期研究表明，空间间传递率无散部分的涨落与

† 通讯邮箱：john-christos.vassilicos@cnrs.fr

摘要不得延伸至第 2 页

尺度间湍流传递率无散部分的涨落呈负相关（Larssen & Vassilicos 2023）。在统计非均匀湍流中，平均尺度间湍流传递的各部分与平均空间间湍流传递之间，是否也存在如此明确而简单的关系？这些平均传递率如何随两点间距变化，又与湍流耗散率相比如何？是否确如通常所认为的那样，在足够小的惯性长度尺度上，局部均匀性必然会渐趋形成？

我们通过分析 Chen 等(2021) 获得的二维双分量粒子图像测速（二维二维分量粒子图像测速）数据，回答关于两根并排平行的相同方柱所形成的三种湍流尾流的问题。这三种平面湍流尾流在定性上各不相同，因此可用于检验我们结果的普适性。我们重点关注衰减尾流，即中心线附近的区域；该区域距离方形棱柱足够远，使得局部雷诺数随流向距离增加而衰减。

鉴于我们现有的二维二维分量粒子图像测速数据仅提供流向和横流方向上的湍流脉动速度 u_1' 和 u_2' 的信息，而这两个方向都位于垂直于竖直棱柱展向的水平面内，本文重点研究水平湍动能的尺度间传递。

下一节将介绍本文的理论框架。第3节将描述 Chen 等(2021) 的二维二维分量粒子图像测速数据，第4节将介绍我们对这些数据的分析，重点关注两点湍动能传递过程。第5节将总结全文，并着重指出关于非均匀情形下耗散率、级联与湍流扩散之间密切联系的一些关键未解问题。

2. 两点水平湍动能预算

我们关注水平两点湍动能的预算，其定义为 $\delta K_h \equiv \frac{1}{2}[(\delta u_1')^2+(\delta u_2')^2]$ 其中 $\delta u_i' \equiv \frac{1}{2}[u_i'(\mathrm{X}+\mathrm{r},\, t) - u_i'(\mathrm{X}-\mathrm{r},\, t)]$（$i = 1$、2、3）是脉动速度分量的半差（高通滤波）（Germano 2012）。鉴于本文所用数据具有水平二维特性，我们仅考虑水平分离矢量 $\mathrm{r} = (r_1, r_2, 0)$。我们考虑统计平稳湍流速度场，因此该预算经过时间平均，且适用于 $\delta K_h \equiv \frac{1}{2}(\delta u_1')^2 + (\delta u_2')^2$，其中上横线表示时间平均。该两点平均能量定义了单点水平能量 $K_h(\mathrm{X}) = |\frac{1}{2}\mathrm{u}_h'|^2$（其中 $\mathrm{u}_h' \equiv (u_1', u_2', 0)$）的以下逐尺度分解，适用于 $i = 1$ 和 $i = 2$:

$$\int_0^{L_{i0}} \frac{d}{dr_i}\overline{\delta K_h} dr_i = \overline{K_h(\mathbf{X}+\mathbf{R}_i)} + \overline{K_h(\mathbf{X}-\mathbf{R}_i)} \tag{2.1}$$

其中，$\mathbf{R}_1 = (L_{10}, 0, 0)$ 和 $\mathbf{R}_2 = (0, L_{20}, 0)$ 是分离向量，其对应的分离距离 L_{i0} 最小，且在这些距离处，两点相关性 $\mathbf{u}_h'(\mathbf{X}+\mathbf{R}_i)\cdot\mathbf{u}_h'(\mathbf{X}-\mathbf{R}_i)$ 为零。这些分离距离 L_{10} 和 L_{20} 可视为以$\mathbf{X}$为中心的最大“涡”的特征流向尺度和横流向尺度；$\frac{d}{dr_i}\delta K_h$ 则是各个 $i = 1,2$ 对应的单位分离距离能量密度。这些能量密度将$\mathbf{X}+\mathbf{R}_i$ 和$\mathbf{X}-\mathbf{R}_i$处的水平湍动能之和分解开来。当然，这种分解也可推广到其他任意物理量（例如完整的湍动能），但只有在有限分离距离 L_{i0} 存在时才有意义；我们已确认，本文所用的所有数据均满足这一条件。

对于 δK_h 的预算，我们还需要定义半和（低通滤波）脉动速度矢量 $\mathbf{u}_\mathbf{X}' \equiv \frac{1}{2}[\mathbf{u}'(\mathbf{X}+\mathbf{r},\, t) + \mathbf{u}'(\mathbf{X}-\mathbf{r},\, t)]$（Germano 2012），以及半差脉动压力 $\delta p' \equiv \frac{1}{2\rho}[p'(\mathbf{X}+\mathbf{r},\, t) - p'(\mathbf{X}-\mathbf{r},\, t)]$（以流体密度 ρ和

脉动压力 p'表示），以及半和与半差平均速度场$\mathbf{u_X} \equiv \frac{1}{2}[\mathbf{u(X}+\mathbf{r)}+\mathbf{u(X}-\mathbf{r},t)]$和 $\delta\overline{\mathbf{u}} \equiv \frac{1}{2}[\overline{\mathbf{u}(\mathbf{X}+\mathbf{r})}-\overline{\mathbf{u}(\mathbf{X}-\mathbf{r})}]$（以平均流场$\overline{\mathbf{u}}$表示）。在物理空间中的任意位置$\mathbf{X}$ 以及任意两点间距向量 $2\mathbf{r}$下，该预算可写为（参见 Hill 2001, 2002；Chen 和 Vassilicos 2022；Beaumard 等2024）

$$L_T - P + T_X + \Pi_h = T_p + D - \tilde{\varepsilon_1} - \tilde{\varepsilon_2}, \tag{2.2}$$

其中，线性输运率 L_T、两点湍流产生率 P、跨空间输运率 T_X、尺度间传递率 Π_h、两点压力-速度项 T_p和黏性扩散率 D 的定义如下。

$$L_T \equiv \overline{\mathbf{u_X}} \cdot \nabla_{\mathbf{X}}\overline{\delta K_h} + \delta\overline{\mathbf{u}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}\overline{\delta K_h}, \tag{2.3}$$

其中，$\nabla_{\mathbf{X}}$ 和 $\nabla_{\mathbf{r}}$ 分别是相对于$\mathbf{X}$ 和$\mathbf{r}$的梯度。该项表示平均流对两点湍动能的输运，因此称为线性输运，以区别于非线性项 T_X 和 Π_h；后两项表示脉动湍流速度对两点湍动能的输运。

$$P \equiv -\overline{\delta u_1' \mathbf{u}_{\mathbf{X}}'} \cdot \nabla_{\mathbf{X}}\delta\overline{u_1} - \overline{\delta u_2' \mathbf{u}_{\mathbf{X}}'} \cdot \nabla_{\mathbf{X}}\delta\overline{u_2} - \overline{\delta u_1' \delta\mathbf{u}'} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}\delta\overline{u_1} - \overline{\delta u_2' \delta\mathbf{u}'} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}\delta\overline{u_2}, \tag{2.4}$$

$$T_X \equiv \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \overline{\mathbf{u}_{\mathbf{X}}' \delta K_h}, \tag{2.5}$$

$$\Pi_h \equiv \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \overline{\delta\mathbf{u}' \delta K_h}, \tag{2.6}$$

$$T_p \equiv -\overline{\delta u_1' \frac{\partial}{\partial X_1}\delta p'} - \overline{\delta u_2' \frac{\partial}{\partial X_2}\delta p'}, \tag{2.7}$$

其中，X_1 和 X_2 分别是$\mathbf{X}$ 的水平流向坐标和横流向坐标，以及

$$D \equiv \frac{\nu}{2}(\nabla_{\mathbf{X}}^2 + \nabla_{\mathbf{r}}^2)\overline{\delta K_h}, \tag{2.8}$$

其中，ν 是流体的运动黏度。式（2.2）中的双点湍流耗散率 $\tilde{\varepsilon_1}$ 和$\tilde{\varepsilon_2}$定义为 $\tilde{\varepsilon_i} \equiv \frac{1}{2}(\varepsilon_i(\mathrm{X}+\mathrm{r}) + \varepsilon_i(\mathrm{X}-\mathrm{r}))$，其中 $\varepsilon_i(\mathrm{X}) \equiv \nu(\partial u_i'/\partial x_j)^2$，对任意 $i = 1$，在 $j = 1$、2、3上求和。该定义对 $i = 3$同样适用。

如果湍流是统计均匀的，则该预算可简化为

$$\Pi_h = T_p + D - \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \tag{2.9}$$

这意味着，水平两点湍动能的尺度间传递率 Π_h 由压力再分配率 T_p 在 δK_h 与 $\frac{1}{2}(\delta u_3')^2$ 之间的分配，以及 δK_h 的分子扩散率共同平衡；众所周知，在大于泰勒长度的尺度上，分子扩散率可以忽略不计 λ（见 Laizet 等，2013；Valente 与 Vassilicos，2015），此外还包括 δK_h的耗散率。在大于泰勒长度且可以忽略分子扩散的尺度上，垂直/展向双点湍动能 $\frac{1}{2}(\delta u_3')^2$ 的尺度间传递率 Π_3 在统计平稳均匀湍流中满足 $\Pi_3 \approx -T_p - \varepsilon_3$，因此整个两点湍动能的总尺度间传递率 $\Pi_h + \Pi_3$ 平衡总湍流耗散率，即 $\Pi_h + \Pi_3 \approx -\varepsilon$（其中 $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$）。这就是逐尺度柯尔莫哥洛夫平衡，是专门针对统计平稳且均匀湍流提出的预测（见柯尔莫哥洛夫 1941年；Frisch，1995年）。

如果统计平稳湍流的流动并非统计均匀，情况则有所不同；此时，方程（ L_T、P 和 T_X （2.2）左端的三个项中至少有一个不可忽略。在本文中，我们研究了三个性质迥异的湍流尾流的预算方程（2.2），这些尾流来自两个垂直于来流均匀流放置的平行方柱。这些流动在垂直于方柱的平面内是非均匀的，但在方柱的展向上均匀且对称，因此可以利用通过展向法向平面中的二维二维分量粒子图像测速获得的速度数据，对三个项 L_T、 P 和 T_X 进行完整评估。我们分析的三个尾流区域中的泰勒尺度雷诺数 Re_λ 约为 150 至 500。

在下一节中，我们将简要介绍这三种湍流尾流以及我们所采用的 Chen等人(2021) 的实验数据。这些实验于2020年在里尔流体力学实验室（LMFL）的低速闭式风洞中进行。测试段宽2 m、高1 m、长20 m，四面均为透明结构，以便最大限度地使用光学技术。关于这些实验的完整描述，当然可以参见 Chen等人(2021)。

3. Chen等人(2021)的尾流实验与流动特性

Chen 等人(2021)利用简单的单参数装置，采集了三种定性上各不相同的尾流的二维二维分量粒子图像测速数据。他们测量了两个并排放置、边长相同的方形棱柱所产生的尾流；棱柱边长为 $H = 0.03$m。他们在小视场（SFVN）中进行测量，视场大小与棱柱的水平尺寸相近，放大倍率较高，测量位置位于不同的流向距离 $X_1 = NH$ 处，这些距离从两个方形棱柱之间的中点起算。通过改变两个棱柱中点在横流方向上的间隙距离 G （由空间坐标 X_2测量），得到了三种不同的尾流状态。Chen 等人(2021)选取的三种不同间隙比 G/H，对应于动力学、双稳态、大尺度特征和非均匀性方面定性上各不相同的三种流动，详情见 Chen 等人(2021)及其中引用的文献。图 1展示了由此产生的三种尾流。图 1中的速度场来自 Chen等人(2021)进行的大视场粒子图像测速，主要用于积分长度尺度测量；此处仅作示意。我们采用了他们的一些积分长度尺度测量结果作为参考长度尺度，但未使用其大视场数据。我们仅使用其部分小视场粒子图像测速数据，因为这些数据的空间分辨率较高。图中标出了小视场 SFVN，其中 N 从2.5到20。每个视场的尺寸为流向1H、横流方向0.9H，且其中心与几何中心线（$X_2 = 0$）重合。

Chen等(2021)在每个小视场中都使用了双相机粒子图像测速装置。两台科学级互补金属氧化物半导体相机分别安装在测试段上方和下方，并对准同一个小视场，以便对同一速度场进行两次独立测量，从而降低粒子图像测速噪声。正如 Chen等(2021)和 Beaumard 等(2024)所详尽阐述的，这种降噪方法是获得准确耗散率估算值的关键步骤。采集频率为 5 Hz，每次测量采集了 20000 个速度场，对应约 67 min。粒子图像测速分析所用的最终询问窗尺寸为 24×24 像素，重叠率约为 58%，对应一个 $312\mu m$ 询问窗，其尺寸从最近处到最远处的 SFVN（即随着 N 增大）为柯尔莫哥洛夫长度尺度 η 的 4.5 倍到 2.5 倍。对于本文使用的所有小视场数据，询问窗尺寸均小于 3.2η。

Chen 等人 (2021)获取了三种来流自由来流速度 U_∞ =5.0，6.0，7.35 m/s 对应三种全局雷诺数 $Re_H \equiv$

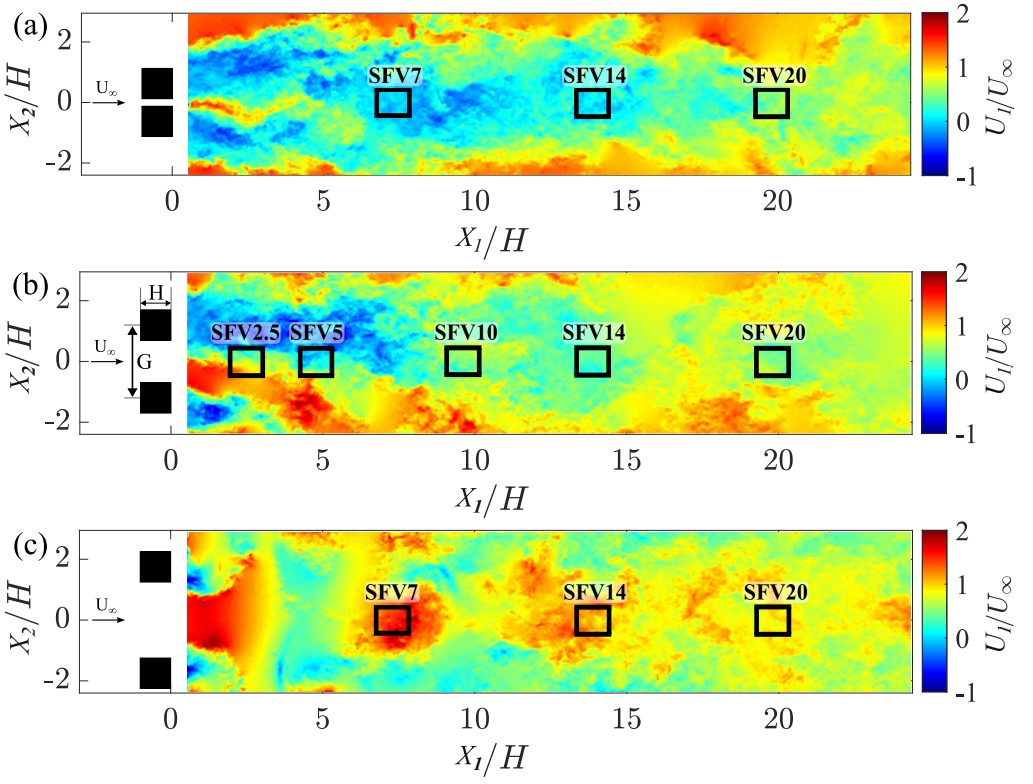


图1：两个边长为 H、间隔 G 的方形棱柱（■）所产生的尾流中，归一化瞬时流向速度实现 U_1/U_∞ 的示例，位于Re_H = 1。0 × 10^4。间隙比为(a) G/H = 1。25、(b) G/H = 2。4和(c) G/H = 3。5时的流动模式。二维二维分量粒子图像测速数据由Chen 等 (2021)提供。

工况 G/H = 1。25	SFV7	SFV14		SFV20	
Re_H (×10^4)	1	1	1.2	1	1.2
Re_λ	142	321	381	430	476
ε (m^2.s^{-3})	18.6	23.5	34.9	9.6	16.4
η (米)	120 ×10^{-6}	113 ×10^{-6}	102 ×10^{-6}	141 ×10^{-6}	123 ×10^{-6}
λ (米)	2.8 ×10^{-3}	4.0 ×10^{-3}	3.9 ×10^{-3}	5.8 ×10^{-3}	5.3 ×10^{-3}
L_v/H	0.98	1.4	1.4	1.6	1.6
L_v/λ	10.5	10.8	11.0	8.4	9.1
L_I/λ	2.1	1.5	1.2	2.6	2.7

表 1：工况 G/H = 1。25 的可用尾流区域及全局雷诺数对应的流动特性。

$U_\infty H/\nu$ = 1.0×10^4、1.2×10^4 和 1.5×10^4。各 SFVN 中湍流的特性已列于表 1、2 和 3，涵盖所有工况下可用的全局雷诺数 G/H = 1.25、 G/H = 2.4 和 G/H = 3.5。我们采用时空平均湍流耗散率 ε 的估算值（见下段）以及时空平均水平单点湍动能 $K_h \equiv \frac{1}{2}u_1'^2 + u_2'^2$，计算了科尔莫戈罗夫长度 $\eta \equiv (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$和泰勒长度估算值 $\lambda = (10\nu K_h/\varepsilon)^{1/2}$。

工况 $G/H = 2。4$

	SFV2.5	SFV5	SFV10	SFV14	SFV20	
Re_H ($\times 10^4$)	1	1	1	1.2	1	1.2
Re_λ	260	266	185	186	148	164
ε ($m^2.s^{-3}$)	94.6	72.2	41.2	29.6	8.9	15.0
η (m)	80×10^{-6}	85×10^{-6}	98×10^{-6}	106×10^{-6}	144×10^{-6}	126×10^{-6}
λ (m)	2.5×10^{-3}	2.7×10^{-3}	2.6×10^{-3}	2.9×10^{-3}	3.4×10^{-3}	3.2×10^{-3}
L_v/H	0.42 ± 0.1	0.79 ± 0.1	0.92	0.94	0.94	0.96
L_v/λ	5.0	8.7	10.5	9.9	8.2	9.0
L_I/λ	2.6	2.3	1.3	0.9	1.1	1.6

表 2：工况 $G/H = 2。4$ 的可用尾流区域的流动特性及全局雷诺数。对于积分长度尺度在 SFV 内变化超过 20% 的工况，给出了不确定度。

工况 $G/H = 3。5$

	SFV7	SFV14		SFV20		
Re_H ($\times 10^4$)	1	1	1.2	1	1.2	1.5
Re_λ	183	129	167	118	135	160
ε (米^2·秒$^{-3}$)	41.9	26.8	33.2	12.5	21.0	34.7
η (m)	98×10^{-6}	109×10^{-6}	103×10^{-6}	132×10^{-6}	116×10^{-6}	102×10^{-6}
λ (m)	2.6×10^{-3}	2.4×10^{-3}	2.6×10^{-3}	2.8×10^{-3}	2.6×10^{-3}	2.6×10^{-3}
L_v/H	0.74	0.64	0.67	0.58	0.60	0.62
$\mathcal{L}_v/\lambda$	8.5	7.9	7.7	6.2	6.8	7.3
L_I/λ	1.4	1.7	0.9	1.1	1.2	1.3

表3：工况 $G/H = 3.5$中可用尾流区域的流动特性及全局雷诺数。

尖括号 表示对整个小视场进行空间平均。基于泰勒尺度的雷诺数计算为 $Re_\lambda = \sqrt{(2/3)K_h}\lambda/\nu$。由于采用了 K_h 而非通过 Chen（2021）的二维二维分量粒子图像测速数据无法获取的 $\frac{1}{2} < u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2 >$ 进行计算，因此 Re_λ 和 $\lambda = （10\nu K_h/\varepsilon）$ 均被低估。

为了获得时间平均湍流耗散率 ε，我们采用流向（X_1）轴周围局部轴对称性的假设，该假设意味着 $\varepsilon_3 = \varepsilon_2$，因此 $\varepsilon = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2$ （George & Hussein 1991）。在众多流动中，无论是实验还是数值计算，局部轴对称性都被证明是计算 ε 的一种非常好的近似。特别是，Lefeuvre 等（2014）发现，该近似能够准确计算方柱尾流中的 ε。更重要的是，Alves-Portela与Vassilicos（2022）使用直接数值模拟（DNS）研究了本文所考察的相同流动，并得出了相同结论。因此，我们能够根据 Chen 等（2021）的二维二维分量粒子图像测速数据估算完整的湍流耗散率 ε，因为这些数据能够提供 ε_1 和 ε_2。此外，还采用基于双相机装置的技术对这一轴对称估计进行了去噪处理（Chen 等 2021；Foucaut 等 2021）。

我们还在表格 $\langle \mathcal{L}_v \rangle$ 中列出了空间平均积分尺度 H 和 λ相对于1、2和 3中的长度尺度 $\mathcal{L}_v$。Chen 等人 (2021) 根据横流速度自相关函数估算了长度尺度；沿流向对同一方向的流向速度自相关函数进行积分并不总是

收敛（Chen 等人，2021）。尽管 Chen 等人 (2021) 报告称极近场存在一些变化，$\mathcal{L}_v$ 在每种 SFV$\mathcal{N}$ 中基本保持恒定，但构型 $G/H = 2.4$ 中的 SFV2.5 和 SFV5 除外。以 $\langle\mathcal{L}_v\rangle$的倍数表示时，SFV$\mathcal{N}$ 位置在 $G/H = 1.25$ 工况中比另外两种工况更靠近棱柱。这一点反映在表1 中，其中 $\langle\mathcal{L}_v\rangle$ 例如，在 SFV20 处达到最高 1。$6H$ 。

这些尾流不仅因各自的入口条件（G/H 参数）而呈现出不同的流动特性；与湍流随流向距离增加的近场相比，在湍流随流向距离减小的更下游区域，其物理特性也应有所不同。本研究聚焦于更下游的衰减尾流区域，因此，对于 $G/H = 3.5$，研究 SFV7、SFV14 和 SFV20；对于 $G/H = 2.4$，研究 SFV10、SFV14 和 SFV20；对于$G/H = 1.25$，则研究 SFV20（见图 1）。从表 1、2 和 3 可以看出，对于 $G/H = 3.5$，局部雷诺数Re_λ 从 SFV7 到 SFV14 再到 SFV20 逐渐减小；对于 $G/H = 2.4$，则从 SFV10 到 SFV14 再到 SFV20 逐渐减小。下文的单点能量分析证实，这些 SFV 测站的单点产生较小，因此它们位于 $G/H = 3.5$ 和 $G/H = 2.4$ 流动工况的下游衰减区域。对于流动工况 $G/H = 1.25$，Re_λ 实际上从 SFV7 到 SFV14 再到 SFV20 逐渐增加。此外，下文的单点能量分析表明，SFV20 可能不在 $G/H = 1.25$ 尾流的衰减区域内。尽管如此，为了进行比较，我们仍将 $G/H = 1.25$ SFV20 纳入研究。

为进一步表征开始两点能量分析之前感兴趣的 SFV 位置处的湍流，我们考察单点水平湍动能输运方程。利用上下对称性以及展向（垂直于 (X_1, X_2) 平面方向）的统计均匀性，该方程可写为

$$\overline{u_1}\frac{\partial\overline{K_h}}{\partial X_1} + \overline{u_2}\frac{\partial\overline{K_h}}{\partial X_2} - \mathcal{P} + \mathcal{T} = \mathcal{T}_p + \mathcal{D} - \varepsilon, \tag{3.1}$$

其中，P $= -\overline{u_1'u_1'}\frac{\partial u_1}{\partial X_1} - \overline{u_1'u_2'}\frac{\partial u_1}{\partial X_2} - \overline{u_1'u_2'}\frac{\partial u_2}{\partial X_1} - \overline{u_2'u_2'}\frac{\partial u_2}{\partial X_2}$ 为单点湍流产生率，T $= \frac{\partial}{\partial X_1}($ $\overline{u_1'K_h}) + \frac{\partial}{\partial X_2}(\overline{u_2'K_h})$为单点湍流扩散率，T$_P$ 和 D 分别为单点压力-速度相关项和分子扩散项。请注意，由于展向均匀性，二维二维分量粒子图像测速（2D2C PIV）能够完整地评估 P 和 T。我们重点关注三个关键项：P、T 和 ε，尤其关注前两项相对于 ε 的大小。图 2a 展示了所有流动工况下的 P/ε （平均值取自整个 SFV ）。对于所考虑的 $G/H = 3.5$ 和 $G/H = 2.4$ 尾流中的所有 SFV 位置，除 $G/H = 3.5$ 流动工况中最近的测站（SFV7）外，P通常保持在 ε 的 1-5% 之间；在该测站，P接近 ε 的 10%，且为负值。这与 $G/H = 1.25$ 的 SFV20 测站形成对比：此处 P 不再可忽略，对于 $Re_H = 1.0 \times 10^4$，其值最高可达 ε 的 50%（但为正值）。这一显著差异表明，在最远的测量站位（SFV20）处， $G/H = 1.25$ 尾流流动可能尚未进入下游衰减阶段。在下一节中，我们将报告， $G/H = 1.25$ $SFV20$ 与我们在 $G/H = 3.5$ 和 $G/H = 2.4$ 流动工况衰减区内考察的 SFV 测站之间，两点湍动能预算也存在显著差异。

图2b 显示了归一化的空间平均单点湍流扩散率 $\langle\mathcal{T}\rangle/\langle\varepsilon\rangle$，并将其与 $\langle\mathcal{P}\rangle/\langle\varepsilon\rangle$ 进行了比较，针对的是 $G/H = 3.5$ 和 $G/H = 2.4$ 尾流。我们发现，$\langle\mathcal{T}\rangle$约为 $\langle\varepsilon\rangle$的 15% 至 25%，在这两种尾流衰减区内的所有 SFV 测站上，始终约为 $\langle\mathcal{P}\rangle$ 的三倍或更多。平均产生项虽很小，$\langle\mathcal{T}\rangle$ 却十分显著，这清楚地表明存在非均匀性，这种非均匀性可能属于“非产生产生项的非均匀性”。值得注意的是，$\langle\mathcal{T}\rangle$

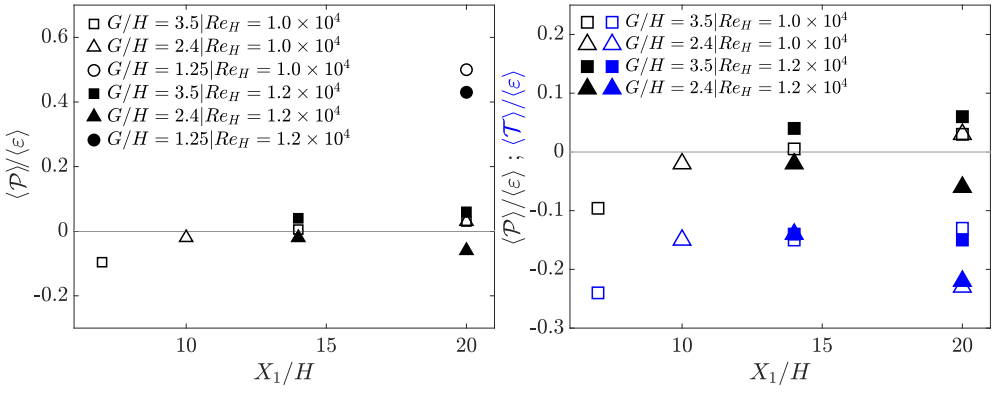


图2：两个 Re_H 值下，所研究的SFV中单点产生P（a）和湍流扩散T （b）的平均值，均以平均耗散率ε归一化。

的符号为负，表明湍流平均而言正将湍动能输送到这些 SFV 中。

G/H = 1.25尾流中的SFV20测站非常不同，因为该处T 为正，具体而言，对于 $Re_H = 1.0\times10^4$ 和1.2×10^4，T /ε分别为 = 1.75和1.67。该测站的非均匀性由湍流产生和湍流扩散共同造成，湍流正将湍动能输运到SFV20之外。

为量化湍流扩散的非均匀性特征，我们引入一个长度尺度，并在SFV内计算该尺度。据作者所知，此前尚无研究通过专门的长度尺度来表征这种非均匀性的程度。例如，近期在（Kaneda 2020；Chen *et al.* 2021）中使用的Corrsin长度，可以区分受平均流梯度影响与不受其影响的尺度（因此也可能区分是否受湍流产生影响），但在几乎没有产生的情况下，它无法捕捉与湍流扩散相关的非均匀性程度。诸如 $L_{IK_1} \equiv |\overline{\partial k}^{K_h}_{h\partial x_1}|$、$L_{IK_2} \equiv |\overline{\partial k}^{K_h}_{h\partial x_2}|$和$L_{IK} = |\overline{\nabla}^{k_h}_{\mathbf{k_h}}|$这样的长度尺度可以表征非均匀性单点湍动能的……在此考察的三个湍流尾流中共七个区域 G/H = 1.25,2.4, 3.5内，我们发现 $L_{IK_j} \gg L_{IK} \gg H$ for $j = 1, 2$，其数值比各SFV内及不同SFV之间的 H for L_{IK_j} 大一至两个数量级；而相较于L_{IK}的 H for，则大6至15倍。这表明我们的SFV中湍动能的非均匀性并不显著。因此，我们提出一种基于湍动能单点湍流扩散的长度尺度，定义如下：

$$L_I = \frac{\langle|\overline{u_2' K_h}|\rangle}{\langle|\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_j' K_h}|\rangle} \tag{3.2}$$

其中对 j = 1,2采用隐式求和。本文此定义中的空间平均是在SFV区域上进行的，但也可以推广（甚至可能取消这一限制）以用于其他研究。对于湍流产生较弱而湍流扩散显著的湍流，在小于 L_I的局部区域内可视为局部均匀。在极限情况下，对于无限域或周期域中的均匀湍流， L_I 处处为无穷大。

……的值 L_I 列于表1、2 和3 中，并与相应 SFV 的泰勒长度进行比较。对于所有 SFVN 位置，无论尾流类型或其在尾流中的位置如何

甚至无论全局或局部雷诺数如何，L_I 的值都与 λ 的值相当，且远小于积分长度尺度。这些发现证实，与湍流扩散相关的非均匀性存在于所有尾流区域，直至泰勒长度量级的尺度 λ。在确定了各尾流区域的单点特征后，下一节将讨论预算（2.2），并特别关注水平两点湍动能的尺度间和空间间传递率，这正是本研究的核心主题。

4. 双点统计结果

由于展向上的上下对称性（即沿垂直于水平 (X_1, X_2) 平面的方向），$\mathrm{u_X}$ 和 $\delta\mathrm{u}$ 的展向分量为零。因此，只要将范围限制为 $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \overline{0})$，就可以通过 (X_1, X_2) 平面上的二维双分量测量，完全确定线性输运率 (2.3)。展向上的统计均匀性意味着，对于任意指标 i，梯度 $\nabla_{\mathbf{X}}\delta\overline{u_i}$ 和 $\nabla_{\mathbf{r}}\delta\overline{u_i}$ 的展向分量均为零，这也意味着可以通过 (X_1, X_2) 平面上的二维双分量测量，完全确定双点湍流产生率 (2.4)。展向上的统计均匀性还意味着 $\frac{\partial}{\partial X_3}\overline{u'_{X_3}}\delta K_h = 0$，因此 (2.5) 可简化为

$$T_X \equiv \frac{\partial}{\partial X_1}\overline{u'_{X1}\delta K_h} + \frac{\partial}{\partial X_2}\overline{u'_{X2}\delta K_h}, \tag{4.1}$$

其中 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ 和 $\mathbf{u'_X} = (u'_{X1}, u'_{X2}, u'_{X3})$。

逐尺度湍动能预算（2.2）中，即使在(X_1, X_2) 平面上进行 $r_3 = 0$，仍无法通过二维二维分量粒子图像测速测量完全确定的项只有尺度间传递率 Π_h（定义见公式（2.6））、两点压力-速度项 T_p（定义见公式（2.7））以及黏性扩散率 D（定义见公式（2.8））。尽管T_p 完全无法通过此类测量获得，但 $\Pi_r \equiv \frac{\partial}{\partial r_1}\delta u'_1\delta K_h + \frac{\partial}{\partial r_2}\delta u'_2\delta K_h$的 Π_h 部分可以获得，而 $\Pi_z \equiv \frac{\partial}{\partial r_3}\delta u'_3\delta K_h$ 部分则无法获得。关于 D，其中大部分都可以通过 $r_3 = 0$ 获得，除了 $D_z \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2}\delta K_h$，见公式（2.8）。

总之，水平两点湍动能的逐尺度预算可表示为

$$L_T - P + T_X + \Pi_r + \Pi_z = T_p + D_r + D_z - \tilde{\varepsilon}_1 - \tilde{\varepsilon}_2, \tag{4.2}$$

其中 $D_r \equiv D - D_z$ 和 $\Pi_r \equiv \Pi_h - \Pi_z$。式（4.2）中的每一项都可以通过 Chen 等（2021）针对 $\mathbf{r} = (r_1, r_2, 0)$ 进行的小视场二维二维分量粒子图像测速测量获得，唯独 Π_z，T_p 和 D_z 除外。本文主要研究湍流传递率的时空平均值 T_X 和 Π_r。我们通过将整个小视场内的平均值 替换为小视场内任意一条直线 $X_1 = const$ 或 $X_2 = const$ 上的平均值，并检查是否能得到本文所述的相同结论，验证了空间平均不会影响我们的结果；不过，这样做的统计收敛性较差（附录 B 中给出了 T_X 和 Π_r 的相关检验示例）。

遵循 Larssen 和 Vassilicos（2023）的研究，我们探讨平均尺度间湍流传递率中可测得的部分 Π_r，究竟是抵消还是促进平均尺度间空间湍流传递率 T_X，以及从量级上看，它们与平均湍流耗散率 ε相比如何。Π_r 尺度间湍流传递率 Π_h 的这一部分，完全由水平速度场决定，不受展向（面外）速度场的直接影响，与 T_X非常相似。请注意，使用时空平均来实现这些传递率中涉及的三阶统计量的统计收敛

（超过 20,000 个不相关样本，并覆盖整个视场）。这些平均传递率如何随 r_1 （针对 $r_2 = r_3 = 0$ ）和 r_2 （针对$r_1 = r_3 = 0$ ）变化？它们分别涉及哪些尺度范围？我们将回答这些问题，并计算 L_T 和 P，以补充前文对三种性质迥异的湍流尾流在中心线附近衰减区所进行的分析。请注意，在 $G/H = 2.4$ 和 $G/H = 3.5$ 尾流的 SFV14 和 SFV20 位置，Chen & Vassilicos（2022）使用本文所用的完全相同的数据表明，纵向和横向二阶结构函数在惯性子区的尺度范围内随两点间距r_1 按 $r_1^{2/3}$ 变化 r_1。他们还发现，在$G/H = 1.25$ 尾流的 SFV20 位置，这两个结构函数偏离该标度关系，且其演化速度快于 $r_1^{2/3}$ 。

水平两点湍动能 δK_h 是这些结构函数之和，因此对于 r_1 和 r_2 也以相同方式标度，如附录A 所示；附录中我们还表明，在/5 尾流的$G/H = 3$位置，*SFV7* 处偏离了2/3 幂律。现在我们给出平均尺度间传递率和空间间传递率的结果，下面先概述主要结果，随后各小节将详细介绍。此概述旨在帮助读者在阅读以下各小节中逐个尾流讨论结果时把握重点。我们还提出了一些假设，并以此为部分结果提供初步的定性解释。

如后续图中所示，在衰减尾流区域内的所有小视场中，无论是 $G/H = 3.5$ 还是 $G/H = 2.4$ 湍流尾流，以及 *SFV*20 中的 $G/H = 1.25$ 湍流尾流，我们发现，对于所有可测长度尺度 $r_1 \neq 0$ 和 $r_2 \neq 0$ （至少不大于 L_v），T_X为正，而Π_r为负。这意味着，平均而言，小于 r_1 或 r_2 的尺度通过尺度间传递获得水平两点湍动能，同时又通过湍流扩散将其损失给小视场外相邻的物理空间。后续图还表明，在所有这些工况下，对于所有可测长度尺度（有时是其中一个显著范围），完全水平的尺度间传递率Π_r明显大于、或有时在量级上约等于ε。此外，后续图清楚地显示，对于所有长度尺度 r_1 或 r_2 （大于泰勒长度的一部分，且至少小于L_v），两点湍流扩散相较于ε绝不可忽略。（请注意，在我们考察的每一个 SFV 内，L_v 的变化至多为L_v的 8 %，通常远小于此。）因此，对于我们所有的局部雷诺数 Re_λ （最高接近 500），从惯性长度尺度一直到黏性影响长度尺度，均存在非均匀性。这与 Chen & Vassilicos（2022）以及 Beaumard 等人（2024）的理论一致；该理论预测，即使在雷诺数趋于无穷大的极限下，非均匀性仍可存在于整个惯性区。

在存在尺度间湍流能量传递的情况下，非均匀性一直延伸到最小尺度并非不可想象。论证如下。空间间湍流传递的增强可能会从向更小尺度的尺度间传递过程中带走能量。为便于论证，假设湍流耗散率由流动中的某种机制以某种方式独立设定，那么，剩余能量的尺度间传递率可能会加快，以确保达到该湍流耗散率。如果这导致尺度间湍流传递增强，则某一给定尺度上可用于湍流扩散的能量可能减少，进而使该尺度上的空间间湍流传递率降低。（这与 Alexakis（2023）所作观察构成两点类比：湍流耗散（因而湍流级联）能够减弱甚至抑制单点湍流扩散。）回到论证的开头，

Rapids 文章不得超过此页的篇幅限制

空间间湍流传递的减弱可能产生相反的增加效应，并可能使尺度间湍流传递率减慢，以确保达到湍流耗散率。反过来，这可能增加可用于湍流扩散的能量，使空间间湍流传递率恢复上升。因此，两个传递过程之间可能达到平衡，使二者都不消失，并且无论雷诺数如何，非均匀性都持续存在于所有尺度上。当然，设定湍流耗散率的机制很可能会与尺度间传递和空间间传递之间的相互作用相互影响；在这种情况下，这两种传递机制与湍流耗散之间可能通过某种方式动态达到平衡。我们强调，这只是一个关于可能性的论证，而不是对以下小节所报告的小尺度非均匀性的确定性解释。关于这一解释，以及非均匀湍流中的局部湍流耗散率由什么决定这一重要问题（见 Lumley 1992），我们留待今后研究。

后续图中观察到的小尺度非均匀性有一个特殊方面：在所有长度尺度 r_1 以及 r_2 等于或小于L_v时，T_X始终为正，并且在大多数情况下甚至高于L_v。另一方面，除 $G/H = 1.25$中的SFV20测站（其值为正）外，所有SFV测站的单点湍流扩散率T均为负。两点空间间传递率可分解为$T_X = T^+ + T^- + Corr \approx 2T^+ + Corr$，其中$T^\pm \equiv T(X \pm r)$，而 $Corr$表示小视场内所有构成T_X的两点相关项之和的空间平均。在 $G/H = 1.25$尾流的SFV20测站，T_X和T均为正；如附录C所示，$Corr$ 为负，并且随着 r_1 和 r_2的增加，其绝对值逐渐减小。在此处考察的其他六个测站中，$Corr$ 为正，并且随着 r_1 和 r_2 在 λ以上增加，其绝对值通常不增加。这鲜明地说明了我们所观察到的差异：在SFV20 $G/H = 1.25$中，逐尺度非均匀性与 $G/H = 2.4$和 $G/H = 3.5$尾流中其他六个测站的逐尺度非均匀性之间，存在定性不同的两点相关性。要解释这一差异，需要对我们的湍流尾流进行更全面的分析，而这超出了本研究的范围。

现在，我们将在以下各小节中详细介绍研究结果，每次讨论一种间隙比 G/H 值。（附录$\langle T_X \rangle$ 将空间间能量传递率分解为流向传递率$\langle \frac{\partial}{\partial X_1} u'_{X1} \delta K_h \rangle$和横流向传递率$\langle \frac{\partial}{\partial X_2} u'_{X2} \delta K_h \rangle$ 的更详细介绍见附录B，其中表明，两者在很宽的长度尺度范围内均为正值，直至泰勒长度。）

4.1. 间隙比 $G/H = 3.5$ 尾流中的水平两点湍流能量传递率 e

图3中，我们绘出了 $G/H = 3.5$ 湍流尾流中三个可用全局雷诺数 Re_H 下，$SFV20$ 的归一化尺度间和空间间能量传递率，分别记为 $\Pi_r^\star \equiv \Pi_r/\varepsilon$ 和 $T_X^\star \equiv T_X/\varepsilon$。对于所有可测的 r_1 和 r_2 值，直至显著高于 L_v，$\Pi_r^\star < 0$ 和 $T_X^\star > 0$，以及 $T_X^\star$，会随着 r_1 或 r_2 减小至 λ 或 $\lambda/2$ 而增大，并在此处达到最大值；其数值约为 0.5 或 0.6，具体取决于 Re_H。$\Pi_r^\star$ 的绝对值也会随着 r_1 或 r_2 减小至 λ 而增大，并在此处达到最小值：对于 $Re_H = 1.0 \times 10^4$ 和 1.2×10^4，约为 -1.1；对于 $Re_H = 1.5 \times 10^4$，约为 -1.4。尽管在所考察的 Re_H 值范围较小时，$T_X^\star$ 不会随 Re_H 显著变化，但在所有 r_1 尺度以及 L_v 以下的大多数 r_2 尺度上，$-\Pi_r^\star$ 在 $Re_H = 1.5 \times 10^4$ 时显著大于在 $Re_H = 1.0 \times 10^4$ 和 1.2×10^4 时的值。值得注意的是，当 r_1 或 r_2 介于 $\lambda/2$ 和 $L_v/3$ 之间时，$-\Pi_r^\star$ 大于 1，即处于惯性区内。

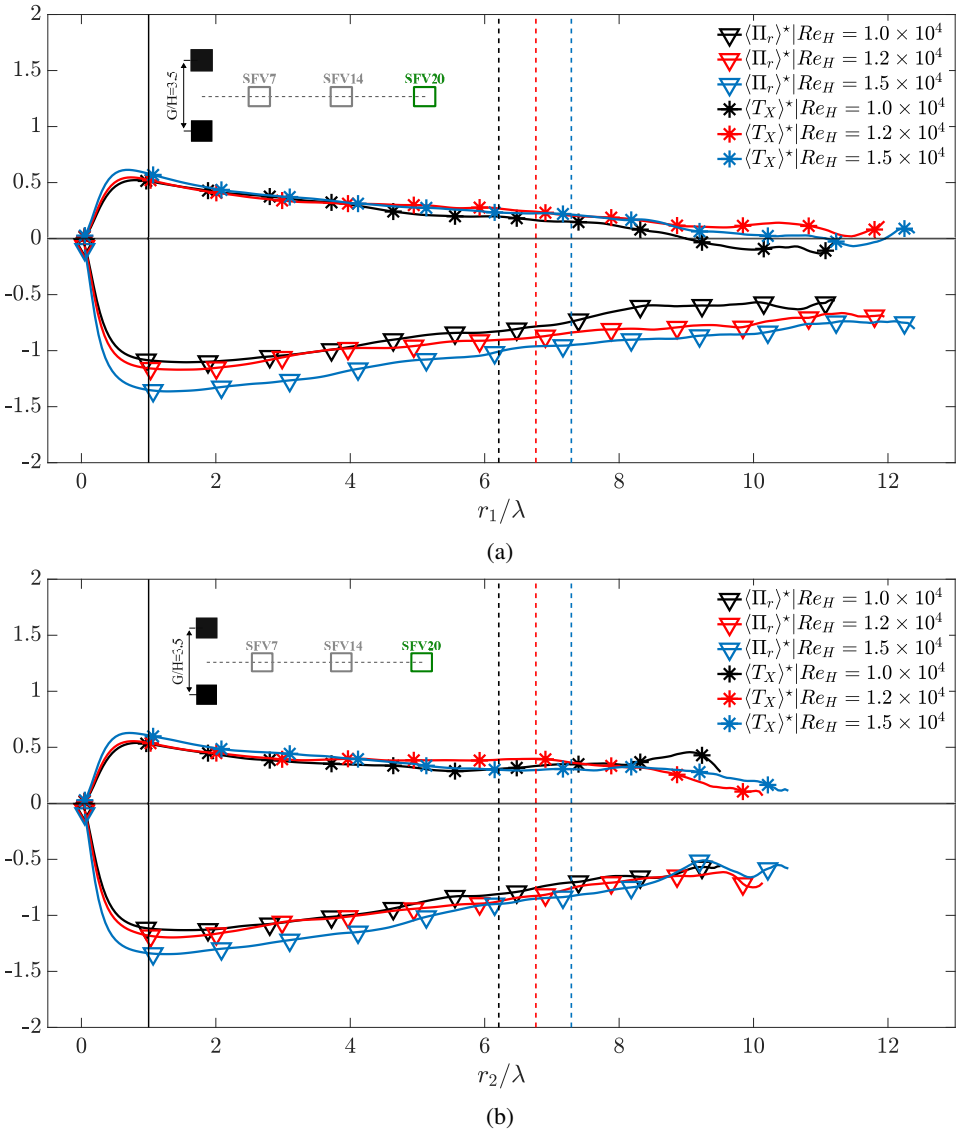
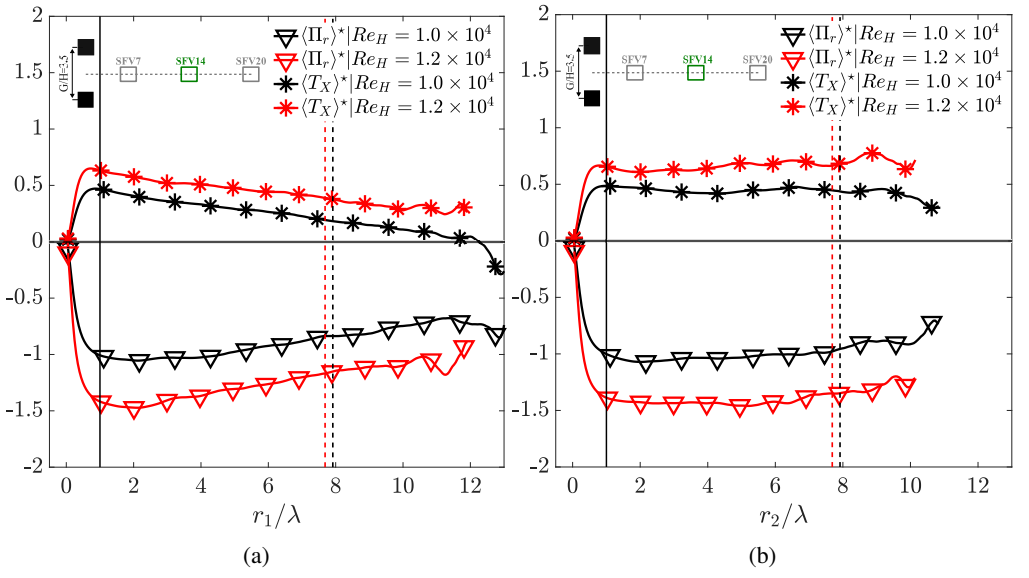


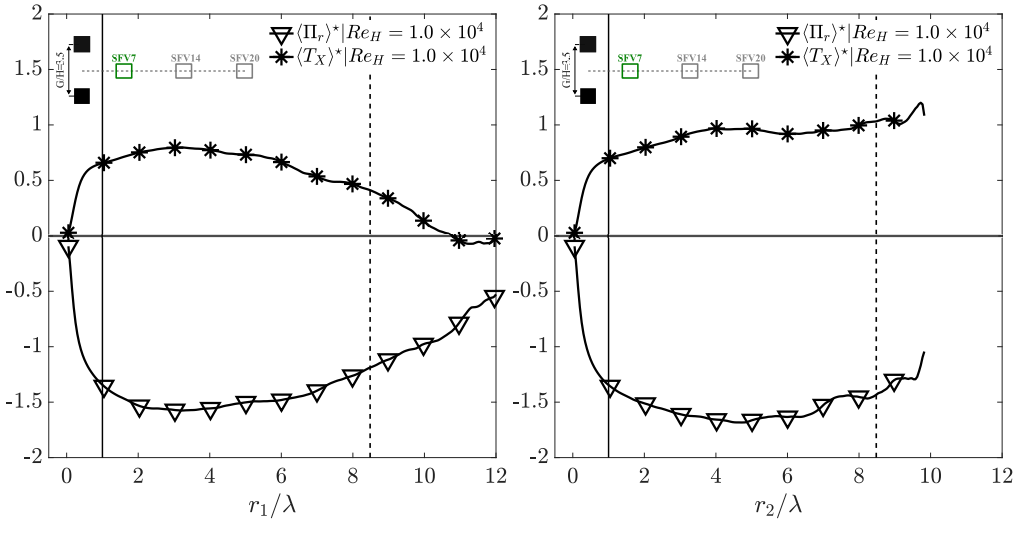
图 3：构型 $G/H = 3.5$ SFV20 在尺度空间 $\Pi_r\star$ 和物理空间 $T_X\star$ 中的归一化逐尺度平均能量传递率。图中展示了流向 (a) 和横流向 (b) 的分离尺度。垂直虚线：L_v/λ。为使图示清晰，仅显示 1/20 的标记；此外还绘制了示意图，以标示此处探测的 G/H 和 SFV （绿色方框）。后续各图也采用相同处理。

图中也展示了相同的曲线：4 图和5 图分别对应 SFV14 和 SFV7，所得观察结果相同。具体而言，$\langle T_X\rangle^\star$ 在。4 处大于或等于 0 $r_1 = \lambda/2$ 和 $r_2 = \lambda/2$ 处大于或等于 0。5 处 $r_1 = \lambda/2$ 和 $r_2 = \lambda/2$，在三个小视场中均如此，且适用于所有可用的全局雷诺数。因此，在最小的湍流长度尺度上，湍流始终表现出非常显著的非均匀性。不过，还可以观察到以下定量差异。

(i) 对于 Re_H，SFV14 的敏感度远高于 SFV20；这两个视场均有两个 Re_H 值可用。归一化平均双



构型 $G/H = 3.5$ SFV14 在 $Re_H = 1.0$ 和 1.2×10^4 下，尺度 $\Pi_r{}^\star$ 空间和物理 $T_X{}^\star$ 空间中的归一化逐尺度平均能量传递率。图中展示了流向 (a) 和横流向 (b) 分离尺度上的结果。



构型 $G/H = 3.5$ SFV7 在 $Re_H = 1.0\times10^4$ 下，尺度 $\Pi_r{}^\star$ 空间和物理 $T_X{}^\star$ 空间中的归一化逐尺度平均能量传递率。图中展示了流向 (a) 和横流向 (b) 分离尺度上的结果。

点尺度间和空间间传递率在 SFV20 下大致相同，分别为 $Re_H = 1。0\times10^4$ 和 $Re_H = 1。2\times10^4$；但在 SFV14 下，随着 Re_H 增加 20%，二者的幅值都显著增大。

(ii) 在 Re_H 保持不变时，随着小视场沿中心线越来越靠近方形棱柱，$\Pi_r{}^\star$ 和 $T_X{}^\star$ 的幅值增大，局部 Re_λ 也显著增加，

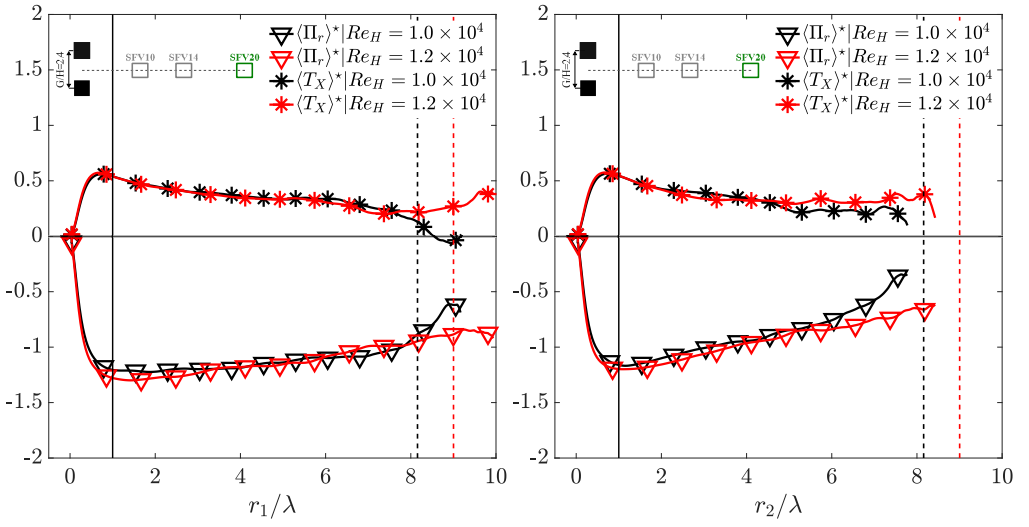


图6：构型 $G/H = 2.4$ SFV20 在 $Re_H = 1.0$ 和 1.2×10^4 时，尺度 $\Pi_r^\star$ 空间和物理 $T_X^\star$ 空间中的归一化逐尺度平均能量传递率。图中展示了流向 (a) 和横流向 (b) 上不同分离尺度的结果。

即对于 $Re_H = 1.2\times10^4$，从 SFV20（$Re_\lambda = 135$）到 SFV14（$Re_\lambda = 167$）；对于 $Re_H = 1.0\times10^4$，从 SFV14（$Re_\lambda = 129$）到 SFV7（$Re_\lambda = 183$）。（对于 $Re_H = 1.0\times10^4$，从 SFV20 到 SFV14 期间 Re_λ 没有显著增加，且 $\Pi_r^\star$ 和 $T_X^\star$ 的 r_1 和 r_2 剖面没有显著变化。）

(iii) 对于 $Re_H = 1.2\times10^4$，从 SFV20 ($Re_\lambda = 135$) 到 SFV14 ($Re_\lambda = 167$)，$\Pi_r^\star$ 和 $T_X^\star$ 有趋于恒定的趋势（$\Pi_r^\star$ 接近 -1.5，$T_X^\star$接近 0.6）；无论采用 r_1 还是 r_2，在 λ 与 L_v之间的惯性区内均是如此。从 SFV14 ($Re_\lambda = 129$) 到 SFV7 ($Re_\lambda = 183$)，对于 $Re_H = 1.0\times10^4$，也可能存在类似但不太明显的趋势。

现在，我们通过将间隙比从 $G/H = 3.5$降至 $G/H = 2.4$，来考察另一种湍流尾流。

4.2. $G/H = 2.4$ 尾流中的水平两点湍流能量传递率 e

比较图3和图6（相同的SFV，不同的尾流），可以得出以下结论。在两个全局雷诺数 $Re_H = 1.0\times10^4$和 $Re_H = 1.2\times10^4$下，SFV20时，$G/H = 2.4$和 $G/H = 3.5$湍流尾流中的$\Pi_r^\star$ 和$T_X^\star$ 的 r_1 和 r_2 分布非常相似；但在相同的 Re_H下，Re_λ 局部值和 L_v/λ 比值在$G/H = 2.4$时更高。因此，对于这两个全局雷诺数，我们对SFV20 $G/H = 2.4$和SFV20 $G/H = 3.5$的观察和结论相同（定量上也如此，但需考虑 Re_λ差异）。

在图7中，我们绘出了中心线上更靠近方形棱柱处、SFV14和SFV10测站的$\Pi_r^\star$ 和$T_X^\star$ 的 r_1和 r_2 剖面。对于这些小视场中的每一个，只有一个全局雷诺数可用：SFV14为 $Re_H = 1.2\times10^4$，SFV7为 $Re_H = 1.0\times10^4$，但两者均为 $Re_\lambda \approx 185$。对于 $G/H = 2.4$尾流，SFV14处的尺度间和空间间传递率大致与SFV20处相同（见图6）；然而，与本文考察的其他所有测站相比，在 $G/H = 2.4$尾流的SFV10测站处，出现了显著差异，无论是与 $G/H = 2.4$尾流还是与 $G/H = 3.5$尾流相比都是如此。它是这些测站中唯一一个

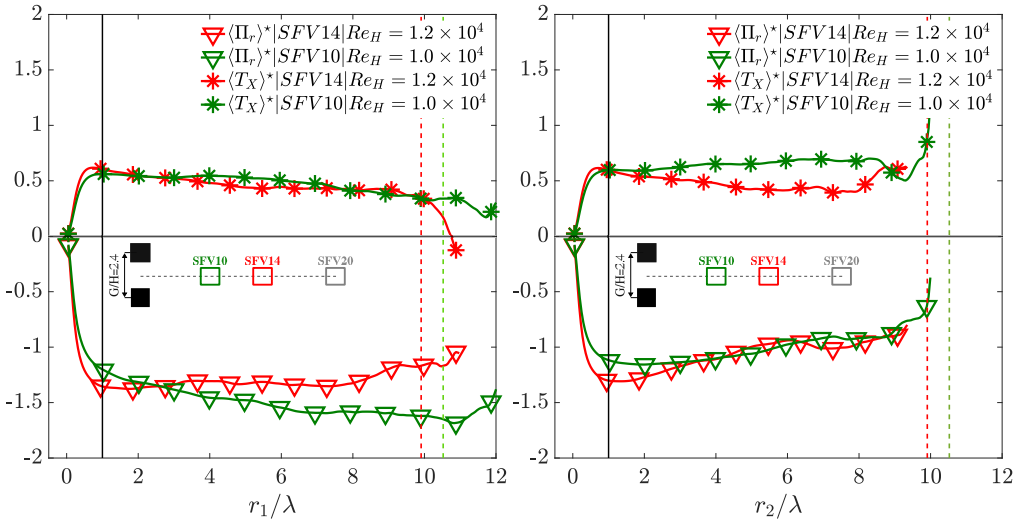


图 7：构型 $G/H = 2.4$ 中，SFV14 在 $Re_H = 1.2\times10^4$ 处以及 SFV10 在 $Re_H = 1.0\times10^4$处的尺度 $\Pi_r^\star$ 空间和物理 $T_X^\star$ 空间中的归一化逐尺度平均能量传递率。图中展示了流向（a）和横流向（b）上的分离尺度。

在该测站处，随着 r_1 增大，$\Pi_r^\star$ 和$T_X^\star$ 单调递减；随着 r_2增大，$\Pi_r^\star$和$T_X^\star$ 单调递增。与同一尾流中全局雷诺数高出20%的SFV14测站相比，这一差异尤其明显，尽管两者的 Re_λ 相同（见图7）。不过请注意，与 $G/H = 3.5$和 $G/H = 2.4$尾流中的其他测站一致，$\Pi_r^\star$ 的幅值特别大，在惯性区 λ 至L$_v$范围内为 -1 至 -1.6。此外，$T_X^\star$始终高于0.3，并且在 $r_1 = \lambda/2$和 $r_2 = \lambda/2$处等于或大于0.5。再次可以看到，在最小且实际上受黏性影响的湍流长度尺度上，湍流明显呈现非均匀性。在 $G/H = 3.5$和 $G/H = 2.4$两种湍流尾流的中心线衰减区内，所有小视场及所有可用的全局雷诺数下，湍流长度尺度足够小时都显然没有趋向局部均匀性的迹象。

4.3. 逐尺度预算中的其他项

在我们考察的所有 $G/H = 2.4$ 和 $G/H = 3.5$ 湍流尾流的 SFVN 测站中，除了 $G/H = 2.4$ 中的 SFV10 外，$\Pi_r^\star$ 约为 -1 至 -1.5，并且随着 r_1 或 r_2 的增加而保持不变或增大；而 $T_X^\star$ 接近 0.5，并且随着 r_1 或 r_2的增加而保持不变或减小。因此，$\Pi_r^\star + T_X^\star$ 在惯性区 λ 至 L$_v$内保持不变，如图 8 所示，但 $G/H = 2.4$ 中的 SFV10 除外。根据衰减尾流中的尾流和位置，该常数介于 -0.6 和 -1.0 之间。

如前所述，利用我们现有的二维二维分量粒子图像测速数据，可以完整地获得线性输运率 L_T和两点湍流产生率 P。我们发现，在本研究考察的$G/H = 2.4$ 和 $G/H = 3.5$ 湍流尾流的所有 SFVN 测站中，除 $G/H = 2.4$ 的 SFV10 外，它们对逐尺度能量收支 (4.2) 的贡献都很小。图 9 展示了这一点：在惯性区 λ 至 L$_v$ 范围内，$L_T - P + T_X + \Pi_r/\varepsilon$ 近似为常数；在 r_1 惯性区内，该常数介于 -0.7 和 -1.3 之间，而在 r_2 惯性区内则介于 -0.5 和 -1.0 之间，其中

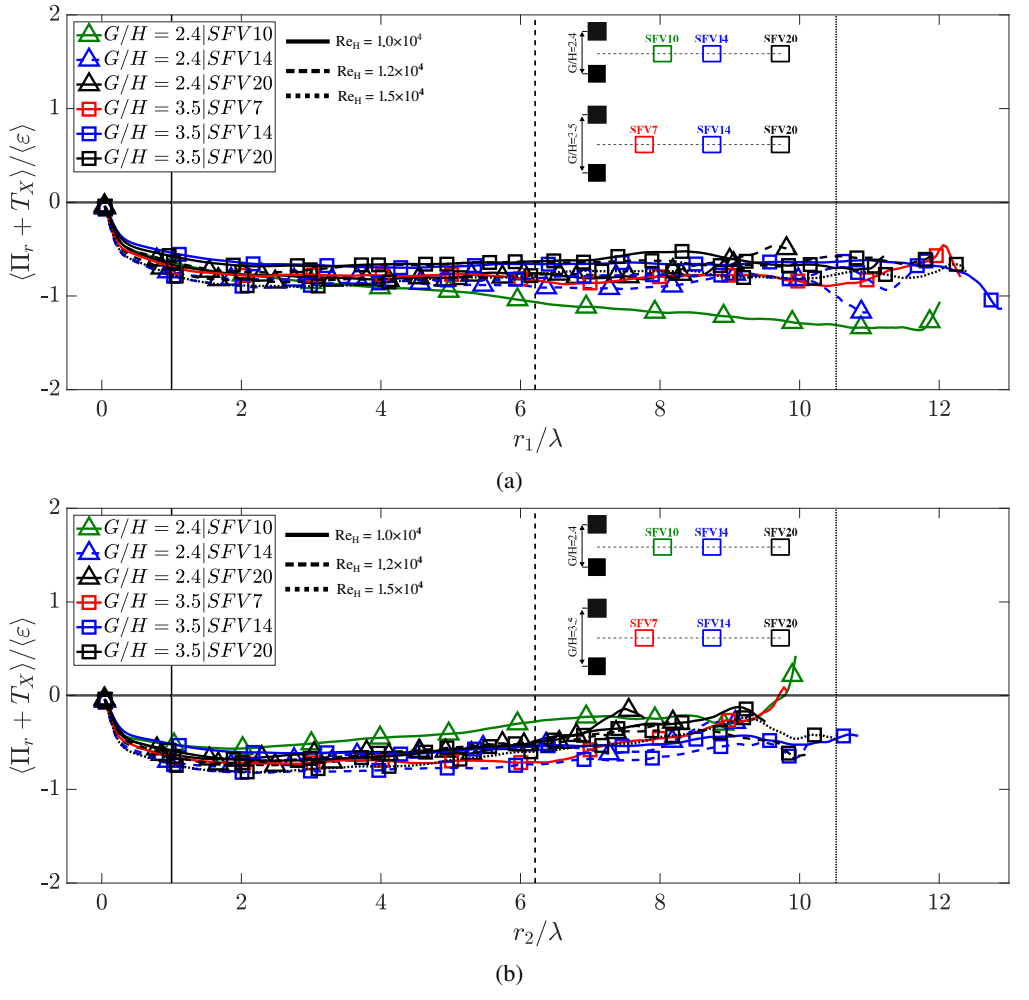


图 8：尺度间与空间间小尺度能量传递率之和 $\Pi_r + T_X/\varepsilon$ 的归一化逐尺度图。结果展示了流向（a）和横流向（b）上分离尺度的情况。竖直虚线和点线分别表示 SFV 的最小和最大积分长度尺度。

$SFV10$，$G/H = 2.4$ 是唯一的例外。值得指出的是，逐尺度能量收支（4.2）意味着 $\langle L_T - P + T_X + \Pi_r \rangle \approx \langle T_p \rangle - \langle \Pi_z \rangle - \langle \varepsilon_1 \rangle - \langle \varepsilon_2 \rangle$ 对于 r_1，$r_2 > \lambda$，这或许表明存在一种值得注意的平衡

$$\langle T_p \rangle - \langle \Pi_z \rangle \sim \langle \varepsilon \rangle \tag{4.3}$$

在惯性 r_1 和 r_2 范围内，同样存在一个 SFV10，即 $G/H = 2.4$ 例外。

4.4. *The SFV20 station in the $G/H = 1.25$ wake*

位于 $G/H = 2.4$湍流尾流中的SFV10测站十分特殊，它处于或接近这样一条边界：在近场中，湍流和 Re_λ 增加，而在其后的区域中，湍流和 Re_λ 则随流向距离增加而减小（见表2）。目前尚不清楚，位于 Re_λ / $G.H$ = 1.25尾流中的*SFV20*测站距离流向上增加和减小之间的边界有多近。表1 显示，在该尾流中，Re_λ 从SFV7到SFV20增加，因此我们可以预期，位于 G/H = 1.25尾流中的SFV20也具有特殊性

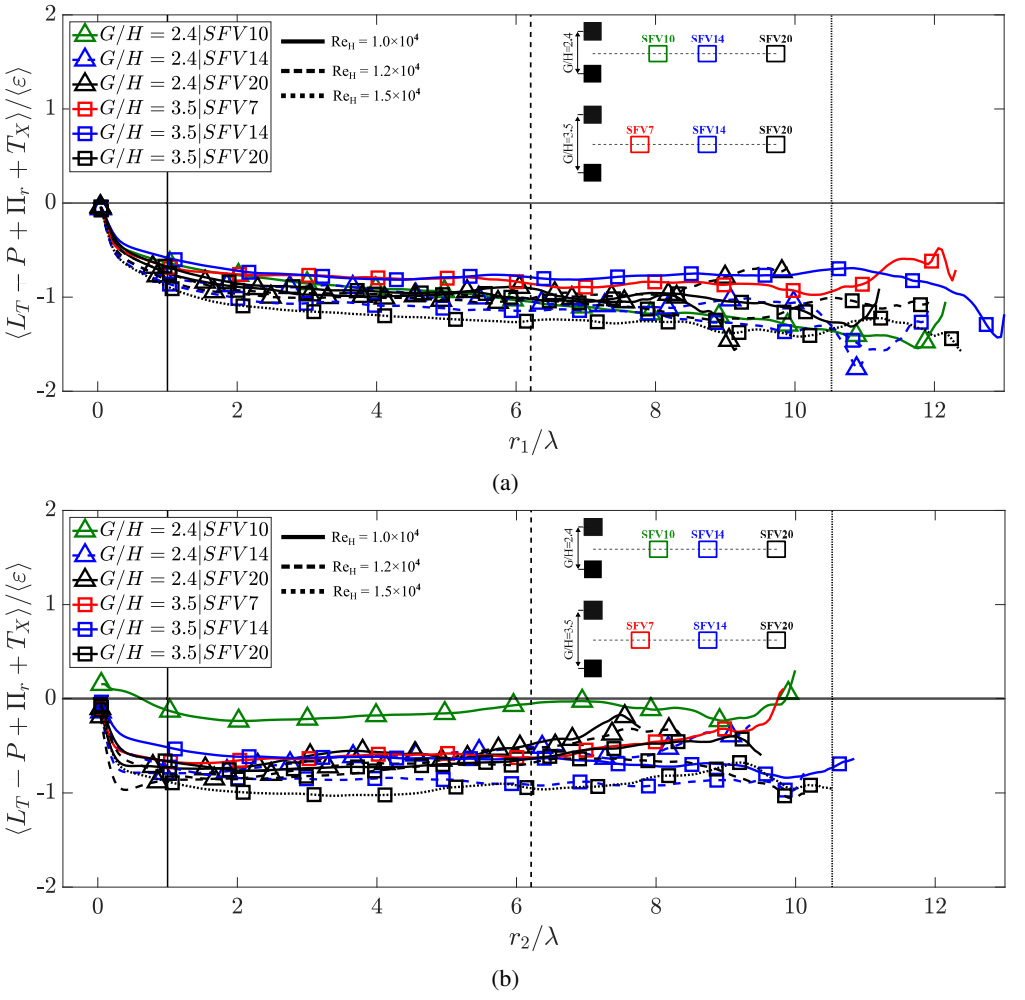


图9：尺度间与跨空间传递率之和、两点产生和线性输运率的归一化逐尺度图。结果分别展示了流向（a）和横流向（b）的分离尺度。竖直虚线和点线分别表示 SFV 的最小和最大积分长度尺度。

也如此。不过，$\langle T_X\rangle$ 和$\langle\Pi_r\rangle$ 符号相反，具体而言，$\langle T_X\rangle > 0$ 和$\langle\Pi_r\rangle < 0$；非均匀性一直显著存在于最小湍流尺度（见图10），正如本文研究的另外两条尾流中的所有测站一样。即使在 $SFV20$ 测站所在的G/H = 1.25尾流中，Re_λ 接近500时，在足够小的湍流长度尺度下也没有趋向局部均匀性的迹象。

本文研究的 G/H = 1。25 尾流中的 SFV20测站，实际上在本文研究的所有其他测站中独一无二，因为$\langle T_X\rangle^\star$ 随 r_1 和 r_2均急剧增长；事实上，在 r_1时达到 2 到 3 之间的数值，r_2 介于 4λ 和 6λ之间，见图10。该 G/H = 1。25 尾流似乎是三个具有回流区的尾流中回流区向下游延伸最远的一个，如图1 所示，这表明在以 H的倍数计量的更长流向距离上，非均匀性更强。事实上，非均匀性不仅在较大尺度上更强，而且在

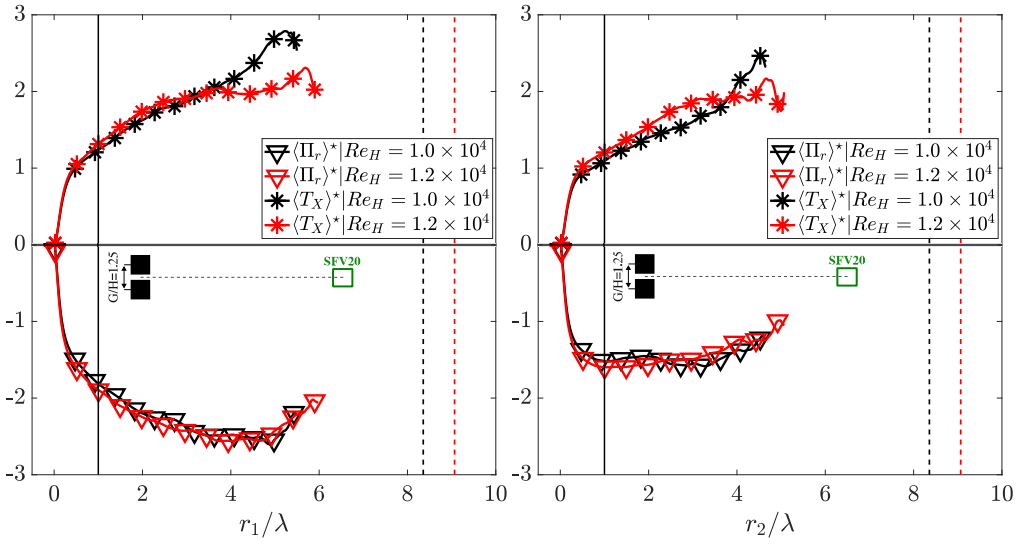


图10：构型 $G/H = 1.25$ SFV20 在 $Re_H = 1.0$ 和 1.2×10^4处，尺度$\Pi_r{}^\star$ 空间和物理$T_X{}^\star$ 空间中的归一化逐尺度平均能量传递率。图中分别展示了流向（a）和横流向（b）分离尺度下的结果。

该尾流的 SFV20 中最小尺度处也是如此，其中 $T_X{}^\star$ 在 $r_1 = \lambda/4$ 和$r_2 = \lambda/4$ 时均介于 0。6 至 0。7 之间。

对于 $r_2 = 0$，$\Pi_r{}^\star$ 的 r_1 剖面与$T_X{}^\star$ 的 r_1 剖面一样尖锐，但方向相反（见图 10）。因此，与另外两个尾流中的所有测站类似，除了 $SFV10$ for $G/H = 2.4$ 处（该处并不完全位于衰减尾流中）之外，$\Pi_r{}^\star + T_X{}^\star$ 在 -0.5 处基本保持不变，其范围为从 0.2λ 到$\mathrm{L}_v/2$，见图 11 中的 $Re_H = 1.0\times10^4$ ($\mathrm{L}_v/\lambda = 8.4$) 和图 12 中的 $Re_H = 1.2\times10^4$ ($\mathrm{L}_v/\lambda = 9.1$)。这两幅图还表明，$r_1$ 中的极强非均匀性仅限于两点湍流扩散，因为与逐尺度水平两点湍动能收支中的其他项相比，两点线性输运和湍流产生可以忽略不计。

对于 $r_1 = 0$，图 10 中的 r_2 剖面$\Pi_r{}^\star$ 和$T_X{}^\star$ 在定性上更接近 $G/H = 2.4$ 的例外情况 SFV10：虽然 $T_X{}^\star$ 增加了，但 $\Pi_r{}^\star$ 并未随 r_1 而减小。事实上，对于从 $\approx\lambda$ 到 $\approx 4\lambda$ 的 r_2，$\Pi_r{}^\star$ 始终 remarkably 保持在约 -1.5 的常数水平。与 $G/H = 2.4$ 的 SFV10 类似，图 11 和图 12 表明，$\Pi_r{}^\star + T_X{}^\star$ 随 r_2 增加；在 $G/H = 1.25$ 的 SFV20 中，除长度尺度小于 λ 的情况外，两点线性输运和/或湍流产生完全不可忽略。（事实上，我们确认不可忽略的是两点湍流产生，而两点线性输运的幅值仍然很小。）

由此以及前面几小节的讨论，我们得出结论：

$$\langle\Pi_r\rangle + \langle T_X\rangle \approx -C\langle\varepsilon\rangle \tag{4.4}$$

适用于以下任一情况：r_1 或 r_2 处于惯性区（其下限由 λ 或 λ 的一部分限定，上限则由介于 $\langle\mathcal{L}_v\rangle$ 与 $\langle\mathcal{L}_v\rangle/2$ 之间的外尺度限定），无量纲常数系数 C 介于 0.6 和 1.0 之间，具体取值取决于尾流及其内部位置；但若双点产生率不可忽略（如 SFV10 的 r_2 依赖关系、$G/H = 2.4$ 和 SFV20 的 $G/H = 1.25$），或者式（4.3）不成立（如 r_1

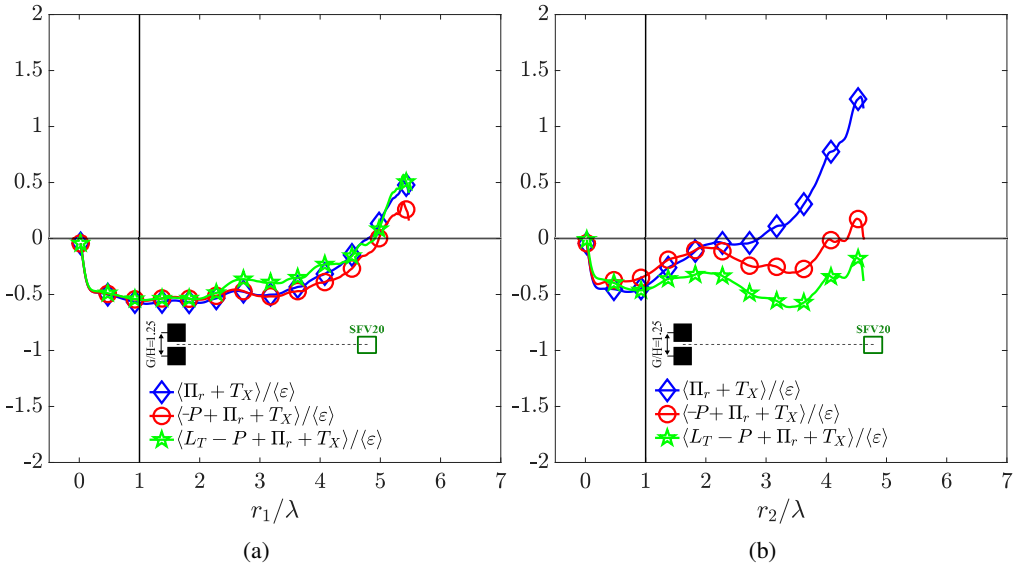


图11：对于构型 $G/H = 1.25$ SFV20 在 $Re_H = 1.0 \times 10^4$ 处，考虑两点产生和线性输运后的归一化逐尺度能量传递率预算图。图中展示了流向（a）和横向（b）分离尺度下的结果。

在 SFV10 中， $G/H = 2.4$ 尾流内的依赖关系，此处两点湍流产生率可忽略）。

顺便可以从图11 和图12 推断出，式4.3的有效性可能对全局雷诺数非常敏感，因为这些图表明，式4.3对于 r_1 和 r_2 在 $Re_H = 1.0 \times 10^4$ 处或多或少成立，但对于 r_2 在 $Re_H = 1.2 \times 10^4$ 处的 SFV20 $G/H = 1.25$ 尾流则不成立。

5. 总结讨论

在本文考察的三个定性湍流尾流中，位于湍流衰减区或接近湍流增长区下游边缘的所有中心线测站处，时空平均空间间湍流传递率都非常显著且为正值，即使局部 Re_λ 达到近500的数值，这种情况一直持续到最小的湍流长度尺度。即使在最小的（受黏性影响的）湍流长度尺度上，也完全没有趋向局部均匀性的倾向。

在所有这些测站，时空平均的尺度间湍流传递率为负，因此其符号与平均空间间湍流传递率相反。在耗散尺度、惯性尺度，甚至大于积分尺度 $\langle \mathcal{L}_v \rangle$时，湍流级联和两点湍流扩散平均而言相互对抗。事实上，平均尺度间传递率与湍流耗散率相当，而且往往快得多。只要非均匀性不是由湍流产生造成的，即两点湍流产生率可忽略，并且两点压力-速度项不会破坏自相似平衡（4.3），那么在惯性长度尺度范围内，空间间与尺度间湍流传递率之和大致为常数（公式（4.4））。该常数介于 -0.6 和 -1.0 之间，具体取值取决于尾流以及尾流内的流向中心线位置。简单的自相似平衡（4.4）实际上

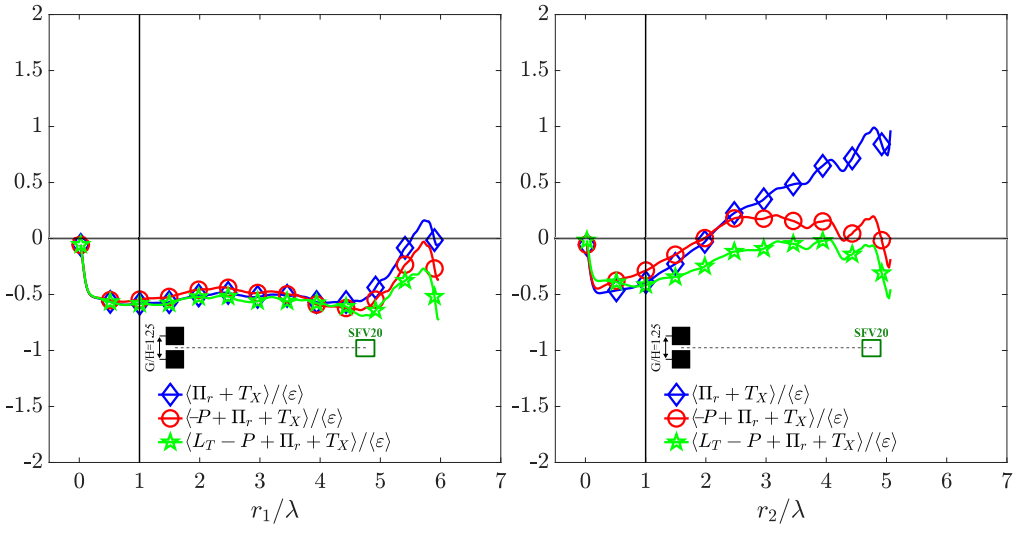


图12：对于构型 $G/H = 1.25$ SFV20，在 $Re_H = 1.2 \times 10^4$ 条件下，考虑两点产生和线性输运后的能量传递率预算归一化逐尺度图。图中分别展示了流向（a）和横流方向（b）的分离尺度。

在我们湍流尾流的湍流衰减区内采样的任一测站，均遵循该平衡关系，且适用于 r_1 和 r_2。

我们对 $G/H = 3.5$ 和 $G/H = 2.4$ 湍流尾流的研究结果还表明，归一化的尺度间和空间间传递率 Π_r/ε 和 T_X/ε 为常数，但在某些情况下会随 r_1, r_2 呈现轻微、可能为线性的变化趋势。Beaumard 等（2024）在带挡板水槽的旋转叶片下方也观察到了类似现象，他们发现的 Π_r/ε 和 T_X/ε 的符号也与本文结果一致。Chen & Vassilicos（2022）和 Beaumard 等（2024）的非均匀湍流理论预测，在非均匀湍流不同位置的两点物理特性相似，且两点湍流产生可忽略的假设下，惯性区中的 Π_r/ε 和 T_X/ε 为常数。因此，该理论还预测惯性区中存在自相似平衡（4.4）。然而，本段开头提到的轻微、可能为线性的变化趋势表明，偏离常数的现象或许意味着需要对该理论进行次阶雷诺数修正。这是目前有待解决的三个开放问题之一。另外两个问题是：（i）什么决定了湍流耗散率；（ii）什么物理机制决定尺度间与空间间湍流传递率是相互促进还是相互抵消。

未来研究可通过考察更广泛尾流类型中的离中心线区域，并将分析扩展至多种非均匀湍流流动，着手解决这些尚待解答的问题，并帮助检验所提理论的适用范围。例如，Gilbert（1980）和 Veeravalli 和 Warhaft（1989）介绍的无剪切混合层，也属于非产生产生项的非均匀性案例：两个湍流强度和／或长度尺度不同的相邻无剪切湍流区域逐渐混合。另一方面，湍流槽道流和零压力梯度边界层中有时被称为对数层的区域，则属于非输运型非均匀性案例：两点湍流产生一直存在于极小尺度，但平均两点跨空间输运为零。在随时间演化的湍流射流产生区中，

Cimarelli 等人（2021）报告称，存在一个中间长度尺度范围，在此范围内，两点跨空间湍流传递与尺度间湍流传递的符号相反（见其图10）。然而，Cimarelli等人（2024）发现，在壁面湍流中所谓的对数层以上，这两种两点传递的符号相同（见其图7）。这种行为差异有待研究和解释；一种可能的思路是将湍流非均匀性划分为少数几类普适类，每一类都由自身完整的理论所支配。归根结底，研究湍流扩散—级联相互作用，为深入理解支配非均匀非定常湍流的物理特性提供了一个有前景的切入点；这类湍流远远超出了 Kolmogorov 平衡框架的假设范围。

致谢。 感谢 Chen 等人 (2021) 允许我们获取本研究分析所用的数据。感谢 C. Cuvier 提供的宝贵讨论。

经费支持。 本研究由欧盟资助（欧洲研究理事会，NoStaHo，101054117）。然而，文中表达的观点和意见仅代表作者本人，并不一定反映欧盟或欧洲研究理事会的立场。欧盟及资助机构均不对此承担责任。

利益声明。 作者声明不存在利益冲突。

数据可用性声明。本研究结果所依据的数据可按需索取。

作者 ORCID。 E. Fuentes-Noriega，https://orcid.org/0000-0002-9931-7061；J.C. Vassilicos, https://orcid.org/0000-0003-1828-6628

参考文献

Alexakis, A. 2023 湍流能扩散多远？《流体力学杂志》**977**, R1. Alves-Portela, F. & Vassilicos, J.C. 2022 自由剪切流中的非均匀湍流标度律。载于第*12*届国际湍流与剪切流现象研讨会（*TSFP12*）论文集, pp. 1–6. Beaumard, P., Braganc.a, P., Cuvier, C., Steiros, K. & Vassilicos, J.C. 2024 非均匀定常湍流中具有 Kolmogorov 型标度律的逐尺度非平衡。《流体力学杂志》**984**, A35. Chen, J.G., Cuvier, C., Foucaut, J.M., Ostovan, Y. & Vassilicos, J.C. 2021 并排方柱尾流中的湍流耗散非均匀性标度律。《流体力学杂志》**924**, A4. Chen, J.G. & Vassilicos, J.C. 2022 非均匀湍流中湍流能量逐尺度标度律。《流体力学杂志》**938**, A7. Cimarelli, A., Angelis, E. De & Casciola, C.M. 2013 湍流槽道流中的能量路径。《流体力学杂志》**715**, 436–451. Cimarelli, A., Angelis, E. De, Jimenez, J. & Casciola, C.M. 2016 湍流槽道流中的级联与壁法向通量。《流体力学杂志》**796**, 417–436. Cimarelli, A., Boga, G., Pavan, A., Costa, P. & Stalio, E. 2024 有界面和无界面的壁面湍流中空间演变的级联。《流体力学杂志》**987**, A4. Cimarelli, A., Mollicone, J.P., Reeuwijk, M. Van & Angelis, E. De 2021 时变平面射流中空间演变的级联。《流体力学杂志》**910**, A19. Foucaut, J.M., George, W.K., Stanislas, M. & Cuvier, C. 2021 湍流边界层中导数矩评估用立体粒子图像测速实验的优化。《流体实验》**62**, 1–15. Frisch, U. 1995 《湍流：*AN Kolmogorov* 的遗产》。剑桥大学出版社。George, W.K. & Hussein, J. 1991 局部轴对称湍流。《流体力学杂志》**233**, 1–23. Germano, M. 2012 湍流场的最简分解。《物理学*D*：非线性现象》**241** (3), 284–287. Gilbert, B. 1980 无平均剪切的网格湍流中的扩散混合。《流体力学杂志》**100** (2), 349–365. Hill, R.J. 2001**434**, 379 388 关联各阶结构函数的方程。《流体力学杂志》– 。

Hill, R. 2002年 使用精确结构函数方程研究湍流趋近局部均匀渐近状态的过程。*arXiv* 预印本 *physics/0206034* 。Kaneda, Y. 2020年 湍流的线性响应理论。《统计力学：理论与实验》**2020年**(3), 034006。Kolmogorov, A.N 1941年 局部各向同性湍流中的能量耗散。载于苏联科学院院刊，第32卷，第19–21页。Laizet, S., Vassilicos, J.C. & Cambon, C. 2013年 衰减湍流中的尺度间能量传递，以及网格生成湍流中的涡量–应变率动力学。《流体动力学研究》**45** (6), 061408。Larssen, H.S. & Vassilicos, J.C. 2023 时空均匀湍流中尺度间及空间间能量传递动力学的脉动。《流体力学杂志》**969**, A14。Lefeuvre, N., Thiesset, F., Djenidi, L. & Antonia, R.A. 2014年 方柱尾流中湍动能耗散率及其替代量的统计特性。《流体物理学》**26** (9)。Lumley, J.L. 1992年 关于湍流的一些评论。《流体物理学 *A*》**4** (2), 203–211。Marati, N., Casciola, C.M. & Piva, R. 2004年 壁面湍流中的能量级联与空间通量。《流体力学杂志》**521**, 191–215。Thiesset, F. & Danaila, L. 2020年 柯尔莫哥洛夫级联假象。《流体力学杂志》**902**, F1。Valente, P.C. & Vassilicos, J.C. 2015年 网格生成非平衡衰减湍流中的能量级联。《流体物理学》**27**(4)。Veeravalli, S. & Warhaft, Z. 1989年 无剪切湍流混合层。《流体力学杂志》**207**, 191–229。

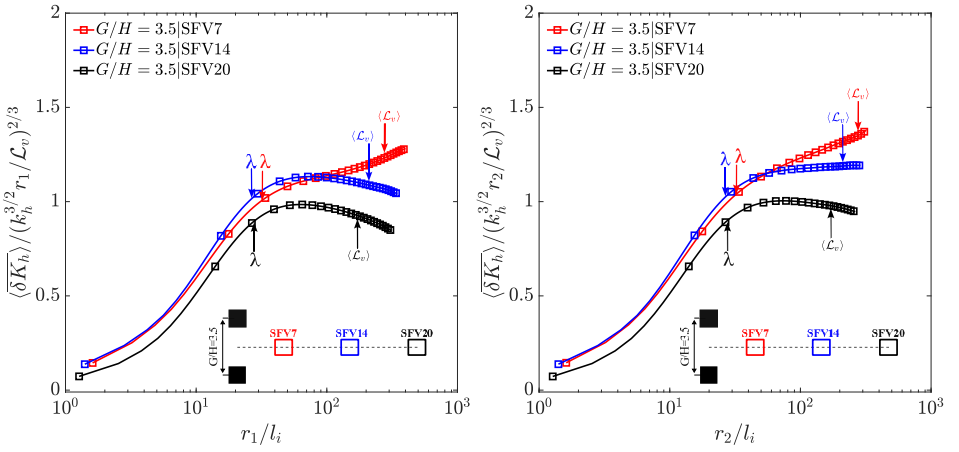
附录 A. δK_h 的逐尺度行为

本附录报告 δK_h 随分离尺度 r_1和 r_2 变化的剖面，这些剖面采用 Chen & Vassilicos（2022）提出的非平衡标度进行归一化。图 13(a,b,c) 中以线性–对数坐标轴绘出了这些剖面，分别对应 $G/H = 3.5$、 $G/H = 2.4$ 和 $G/H = 1.25$ 尾流。除非另有说明，这些剖面对应于 $Re_H = 1.0 \times 10^4$ 全局雷诺数。其他Re_H也得到了几乎相同的结果。Chen & Vassilicos（2022）展示了类似的图，但分别绘制了纵向和横向结构函数随 r_1 变化的情况，并涵盖不同的 X_2 位置。这里，我们报告 δK_h 在 SFV 区域内的平均值随两个分离尺度方向 r_1 和 r_2变化的行为。所得结论与 Chen & Vassilicos（2022）相同。由图 13a 和 13b 的线性–对数图可见，对于 $G_H = 3.5$ 和 $G_H = 2.4$，所分析的 SFV 中泰勒长度与积分尺度之间近一个数量级的范围内似乎正在形成一个近似平台，表明其对长度尺度近似呈 2/3 幂律依赖；不过， $G/H = 3.5$ SFV7 可能略有偏离。 $G/H = 1.25$ 尾流的 SFV20 测站处则显著偏离 2/3 幂律。

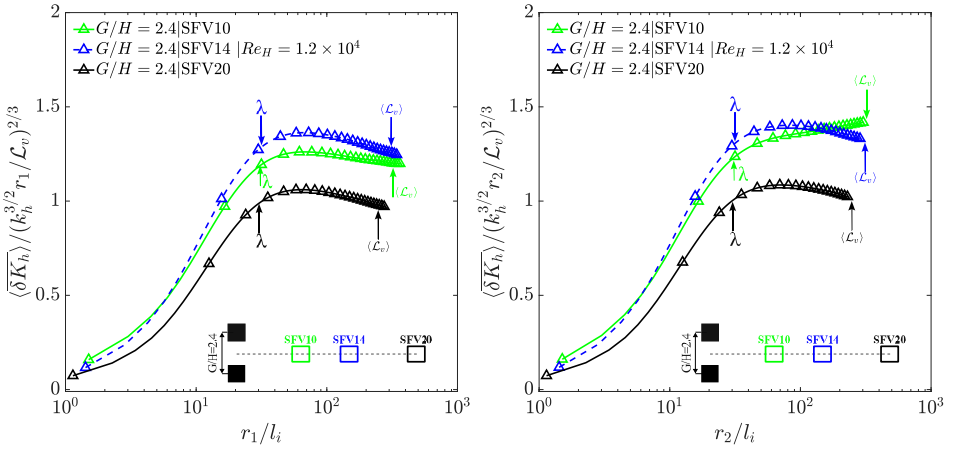
附录 B. 空间间能量传递率：对平均过程及各个项的依赖性

B.1. 对空间平均的依赖性

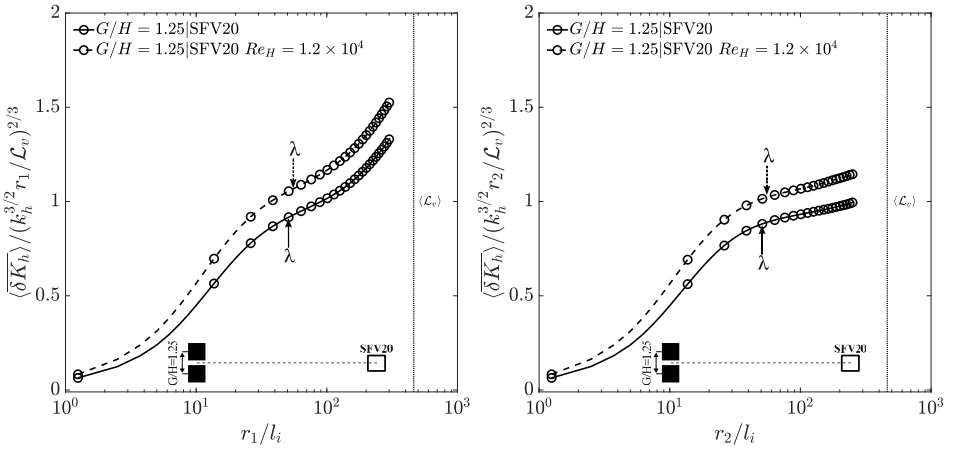
这项实验研究报告的数据经过时间平均（20 000 个不相关样本）以及整个视场的空间平均。后者旨在获得收敛的三阶矩，即以下量的收敛平均值： T_X 和 Π_r ，因为随着分离尺度 r_1 或 r_2增大，双点统计的收敛性会逐渐减弱。下文将通过在视场范围内，以给定 X_1 为基准进行 X_2 直线平均，或在视场范围内，以给定X_2 为基准进行 X_1，来替代空间平均操作，从而评估其影响。图14 和15 展示了平均后的逐尺度图 T_X 和 Π_r ，并以$\langle\varepsilon\rangle$ 归一化，对比全空间平均（针对 X_1



(a) G/H = 3。5



(b) G/H = 2.4



(c) G/H = 1.25

图 13：归一化空间平均双点水平湍动能 δK_h 随 r_1/l_i and r_2/l_i 的变化，其中每个尾流和 SFV 的 $l_i = \mathrm{L}_v R^{-3/4}$ with $R = \sqrt{k_h}\mathrm{L}_v/\nu$。图中标出了所研究的三个尾流中每个 SFV 的泰勒长度 λ 和积分长度尺度 L_v。

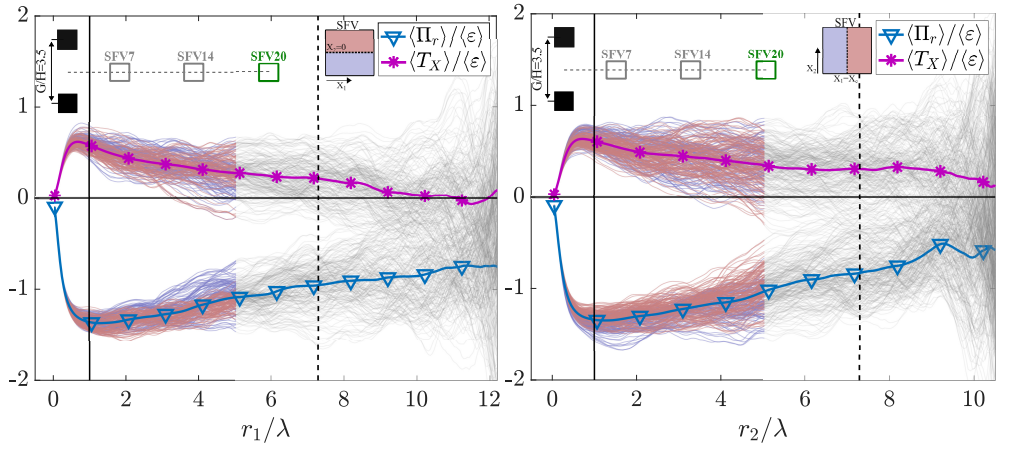


图 14：工况 $G/H = 3.5$ SFV20 在 $Re_H = 1.5 \times 10^4$ 下，对尺度间和空间间能量传递率进行空间平均的分析。图中显示：(a) 在给定 X_2 下沿 X_1 进行线平均的量随 r_1 变化的曲线；(b) 在给定 X_1 下沿 X_2 进行线平均的量随 r_2 变化的曲线。每条细曲线代表 SFV 中的一个不同位置，线平均剖面的颜色根据其相对于 SFV 中心的位置确定。粗品红色线和蓝色线表示完全平均（分别对 X_1 和 X_2 平均）的量。竖直虚线标示 L_v/λ。

以及 X_2）转为线平均量（分别沿 X_1 或 X_2 平均），对应工况 $G/H = 3.5$ 和 $G/H = 2.4$。仅展示全局雷诺数最高且采用 SFV20 的结果，因为这些结果具有代表性，适用于所有其他构型。在小尺度 r_1 或 r_2（此时收敛性最佳）下，显然 T_X 的线平均值并不为零，事实上，在两个尾流中，SFV 内任意位置 X_1 或 X_2 处的线平均值均为正。随着 r_1 和 r_2 增大，收敛性显然减弱，线平均值也因此出现越来越大的波动。如果线平均值是沿视场中心一侧或另一侧的直线计算得到，则相应曲线分别显示为蓝色或红色。红色和蓝色剖面的分布表明，无论是在中心线以上或以下，还是在 SFV 内上游或下游的位置，相对于完全平均量都不存在偏离倾向。这一结果证明了对整个 SFV 使用空间平均算子是合理的，并进一步证实了本研究的一项关键发现：在一系列长度尺度范围内不存在局部均匀性，该范围的下限可达泰勒长度甚至其分数尺度。

B.2. 各空间间传递项

式（T_X 中定义的空间间传递率4.1）由两项组成：

$$T_X \equiv T_{X_1} + T_{X_2} \tag{B 1}$$

其中，$T_{X_1} \equiv \frac{\partial}{\partial X_1} \overline{u'_{X1} \delta K_h}$ 表征流向的非均匀性，$T_{X_2} \equiv \frac{\partial}{\partial X_2} u'_{X2} \delta K_h$ 表征横流方向的非均匀性。~~在本附录~~中，报告了本文研究的每个 SFV 位置处三个尾流各自的贡献 T_{X_1} 和 T_{X_2}。与总空间间传递率相同，每一项都在 SFV 空间内取平均，以获得收敛结果。

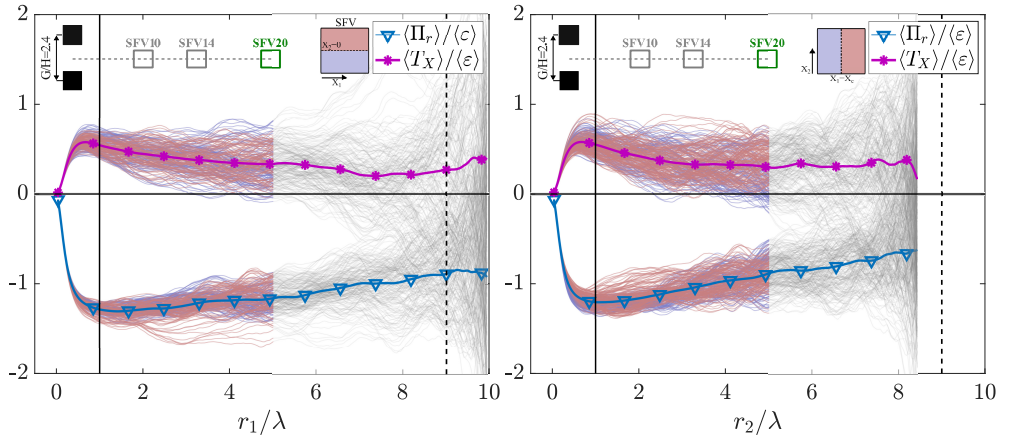


图15：工况 $G/H = 2。4$ SFV20 在 $Re_H = 1。2 \times 10^4$ 下空间平均的尺度间和空间间能量传递率分析。图中展示了：(a) 在给定 X_2 下沿 X_1 进行线平均的量随 r_1 的变化；(b) 在给定 X_1 下沿 X_2 进行线平均的量随 r_2 的变化。每条细曲线代表 SFV 中的一个不同位置，线平均剖面根据其相对于 SFV中心的位置以不同颜色表示。粗品红色线和蓝色线表示完全平均（在 X_1 和 X_2 上）的量。竖直虚线表示 L_v/λ 的位置。

B.2.1. 耦合街道 $G/H = 3.5$ 尾流

图16、图17和图18分别展示了 SFV20、SFV14 和 SFV7 处， $G/H = 3.5$ 时归一化空间间能量传递率 $T_{X_1}^\star = T_{X_1}/\varepsilon$ 和 $T_{X_2}^\star = T_{X_2}/\varepsilon$ 的逐尺度图。结果针对 $Re_H = 1.0 \times 10^4$ 给出。可以发现，在大多数情况下，两项均非零且符号相同（为正），这表明即使在小尺度上，两个方向也都存在非均匀性，且两点湍动能向远离 SFV 的方向传递时，两个方向均发挥作用。对于距离最远的两个位置 SFV14 和 SFV20（图16和图17），在尺度 r_1 （其中 $r_2 = 0$）范围内，$T_{X_1}^\star$ 通常占主导，直至约 L_v；而在所有采样尺度 r_2 （其中 $r_1 = 0$）上，$T_{X_2}^\star$ 是主导项。然而，在 SFV7 处，$T_{X_2}^\star$ 在 r_1 和（尤其是） r_2 两者上均占主导（图18）。

在此工况下，$T_{X_1}^\star$ 在 $r_2 > 5\lambda$ 时呈现较小的负值。

B.2.2. 耦合街道双稳态 $G/H = 2。4$ 尾流

图19、图20和图21分别展示了 $G/H = 3.5$在SFV20、SFV14和SFV7处的归一化空间间能量传递率$T_{X_1}^\star = T_{X_1}/\varepsilon$和$T_{X_2}^\star = T_{X_2}/\varepsilon$的逐尺度图。结果展示了 $Re_H = 1.0 \times 10^4$ 在SFV20和SFV10处以及$Re_H = 1.2 \times 10^4$ 在SFV14处的情况。在所有情况下，$T_{X_1}^\star$ 和 $T_{X_1}^\star$ 在所有可获得尺度上均呈现与总空间间传递率相同的正号。对于最远位置 SFV20，观测结果与 $G/H = 3.5$的结果非常相似。在更靠近方形棱柱的位置，即 SFV14和SFV10处，$T_{X_1}^\star$ 和$T_{X_2}^\star$ 对于 $r_1 > 3\lambda$ 显示出相近的幅值（图20和图21）。然而，$T_{X_2}^\star$ 在所有 r_2 尺度上仍占主导。再次明显观察到两个方向均存在非均匀性，因此湍流也会沿两个方向将两点湍流能量从SFV传递出去。

B.2.3. 接近单个钝体的双稳态 $G/H = 1.25$ 尾流

图 22 展示了两个全局$\langle T_{X_1} \rangle^\star = \langle T_{X_1} \rangle / \langle \varepsilon \rangle$ 和 $\langle T_{X_2} \rangle^\star = \langle T_{X_2} \rangle / \langle \varepsilon \rangle$ 在 $G/H = 1$处的SFV20位置上、归一化空间间能量传递率的逐尺度图，参数为 25

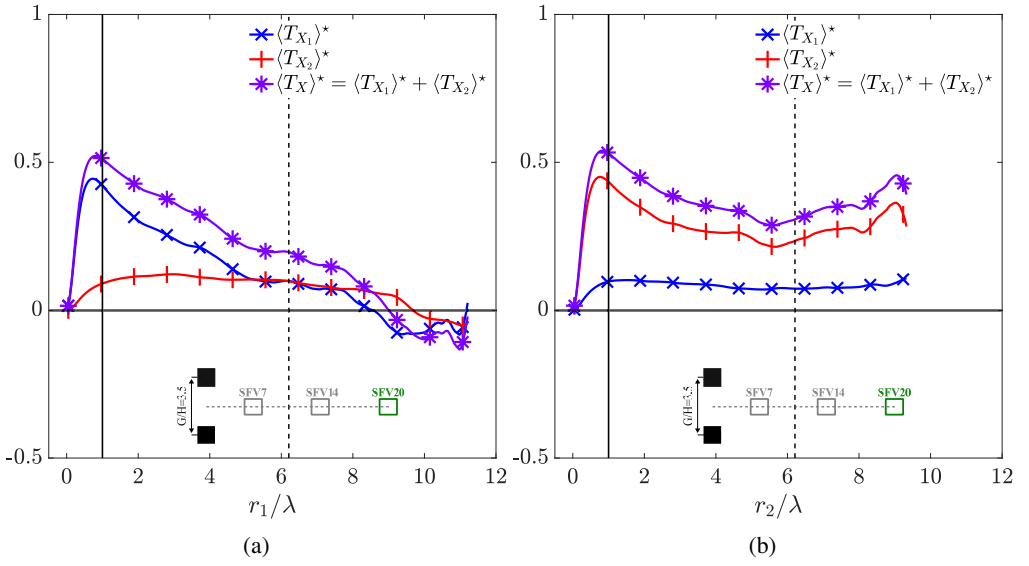


图16：工况 $G/H = 3.5$ SFV20 在 $Re_H = 1.0 \times 10^4$ 时，归一化平均逐尺度空间间能量传递速率项 T_{X_1} 和T_{X_2} 随 r_1 (a)和 r_2 (b)的变化。竖直虚线表示积分长度尺度的位置。

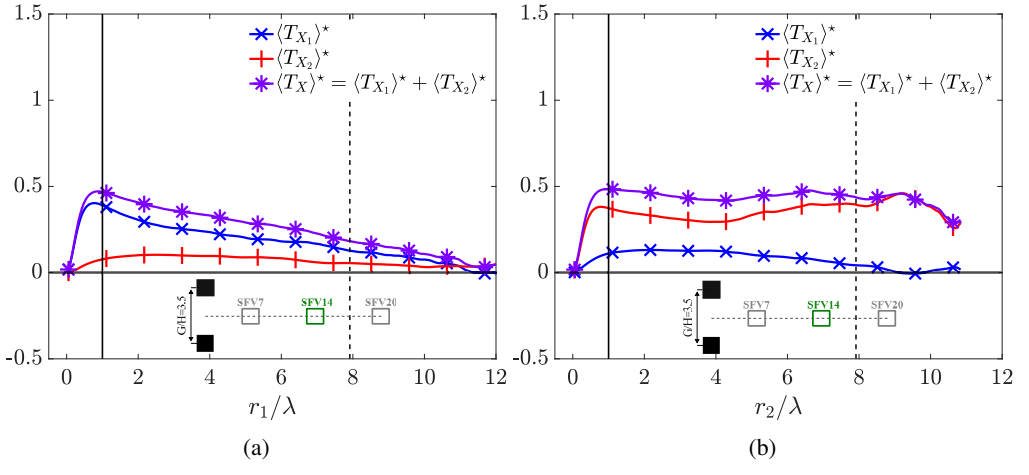


图17：工况 $G/H = 3.5$ SFV14 在 $Re_H = 1.0 \times 10^4$ 时，归一化平均逐尺度空间间能量传递速率项 T_{X_1} 和 T_{X_2} 随 r_1 (a)和 r_2 (b)的变化。竖直虚线表示积分长度尺度的位置。

雷诺数取值为 $Re_H = 1。0 \times 10^4$ 和 $Re_H = 1。2 \times 10^4$。正如第3节末尾和第4.4小节所解释的，$G/H = 1。25$ 尾流中的 SFV20 位置在定性上不同于另外两个尾流中分析的 SFV 位置。有趣的是，正是 T_{X_2} 对空间间传递率的贡献占主导地位，并且随着 r_1 和 r_2 增大而急剧增长；而 T_{X_1} 在超过 $r_1 > 0。5\lambda$ 和 $r_2 > \lambda$ 后达到平台。这表明，在这种情况下，非均匀性主要存在于横流方向，且程度远强于我们在另外两个尾流中分析的 SFV 位置。

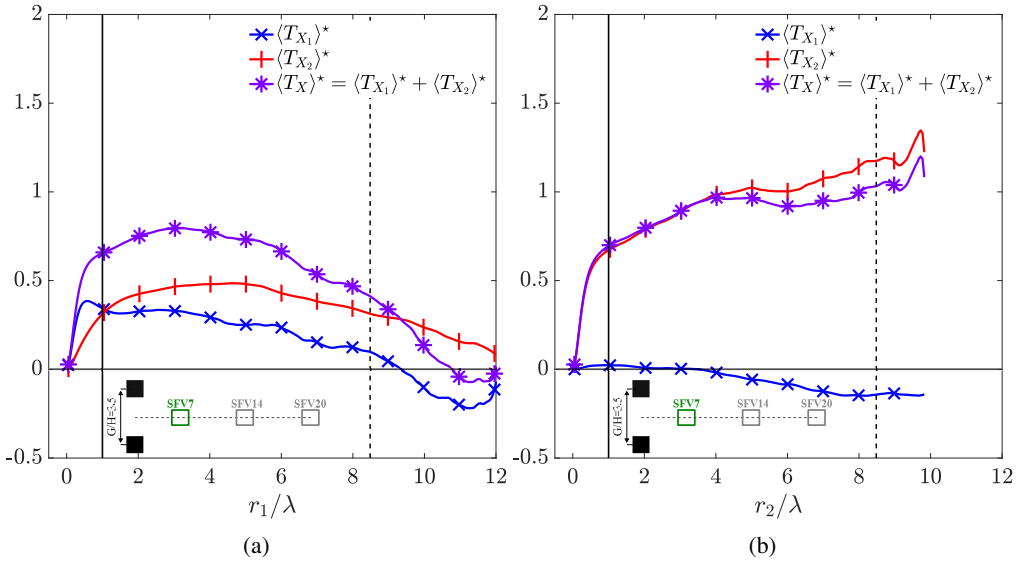


图18：工况 $G/H = 3.5$ SFV7 在 $Re_H = 1.0 \times 10^4$ 下，归一化平均逐尺度空间间能量传递速率项 T_{X_1} 和 T_{X_2} 随 r_1 (a) 和 r_2 (b) 的变化关系。垂直虚线对应积分长度尺度的位置。

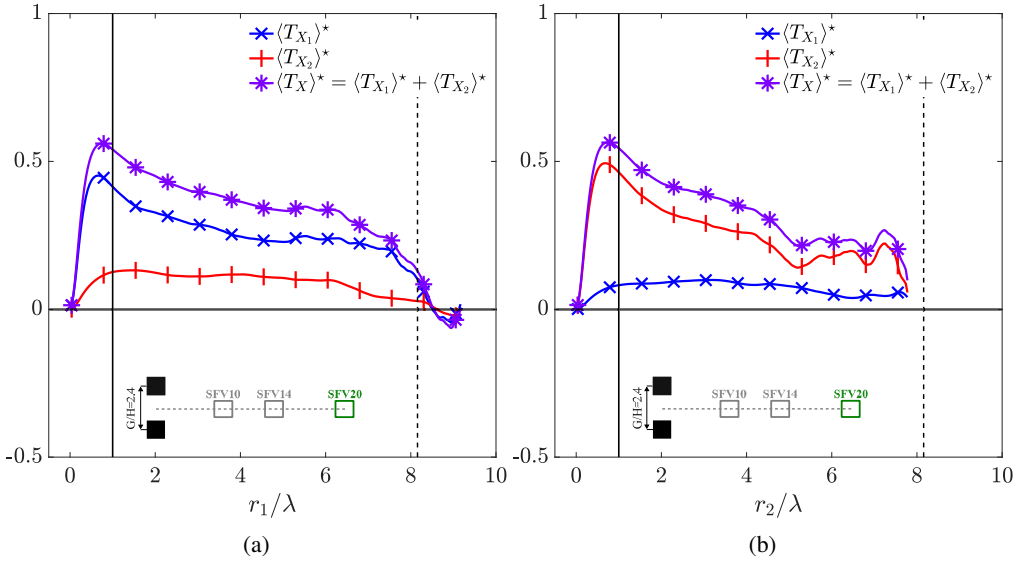


图19：工况 $G/H = 2.4$ SFV20 在 $Re_H = 1.0 \times 10^4$ 下，归一化平均逐尺度空间间能量传递速率项 T_{X_1} 和 T_{X_2} 随 r_1 (a) 和 r_2 (b) 的变化关系。垂直虚线对应积分长度尺度的位置。

附录C。$\langle T_X\rangle$的两点相关性部分

图 23显示了本文研究中所有尾流和 SFV 的两点间隔传递率相关项的平均贡献 $\langle T_X\rangle$，如 §4 所述。对于所有非产生区域，即图 23a-d $Corr$，当分离尺度大于 λ时，其为正，且幅值减小或保持不变。此规则的一个例外是$G/H = 3.5$ 尾流在 SFV7 中的情况（图 23a-b），此时 $Corr$ 随 r_1 增大，且 r_2 从 λ 到 3λ

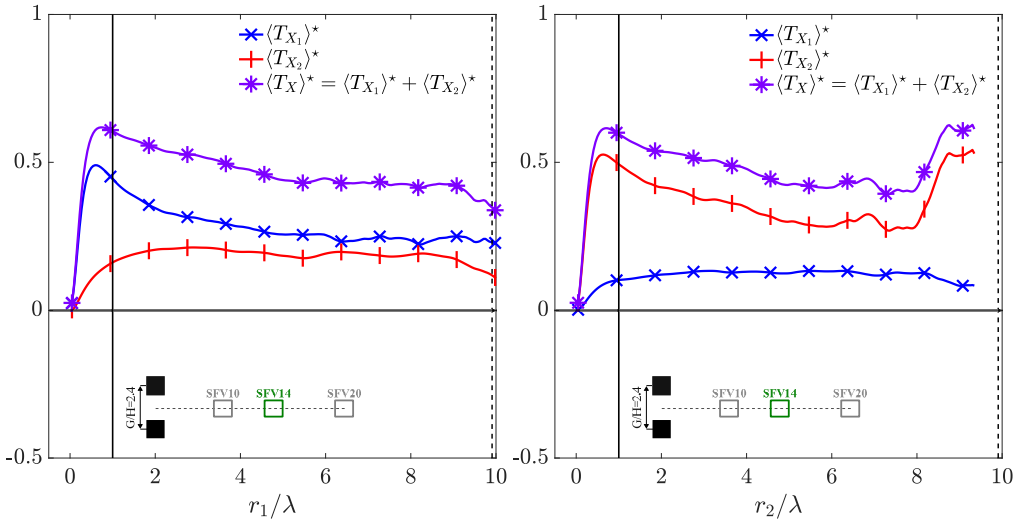


图20：工况 $G/H = 2.4$ 中 SFV14 在 $Re_H = 1.2 \times 10^4$ 时，归一化平均逐尺度空间间能量传递速率项 T_{X_1} 和T_{X_2} 随 r_1 (a) 和 r_2 (b) 的变化。竖直虚线表示积分长度尺度的位置。

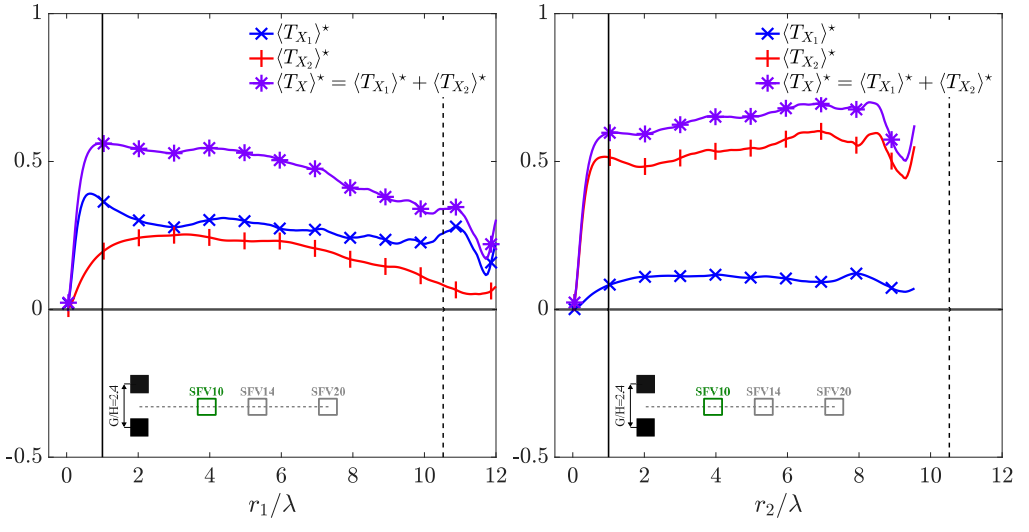


图21：工况 $G/H = 2.4$ 中 SFV10 在 $Re_H = 1.0 \times 10^4$ 时，归一化平均逐尺度空间间能量传递速率项 T_{X_1} 和 T_{X_2} 随 r_1 (a) 和 r_2 (b) 的变化。竖直虚线表示积分长度尺度的位置。

和 4λ，但仍为正。另一方面，如图 23(e-f) 所示， $Corr$为负，且其幅值随 r_1 和 r_2 增大而减小，对 Re_H的两个取值均如此。

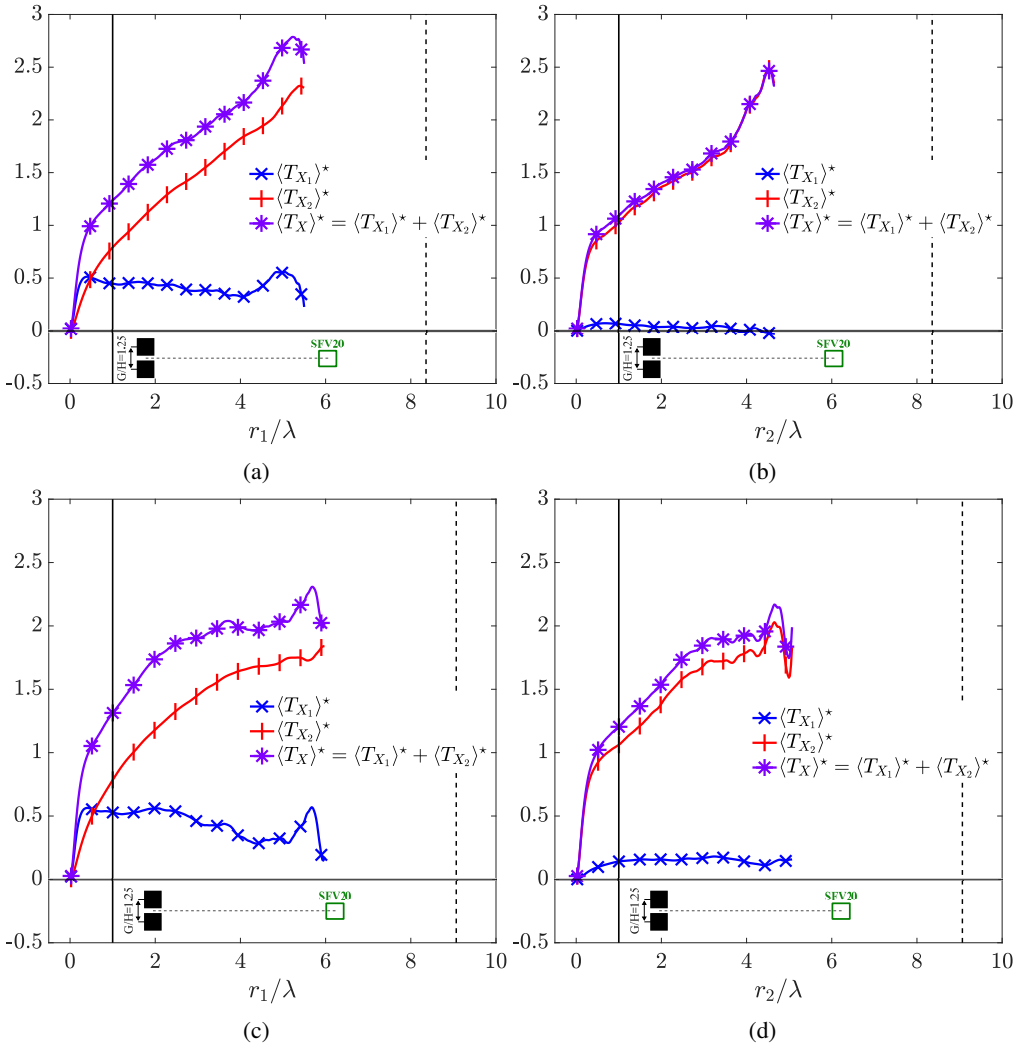


图22：工况 $G/H = 1。25$ SFV20 下，归一化平均逐尺度空间间能量传递速率项 T_{X_1} 和 T_{X_2} 随 r_1 变化的关系图（a）和（b），对应于 $Re_H = 1。0 \times 10^4$ 和 $Re_H = 1。2 \times 10^4$ （c）和（d）。竖直虚线表示积分长度尺度的位置。

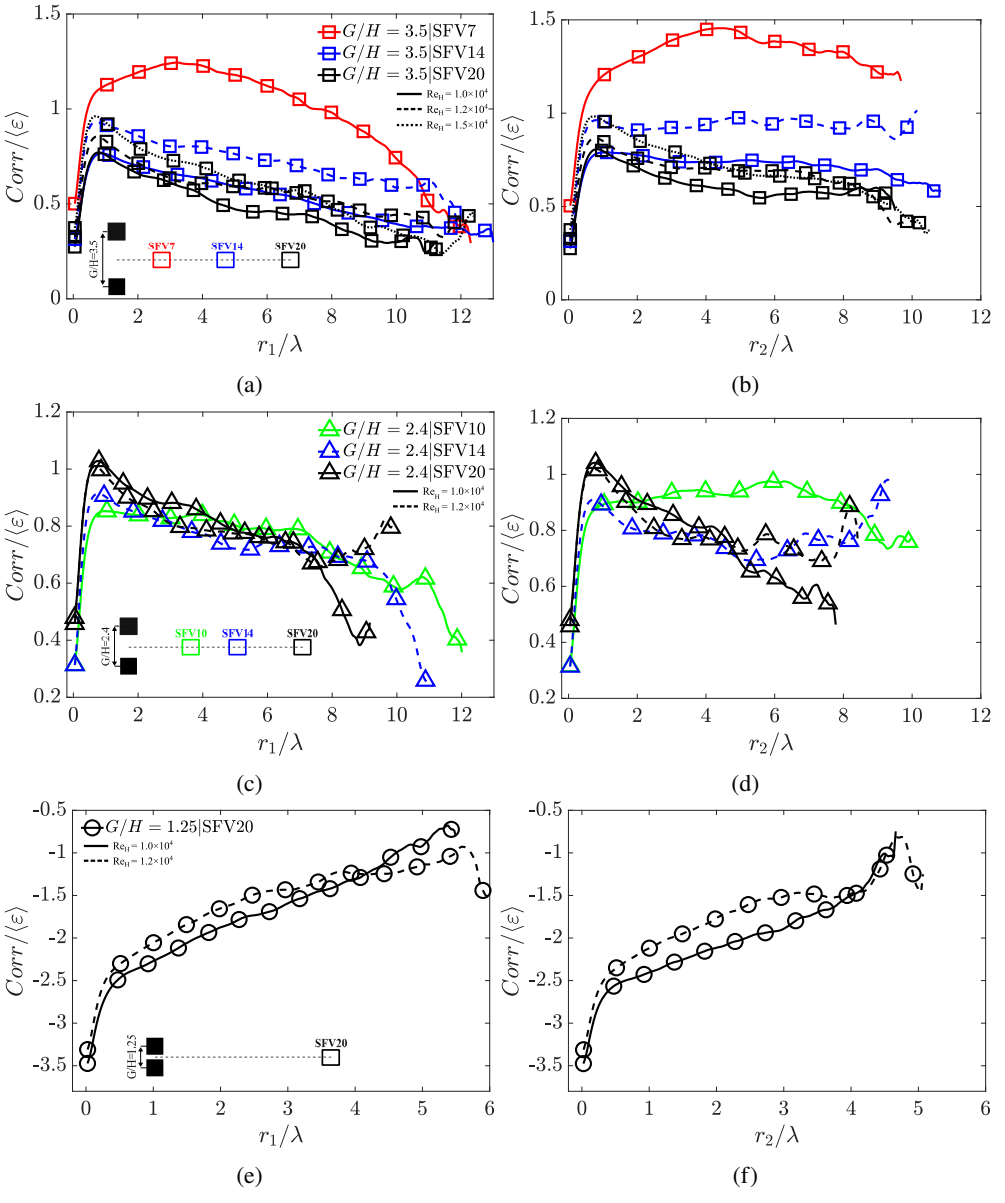


图23：在所研究的 SFV 中，空间间输运项 $Corr = T_X - T^+ - T^-$ 的两点相关性贡献的平均值，以 ε 归一化；(a-b) $G/H = 3.5$，(c-d) $G/H = 2.4$，(e-f) $G/H = 1.25$，涵盖所有可用的 Re_H。