arXiv:2601.04893v1 [math.CA] 8 Jan 2026

调制空间中厄米特展开的收敛性

PHILIPPE JAMING 和 MICHAEL SPECKBACHER

Abstract. 本文旨在给出一个初等证明：函数 f 在调制空间 $M^p(\mathbb{R})$ 中的 Hermite 展开，当 $1 < p < \infty$ 时收敛到 f 在$M^p(\mathbb{R})$ 中；而当 $p = 1, \infty$ 时可能发散。Garling 和 Wojtaszczyk [10] 此前用不同方法证明了 $1 < p < +\infty$ 的情形；Lusky [17] 则在等价的福克空间框架下证明了 $p = 1, \infty$ 的情形。本文还讨论了更高维的结果。

在附录中，我们还给出了厄米特函数的 Zak 变换的上界。

1. Introduction

本文旨在研究厄米特级数在调制空间 $M^p(\mathbb{R}^d)$、$1 \le p < \infty$ 中的收敛性。我们先回顾一下，m 阶厄米特函数定义为

$$h_n(t) = C_n e^{\pi t^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\Big(e^{-2\pi t^2}\Big), \qquad t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0,$$

其中，$C_n = (-1)^n\, 2^{1/4}\big(\sqrt{n!}(2\pi)^n\big)^{-1/2}$ 的选取满足 $\|h_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$。众所周知，$(h_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 是谐振子和傅里叶变换的特征函数构成的一组标准正交基，因此在时频分析中发挥着重要作用。

本文关注的是，在时频分析中，厄米特函数在多大程度上可以用作生成系。更准确地说，由族 $(h_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 的标准正交性可知，任意 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 都可以表示为厄米特函数级数

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, h_n\rangle h_n$$

其中该级数是 L^2-收敛的，也就是说

$$\lim_{N\to\infty} \left\| f - \sum_{n=0}^{N} \langle f, h_n\rangle h_n \right\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0. \tag{1.1}$$

因此，自然会问是否存在其他收敛方式。在这方面，Uspensky [22] 早在一个世纪前就证明了该级数逐点收敛。再过半个世纪，Askey 和 Wainger [1] 证明，在 (1.1) 中，L^2-范数可以替换为 L^p-范数，当且仅当 $4/3 < p < 4$。随后，Thangavelu [19, 20] 证明了这些级数在范围 $4/3 < p < 4$ 之外的 Bochner–Riesz求和性；关于截至 20 世纪 80 年代末这一主题的全面介绍，请参阅他的专著 [21] 。

此后又取得了进一步进展。例如，第一作者与 Karoui 和 Spektor 一起 [15], 证明，厄米特展开对几乎时限且几乎带限函数的逼近效果，与长椭球波函数的逼近效果几乎一样好。因此，也建立了用厄米特展开逼近 Sobolev函数的逼近阶。此外，还可以将 Sobolev

空间与谐振子联系起来（见 [21]）；在这一框架下，Bongionnani 和 Torrea [4] 证明了厄米特级数在此类空间中的收敛性。

这里我们考察时频分析中的另一类自然的函数空间，即 Feichtinger 在 [6, 7] 中引入的调制空间。当 $z=(x,\omega)\in\mathbb{R}^{2d}$，且 $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$ 时，我们将 $\pi(z)f(t)=e^{2i\pi\omega\cdot t}f(t-x)$ 记作 f 的时频移位。记 $\varphi(t)=2^{d/4}e^{-\pi|t|^2}$，$t\in\mathbb{R}^d$ 为标准的 d 维高斯函数，$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ 为缓增分布空间，则调制空间定义如下

$$M^p(\mathbb{R}^d)=\Big\{f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)\,:\,\|f\|^p_{M^p(\mathbb{R}^d)}:=\int_{\mathbb{R}^{2d}}|\langle f,\pi(z)\varphi\rangle|^p\,\mathrm{d}z<\infty\Big\}.$$

当 $p=1$ 时，这给出 Feichtinger代数 [6]。关于 $M^p(\mathbb{R}^d)$ 的性质和应用，我们请读者参阅综述 [8, 2] 以及著作 [12] 和其中的参考文献。首先，我们将分析范围缩小到 $p=d=1$。由于 $M^1(\mathbb{R})\subset L^2(\mathbb{R})$，若 $f\in M^1(\mathbb{R})$，则相应的厄米特级数在 $L^2(\mathbb{R})$ 中收敛，即 (1.1) 成立；但迄今似乎尚不清楚这种收敛是否也在 M^1-范数下成立。据我们所知，唯一相关的结果出自 Janssen，他考察了以下空间

$$C(\gamma)=\Big\{f\in L^2(\mathbb{R})\,:\|f\|_{C(\gamma)}:=\sum_{n=0}^{\infty}|\langle f,h_n\rangle|(1+n)^\gamma<\infty\Big\}$$

并证明了 $C(1/4)\subset M^1(\mathbb{R})\subset C(-1/4)$，但右侧的空间不能再缩小，左侧的空间也不能再扩大，至少在 $C(\gamma)$ 尺度内如此。更准确地说，他证明了以下结论。

定理1.1（Janssen [16]）。存在 A_γ，使得对每个 $f\in C(\gamma)$，$\|f\|_{M^1(\mathbb{R})}\le A_\gamma\|f\|_{C(\gamma)}$ 当且仅当 $\gamma\ge 1/4$。
存在 $B_\gamma>0$，使得对每个 $f\in M^1(\mathbb{R})$，$B_\gamma\|f\|_{C(\gamma)}\le B_\gamma\|f\|_{M^1(\mathbb{R})}$ 当且仅当 $\gamma\le -1/4$。

此外，当 $\gamma>-1/4$ 时，$M^1(\mathbb{R})\not\subset C(\gamma)$；当 $\gamma<1/4$ 时，$C(\gamma)\not\subset M^1(\mathbb{R})$。

因此，这表明，$M^1(\mathbb{R})$中的收敛性不能完全由厄米基中的系数来描述。这里我们证明，Hermite 级数在 $M^1(\mathbb{R}^d)$中不收敛，因此根据对偶性，在 $M^\infty(\mathbb{R})$中也不收敛。然而，当 p 处于中间范围 $1<p<\infty$时，该级数在$M^p(\mathbb{R}^d)$中收敛。

我们将部分厄米展开算子定义如下：

$$S_Nf:=\sum_{n=0}^{N}\langle f,h_n\rangle h_n.$$

本文的主要结果如下：

定理 1.2. 设 $1\le p\le\infty$。存在一个常数 $C=C_p$，使得对任意 $N\in\mathbb{N}$

$$\big\|S_Nf\big\|_{M^p(\mathbb{R})}\le C\|f\|_{M^p(\mathbb{R})},\qquad f\in M^p(\mathbb{R}),\tag{1.2}$$

当且仅当 $1<p<\infty$。对于 $p=1$，存在常数 c、$C>1$，使得

$$\big\|S_N\big\|_{M^1(\mathbb{R})\to M^1(\mathbb{R})}\ge C\log(cN),\tag{1.3}$$

特别地，

（1）对于每个 $f\in M^p(\mathbb{R})$ $1<p<\infty$，$\lim_{N\to\infty}S_Nf=f$属于 $M^p(\mathbb{R}^d)$；（2）存在 $f\in M^1(\mathbb{R})$，使得$\|S_Nf\|_{M^2(\mathbb{R})}\to\infty$，因此 S_Nf不收敛到 f 中的 $M^1(\mathbb{R})$。

我们可以将定理 1.2 重新解读为关于某些全纯函数空间中泰勒展开收敛性的结果。为了建立这一联系，我们先回顾函数 f 的巴格曼变换定义为

$$\mathcal{B}f(z) = 2^{1/4} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{2\pi z t - \pi t^2 + \pi z^2/2} \, \mathrm{d}t, \quad z \in \mathbb{C},$$

并注意到，巴格曼变换是调制空间 $M^p(\mathbb{R})$ 与（巴格曼）福克空间之间的等距同构

$$\mathcal{F}^p(\mathbb{C}) := \Big\{ F : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ holomorphic: } \|F\|_{\mathcal{F}^p(\mathbb{C})} := \int_{\mathbb{C}} |F(z)|^p e^{-\pi p |z|^2/2} dz < \infty \Big\}.$$

注意到.....之后，下面的推论便可直接由定理 1.2 得出

$$\mathcal{B}h_n(z) = \Big(\frac{\pi}{n!}\Big)^{n/2} z^n.$$

推论 1.3（Garling-Wojtaszczyk [10], Lusky [17]）。设 $1 \le p < \infty$. 部分泰勒展开

$$T_N F(z) = \sum_{n=0}^{N} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

当且仅当 $1 < p < \infty$ 时，对每个 $F \in \mathcal{F}^p(\mathbb{C})$，该展开关于 $\|\cdot\|_{\mathcal{F}^p(\mathbb{C})}$ 收敛

这个推论并非新结果，当然也等价于定理 1.2。事实上，情形 $1 < p < \infty$ 可见于 [10, 命题 7]，以及 [17, 定理 2.1]；而情形 $p = 1$ 则是 [17, 定理 2.3],，不过在 [17] 中，它采用了略有不同的表述方式，形式也更加一般。然而，这些结果似乎在时频分析领域一直鲜为人知[1]。除弥合这一知识空白外，我们还给出了一种更直接、仅使用初等工具的替代证明。对于范围 $1 < p < \infty$，我们对 (1.2) 的证明依赖于 [3, 命题 4.3]，该命题揭示了厄米特乘子在 $M^p(\mathbb{R}^d)$ 上的有界性与傅里叶乘子在 $L^p(\mathbb{T}^d)$ 上的有界性之间的联系。这一思路在 [10] 中隐约可见。作为补充结果，我们还借此研究厄米特级数的 Bochner-Riesz 均值。

命题 1.4. 设 $1 \le p < \infty$ 和 $f \in M^p(\mathbb{R})$。若 $\alpha > 0$，则 Bochner-Riesz 均值

$$B_N^\alpha f := \sum_{n=0}^{N} \Big(1 - \frac{|n|^2}{N^2}\Big)^\alpha \langle f, h_n \rangle h_n$$

当 $N \to \infty$ 时，在 $M^p(\mathbb{R})$ 中收敛到 f。

在本引言中，我们将分析范围限定为实线上的函数的调制空间。然而，我们的结果可以直接推广到任意维空间中以厄米特函数张量积为基的展开。我们将在第 3 节讨论这一点。

本文其余部分安排如下：第 2 节证明主要结果，第 3 节讨论高维扩展。

在这个 arXiv 版本中，我们还在附录 A 中给出了 Zak 变换的一个界，从而回答了 H. Bahouri 最初向我们其中一人提出的问题。这是 Gabor 分析中一些广为人知的结果和方法的一个初等推论。此后，H. Bahouri 和 V. Fischer 已在一篇即将发表的论文中用不同的方法证明了同一结果。

[1]例如，在 2024年于汉诺威举办的量子调和分析研讨会以及在维也纳举办的 SampTA 2025 会议期间的讨论中，几位同事提到这是一个尚未解决的问题。

2. Proof of Main Results

本文的目的是证明定理 1.2。在给出证明之前，我们需要先确立一个关于某些三角多项式的 L^1-范数的辅助结果，该结果或许本身也具有独立的研究价值。

定义如下

$$P_N(t,\phi) \;=\; \sum_{n=0}^{N} \frac{t^n}{n!} e^{i\phi n} \qquad t>0,\ \phi\in[0,2\pi].$$

定理 2.1. 对于每个 $N\in\mathbb{N}_0$ 和 $t\geq 1$，均有

$$\frac{\log(t)\,t^N}{N!} - \frac{30\,e^t}{\sqrt{t}} \leq \int_0^{2\pi} \big|P_N(t,\phi)\big|\;\mathrm{d}\phi \leq \frac{\pi}{2}\,\frac{\log(\pi^2\,t)\,t^N}{N!} + \frac{30\,e^t}{\sqrt{t}}. \tag{2.1}$$

证明。注意，对于 $N=0$，(2.1) 显然成立。因此，以下假设 $N\geq 1$。我们将证明分为几个简单步骤。首先进行一个预备步骤，给出后续需要的界。

步骤 1. 两个简单的界。

我们将使用关于阶乘的经典逐点斯特林界（例如，[18])

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \tag{2.2}$$

对 $n\geq 1$ 有效。

我们还需要以下初等几何界

$$\frac{2}{\pi}\,\phi \leq |1-e^{i\phi}| = 2\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \leq \phi, \qquad \phi\in[0,\pi].$$

等价地，对于 $\phi\in(0,\pi]$,

$$\frac{1}{\phi} \leq \frac{1}{|1-e^{i\phi}|} \leq \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\phi}. \tag{2.3}$$

步骤 2. 结果的重新表述。

记作

$$p_n(t) := \frac{e^{-t}t^n}{n!}, \qquad n\in\mathbb{N}_0,$$

因此，$\{p_n(t)\}_{n\geq 0}$ 是泊松分布(t)的概率，并且

$$e^{-t}P_N(t,\phi) = \sum_{n=0}^{N} p_n(t)\,e^{in\phi}.$$

因此，可以将 e^t 从（2.1）中提取出来，只需证明不等式

$$\frac{\log(t)t^Ne^{-t}}{N!} - \frac{30}{\sqrt{t}} \leq \int_0^{2\pi} e^{-t}\big|P_N(t,\phi)\big|\;\mathrm{d}\phi \leq \frac{\pi}{2}\frac{\log(\pi^2\,t)t^Ne^{-t}}{N!} + \frac{30}{\sqrt{t}}. \tag{2.4}$$

步骤 3. 重新求和。

对于任意有限序列 $q_0,q_1,\ldots,q_N$ 和 $z\neq 1$，均有

$$(1-z)^2\sum_{n=0}^{N} q_nz^n = \sum_{m=0}^{N+2} r_mz^m, \tag{2.5}$$

with

$$\begin{cases} r_0 := q_0, \\ r_1 := q_1 - 2q_0, \\ r_m := q_m - 2q_{m-1} + q_{m-2}, \quad \text{for } 2 \le m \le N, \\ r_{N+1} := -2q_N + q_{N-1}, \\ r_{N+2} := q_N. \end{cases} \tag{2.6}$$

将 (2.5) 应用于 $q_n = p_n(t)$ 并重新排列，可得 $z = e^{i\phi}$

$$\sum_{n=0}^{N} p_n(t) e^{in\phi} = \frac{1}{(1-e^{i\phi})^2} \sum_{n=0}^{N+2} r_n(t) e^{in\phi}, \qquad \phi \notin 2\pi\mathbb{Z}. \tag{2.7}$$

接下来，我们定义 $\phi_0 := 1/\sqrt{t}$，并且

$$I_N(t) := \int_{\phi_0}^{\pi} \left| \sum_{n=0}^{N} p_n(t) e^{in\phi} \right| \mathrm{d}\phi = \int_{\phi_0}^{\pi} \frac{1}{|1-e^{i\phi}|^2} \left| \sum_{n=0}^{N+2} r_n(t) e^{in\phi} \right| \mathrm{d}\phi.$$

由于

$$\left| \sum_{n=0}^{N} p_n(t) e^{in\phi} \right| \le \sum_{n=0}^{N} |p_n(t)| \le 1,$$

由此立即可得

$$2I_N(t) \le \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=0}^{N} p_n(t) e^{in\phi} \right| \mathrm{d}\phi \le 2I_N(t) + \frac{2}{\sqrt{t}}.$$

因此，只需对 I_N 进行上下界估计。为此，我们现在将和式 $\sum_{n=0}^{N+2} r_n(t) e^{in\phi}$ 分解为两部分：项 $n = N+1, N+2$将证明是主导项，而对 $0 \le n \le N$求和所得的其余部分则是余项。

第4步. 主导项的估计。

我们首先写出

$$\begin{aligned} r_{N+1}(t) + e^{i\phi} r_{N+2}(t) &= p_{N-1}(t) - 2p_N(t) + p_N(t) e^{i\phi} \\ &= \big(e^{i\phi} - 1\big) p_N(t) + p_{N-1}(t) - p_N(t) \\ &= \big(e^{i\phi} - 1\big) p_N(t) + \frac{N-t}{t} p_N(t). \end{aligned}$$

第二项的绝对值可作如下估计

$$p_N(t) \frac{|N-t|}{t} \le \frac{1}{t} \cdot \sup_{x>0} \big\{ p_N(x) |N-x| \big\} \le \frac{1}{t}, \quad t > 0. \tag{2.8}$$

为证明这一估计，首先注意到上确界在两个局部极大值之一 $x_\pm = N + \frac{1}{2} \pm \sqrt{N + \frac{1}{4}}$ 处取得。借助 (2.2)，我们可以估计

$$\begin{aligned} \frac{e^{-x_+} x_+^N}{N!} |N - x_+| &\le e^{-1/2 - \sqrt{N+1/4}} \left(1 + \frac{1}{N} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{N + \frac{1}{4}}\right)\right)^N \frac{\sqrt{N+1/4} + 1/2}{\sqrt{2\pi N}} \\ &\le e^{-1/2 - \sqrt{N+1/4} + N \log(1+\delta)}, \end{aligned}$$

其中 $\delta = \big(1/2 + \sqrt{N+1/4}\big)/N$，并且我们利用了对于 $N \ge 1$，有 $\big(\sqrt{N+1/4} + 1/2\big)/\sqrt{2\pi N} \le 1$。由于对每个 $\delta > -1$，$\log(1+\delta) \le \delta$，我们推得

$$\frac{e^{-x_+} x_1^N}{N!} |N - x_1| \le 1.$$

对于 x_-，我们采用类似的论证，只不过这次令 $\delta = \big(1/2 - \sqrt{N+1/4}\big)/N > -1$.

接着应用下三角不等式和上三角不等式，可得以下界

$$\big|1-e^{i\phi}\big|p_N(t) - \frac{1}{t} \le \big|r_{N+1}(t) + e^{i\phi} r_{N+2}(t)\big| \le \big|1-e^{i\phi}\big|p_N(t) + \frac{1}{t}. \tag{2.9}$$

步骤 5. 余项的估计。

注意，对于 $2 \le n \le N$， $r_n(t)$ 是泊松概率 $p_n(t) = e^{-t}t^n/n!$ 的二阶有限差分。简单计算可得，对于 $2 \le n \le N$

$$r_n(t) := p_n(t) - 2p_{n-1}(t) + p_{n-2}(t) = p_n(t)\,\frac{(n-t)^2 - n}{t^2}.$$

因此

$$\sum_{n=2}^{N} \big|r_n(t)\big| \le \frac{1}{t^2} \sum_{n\ge 0} p_n(t)\big|(n-t)^2 - n\big| = \frac{1}{t^2}\,\mathbb{E}\big[\,|(X-t)^2 - X|\,\big],$$

其中 $X \sim$ 服从泊松分布(t)。利用三角不等式以及 X 的矩，我们得到粗略估计

$$\mathbb{E}\big[\,|(X-t)^2 - X|\,\big] \le \mathbb{E}\big[(X-t)^2 + X\big] = \mathrm{Var}(X) + \mathbb{E}[X] = t + t = 2t.$$

因此，我们得到如下简单的界

$$\sum_{n=2}^{N} \big|r_n(t)\big| \le \frac{2}{t}. \tag{2.10}$$

另一方面

$$|r_0(t) + e^{i\phi} r_1(t)| \le |r_0(t)| + |r_1(t)| \le 3|p_0(t)| + |p_1(t)| \le (3+t)e^{-t},$$

容易看出，对于 $t \ge 1$，它小于 $2/t$。结合 (2.10)，可得

$$\sum_{n=2}^{N} |r_n(t)| + |r_0(t) + e^{i\phi} r_1(t)| \le \frac{4}{t}. \tag{2.11}$$

第 6 步。(2.4) 中的界。

由 (2.3)、(2.7)、(2.9)、(2.11) 及反三角不等式可得

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{n=0}^{N} p_n(t) e^{in\phi}\right| \\
&\qquad \ge \frac{1}{|1-e^{i\phi}|^2}\left(\big|r_{N+1}(t) + e^{i\phi} r_{N+2}(t)\big| - \sum_{n=2}^{N} |r_n(t)| - |r_0(t) + e^{i\phi} r_1(t)|\right) \\
&\qquad \ge \frac{1}{|1-e^{i\phi}|} p_N(t) - \frac{1}{|1-e^{i\phi}|^2}\,\frac{5}{t} \ge \frac{1}{\phi} p_N(t) - \frac{5\pi^2}{4\phi^2 t}, \qquad \phi_0 \le \phi \le \pi.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

类似地，用三角不等式代替反三角不等式，并在 (2.3) 中使用上界代替下界，可得

$$\left|\sum_{n=0}^{N} p_n(t) e^{in\phi}\right| \le \frac{\pi}{2\phi} p_N(t) + \frac{5\pi^2}{4\phi^2 t}, \qquad \phi_0 \le \phi \le \pi.$$

对 ϕ 积分后得到

$$I_N(t) \ge \int_{\phi_0}^{\pi} \left[\frac{1}{\phi} p_N(t) - \frac{5\pi^2}{4\phi^2 t}\right] \mathrm{d}\phi = \big(\log(\pi) - \log(\phi_0)\big) p_N(t) - \frac{5\pi^2}{4t}\left(\frac{1}{\phi_0} - \frac{1}{\pi}\right)$$

$$\geq \frac{1}{2}\log(t)p_N(t) - \frac{5\pi^2}{4\sqrt{t}} \geq \frac{1}{2}\log(t)p_N(t) - \frac{15}{\sqrt{t}},$$

其中我们在最后一步代入了 $\phi_0 = 1/\sqrt{t}$，并去掉了无用的正项。此外，

$$\begin{aligned} I_N(t) &\leq \int_{\phi_0}^{\pi} \left[\frac{\pi}{2\phi}p_N(t) + \frac{5\pi^2}{4\phi^2 t}\right] \mathrm{d}\phi = \frac{\pi}{2}\big(\log(\pi) - \log(\phi_0)\big)p_N(t) + \frac{5\pi^2}{4t}\left(\frac{1}{\phi_0} - \frac{1}{\pi}\right) \\ &\leq \frac{\pi}{4}\log(\pi^2 t)p_N(t) + \frac{5\pi^2}{4\sqrt{t}}, \end{aligned}$$

注意到 $5\pi^2/2 + 2 \leq 30$. 后，证明即告完成

□

为证明范围为 $1 < p < \infty$ 的定理 1.2，我们需要以下结果。该结果将 $M^p(\mathbb{R}^d)$ 上厄米特乘子的有界性与具有相同符号的傅里叶乘子在 $L^p(\mathbb{T}^d)$ 上的有界性联系起来。

命题 2.2。（[3, 命题 4.3]）设 $1 \leq p < \infty$、$m\colon \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}$ 且 $g\colon \mathbb{T}^d \to \mathbb{C}$。如果由 $\widehat{A_m g}(n) := m(n)\widehat{g}(n)$ $n \in \mathbb{Z}^d$ 给出的傅里叶乘子 A_m 在 $L^p(\mathbb{T}^d)$ 上定义了一个有界算子，那么具有符号 $m|_{\mathbb{N}_0^d}$ 的厄米特乘子由下式给出

$$H_m f = \sum_{n \in \mathbb{N}_0^d} m(n)\langle f, h_n\rangle h_n,$$

在 $M^p(\mathbb{R}^d)$ 上有界，其中

$$\|H_m f\|_{M^p(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|A_m\|_{L^p(\mathbb{T}^d)\to L^p(\mathbb{T}^d)} \|f\|_{M^p(\mathbb{R}^d)}$$

现在我们可以证明定理 1.2。

定理 1.2 的证明。我们通过 $z = (x, \omega) \in \mathbb{R}^2 \sim z = x + i\omega \in \mathbb{C}$. 将相空间 $\mathbb{R}^2$ 与 $\mathbb{C}$ 对应起来。根据拉盖尔联系（例如，参见 [9, 定理 1.104]），可得

$$\langle \pi(z)h_0, h_n\rangle = e^{\pi i x\xi - \pi|z|^2/2}\sqrt{\frac{\pi^n}{n!}}z^n, \qquad z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}_0.$$

因此，对于 $w = y + i\eta$

$$\sum_{n=0}^{N} \langle \pi(z)h_0, h_n\rangle\langle h_n, \pi(w)h_0\rangle = e^{\pi i(x\xi - y\eta)}e^{-\pi(|z|^2+|w|^2)/2}\sum_{n=0}^{N}\frac{(\pi z\overline{w})^n}{n!}, \tag{2.13}$$

若设 $|z| = r$ 和 $|w| = t$，则通过换成极坐标可得

$$\begin{aligned} \big\|S_N(\pi(z)h_0)\big\|_{M^1(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{C}} \left|\sum_{n=0}^{N}\langle \pi(z)h_0, h_n\rangle\langle h_n, \pi(w)h_0\rangle\right| \mathrm{d}w \\ &= \int_{\mathbb{C}} e^{-\pi(|z|^2+|w|^2)/2}\left|\sum_{n=0}^{N}\frac{(\pi w\overline{z})^n}{n!}\right| \mathrm{d}w \\ &= \int_0^{\infty} te^{-\pi(r^2+t^2)/2}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{n=0}^{N}\frac{(\pi rt)^n}{n!}e^{i\phi n}\right| \mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\infty} te^{-\pi(r^2+t^2)/2}\int_0^{2\pi}|P_N(\pi rt, \phi)|\ \mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

现在我们令 $z_N = \sqrt{N/\pi}$ 并假设 $N \geq 3$。应用变量代换$\rho = \sqrt{\pi}t$ 和定理 2.1，便得到

$$\big\|S_N(\pi(z_N)h_0)\big\|_{M^1(\mathbb{R})} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\rho e^{-(\rho^2+N)/2}\int_0^{2\pi}\left|P_N\big(\sqrt{N}\rho, \phi\big)\right| \mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho$$

$$\geq \frac{1}{\pi}\int_{\sqrt{N}-1}^{\sqrt{N}+1} \rho e^{-(\rho^2+N)/2}\int_0^{2\pi}\left|P_N\big(\sqrt{N}\rho,\phi\big)\right|\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho$$
$$\geq \frac{1}{\pi}\int_{\sqrt{N}-1}^{\sqrt{N}+1} \rho e^{-(\rho^2+N)/2}\left(\frac{\log(\rho\sqrt{N})(\rho\sqrt{N})^N}{N!}-\frac{30\,e^{\rho\sqrt{N}}}{(\rho\sqrt{N})^{1/2}}\right)\mathrm{d}\rho.$$

注意，由于对于每个 $\rho\in[\sqrt{N}-1,\sqrt{N}+1]$ 以及 $N\geq 3$.都有 $\rho\sqrt{N}\geq 1$，因此我们可以应用定理 2.1

接下来我们证明以下辅助不等式：存在 $C>0$，使得对每个 $N\geq 3$

$$\frac{e^{-t}t^{N+1/2}}{N!}\geq\frac{1}{4e},\qquad |t-N|\leq\sqrt{N}. \tag{2.14}$$

注意，映射 $t\mapsto e^{-t}t^{N+1/2}$ 仅在 $t^*=N+1/2$ 处有一个局部最大值。因此，要验证 (2.14)，只需检查 $t_\pm=N\pm\sqrt{N}$ 时的不等式。由斯特林近似 (2.2)，我们由此得到 t_+

$$\frac{e^{-N-\sqrt{N}}(N+\sqrt{N})^{N+1/2}}{N!}\geq e^{-\sqrt{N}-1}\left(1+1/\sqrt{N}\right)^{N+1/2}\geq\frac{1}{2e}.$$

类似地，对于 t_-

$$\frac{e^{-N+\sqrt{N}}(N-\sqrt{N})^{N+1/2}}{N!}\geq e^{\sqrt{N}-1}\left(1-1/\sqrt{N}\right)^{N+1/2}\geq\frac{1}{4e}.$$

因此，

$$\begin{aligned}\big\|S_N(\pi(z_N)h_0)\big\|_{M^1(\mathbb{R})}&\geq\frac{1}{\pi}\int_{\sqrt{N}-1}^{\sqrt{N}+1}\rho e^{-(\rho^2+N)/2}\left(\frac{\log(\rho\sqrt{N})}{4e}-30\right)\frac{e^{\rho\sqrt{N}}}{(\rho\sqrt{N})^{1/2}}\mathrm{d}\rho\\&\geq\frac{1}{4e\pi}\int_{\sqrt{N}-1}^{\sqrt{N}+1}\sqrt{\frac{\rho}{\sqrt{N}}}e^{-(\rho-\sqrt{N})^2/2}\log\left(\frac{\rho\sqrt{N}}{120e}\right)\mathrm{d}\rho\\&\geq\frac{1}{4e\pi}\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{N}}}\log\left(\frac{N-\sqrt{N}}{120e}\right)\int_{-1}^{1}e^{-t^2/2}\mathrm{d}t\\&\geq\frac{1}{4e^{3/2}\pi}\log\left(\frac{N}{360e}\right)\gtrsim\log(cN),\end{aligned}$$

其中我们用到了：当 $N\geq 3$ 时，$N-\sqrt{N}\geq N/3$。由于对每个 $z\in\mathbb{C}$，$\|\pi(z)h_0\|_{M^1(\mathbb{R})}=\|h_0\|_{M^1(\mathbb{R})}$，因此可得

$$\|S_N\|_{M^1(\mathbb{R})\to M^1(\mathbb{R})}\gtrsim\log(cN),$$

由此完成了对 (1.3) 的证明。根据 Banach–Steinhaus 定理，存在一个元素 $f\in M^1(\mathbb{R})$，其 Hermite 展开在 $M^1(\mathbb{R})$ 中不收敛。

为了证明 S_N 在 $M^p(\mathbb{R})$ 上的一致有界性，$1<p<\infty$，我们首先注意到傅里叶部分和

$$\sum_{-N\leq n\leq N}\widehat{f}(n)e^{2\pi i\xi\cdot n},\qquad \xi\in[0,1], \tag{2.15}$$

可以写成一个符号为

$$m_N(n)=\chi_{[-N,N]}(n),\qquad n\in\mathbb{Z}.$$

由马塞尔·里斯不等式可知，式 (2.15) 中的傅里叶部分和在 $L^p(\mathbb{T})$ 上一致有界。由命题 2.2 可得，厄米特乘子族 H_{m_N} 在 $M^p(\mathbb{R})$ 上范数一致有界。但 H_{m_N} 无非就是 S_N，由此即完成证明。□

3. Convergence in higher dimensions

在高维情形下，我们考虑张量积厄米特函数，其定义为

$$h_n(t) = h_{(n_1,n_2,\dots,n_d)}(t_1,t_2,\dots,t_d) = \prod_{j=1}^{d} h_{n_j}(t_j), \qquad n \in \mathbb{N}_0^d,\ t \in \mathbb{R}^d.$$

我们通过以下方式定义部分厄米展开算子

$$S_N f := \sum_{0\le n_1,\dots,n_d\le N} \langle f, h_n\rangle h_n.$$

推论 3.1. 设 $1 \le p \le \infty$。存在常数 $C = C_{p,\ d}$ 使得对每个 $N \in \mathbb{N}$

$$\big\|S_N f\big\|_{M^p(\mathbb{R}^d)} \le C\|f\|_{M^p(\mathbb{R}^d)}, \qquad f \in M^p(\mathbb{R}^d), \tag{3.1}$$

当且仅当 $1 < p < \infty$。对于 $p = 1$，存在常数 $c > 1$，使得

$$\big\|S_N\big\|_{M^1(\mathbb{R}^d)\to M^1(\mathbb{R}^d)} \gtrsim_d \log(cN)^d, \tag{3.2}$$

特别地，对于每个 $f \in M^p(\mathbb{R}^d)$ $1 < p < \infty$，$\lim_{N\to\infty} S_N f = f$在 $M^p(\mathbb{R}^d)$ 中，且存在 $f \in M^1(\mathbb{R}^d)$ 使得 $\lim_{N\to\infty} S_N f \ne f$在 $M^1(\mathbb{R}^d)$ 中。

证明。对于 $d \ge 2$，只需考虑序列 $z_N = (\sqrt{N}, ..., \sqrt{N}, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^{2d}$，并注意到

$$\begin{aligned} S_N\big(\pi(z_N)h_{(0,\dots,0)}\big) &= \sum_{0\le n_1,\dots,n_d\le N} \prod_{k=1}^{d} \big\langle \pi\big(\sqrt{N},0\big)h_0, h_{n_k}\big\rangle h_{(n_1,\dots,n_d)} \\ &= \bigotimes_{k=1}^{d} S_N\big(\pi(\sqrt{N},0)h_0\big). \end{aligned}$$

因此，我们得到 (1.3)：

$$\begin{aligned} \big\|S_N\big(\pi(z_N)h_{(0,\dots,0)}\big)\big\|_{M^1(\mathbb{R}^d)} &= \big\|S_N\big(\pi\big(\sqrt{N},0\big)h_0\big)\big\|_{M^1(\mathbb{R})}^d \\ &\gtrsim \log(CN)^d\|h_0\|_{M^1(\mathbb{R})}^d = \log(CN)^d\|h_{(0,\dots,0)}\|_{M^1(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

为证明 S_N 在 $M^p(\mathbb{R}^d)$，$1 < p < \infty$ 上的一致有界性，我们首先注意到，傅里叶部分和

$$\sum_{-N\le n_1,\dots,n_d\le N} \widehat{f}(n)e^{2\pi i\xi\cdot n}, \qquad \xi \in [0,1]^d, \tag{3.3}$$

可以写成一个傅里叶乘子 A_{m_N}，其符号为

$$m_N(n) = \chi_{[-N,N]}(n_1)\cdot\ldots\cdot\chi_{[-N,N]}(n_d), \qquad n \in \mathbb{Z}^d.$$

众所周知，(3.3) 中的傅里叶部分和在 $L^p(\mathbb{T}^d)$ 上一致有界（例如参见 [11, 第 4.1] 节）；由命题 2.2 可知，这意味着厄米特乘子族 H_{m_N} 在 $M^p(\mathbb{R}^d)$ 上一致范数有界。但 H_{m_N} 不过就是 S_N，至此证明完毕。□

我们对 (1.2) 的证明依赖于 [3, 命题 4.3]，该命题建立了 $M^p(\mathbb{R}^d)$ 上厄米特乘子的有界性与 $L^p(\mathbb{T}^d)$ 上傅里叶乘子之间的联系。这也使我们能够研究厄米特级数的 Bochner-Riesz 均值。

命题 1.4 是下述结果的一个特例。

命题 3.2. 设 $1 \le p < \infty$, $f \in M^p(\mathbb{R}^d)$ 和 $(x)_+ := x \cdot \chi_{[0,\infty)}(x)$。若$\alpha > (d-1)\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right|$, 则 Bochner-Riesz 均值

$$B_R^\alpha f := \sum_{n \in \mathbb{N}_0^d} \left(1 - \frac{|n|^2}{R^2}\right)_+^\alpha \langle f, h_n\rangle h_n$$

当 $R \to \infty$ 时，在 f $M^p(\mathbb{R}^d)$ 中收敛。

证明。由于当 $\alpha > (d-1)\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right|$ 时，傅里叶乘子族 A_{m_R}（其中 $m_R(n) = (1 - |n|^2/R^2)_+^\alpha$）在 $L^p(\mathbb{T}^d)$ 上一致有界（例如参见 [11, 命题 4.1.9]），由命题 2.2 可立即得出结论。□

注 3.3. 由于 [3, 命题 4.3] 仅给出了厄米特乘子有界性的一个充分条件，因此，某些能生成无界傅里叶乘子的符号是否也会导致无界厄米特乘子，仍是一个尚未解决的问题。一个值得考虑的自然例子是 Fefferman 关于球乘子的著名反例 [5]。由此引出以下问题：对于 p 的哪些取值范围，Hermite 展开中的球形部分和序列，

$$\mathring{S}_N f := \sum_{n \in \mathbb{N}_0^d,\, |n| \le N} \langle f, h_n\rangle h_n$$

在 $M^p(\mathbb{R}^d)$ 中收敛?

Appendix A. Upper frame and Bessel bounds of Gabor systems associated to Hermite Functions

本附录不用于正式发表。

在本附录中，我们回答 H. Bahouri 向我们其中一人提出的一个问题，即厄米特函数的 Zak 变换的上界。虽然这一结果似乎未曾以这种形式写出，但它可由 Gabor 分析中的标准结果和技术推导得出。我们决定为论文的 arXiv 版本撰写本附录，以供日后参考。

A.1. 结果陈述。

记号 A.1. 对于 $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ 一个格，我们记

$$\mathrm{rel}(\Lambda) = \max_{x \in \mathbb{R}^2} |\Lambda \cap (x + [0,1)^2)|$$

Λ 在单位正方形中的最大点数。注意，$\mathrm{rel}(\mathbb{Z}^2) = 1$。

由 h_n 和 Λ 生成的 Gabor 系统定义如下:

$$\mathcal{G}(h_n, \Lambda) = \{\pi(\lambda) h_n \,:\, \lambda \in \Lambda\}.$$

本节旨在估计 $\mathcal{G}(h_n, \Lambda)$ 的上框架界和上贝塞尔界。

定理 A.2. 存在一个普适常数 C，使得对于每个格$\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ 以及每个 $n \in \mathbb{N}_0$,

(1) for every $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \left|\langle f, \pi(\lambda) h_n\rangle\right|^2 \le C\,\mathrm{rel}(\Lambda)(n+1)^{1/2}\|f\|_2^2;$$

(2) 对于每个 $a=(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\in\ell^2(\Lambda)$,

$$\left\|\sum_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda\pi(\lambda)h_n\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\le C\,\mathrm{rel}(\Lambda)(n+1)^{1/2}\|a\|_2^2.$$

回顾一下，函数 $f\in L^2(\mathbb{R})$ 的 Zak 变换定义为

$$Zf(x,y)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}f(x+k)e^{2i\pi kx}.$$

众所周知，窗函数 g 的 Zak 变换的上界和下界，与相应 Gabor 系统$\mathcal{G}(g,\mathbb{Z}^2)$ 的框架界有关。特别地，由 [12, 推论 8.3.2]

$$\sup_{\|f\|=1}\sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^2}\left|\langle f,\pi(\lambda)g\rangle\right|^2=\|Zg\|_{L^\infty([0,1]^2)},$$

我们可以直接推出以下界[2]:

推论 A.3. 有

$$\|Zh_n\|_{L^\infty([0,1]^2)}\lesssim(n+1)^{1/4}.$$

A.2. 定理 A.2 的证明。我们将使用引言末尾回顾过的 Bargman 变换的基本性质。证明的关键是以下关于厄米特函数 $M^1(\mathbb{R})$-范数的简单估计，该估计已由 A.E.J.M. Janssen 证明:

引理 A.4。当 $n\to\infty$,

$$\|h_n\|_{M^1(\mathbb{R})}=(2^3\pi)^{1/4}\,n^{1/4}\big(1+O(n^{-1})\big).$$

证明。利用 Gabor 变换的性质并在极坐标下积分，我们有

$$\begin{aligned}\|h_n\|_{M^1(\mathbb{R})}&=\int_{\mathbb{C}}|\mathcal{B}[h_n](z)|e^{-\pi|z|^2/2}\,\mathrm{d}z=\frac{1}{\sqrt{n!}}\int_{\mathbb{C}}(\pi^{1/2}|z|)^ne^{-\pi|z|^2/2}\,\mathrm{d}z\\&=\frac{2\pi}{\sqrt{n!}}\int_0^\infty(\pi^{1/2}r)^ne^{-\pi r^2/2}\,r\mathrm{d}r\\&=2\frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n!}}\int_0^\infty s^{\frac{n}{2}+1}e^{-s}\,\frac{\mathrm{d}s}{s}=2\frac{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma(n+1)^{\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

作变量替换 $r=\sqrt{\frac{2}{\pi}}s$。接下来，我们应用斯特林公式

$$\Gamma(x+1)=\sqrt{2\pi}e^{-x}x^{x+\frac{1}{2}}\big(1+O(x^{-1})\big)$$

得到

$$\|h_n\|_{M^1(\mathbb{R})}\quad=\quad2\left(\frac{\pi}{2}n\right)^{1/4}\big(1+O(n^{-1})\big)$$

如所述。 □

定理 A.2 随即由以下引理 [14, 引理 2.1] 直接推出:

引理 A.5（Gr¨ochenig-Lyubarskii）。若 $\|\varphi\|_{M^1}<\infty$ 则

[2]这回答了 H. Bahouri 向我们其中一人提出的问题。我们感谢她激发了我们对这一问题的兴趣。

(1) 对每个 $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \left|\langle f, \pi(\lambda)\varphi\rangle\right|^2 \leq C\,\mathrm{rel}(\Lambda)\|\varphi\|_{M^1}^2\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2;$$

对每个 $a=(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \ell^2(\Lambda)$,

$$\left\|\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda \pi(\lambda)\varphi\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq C\,\mathrm{rel}(\Lambda)\|\varphi\|_{M^1}^2\|a\|_2^2.$$

Acknowledgements

作者没有需要披露的相关财务或非财务利益。

作者感谢 H. Bahouri、H. Feichtinger 和 K. Gr¨ochenig 指出了本文所探讨的问题，并就相关主题进行了宝贵的交流。

本研究部分获得法国国家研究署（ANR）资助，合同编号为 ANR-24-CE40-5470；并通过项目 10.55776/PAT1384824 获得奥地利科学基金（FWF）的资助。

为实现开放获取，作者已对本次投稿所产生的任何经作者认可的稿件版本采用 CC BY 公共版权许可。

References

[1] R. Askey & S. Wainger, *Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series*。《美国数学杂志》87（1965），695–708。[2] E. Berge *A brief introduction to the Feichtinger algebra* S_0（ $\mathbb{R}$ 2106 11287 ）。arXiv：。，

[3] D. G. Bhimani R. Balhara & and S. Thangavelu *Hermite multipliers on modulationspaces. In*《分析与偏微分方程：来自发展中国家的视角》，编者：J. Delgado 和 M. Ruzhansky，Springer International Publishing，尚，2019。

[4] B. Bongioanni & J. L. Torrea, *Sobolev spaces associated to the harmonic oscillator*。《印度科学院学报（数学科学）》116（2003），337–360。[5] C. Fefferman,

The multiplier problem for the ball.《数学年刊》94(2)（1971），330–336。[6] H. G. Feichtinger,

On a new Segal algebra.《月刊数学》92（1981），269–289。[7] H. G. Feichtinger,

Modulation spaces on locally compact abelian groups. 技术报告，维也纳大学（1983）。

[8] H. G. Feichtinger, *Modulation spaces: Looking back and ahead*。《采样理论、信号处理与数据分析》5（2006），109–140。[9] G. B. Folland, *Harmonic Analysis in Phase Space*。普林斯顿大学出版社，1989。[10] D. J. H. Garling & P. Wojtaszczyk *Some Bargmann spaces of analytic functions*, 见*tion Spaces. The Second Conference* **172**。《纯粹与应用数学讲义》（Marcel Dekker，1995），123–138。[11] L. Grafakos,

Classical Fourier Analysis。第3版，施普林格，纽约，2014。[12] K. Gröchenig,

Foundations of Time-Frequency Analysis。Birkh¨auser，波士顿，2001。

[13] K. Gröchenig & Y. Lyubarskii, *Gabor frames with Hermite functions*。《巴黎科学院学报，第一辑》344（2007），157–162。[14] K. Gröchenig & Y. Lyubarskii,

Gabor (super)frames with Hermite functions。《数学年刊》345（2009），267–286。[15] Ph. Jaming, A. Karoui & S. Spektor, *The approximation of almost time and band limited functions by their expansion in some orthogonal polynomials bases.* **212**。《逼近理论杂志》（2016），41–65。[16] A.E.J.M. Janssen,

Hermite function description of Feichtinger's space S_0。《傅里叶分析与应用杂志》11（2005），577–588。[17] W. Lusky, *On the Fourier series of unbounded harmonic functions*。《伦敦数学学会杂志》61（2000），568–580。[18] H. Robbins, *A remark on Stirling's formula*。《美国数学月刊》62（1955），26–29。[19] S. Thangavelu, *Summability of Hermite expansions I*。《美国数学会会刊》314（1989），119–142。[20] S. Thangavelu, *Summability of Hermite expansions II*。《美国数学会会刊》314（1989），143–170。[21] S. Thangavelu, *Lectures on Hermite and Laguerre Expansions*。《数学札记》第42卷，普林斯顿大学出版社，1993。

[22] J. V. Uspensky, *On the development of arbitrary functions in series of Hermite's and Laguerre's polynomials.* 2 **28** 1927 593 619

《数学年刊》（）（），–。（P.J.）Université de Bordeaux, CNRS, Bordeaux INP, IMB, UMR 5251, F-33400 Tal-ence, France*Email address*: philippe.jaming@math.u-bordeaux.fr,
（M. S.）Acoustics Research Institute, Austrian Academy of Sciences, Dominikanerbastei 16, 1010 Vienna, Austria*Email address*: michael.speckbacher@oeaw.ac.at