arXiv:2601.04901v1 [cs.MS] 8 Jan 2026

单层级一线性微分方程的斯托克斯乘子的严格数值计算

Michèle Loday-Richaud [1]、Marc Mezzarobba [2] 和 Pascal Remy [3]

Abstract.— 我们介绍一种实用算法，用于计算具有多项式系数、在单层级一不规则奇点处的线性微分方程的斯托克斯乘子。该算法沿用基于博雷尔求和和数值常微分方程求解的经典方法，但与直接实现相比，可避免大量冗余工作。此算法适用于任意阶微分方程，不需要任何一般性假设，并适合高精度计算。此外，我们还介绍了该算法在 SageMath 计算机代数系统中的开源实现，并通过若干示例展示其用法。我们的实现支持任意精度计算，并会自动给出严格误差界。本文假设读者对亚纯微分方程的渐近理论了解甚少，并对线性斯托克斯现象作了基础介绍，这部分内容或许也具有独立的参考价值。

引言

本文旨在介绍一种实用算法，用于数值计算线性微分

关键词：线性微分方程、斯托克斯乘子、可求和性、算法、软件、严格计算。2020年 数学主题分类：34M03, 34M30, 34M35, 34M40, 65G20。(1) Université Paris-Saclay、CNRS、Laboratoire de mathématiques d'Orsay，91405，Orsay，法国。— michele.loday@universite-paris-saclay.fr(2) CNRS-LIX，1 rue Honoré d'Estienne d'Orves - Bâtiment Alan Turing CS35003 - 91120 Palaiseau，法国 — marc@mezzarobba.netMM 的研究部分得到了 ANR 项目 ANR-20-CE48-0014-02 (NuSCAP) 和 ANR-22-CE48-0016 (NODE) 的资助。(3) Laboratoire de Mathématiques de Versailles、UVSQ (Paris-Saclay) 和 CNRS (UMR 8100)，45 avenue des Etats-Unis, 78035 Versailles cedex，法国 — pascal.remy@uvsq.fr

方程 $Dy(x) = 0$ 的系数属于 $\mathbb{C}[x]$，并假设 D在所关注的奇点处具有单层且等于一（定义1.1，第9页）。

斯托克斯现象是一种不连续现象。长期以来，关注数值计算的物理学家观察到，当变量从不同方向趋近奇点时，解析函数的渐近行为会发生这种现象。对于线性微分方程的解而言，这种现象源于渐近展开中指数因子的出现：这些因子在某些方向上是平坦的，在另一些方向上则呈指数级增长。在平坦扇区的边界（斯托克斯方向）处，给定解的渐近展开可能会突然改变，尽管解本身并未出现不连续。不过，分析斯托克斯现象时，更适合考察平坦扇区的平分线，即所谓的反斯托克斯 或奇异 方向。理解斯托克斯现象，归根结底就是刻画在反斯托克斯方向附近相互重叠的扇区上，具有相同渐近展开的解析解之间的差异。经过适当归一化(1)后，这些差异可由有限个常数矩阵来描述，称为斯托克斯矩阵。

从斯托克斯本人对艾里方程的研究开始，直到 20 世纪 70 年代，对斯托克斯现象的研究主要集中于计算具有显式解的微分方程的斯托克斯乘子（斯托克斯矩阵中的非平凡元素），这些解通常以积分公式给出。这主要涉及超几何方程这一类方程，包括广义超几何方程，其解可用巴恩斯–梅林积分 [14]表示。由于梅林变换能将这些方程转化为一阶差分方程，因此这种方法成为可能。

从理论角度看，Sibuya 和 Malgrange 开创的上同调方法彻底阐明了线性斯托克斯现象 [42], , 并以 Stokes 余循环 [37,39, 1]对其进行了刻画。在这项研究中，斯托克斯矩阵主要被视为通过亚纯规范变换对线性微分方程进行分类时的超越局部不变量。Stokes 余循环的引入清楚地说明了如何在一般情形下选取一组无冗余的斯托克斯矩阵——每个反斯托克斯方向对应一个。上同调框架还带来了一种确定斯托克斯乘子的新方法，

(1)在较早的文献中，斯托克斯矩阵 这一名称用于指代连接任意一对渐近于同一形式基本解的解析基本解的矩阵。此处，按照现代用法，我们将这一名称专用于表示下文所述斯托克斯余循环各分量的矩阵。

该方法本质上源于 Malgrange-Sibuya 同构定理与其基于柯西-海涅积分的无穷小版本之间的比较。随后，斯托克斯乘子可表示为快速收敛的线性递归数列的极限。该方法仅针对单层线性方程进行了发展，适用于低阶方程或满足一般性假设的方程 [35, 44, 41, 36]。（其他参考文献见 [41] 。）

与此同时，20世纪80年代发展起来的几种可求和性理论以及复苏理论 [15, 16, 17] 为研究斯托克斯乘子提供了另一条途径。在这种方法中，每个斯托克斯矩阵都是通过比较给定形式解在反斯托克斯方向两侧的求和结果而得到的。在单层级一的奇点处，经典的博雷尔-拉普拉斯求和法足以导出求和结果的积分公式，并可用于计算斯托克斯乘子。 [40,定理 4 给出了单一 1 级线性微分系统的斯托克斯乘子的显式公式 3] （另见 [22]）。对于多层级的情形，则需要更强大的求和理论。Écalle加速法 [17, 7, 18] 是第一种适用于有效计算的此类理论。另一种也曾在实践中使用的方法是 Balser迭代拉普拉斯积分法 [3]。

从 1990 年代初开始，Thomann 和几位合著者开始探索求和方法在线性微分方程发散解数值计算中的应用。他们展示了如何将符号计算技术与经典数值方法相结合，实现 Borel-Laplace 方法及其扩展，并用这些方法对发散解求和 [57, 50, 58, 34, 20] 或计算斯托克斯矩阵 [19]。据我们所知，他们的工作是唯一一项超越针对特定示例进行临时实现的工作。然而，部分由于数值方法的选择，这些工作大多局限于机器精度的计算，且只适用于阶数较低、斯托克斯值和局部指数足够一般的方程。此外，遗憾的是，他们的软件并未公开。

van der Hoeven [26, 28] 基于Écalle加速法，提出了一种完整的算法，用于计算线性微分方程的解的和，其系数为多项式。该算法针对高精度计算进行了优化；特别是，它能以至多 2^{-p} 的误差，在$\mathrm{O}(p\log^{3+\mathrm{o}(1)} p)$时间内计算给定方程的斯托克斯乘子。此外，该算法还给出了数值结果与数学值之间差异的严格界(2)。这是目前最完整的算法，

(2)这与典型的数值方法形成对比：这类方法至多只能保证，当参数如

用于处理线性微分方程发散解求和问题，但尚未得到全面实现[3]。

在本研究中，我们着重于斯托克斯乘子的计算，而非更一般的求和计算问题，并将研究范围限定在具有单一一级、且该级等于一的奇点。针对这一情形，我们详细描述并完整实现了一种算法，用于计算系数属于 $\mathbb{Q}[x]$ 的线性微分方程的斯托克斯矩阵。除此之外不作任何限制；特别是，该算法适用于任意阶方程，且不对斯托克斯值的几何分布或指标多项式的形式作任何假设。

该方法与 Fauvet、Richard-Jung 和 Tho- mann [19], 的方法非常相似，但我们的算法更为完备，无需用户干预即可处理任意退化情形，并能给出严格误差界。与 van der Hoeven 的方法不同，我们以特殊函数表示取代了对全纯函数积分变换的数值计算。对于本文考虑的特殊情形，这使得高精度下的计算复杂度估计略有改善。与所有现有方法相比，实践中更重要的区别在于，我们会注意避免在计算同一方程的多个斯托克斯乘子时出现冗余。

与几乎所有用于计算斯托克斯乘子的算法一样，我们开发的算法结合了精确计算与近似计算。粗略地说，必须精确确定博雷尔平面中斯托克斯值的几何关系以及奇点处局部指数的结构（见第 2.3 节和第 4 节），因为需要判断斯托克斯值何时共线，或局部指数之差何时为整数。计算的其余部分以数值方式完成，但如前所述，同时给出严格误差界。原则上，可以费力地事先确定计算的每一步需要达到多高的精度，才能使最终结果满足给定的误差容限；然而，在保持计算易于处理的同时，很难以这种方式获得紧确的误差界。因此，我们遵循标准做法，只跟踪计算过程中的累积误差，并在结果中附上误差界

当步长或数值工作精度趋于零或无穷大时。尽管如此，原则上也可以调整上述大多数其他算法，使其同样能够给出严格误差界。Richard-Jung [54] 给出了一个计算斯托克斯乘子并具有严格误差界的示例。(3)第二作者开发了一个原型实现，仅适用于具有单一 1 级的奇点情形；该实现作为下文提及的 `ore_algebra` 软件包的一部分提供。

。这也使我们能够参考已有工作 [33, 46]，以界定算法关键解析步骤所产生的误差（即微分方程的数值积分和特殊函数的求值）。若误差界不足以满足应用需求，则始终可以提高精度再次运行该算法，这样最终便能得到任意精确的结果。

返回误差界不仅能增强人们对计算结果的信心，还能通过 Ramis 稠密性定理，基于微分伽罗瓦理论应用于算法。例如，只要验证哈密顿系统的某个变分方程的一个斯托克斯乘子非平凡，就足以证明该系统不存在亚纯第一积分意义下的完全可积性 [48, 6, 53]。此类判据还适用于许多其他问题，例如证明微分算子 D 不可约，或证明它是湮灭某个函数的最小阶算子。不过，重要的是，这类局部判据通常只能转化为充分条件。若能通过所有奇点处的单值化和 Stokes 自同构来表示整体微分伽罗瓦群，且这些表示均使用同一组基，那么就有可能以相同的方式对不可约性等性质作出完整刻画，并基于这些刻画构造完备算法 [26, 21], 。将我们的算法计算得到的 Stokes 自同构（它们所用的基取决于奇点）移至同一点，属于一个可通过有效求和方法求解的连接问题。因此，即使我们的算法适用，也无法取代这类方法。

我们使用 SageMath 计算机代数系统实现了该算法。我们的实现是 `ore_algebra` 软件包的一部分，可在 `https://www.github.com/mkauers/ore_algebra/` 获取。它大量依赖 Flint 库[(4)]，以及第二作者此前编写的、用于计算正则奇点之间连接矩阵的代码 [45]。

概要。本文的组织结构如下。

在第 1 部分中，我们提出了一个初步的“理论”算法，将斯托克斯矩阵的数值计算归结为正则奇点之间连接问题的数值求解。该算法的核心是比较形式基本解的 1-和在每个奇异方向两侧的值。为方便非专业读者，也因为我们找不到完全恰当的参考资料，我们在这一部分回顾了大部分必要的背景知识，包括单一 1 级方程的概念，

(4)参见 https://flintlib.org/。更具体地说，我们主要使用 Flint 中用于实数和复数球算术的模块；这些模块以前作为名为 Arb 的独立库发行 [31]。

Borel–Laplace 求和法、基于侧向和定义斯托克斯矩阵的方法，以及如何用微分算子 D 的博雷尔变换的连接常数表示斯托克斯乘子。

我们尚需处理的正则奇异连接问题，远比前文提及的一般情形简单。数值求解这些问题，归结为计算由奇点处的收敛级数展开给出的微分方程解的解析延拓；换言之，就是求解广义微分初值问题。即便如此，在实际应用中，这仍是该方法中计算开销最大的阶段。本文第 2 部分介绍了第 1 部分算法的一个更实用的变体，旨在尽量减少数值解析延拓的使用，并使其相对易于实现。我们以当今计算机代数库中易于获取的运算为基础，对该算法作了详细说明。我们还介绍了自己的实现，并通过若干示例展示其用法。

致谢。感谢 Bruno Salvy 促成了我们的合作，并主动为我们牵线。我们也感谢他，以及 Fredrik Johansson、Jean-Pierre Ramis 和 Anne Vaugon，感谢他们提出宝贵意见并参与讨论。

第 1 部分. 基础理论

本文始终考虑一个线性微分方程

$$Dy(x) = 0 \tag{0.1}$$

其系数是复变量 x 的多项式。我们研究该方程在位于 $x = 0$ 的不规则奇点处的性质。由于稍后将会明白的原因（参见 第 2 节，第 13 页），我们用导子 $\partial = x^2\,\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ 表示算子 D；必要时，再除以 x 的适当幂，并假设 D 具有如下形式

$$D \equiv D\Big(\frac{1}{x}, \partial\Big) = a_n\Big(\frac{1}{x}\Big)\partial^n + a_{n-1}\Big(\frac{1}{x}\Big)\partial^{n-1} + \cdots + a_1\Big(\frac{1}{x}\Big)\partial + a_0\Big(\frac{1}{x}\Big) \tag{0.2}$$

其中系数

$$a_\ell(X) = \sum_{j=0}^{\nu} a_{\ell,j}\, X^j \tag{0.3}$$

对于 $\ell = 0, \ldots, n$，它们是次数为 $\leqslant \nu$ 的多项式。我们假设 D 的阶为 n，即 $a_n(X) \neq 0$，并且至少有一个系数 a_ℓ 的次数为 ν。

从第 1.3 节开始，我们还假设满足这一限制条件：原点处的奇点为单层级一（参见 定义1.1，第 9 页；假设 1.3，第 11 页）。

1. 拉普拉斯平面中的方程

考虑初始方程（0.1）的坐标为 x 的平面 $\mathbb{C}$ 通常称为拉普拉斯平面，这是因为它是通过拉普拉斯变换将下一节要讨论的博雷尔平面 映射得到的。众所周知，方程 $D\,y = 0$ 有 n 个线性无关的形式解，其形式为

$$\Big(\sum_{j=0}^{s-1} \tilde{g}_{i,j}(x)\ln^j x\Big) x^{\mathcal{L}_i}\,\mathrm{e}^{q_i(1/x)}. \tag{1.1}$$

这里，术语形式 指级数 $\tilde{g}_{i,j}(x)$ 可能发散。这样的解族统称为形式基本解，并且可以将其选取为如下形式

$$\Big[\widetilde{f}_1(x) \quad \widetilde{f}_2(x) \quad \cdots \quad \widetilde{f}_n(x)\Big]\, x^{\mathfrak{L}}\,\mathrm{e}^{Q(1/x)} \tag{1.2}$$

~其中，$f_j(x)$ 是（通常发散的）x 的幂级数，$\mathfrak{L}$ 是若尔当标准形的常矩阵，且 $Q(1/x) = \mathsf{diag}(q_1(1/x),\dots,q_n(1/x))$，其中 $q_j(1/x)$ 是 $1/x$ 的多项式，或是 $1/x$ 的分数次幂的多项式，且不含常数项。这些多项式称为 D 的决定多项式。矩阵 $\mathfrak{L}$ 称为形式单值指数矩阵。

1.1. 牛顿多边形与单一 1 级

算子 D 在 0 处的牛顿多边形定义如下 [39,第 3.3.3 节1]：先定义单项式的权重 w，定义方式为 $w(x^{-j}\partial^{\ell}) = \ell - j$；而 D 的权重是 D中非零单项式的最小权重。将这些非零单项式与坐标为 $(\ell,\ \ell - j)$ 的标记点以及以这些标记点为基点、位于半平面 $\mathbb{R}_{\geqslant 0}\times\mathbb{R}$ 和第二象限的区域相关联。D 的牛顿多边形 $\mathcal{N}(D)$ 是这一族象限的凸包。牛顿多边形可能包含一条水平边、一条或多条斜率为正的边，并且总是以横坐标为 n 的垂直线结束，我们不将其视为一条边。可以证明，这些边的斜率（包括 0）就是决定多项式（包括平凡多项式 $q\equiv 0$）的次数。此外，如果斜率为 p 的边具有

水平长度等于 r，那么就有 r 个次数为 p 的决定多项式。

现在我们来说明如何计算指数（即，$\mathfrak{L}$的对角项）和决定多项式 q_j。为简单起见——因为我们只关注这种情况——从现在起，我们假设算子属于一阶层，这意味着其牛顿多边形的最大斜率等于 1。这是比属于单一 1 级（假设 1.3，第 11 页）更弱的条件。从牛顿多边形 $\mathcal{N}(D)$ 可以看出，D 属于 1 级，当且仅当存在 j，$0 \leqslant j < n$ 使得 $a_{n,\,\nu}\, a_{j,\,\nu} \neq 0$。

与常系数微分方程类似，不含指数因子的解 (1.1) 的指数是某个代数方程的根，该方程称为指标方程，构造方法如下。假设 $\mathcal{N}(D)$ 的水平边长度为 k_0，且位于纵坐标 h_0处；那么，限制在这条水平边上的算子写作 $\sum_{\ell=0}^{k_0} a_{\ell,\,\ell-h_0}(1/x)^{\ell-h_0}\partial^\ell$。令单项式 $x^{\mathcal{L}}$ 为这个受限算子的解，即可得到指标方程，其形式为

$$\mathcal{P}(\mathcal{L}) \equiv \sum_{\ell=0}^{k_0} a_{\ell,\ell-h_0}[\mathcal{L}]_{\ell^+} = 0 \tag{1.3}$$

采用以下记号。

记号 *1.1.* — 对于 $\lambda \in \mathbb{C}$ 和 $j \in \mathbb{Z}_{>0}$，我们记

$$[\lambda]_{j^-} = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-j+1) \quad (j \text{ factors decreasing by 1 from } \lambda);$$
$$[\lambda]_{j^+} = \lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+j-1) \quad (j \text{ factors increasing by 1 from } \lambda).$$

算子是 1 级，等价于其决定多项式的最高次数为 1。然而，即使是次数为 1 的决定多项式，也可能含有 $1/x$ 的分数次幂。如果斜率为 1 的边的水平长度为 k_1，则有 k_1 个形如 $q_j(1/x) = -\alpha_j/x + o(1/x)$, 的决定多项式，其余 $n-k_1$ 个没有次数为 1 的项（即，$\alpha_j = 0$）。系数 α_j（无论是否为零）是与斜率为 1 的边相关联的特征多项式的（可能是重）根，该多项式按如下方式得到。考虑算子 D 在斜率为 1 的边上的限制，即算子 $\sum_{j=0}^{k_1} a_{n-j,\,r}(1/x)^r\,\partial^{n-j}$，其中 r 取适当值。当牛顿多边形 $\mathcal{N}(D)$ 中斜率为 1 的边位于第一角平分线上时，有 $r=0$；一般而言，$\mathcal{N}(x^r D)$ 在坐标轴的第一角平分线上有一条斜率为 1 的边。于是，特征方程（1 级）写作

$$P(X) \equiv \sum_{j=0}^{k_1} a_{n-j,r} X^{n-j} = 0. \tag{1.4}$$

它以 $X=0$ 为重数为 $n-k_1$ 的根。 $P(X)$ 的根称为 D 的（1 级）斯托克斯值；非零根称为特征根。下文中，当我们提到 D 的“特征多项式”、“特征根”或“斯托克斯值”时，始终指 1 级特征多项式及其根。

定义1.1. — 若算子 D 的所有非零决定多项式 $q_j(1/x)$ 都是关于 $1/x$的一次单项式，则称其为单一 1 级（或纯*1* 级）。

等价地，若决定多项式 $q_\ell-q_j$ 之间的所有非零差 D 的次数都是1，则 D 为单一 1 级。事实上，假设存在一个决定多项式 $q(1/x)=\alpha/x+\beta/x^{r/s}+\cdots$，满足 $r/s\in\mathbb{Q}$,$0<r/s<1$和 $\beta\neq 0$。由于变量替换 $x\leftarrow x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}$使算子 D 保持不变，因此也必定存在一个形式为 $\tilde{q}(1/x)=\alpha/x+\beta\,\mathrm{e}^{-2r\pi\,\mathrm{i}/s}/x^{r/s}+\cdots$的决定多项式。差 $q(1/x)-\tilde{q}(1/x)$是一个次数为 r/s 且满足 $0<r/s<1$, 的多项式，因此算子 D 不是单一 1 级。反向结论显然成立。

顾名思义，若 D 具有单一 1 级，则其牛顿多边形 $\mathcal{N}(D)$ 除可能存在的一条水平边外，还有唯一一条斜率为 1 的边；然而，这一条件并不充分。

1.2. 算子 $D_{[\alpha]}$

为了刻画单一 1 级的算子，引入由 D 经变量替换 $y=\mathrm{e}^{-\alpha/x}z$ 得到的算子 $D_{[\alpha]}$ 很有用，其中 α是一个斯托克斯值（1 级）。算子 $D_{[\alpha]}$ 具有以下基本性质。

(1) 有 $D_{[\alpha]}(1/x,\partial)=D(1/x,\partial+\alpha),$，因此

$$\begin{aligned}D_{[\alpha]}&=a_n\big(\tfrac{1}{x}\big)(\partial+\alpha)^n+a_{n-1}\big(\tfrac{1}{x}\big)(\partial+\alpha)^{n-1}+\cdots+a_0\big(\tfrac{1}{x}\big)\\&=A_n\big(\tfrac{1}{x}\big)\partial^n+A_{n-1}\big(\tfrac{1}{x}\big)\partial^{n-1}+\cdots+A_1\big(\tfrac{1}{x}\big)\partial+A_0\big(\tfrac{1}{x}\big)\end{aligned}$$

其中，对于 $\ell=0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ n$，并以 $\binom{j}{\ell}$ 表示二项式系数，新的系数$A_\ell\big(\frac{1}{x}\big)=\sum_{j=0}^{\nu}A_{\ell,\ j}\,\frac{1}{x^j}$为

$$\begin{aligned}A_\ell\big(\tfrac{1}{x}\big)=a_n\big(\tfrac{1}{x}\big)\tbinom{n}{\ell}\alpha^{n-\ell}+a_{n-1}\big(\tfrac{1}{x}\big)\tbinom{n-1}{\ell}\alpha^{n-1-\ell}+\cdots\\ \cdots+a_{\ell+1}\big(\tfrac{1}{x}\big)\tbinom{\ell+1}{\ell}\alpha^1+a_\ell\big(\tfrac{1}{x}\big)\tbinom{\ell}{\ell}.\end{aligned}\tag{1.5}$$

特别是， $A_n=a_n$。

(2) 对于 $\ell = 0, \dots, n$，有 $A_{\ell,\nu} = \sum_{j=\ell}^{n} a_{j,\nu} \binom{j}{\ell} \alpha^{j-\ell} = P^{(\ell)}(\alpha)/(\ell!)$ 其中 $P^{(\ell)}$ 是 D 的特征多项式 P 的 ℓ^{th} 阶导数（参见 方程 (1.4)，第 8 页）。

(3) 若 α 的斯托克斯值为 k 重，则 $A_{k,\,\nu} \neq 0$。

(4) 因此，$D_{[\alpha]}$ 的阶为 n，次数为 ν。(5) 若 D 是纯 1 级，则对任意 α，$D_{[\alpha]}$ 也是纯 1 级。(6) 若 $P(X)$ 是 D 的特征多项式，则 $D_{[\alpha]}$ 的特征多项式为

$$P_{[\alpha]}(X) = P(\alpha + X).$$

事实上，若多项式 $q_j(1/x)$ 是 D 的决定多项式，则 $D_{[\alpha]}$ 的决定多项式就是多项式 $q_j(1/x) + \alpha/x$。

(7) D 的解中指数部分为 $\mathrm{e}^{-\alpha/x}$ 的那些解，其指数 L 是 $D_{[\alpha]}$ 的指标方程的解（参见 (1.3)）。

命题 1.2.— 设 D 是一个在 *0* 处阶为 n、级为 *1* 的算子。我们排除平凡情形 [5]，即 D 有一个重数为 n 的唯一特征根。算子 D 是纯 *1* 级，当且仅当以下等价性质成立：

（*1*）对于任意重数为 k 的 D 的斯托克斯值 α（（包括 $\alpha = 0$）），牛顿多边形 $\mathcal{N}(D_{[\alpha]})$ 有一条长度为 k 的水平边，以及一条斜率为 1、水平长度为 $n - k$ 的边。经过高度为 ν 的垂直平移后，它如下面的图*1.1*所示。

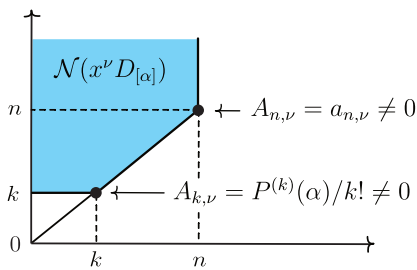


图1.1. $x^\nu D_{[\alpha]}$的牛顿多边形

[5]若特征根 α 唯一且重数为 n，则变量替换 $y = \mathrm{e}^{-\alpha/x} z$ 将 D 变为一个在 0 处有正则奇点的算子（若 D属于单一 1 级），或者变为一个 1 级算子（若 D 属于 1 级但非单一 1 级）。

(2) 对于任意重数为 k 的 D 的斯托克斯值 α ((包括 $\alpha = 0$)) , $D_{[\alpha]}$ 的系数满足以下关系:

$$A_{\ell,j} = 0 \quad \textit{for all} \quad \ell, j \quad \textit{satisfying} \quad \ell - j < k - \nu,$$
$$A_{n,\nu}\, A_{k,\nu} \neq 0.$$

证明。— (1) $\alpha = 0$ 的条件意味着, D 的牛顿多边形 $\mathcal{N}(D)$ 除 0 和 1 以外没有其他斜率。因此, D 的决定多项式次数均为 1。我们需要证明它们都是单项式。反证, 假设其中一个决定多项式为 $q(1/x) = -\alpha/x + \beta/x^r + \cdots$, 其中 $\beta \neq 0$和 $r < 1$ (必为有理数) 。那么, 多项式 $q(1/x) + \alpha/x = \beta/x^r + \cdots$是 $D_{[\alpha]}$ 的一个次数为 r的决定多项式。这意味着 $\mathcal{N}(D_{[\alpha]})$ 有一条斜率为 $r < 1$的边。因此, 这与假设 (1) 矛盾; 该假设断言 $\mathcal{N}(D_{[\alpha]})$ 可能的斜率只有 0 和 1。由此, 算子 D 是单一 1 级的。反向命题显然成立。

(2) 这些条件规定了每个牛顿多边形在 $\mathcal{N}(D_{[\alpha]})$关于 $D_{[\alpha]}$的系数上的形式。□

假设 1.3. — 从现在起, 我们假设 D 是单一 1 级的。

1.3. 预备基本解

一般而言, $D\,y = 0$ 的形式基本解 (1.2) 中出现的矩阵 $\mathfrak{L}$ 和 Q 不对易 [2], [38, 推论 2.5]。然而, 在假设 1.3 下, 决定多项式 q_j 是非分歧的, 因此矩阵 $\mathfrak{L}$ 和 Q 对易。在这种情况下, 可以将形式基本解选为以下形式

$$\begin{aligned} Y(x) &= \begin{bmatrix} \widetilde{y}_1(x) & \widetilde{y}_2(x) & \cdots & \widetilde{y}_n(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \widetilde{f}_1(x) & \widetilde{f}_2(x) & \cdots & \widetilde{f}_n(x) \end{bmatrix} x^{\mathfrak{L}}\, \mathrm{e}^{Q(1/x)} \end{aligned} \tag{1.6}$$

其中

- $Q(1/x) = \mathrm{diag}\big(q_1(1/x), \ldots, q_n(1/x)\big)$ 其确定多项式 q_j 具有 $q_j(1/x) = -\alpha_j/x$的形式; • 形式单值的指数矩阵 $\mathfrak{L}$ 是与 Q交换的若尔当标准形常矩阵; ⇝• 其中的 $f_j(x)$是关于 x的幂级数; • 正则部分 $\widetilde{h}(x) = \begin{bmatrix} \widetilde{f}_1(x) & \widetilde{f}_2(x) & \cdots & \widetilde{f}_n(x) \end{bmatrix} x^{\mathfrak{L}}$的赋值为 > 0, 其含义是, 对于出现在˜的 $h(x)$ 各项中的所有单项式 $x^\beta \log^\rho x$, 都有$R(\beta) > 0$。

一般形式是经典的，我们将在接下来的理论讨论中沿用这一形式。不过请注意，在本文的第二部分，为了与实现保持一致，我们将改用一种略有不同的基本解（见注5.3和第9节）。

通过采用类型为 $y = x^{-r}\, z$ 的变量替换，取适当的整数 r，总能满足赋值条件。这样的变换将第 6 页的方程 (0.1) 化为同一形式的方程，并且可以验证它保留了我们要计算的斯托克斯矩阵（参见 第 24 页的 (3.1)）。

从微分方程分类的角度来看，矩阵 $\mathfrak{L}$ 和 Q 提供了一组完备的形式不变量。这些不变量通过求解代数方程得到，并决定反斯托克斯方向（定义 3.1，第 23 页）。相比之下，斯托克斯现象（即，~亚纯不变量）由发散级数 $f_j(x)$ 决定，除极简单的情形外，其结果都需要进行超越计算。

我们还假设解的排列方式使得矩阵 $Q(1/x)$ 分解为对角块

$$Q(1/x) = q_1(1/x)I_{k_1} \oplus q_2(1/x)I_{k_2} \oplus \cdots \oplus q_N(1/x)I_{k_N}$$

其中 q_ℓ 彼此不同，且 $q_\ell = -\alpha_\ell/x$ 也彼此不同。我们将

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathcal{I}_1 &=& \{1, 2, \dots k_1\} \\ \mathcal{I}_2 &=& \{k_1+1, k_1+2, \dots, k_1+k_2\} \\ \cdots & & \\ \mathcal{I}_N &=& \{k_1+\cdots+k_{N-1}+1,\ \dots\ , k_1+k_2+\cdots+k_N = n\} \end{array}\right. \tag{1.7}$$

记为与 $Q(1/x)$ 的各个块相对应的行指标集合：指标为 $i \in I_\ell$ 的解具有指数部分 e^{q_ℓ} （也称它们与 q_ℓ 或 α_ℓ 相关）。我们进一步记

$$\mathcal{K}_0 = 0,\ \ \mathcal{K}_1 = k_1,\ \ \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_1 + k_2,\ \ \dots,\ \ \mathcal{K}_N = \mathcal{K}_{N-1} + k_N = n$$

并按照 Q 的分块对基本解 $Y(x)$ 进行分块，从而得到块分解

$$Y(x) = \big[Y_i(x)\big]_{1\leqslant i\leqslant N} \quad \text{with} \quad Y_i(x) = \big[\widetilde{y}_u(x)\big]_{u\in\mathcal{I}_i} = \big[\widetilde{y}_u(x)\big]_{\mathcal{K}_{i-1}+1\leqslant u\leqslant\mathcal{K}_i}.$$

现在可以将具有相同决定多项式 q 的解重新排列，使矩阵 $\mathfrak{L}$ 分解为若尔当块之和（参见下文记号 1.2）

$$\mathfrak{L} = (\mathcal{L}_1 I_{m_1} + J_{m_1}) \oplus (\mathcal{L}_2 I_{m_2} + J_{m_2}) \oplus \cdots \oplus (\mathcal{L}_{m_M} I_{m_M} + J_{m_M})$$

这进一步细化了 Q 的分块。

记号 *1.2.*— 我们用 I_r 表示维数为 r的单位矩阵，用 J_r 表示维数为 r 的上三角幂零若尔当矩阵（其超对角线上元素均为 1，其余元素均为 0）。

注 *1.4*（一般情形）。— 很多时候，实际情况并不像上文所讨论的那样一般。一个常见情形——通常称为一般情形——是所有斯托克斯值 α 都是单的（$k = 1$）。此时，矩阵 Q可分解为大小为 1 的对角块：

$$Q(1/x) = [q_1(1/x)] \oplus [q_2(1/x)] \oplus \cdots \oplus [q_n(1/x)],$$

矩阵 $\mathfrak{L}$ 是对角矩阵，因此展开形式 (1.1) 中的形式解不含对数。 $D_{[\alpha]}$ 的特征方程为（参见方程 (1.4)，第 8 页）

$$P_{[\alpha]}(X) = P(\alpha + X) = A_{n,\nu}X^n + A_{n-1,\nu}X^{n-1} + \cdots + A_{1,\nu}X^1$$

命题 1.2 中的条件简化为$A_{0,\ \nu} = 0$ 以及$A_{1,\ \nu}A_{n,\ \nu} \neq 0$。与斯托克斯值 α 相关的指标方程为

$$\mathcal{P}(\mathcal{L}) \equiv A_{0,\nu-1} + A_{1,\nu}\mathcal{L} = 0,$$

对应于唯一的指数 $L = -A_{0,\ \nu-1}/A_{1,\nu}$。

下文将要发展的算法有一个基本性质：~在假设 1.3 下，基本解 (1.6) 中出现的级数 $f_j(x)$ 均为 1-可求和的 [39,（定理 5.2）5]。如接下来两节所述，对这些级数应用所谓的博雷尔–拉普拉斯方法即可得到其和。

2. 博雷尔平面中的方程

博雷尔平面是 $\mathbb{C}$ 的另一个副本，坐标为 ξ；方程 (0.1) 通过博雷尔变换映射到该平面。拉普拉斯变换则将博雷尔平面映回拉普拉斯平面。

我们尽可能在拉普拉斯平面中使用拉丁字母，在博雷尔平面中使用希腊字母。

2.1. 博雷尔变换

我们将考虑两类博雷尔变换：

— 算子的博雷尔变换B 是从拉普拉斯平面上的线性微分算子环 $,_\ell {}^{c_\ell,}_{j\ x^j}{}^{1}\partial^\ell$ 映射到博雷尔平面上的微分算子 $\sum_{j,\ell} \gamma_{\ell,j}\xi^j \ \mathrm{d}\ \mathrm{d}\xi^\ell$ 的态射，定义如下：

$$\mathcal{B}\Big(\frac{1}{x}\Big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} \quad \text{and} \quad \mathcal{B}(\partial) = \xi \quad (\text{operator of multiplication by } \xi) \qquad (2.1)$$

注意，具有 $1/x$中多项式系数的算子 $D = D\big(\frac{1}{x}, \partial\big)$ 会变为具有 ξ中多项式系数的算子 $\Delta = D(_{\mathrm{d}\,\mathrm{d}\xi}, \xi)$。这一性质是我们选择用 $1/x$ 和 ∂ 来表示算子的主要原因（ x 的正幂会导致积分微分算子）。若 D 的阶数为 n，且在 $1/x$ 中的次数为 ν，则 Δ 的阶数为 ν，次数为 n，其中 ξ。

— （函数）博雷尔变换B_θ 取决于一个方向 θ，并作用于实际函数。在 0 处书写（而不是在无穷远处）时，它表示为

$$\mathcal{B}_\theta(f(x))(\xi) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\gamma_\theta} f(x)\,\mathrm{e}^{\xi/x}\,\frac{\mathrm{d}x}{x^2} \tag{2.2}$$

其中，围道 γ_θ 是一个“0 处的汉克尔围道”，参见 图 2.1。等价地，有 $B_\theta\big(f(x)\big)(\xi) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\Gamma_{(-\theta+\pi)}} f(1/u)\,\mathrm{e}^{\xi u}\mathrm{d}u$，此时积分沿经典汉克尔围道进行，该围道 $\Gamma_{(-\theta+\pi)}$ 绕过从 $\arg\, u = -\theta - \pi$ 到 $\arg u = -\theta + \pi$的半直线 $d_{(-\theta+\pi)}$。

我们要求该积分在勒贝格意义下收敛。

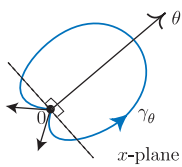


图 2.1。0 处的汉克尔围道

下面的初等引理对后续理论很有用。关于博雷尔变换的更多细节，我们参考 [47, 第 5], [39,章3] 第 5 节 [11]以及众多其他文献。

引理 2.1. — 对于任意 $\lambda \in \mathbb{C}$ 和 $\xi \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$，单项式 x^λ对数^m x 的博雷尔变换由以下公式给出，其中博雷尔积分在以 d_θ为平分线的开半平面 $R(\xi$实$^{-\mathrm{i}\theta}) > 0$ 上收敛。

(1) If $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_{\leqslant 0}$, *then* $\mathcal{B}_\theta(x^\lambda)(\xi) = \dfrac{\xi^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \not\equiv 0$ *for any direction* $\theta \in \mathbb{C}$.

If $\lambda \in \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$ *then*[6] $\mathcal{B}_\theta(x^\lambda)(\xi) = \dfrac{\xi^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \equiv 0$.

*(2)*对于任意 $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ 任意方向θ，都有 θ h

$$\mathcal{B}_\theta\big(x^\lambda\,\ln^m x\big)(\xi) = \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\lambda^m}\mathcal{B}_\theta(x^\lambda)(\xi). \tag{2.3}$$

(6)不过，在这种情况下，通常会通过引入狄拉克质量来扩展博雷尔变换的定义，见下文注 2.3。

(3) $m=1$ 这种情况值得明确说明。对于任意方向 θ，都有

$$\mathcal{B}_\theta(x^\lambda \ln x)(\xi)=\xi^{\lambda-1}\Big(\frac{\ln\xi}{\Gamma(\lambda)}+\Big(\frac{1}{\Gamma}\Big)'(\lambda)\Big).$$

特别地，当 $\lambda=p$ 为正整数时，公式为

$$\mathcal{B}_\theta(x^p\ln x)(\xi)=\frac{\xi^{p-1}}{(p-1)!}\Big(\ln\xi+\gamma-\mathcal{H}_{p-1}\Big)$$

其中 γ 为欧拉常数，$H_n=1+\cdots+1/n$ 为 n阶调和和。对于非正整数 $\lambda=-p$，有

$$\mathcal{B}_\theta\Big(\frac{1}{x^p}\ln x\Big)=(-1)^p\frac{p!}{\xi^{p+1}},$$

特别是 $B_\theta(\text{对数}\,x)(\xi)=\dfrac{1}{\xi}$。

证明。— (1) 根据定义，$2\pi\mathrm{i}B_\theta(x^\lambda)(\xi)=\int_{\gamma_\theta}x^\lambda\mathrm{e}^{\xi/x}\,\mathrm{d}\frac{x}{x^2}$。

令 $u=1/x$，并像之前一样用 $\Gamma_{(-\theta+\pi)}$ 表示绕半直线 $d_{(-\theta+\pi)}$ 的汉克尔围道，该半直线从 $\arg u=-\theta-\pi$ 延伸至 $\arg u=-\theta+\pi$，则得到

$$\mathcal{B}_\theta(x^\lambda)(\xi)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_{(-\theta+\pi)}}u^{-\lambda}\mathrm{e}^{\xi u}\,\mathrm{d}u.$$

此表达式对开半平面 $R(\xi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})>0$中的所有 ξ均成立，也就是说，对由 d_θ平分的开半平面中的所有 ξ均成立。

首先假设 $\theta=0$。此时，沿轮廓从 $\arg(u)=-\pi$到 $\arg(u)=+\pi$积分。函数 $u^{-\lambda}$ 取其主值分支 $u^\lambda=\mathrm{e}^{\lambda\ln u}$，其中 $-\pi<\arg(u)<\pi$；对于 $\xi>0$（即，$\arg(\xi)=0$），我们可以应用 [13, (4.8.1), 第 296] 页，从而得到关系式

$$\mathcal{B}_0(x^\lambda)(\xi)=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{\Gamma_\pi}u^{-\lambda}\mathrm{e}^{\xi u}\,\mathrm{d}u=\frac{\xi^{\lambda-1}}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{\Gamma_\pi}v^{-\lambda}\mathrm{e}^{v}\,\mathrm{d}v=\xi^{\lambda-1}\frac{1}{\Gamma(\lambda)}.$$

若 $\arg(\xi)=\theta'\in(-\pi/2,\pi/2)$，则根据柯西留数定理，$\int_{\Gamma_{\pi+\theta'}}v^{-\lambda}\mathrm{e}^v\,\mathrm{d}v=\int_{\Gamma_\pi}v^{-\lambda}\mathrm{e}^v\,\mathrm{d}v$，因此该公式对满足 $R(\xi)>0$的所有 ξ 均成立。

现在假设 $\theta\neq\pi \bmod 2\pi$，这样由 d_θ 和 d_0 平分的半平面有非空交集（若 $\theta=\pi$，则必须分两步进行）。取交集中的 ξ，使得定义$B_\theta(x^\lambda)(\xi)$ 的积分（轮廓为 $\Gamma_{(-\theta+\pi)}$）以及轮廓为 Γ_π 的同一积分都收敛。柯西留数定理再次表明二者相等。因此，$B_0(x^\lambda)$ 和 $B_\theta(x^\lambda)$ 互为解析延拓，并且可以说，对于所有 $\theta,-\pi<\arg(\theta)\leqslant+\pi$，以及所有满足 $R(\xi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})>0$ 的 ξ，都有 $B_\theta(x^\lambda)(\xi)=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\xi^{\lambda-1}$。特别地，$B_\theta(x^\lambda)(\xi)$ 恒等于 0，当且仅当 $\lambda\in\mathbb{Z}_{\leqslant0}$。

（2）该公式是 Lebesgue导数定理的直接应用 .

(3) 在上面的通式中，为了计算 $(1/\Gamma)' = -\Gamma'/\Gamma^2$，我们使用恒等式（参见 [13,(4.5.2)，第 294]页）：

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{s\geqslant 1} \frac{z}{s(z+s)} \quad \text{for all } \ z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_{\leqslant 0}. \tag{2.4}$$

若 $\lambda = p \in \mathbb{Z}_{>0}$，则部分分式分解 $\dfrac{z}{s(z+s)} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{z+s}$ 给出结果。

若现在 $\lambda = -p \in \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$，则 $1/\Gamma(-p) = 0$，通式中的第一项 $\xi^{\lambda-1}\ln \xi/\Gamma(\lambda)$ 消失。为了求出第二项的值，我们利用（2.4）写出：

$$\frac{\Gamma'(z-p)}{\Gamma(z-p)} = -\gamma - \frac{1}{z-p} + \sum_{s\geqslant 1} \frac{z-p}{s(z-p+s)} = \frac{1}{z}\big(-1 + O(z)\big).$$

有

$$\frac{1}{\Gamma(z-p)} = (-1)^p \frac{[p-z]_{p^-}}{\Gamma(z)} = (-1)^p \Gamma(1+p) z\big(1+O(z)\big),$$

因此 $-\dfrac{\Gamma'(z-p)}{\Gamma^2(z-p)} = (-1)^p\Gamma(1+p) + O(z)$，所给公式得证。 □

正如引理所示，单项式的像

$$\mathcal{B}_\theta\big(x^\lambda \ln^m x\big)(\xi) = \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\lambda^m}\frac{\xi^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \qquad (\lambda \notin \mathbb{Z}_{\leqslant 0} \text{ or } m \geqslant 1) \tag{2.5}$$

与方向 θ 无关。该公式自然地延拓到不含常数项或主部的多项式和形式级数。所得映射

$$\mathcal{B} : x^{1+\lambda}\,\mathbb{C}[[x]][\log x] \to \xi^\lambda\,\mathbb{C}[[\xi]][\log \xi] \qquad (\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_{<0})$$

称为形式博雷尔变换。如下面的注 2.3 所述，它通常延拓到常数项和主部。本文后文˜还将使用通过从（2.5）中删除条件$\lambda \notin \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$ 而得到的“朴素”延拓 B，也就是说，对于 $p \in \mathbb{N}$，令$B(x^{-p}) = 0$。

引理2.2。— 给定一个不含常数项或主部、但可能含有 x 的非整数次幂的级数 $f(x)$，以及如前所述的线性微分算子 D，我们考虑按公式 (2.2) 定义的 B_θ。则，

$$\mathcal{B}_\theta\big(D(f)\big)(\xi) = \mathcal{B}(D)\cdot\big(\mathcal{B}_\theta(f)(\xi)\big). \tag{2.6}$$

这里用点号表示算子$B(D)$ 作用于函数$B_\theta(f)(\xi)$。下文中我们将省略该符号。

证明。—— 只需考虑 $f(x) = x^\lambda$、 $\lambda \notin \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$ 以及 $D = \partial$ 或 $D = 1/x$ 的情形。假设 $D = \partial$。那么，$\mathcal{B}(f)(\xi) = \xi^{\lambda-1}/\Gamma(\lambda)$ 且$\mathcal{B}(D) = \xi$，因此$\mathcal{B}(D) \cdot \mathcal{B}(f)(\xi) = \xi^\lambda/\Gamma(\lambda)$，从而，

$$\mathcal{B}(Df) = \lambda\xi^\lambda/\Gamma(\lambda+1) = \xi^\lambda/\Gamma(\lambda) = \mathcal{B}(D) \cdot \mathcal{B}(f)(\xi).$$

现在假设 $D = 1/x$。那么，$\mathcal{B}(D) = \mathrm{d}/\mathrm{d}\xi$ 以及

$$\mathcal{B}(D) \cdot \mathcal{B}(f)(\xi) = \xi^{\lambda-2}/\Gamma(\lambda-1) = \mathcal{B}(x^{\lambda-1})(\xi) = \mathcal{B}(Df)(\xi). \qquad \square$$

注 *2.3.* — 鉴于我们关注的是微分方程，使用微分代数态射是可取的。考虑带有标准导子的多项式微分代数 $(\mathbb{C}[x], \mathrm{d}/\mathrm{d}x)$。迄今为止定义的博雷尔变换将单项式 x^m （其中 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$）映射为 $\mathcal{B}(x^m) = \xi^{m-1}/(m-1)!$ 并且可以验证

$$\mathcal{B}(x^m x^p) = \mathcal{B}(x^m) * \mathcal{B}(x^p)$$

其中 $*$ 是由 $(f*g)(\xi) = \int_0^\xi f(t)g(\xi-t)\,\mathrm{d}t$ 给出的卷积乘积。此外，我们有 $\mathcal{B}((\mathrm{d}/\mathrm{d}x)(x^m)) = \xi\mathcal{B}(x^m)$。因此，$\mathcal{B}$ 将 $\mathbb{C}[x]\backslash\mathbb{C}$映射到非含幺微分代数 $\mathbb{C}[\xi]$ 中，该代数带有卷积乘积，并且以 ξ 作为导子的乘法。要将 $\mathcal{B}$ 扩展为微分代数态射，必须令 $\mathcal{B}(1)$ 等于狄拉克质量 δ_0，因为 δ_0 是卷积乘积的单位元。将 $\mathcal{B}$ 扩展到 x 和 $1/x$中的多项式时，需令 $\mathcal{B}(1/x^m) = \delta_0^{(m)}$, 等于 δ_0的第 m 阶导数。

注记 *2.4.* — 请注意，常值函数 1 的博雷尔变换是狄拉克质量 δ_0，而算子 $1 = \mathrm{id}$ 的博雷尔变换则是恒等算子，这两者不可混淆。例如，微分算子 $\partial + 1$ 的博雷尔变换是乘以 $\xi + 1$ 的算子，因为 $\mathcal{B}(\partial\widetilde{y} + \widetilde{y})(\xi) = (\xi+1)\widehat{y}(\xi)$。

2.2. 变换后的算子

回顾记号 $\nu = \max_{0\leqslant\ell\leqslant n} \deg a_\ell(X)$。对于所有斯托克斯值 α，算子

$$D_{[\alpha]} = A_n\Big(\frac{1}{x}\Big)\partial^n + A_{n-1}\Big(\frac{1}{x}\Big)\partial^{n-1} + \cdots + A_2\Big(\frac{1}{x}\Big)\partial^2 + A_1\Big(\frac{1}{x}\Big)\partial + A_0\Big(\frac{1}{x}\Big)$$

其博雷尔变换为

$$\Delta_{[\alpha]} = A_n\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\Big)\zeta^n + A_{n-1}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\Big)\zeta^{n-1} + \cdots + A_1\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\Big)\zeta + A_0\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\Big) \tag{2.7}$$

其中 $A_\ell\big(\underline{\mathrm{d}\,\mathrm{d}\zeta}\big) = \sum_{j=0}^{\nu} A_{\ell,\,j}\big(\underline{\mathrm{d}^j\,\mathrm{d}\zeta^j}\big)$ 对于 $\ell = 1,\ \ldots,\ n$（因此，有 $\Delta_{[0]} = \Delta$）。

正如下述引理所示，研究 Δ 在 $\xi = \alpha$ 处等价于研究 $\Delta_{[\alpha]}$ 在 $\zeta = 0$ 处。

引理 2.5. — *(1)* 给定一个点 $\alpha \in \mathbb{C}$ 和一个满足 $h(0) = 0$ 的解析函数 $h(x)$, 其博雷尔变换满足

$$\mathcal{B}\big(h(x)\,\mathrm{e}^{-\alpha/x}\big)(\xi) = \mathcal{B}\big(h(x)\big)(\xi - \alpha).$$

(2) 令 $\zeta = \xi - \alpha$ 为 $\xi = \alpha$ 处的局部变量。于是,

$$\Delta_{[\alpha]}\big(y\big)(\zeta) = \Delta\big(y\big)(\alpha + \zeta).$$

证明。—— (1) 有

$$\mathcal{B}\big(h(x)\,\mathrm{e}^{-\alpha/x}\big)(\xi) = \int_{\gamma_0} h(x)\,\mathrm{e}^{(\xi-\alpha)/x}\,\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \mathcal{B}\big(h(x)\big)(\xi - \alpha).$$

(2) 对等式 $D_{[\alpha]}\big(\frac{1}{x},\ \partial\big) = D\big(\frac{1}{x},\ \partial + \alpha\big)$（第 9 页条目 1）应用博雷尔变换，得到 $\Delta_{[\alpha]}\big(\mathrm{d}\,\mathrm{d}\zeta,\ \zeta\big) = \Delta\big(\mathrm{d}\,\mathrm{d}\zeta,\ \zeta + \alpha\big) = \Delta\big(\mathrm{d}\,\mathrm{d}\xi, \bar{\ }\xi\big)$，其中 $\bar{\ }\xi = \zeta + \alpha$。因此得证。□

要在形式幂级数代数 $\mathbb{C}[[x]]$ 上定义映射 $X \mapsto B(X\mathrm{e}^{-\alpha/x})$，必须令 $B\big(1\mathrm{e}^{-\alpha/x}\big)(\xi) = \delta_\alpha$，为 α 处的狄拉克质量。根据引理 2.5，要将其扩展到形式 Laurent 级数或亚纯函数的主部，必须令 $B(x^{-p}\,\mathrm{e}^{-\alpha/x}\big) = \mathrm{d}^p\,\mathrm{d}x^p B\big(1\mathrm{e}^{-\alpha/x}\big) = \delta_\alpha^{(p)}$，对所有 $p \in \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$ 均如此。 ——

命题 2.6. — 算子 Δ 满足以下性质:

(1) Δ 的奇点是 D 在 *0* 处的斯托克斯值 α；*(2)* Δ 的所有奇点都是正则奇点；*(3)* 设 $\Delta_{[\alpha]}$ 如(2.7)所示，则 $\Delta_{[\alpha]}$ 在 $\zeta = 0$处的指标多项式为（参见记号 *1.1*，第 *8* 页）

$$\Pi_{[\alpha]}(\lambda) = \sum_{\substack{\ell - j = k - \nu \\ 0 \leqslant \ell \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant \nu}} A_{\ell,j}\,[\ell + \lambda]_{j^-}.$$

证明. — (1) 奇点是下式首项的零点:

$$a_{n,\nu}\frac{\mathrm{d}^\nu}{\mathrm{d}\xi^\nu}\xi^n + \cdots + a_{1,\nu}\frac{\mathrm{d}^\nu}{\mathrm{d}\xi^\nu}\xi + a_{0,\nu}\frac{\mathrm{d}^\nu}{\mathrm{d}\xi^\nu} = (a_{n,\nu}\xi^n + \cdots + a_{1,\nu}\xi + a_{0,\nu})\frac{\mathrm{d}^\nu}{\mathrm{d}\xi^\nu} + \text{terms of lower order.}$$

因此，$\mathrm{d}^\nu/\mathrm{d}\xi^\nu$的系数等于 D 的特征多项式 $P(\xi)$（参见 (1.4)）。其根，即 D 在 0 处的斯托克斯值，也是 Δ的奇点。

（2）给定一个重数为 k 的斯托克斯值 α，我们证明 $\Delta_{[\alpha]}$ 的牛顿多边形退化为一条水平边（参见 图 2.2，第 21 页）。

由第 10 页的命题 1.2 可知，对于所有满足 $\ell - j < k - \nu$ 和 A_k 的 $(\ell,\ j)$，$A_{\ell,\ j} = 0$。因此，牛顿多边形 $\mathcal{N}(\Delta_{[\alpha]})$ 的所有标记点都位于高度为 $k - \nu$ 的水平线上方。$\Delta_{[\alpha]}$ 的阶等于 ν，而点 $(\nu,\ k - \nu)$ 是一个标记点，因为 $A_{k,\ \nu} \neq 0$。由此得证。

(3) $\Delta_{[\alpha]}$ 中权重为 $k - \nu$ 的项恰好是满足 $\ell - j = k - \nu$ 的 $A_{\ell,j}\, \mathrm{d}^j \mathrm{d}\zeta^j \zeta^\ell$。将算子限制在权重为 $k - \nu$ 的项上，并令其作用于 ζ^λ 时为零，即可得到 $\Pi_{[\alpha]}(\lambda)$。□

2.3. 变换方程的解

由前面的结果可知，在 $x = 0$ 处，$Dy = 0$ 的任意形式解若具有指数部分 $\exp(-\alpha/x)$，则其博雷尔变换是 $\zeta = 0$ 处的 $\Delta_{[\alpha]}\widehat{y} = 0$ 的解（或等价地，是 $\xi = \alpha$ 处的 $\Delta\widehat{y} = 0$ 的解），且不含指数项。

本节假设 α 是重数为 k 的斯托克斯值：存在 k 个线性无关解，它们是具有指数部分 $\exp(-\alpha/x)$，的 $Dy = 0$ 的解，且其博雷尔变换是 $\zeta = 0$ 处的 $\Delta_{[\alpha]}\widehat{y} = 0$ 的解。然而，算子 D 的阶数为 n，而算子 $\Delta_{[\alpha]}$ 的阶数为 ν。我们知道 k 满足 $k \leqslant n$，但 k 可能小于、等于或大于 ν。现在我们逐一考察每种情形，先从最简单的情形 $k = \nu$ 开始。

情形 $k = \nu$。方程 $Dy = 0$ 有 k 个附属于 α的线性无关解，记为 $\widetilde{h}_1(x)\mathrm{e}^{-\alpha/x}, \ldots, \widetilde{h}_k(x)\mathrm{e}^{-\alpha/x}$，如第 1.3 节第 11 页中预备的基本解所示。等价地，$h_1(x), \ldots, h_k(x)$ 是附属于斯托克斯值 0 的 $D_{[\alpha]}y = 0$ 的一组极大线性无关解。$D_{[\alpha]}$ 在 0 处的指数是指标多项式 $\mathcal{P}_{[\alpha]}(L) = \sum_{\ell=0}^{k} A_{\ell,\ell}\,[L]_{\ell^+}$的根。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $h_1(x), \ldots, h_k(x)$ 的博雷尔变换 $h_1(\zeta), \ldots, h_k(\zeta)$ 线性无关。由于 $k = \nu$，它们构成 $\Delta_{[\alpha]}\widehat{y} = 0$在 $\zeta = 0$处的一个基本解。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$我们已经看到，$h_1, \ldots, h_k$的指数是 $h_1(x), \ldots, h_k(x)$ 的指数减去 1。事实上，指标多项式 $\Pi_{[\alpha]}(\lambda)$ 和 $\mathcal{P}_{[\alpha]}(L)$ 满足如下关系：

$$\Pi_{[\alpha]}(\lambda) = \sum_{\ell=0}^{\nu} A_{\ell,\ell}[\lambda + \ell]_{\ell^-} = \sum_{\ell=0}^{\nu} A_{\ell,\ell}[\lambda + 1]_{\ell^+} = \mathcal{P}_{[\alpha]}(\lambda + 1). \qquad (2.8)$$

此外，考虑到第 14 页的引理 2.1，可以观察到，解 $\widetilde{h}_1(x)\mathrm{e}^{-\alpha/x}, \ldots, \widetilde{h}_\nu(x)\mathrm{e}^{-\alpha/x}$ 在与其博雷尔变换相同的幂次处含有对数。

情形 $k < \nu$.与前一种情形一样，方程 $Dy = 0$ 附属于 α，其 k 个线性无关解 $\widetilde{h}_1(x)\mathrm{e}^{-\alpha/x}, \ldots, \widetilde{h}_k(x)\,\mathrm{e}^{-\alpha/x}$ 对应于 $\Delta_{[\alpha]}\widehat{y} = 0$ 的 k 个线性无关解，具体为

$$\widehat{h}_1 = \mathcal{B}(\widetilde{h}_1), \ldots, \widehat{h}_k = \mathcal{B}(\widetilde{h}_k).$$

然而，方程 $\Delta_{[\alpha]}\widehat{y} = 0$ 有 $\nu > k$ 个线性无关解。这些额外的 $\nu - k$ 个解从何而来?

除 D 外，再考虑微分算子

$$D_1 \;=\; \partial^{\nu-k} D_{[\alpha]} \;=\; \partial^{\nu-k} \sum_{\ell=0}^{n} A_\ell(1/x)\partial^\ell. \tag{2.9}$$

将 $x^\nu D$ 的牛顿多边形沿两个坐标轴各平移 $\nu - k$ 个单位，即可得到 $x^\nu D_1$ 的牛顿多边形 $\mathcal{N}(x^\nu D_1)$ （参见 图1.1，第10页）。当 $\mathcal{N}(x^\nu D)$ 有一条长度为 k 的水平边时，它有一条长度为 ν 的水平边。 D_1 的指标多项式为 $\mathcal{P}_1(L) = [L - 1]_{(\nu-k)^-}\mathcal{P}_{[\alpha]}(L)$。因此， D_1 的指数是 D 的指数以及额外的数 1，2，.....，$\nu - k$。由于这些指数的实部均为正，因此上述关于情形 $k = \nu$ 的讨论适用于 D_1。

与方程 $D_1 y = 0$ 相关联的 0 处解空间由以下解生成：一方面是 $D_{[\alpha]}y = 0$的解 $h_1(x), \ldots, h_k(x)$；另一方面是各个非齐次方程的解

$$D_{[\alpha]}\; y = 1, \quad D_{[\alpha]}\; y = 1/x, \quad \ldots, \quad D_{[\alpha]}\; y = 1/x^{\nu-k-1}. \tag{2.10}$$

按照 Malgrange [43]的定义，这些解可以看作 $D\,y = 0$ 的微解；关于相关问题，可参见该文献中的定理 2.2 和例 (2.4)。 D_1 的 Borel 变换 Δ_1 是 $\zeta^{\nu-k}\Delta_{[\alpha]}$，因此方程 $\Delta_1\widehat{y} = 0$ 和 $\Delta_{[\alpha]}\widehat{y} = 0$ 具有相同的级数解。 Δ_1 的指标方程为

$$\Pi_1(\lambda) = [\lambda]_{(\nu-k)^-}\Pi_{[\alpha]}(\lambda) \quad \text{with} \quad \Pi_{[\alpha]}(\lambda) = \mathcal{P}_{[\alpha]}(\lambda + 1)$$

并且我们可以验证 $\Pi_1(\lambda) = \mathcal{P}_1(\lambda + 1)$。因此， Δ_1 的指数一方面是 $\Pi_{[\alpha]}(\lambda)$ 的根，也就是说，是 $D_{[\alpha]}$ 的指数平移 -1 后得到的（我们称之为自由指数，因为原则上它们可以取任意复数值）；另一方面，则是整数 0、1、.....，$\nu - k - 1$（我们称之为平凡指数）。牛顿多边形 $\mathcal{N}(\Delta_1)$ 是将牛顿多边形 $\mathcal{N}(\Delta_{[\alpha]})$ 沿垂直方向平移至水平轴上所得的图形，见图 2.2。

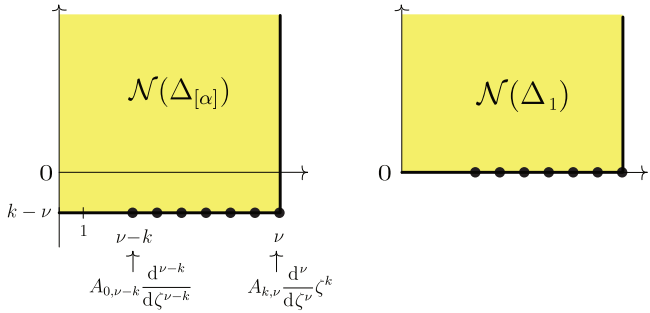


图 2.2。 $\Delta_{[\alpha]}$ 和 Δ_1 在 $k<\nu$时的牛顿多边形

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$与 $k=\nu$ 的情形相同， h_1、……、 h_k 的博雷尔变换 h_1、……、 h_k 是 $\Delta_{[\alpha]}\widehat{y}=0$ 的线性无关解。它们的指数是 $\Delta_{[\alpha]}$ 的自由指-$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$数，并且在与 h_1、……、 h_k 相同的幂次处含有对数。

平凡指数对应的解又如何呢？平凡指数彼此之间（也可能与某些自由指数之间）相差整数，因此可以预期这些解会包含对数。更确切地说，考虑指数 $\Lambda=\nu-k-1-s\geqslant 0$，此时大于或等于 Λ 的平凡指数有 s 个。假设大于或等于 Λ 的 $\Pi_{[\alpha]}(\lambda)$ 的整数根（按重数计）有 $r\geqslant 0$ 个。在这种情况下，用于构造含对数解的经典弗罗贝尼乌斯方法会得到一些表达式，其中对数的幂最高可达 $r+s-1$，而一般而言，其中一个解会达到这一上限。但这里并非如此：事实上，附属于指数 Λ 的解表现得“仿佛其他平凡指数并不存在”。

命题 2.7。— 如上所述，对于方程 $\Delta_{[\alpha]}\widehat{y}=0$ 的平凡指数 Λ，其对应的解中可能包含对数，且幂次至多为 r。特别地，如果 $\Pi_{[\alpha]}(\lambda)$ 没有大于 Λ 的整数根，则对应于平凡指数 Λ 的解不包含对数。

证明。— 正如我们刚刚看到的，与指数 Λ 对应的 $\Delta_{[\alpha]}\widehat{y}=0$ 的解空间由以下各项生成：齐次方程 $D_{[\alpha]}y=0$ 中与 $\Lambda+1$ 对应的解的博雷尔变换，以及在具有解的每个非齐次方程 (2.10) 中与 $\Lambda+1$ 对应的一个解的博雷尔变换。

弗罗贝尼乌斯方法 [52, 29] 表明，与指数 $D_{[\alpha]}y=0$ 对应的解 $\Lambda+1$ 所含对数项的幂次至多为 $r-1$。以齐次形式表示，关于 $D_{[\alpha]}y=1/x^p$ 的方程 $p\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 写作 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^pD_{[\alpha]}y=0$ —

(7)这里所说的解，是指可以提出因子 ξ^Λ 的解，其中另一个因子只包含非负整数次幂的 ξ 和对数的级数。

并且，除了 $D_{[\alpha]}$ 的指数之外，至多还有一个大于或等于 $\Lambda+1$ 的整数指数。因此，与 $\Lambda+1$ 对应的解所含对数项的幂次至多为 r。（更确切地说，$\mathrm{d}\,\mathrm{d}x\, x^p D_{[\alpha]} y = 0$ 的指标方程为 $(L+k-\nu+p)\mathcal{P}_{[\alpha]}(L)=0$，因此额外的指数为 $\Lambda+1+s-p$，且非齐次方程有一个与 $\Lambda+1$ 对应的解，当且仅当 $0 \leqslant p \leqslant s$。）

根据第 14 页的引理 2.1，所有这些解的博雷尔变换在不超过 r 的幂次处都涉及对数。□

现在考虑一个一般的算子 D，其次数为 $\nu>1$，符合第 13 页注 1.4 的意义。由该注释可知，对于任意斯托克斯值 α，算子 $D_{[\alpha]}$ 具有唯一的指数 $L_{[\alpha]} = -A_{0,\ \nu-1}/A_{1,\nu}$。算子 $\Delta_{[\alpha]}$ 具有指数 $\Lambda = L_{[\alpha]} - 1$，以及 $\nu-1$ 个平凡指数 0、1、2、……、$\nu-2$。

推论 2.8。——对于次数为 $\nu>1$ 的一般算子 D，令 $L_{[\alpha]}$ 如上定义，可以设为：

- 若 $L_{[\alpha]} \notin \mathbb{Z}_{>0}$，则 $\Delta_{[\alpha]}\widehat{y}=0$ 的解不含对数；
- 若 $L_{[\alpha]} \in \mathbb{Z}_{>0}$，则 $\Delta_{[\alpha]}\widehat{y}=0$ 中指数为 λ 且满足 $\lambda \in \{0、1、2……、\nu-2\}$ 和 $\lambda<\Lambda=L_{[\alpha]}-1$ 的解可能包含对数，但仅限于对数的一次幂。

情形 $\nu<k$。在此情形下，Borel 算子 $\Delta_{[\alpha]}$ 的阶数 ν 小于与 0 相关联的 $D_{[\alpha]}y=0$ 的解的数量 k。

$D_{[\alpha]}$ 具有单一 1 级（命题 1.2，第 10 页）的条件特别说明，$A_{\ell,}$ </style>只要。当对于所有都满足这些条件时，即可推出。因此，对于某个微分算子，可以写成，而赋值为非正 *1*，$1/x,\ 1/x^2,\ \ldots,\ 1/x^{k-\nu-1}$ 的有理函数是 $D_{[\alpha]}\,y=0$ 的解。按照第 1.3 节第 11 页所述方式整理的方程不可能出现这种情况。为了使 $D_{[\alpha]}$ 符合第 1.3 节的条件，需要进行变量替换 $y=x^{-(k-\nu)}\,z$，之后该方程便属于情形 $k=\nu$。

3. 拉普拉斯平面中的斯托克斯现象

现在我们回顾线性微分方程 $D\,y=0$（方程 (0.1)，第 6 页）的斯托克斯现象的一些重要事实，包括斯托克斯矩阵的定义。我们仍假设方程已按第 1.3 节第 11 页所述的方式预备好，并且已固定一个形式基本解

第 11 页，并且已固定一个形式基本解

$$\begin{bmatrix}\widetilde{y}_1(x) & \widetilde{y}_2(x) & \cdots & \widetilde{y}_n(x)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\widetilde{f}_1(x) & \widetilde{f}_2(x) & \cdots & \widetilde{f}_n(x)\end{bmatrix} x^{\mathfrak{L}}\, \mathrm{e}^{Q(1/x)}.$$

正如前文所述，描述斯托克斯现象相当于测量在以 0 为基点的公共扇区上具有相同渐近分析的解之间的差距。然而，表示这些差距的方式有无穷多种，因此必须对它们加以整理，才能理解其中发生的情况并比较各种结果。从理论角度看，方程 (0.1) 的斯托克斯现象由一个称为 斯托克斯余循环 的非阿贝尔 1-余循环刻画，它可以表示为有限个 Stokes 自同构的集合（[37,Th. II.2.1], [1], [39, Sec. 3.5.3]）。每个反斯托克斯方向都对应一个 Stokes 自同构，也就是说，对于每个方向 $\omega \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$，都存在决定多项式 $q_j(1/x)$和 $q_\ell(1/x)$，使得 $\arg(x) = \omega \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ 是 $\exp(q_j - q_\ell)(1/x)$达到最大衰减的方向。在所考虑的情形中，$q_j(1/x) = -\alpha_j/x$和 $q_\ell(1/x) = -\alpha_\ell/x$ 意味着 $-(\alpha_j - \alpha_\ell)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}$ 为负实数 [39,Th. 3.3.5 (iv), (v)]。

定义 3.1. — 设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ 是 D 的斯托克斯值。反斯托克斯方向 是由 ω 给出的方向

$$\omega = \arg(\alpha_j - \alpha_\ell) \quad \textit{for all} \quad j \neq \ell.$$

若 $\widetilde{y}$ 是与斯托克斯值 α_ℓ 对应的一个解，则与解关联的反斯托克斯方向 $\widetilde{y}$ 是满足存在 $j \neq \ell$ 使得 $\omega = \arg(\alpha_j - \alpha_\ell)$ 的方向 ω。

关于 Stokes 自同构抽象定义的所有细节，均可在上述参考文献中找到。就本文而言，我们只需指出，构成 Stokes 余循环的 0-余链由渐近于 $\begin{bmatrix}\widetilde{f}_1(x) & \widetilde{f}_2(x) & \cdots & \widetilde{f}_n(x)\end{bmatrix}$ 的解析函数组成。可以证明，这些函数与对应渐近级数在反斯托克斯方向两侧的 1-和一致。

~更准确地说，形式级数 $f_j(x)$ 是 1-可求和的 [39, 定义 5.1.6，定理 5.2.5], ，除可能有限多个反斯托克斯方向外，在所有方向上都有 1-和。在一个反斯托克斯方向 ω 上，可以定义两个侧向“和”：$f_j^-(x)$在 ω的右侧和 $f_j^+(x)$的左侧：右侧（分别为左侧）的和，是将 f_j在方向 $\omega - \varepsilon$（分别为 $\omega + \varepsilon$）上的 1-和对所有足够小的[(8)] $\varepsilon > 0$拼接起来得到的。在由 ω平分的开半平面内、0 的某个邻域上，这两个侧向和

(8) 只需保证扇区 $(\omega - \varepsilon, \omega + \varepsilon)$ 不包含除 ω 以外的任何反斯托克斯方向。从现在起，假设此条件成立。

~都有定义，且都与 $f_j(x)$具有 1-Gevrey 渐近性。然而一般来说，~它们并不是 $f_j(x)$ 在方向 ω上的 1-和，因为要成为 1-和，它们必须在开口为 $\pi/2-\varepsilon$ 的更宽扇区上与 $f_j(x)$ 具有 1-Gevrey 渐近性。如果 $f_j^-(x)$ 和 $f_j^+(x)$在这个公共定义域上不一致，那么在方向 ω 上就存在非平凡的 Stokes 自同构。

3.1. 斯托克斯矩阵

要获得斯托克斯自同构的矩阵表示，必须考察与侧向和相关的基本解之间的差异。为了定义这些解析基本解，我们以自然的方式将形式因子 $x^{\mathfrak{L}}$ 和 $\exp Q(1/x)$ 转化为实际函数，具体选择如下：

- 对于 ω 及其相邻方向上的辐角取值：我们使用主值分支 $-\pi<\omega\leqslant\pi$；
- 指数函数在 0 处的取值 $\mathrm{e}^0=1$。

乘积 $\left[f_1^{\pm}\quad f_2^{\pm}\quad\cdots f_n^{\pm}\right]x^{\mathfrak{L}}\exp\,Q(1/x)$ 由此给出方程在同一扇区 $|\arg x-\omega|<\pi/2$内 0 的某个邻域上的两个解析基本解 $\left[y_1^{\pm}\quad y_2^{\pm}\quad\ldots\quad y_n^{\pm}\right]$。因此，它们由一个常数可逆矩阵联系起来，我们可以给出以下定义。

定义 3.2. — 沿方向 ω 的斯托克斯矩阵 是满足下列条件的唯一常数可逆矩阵 $I+C_\omega$

$$\left[y_1^-(x)\quad\cdots\quad y_n^-(x)\right]=\left[y_1^+(x)\quad\cdots\quad y_n^+(x)\right](I+C_\omega),\tag{3.1}$$

在由 ω 平分、邻近0的开半平面上。记作 $C_\omega=\left[C_\omega^{[j\,;\ell]}\right]_{1\leqslant j,\ell\leqslant n}$.

可以证明，斯托克斯矩阵 $I+C_\omega$ 是幺幂的（即，C_ω 是幂零矩阵）：对角元均为 1；对于 $j\neq\ell$，除非 $\exp(q_j-q_\ell)(1/x)=\exp(-\alpha_j+\alpha_\ell)/x$ 具有最大衰减，否则矩阵元 $C_\omega^{[j\,;\ell]}$为零，换言之，除非 $(-\alpha_j+\alpha_\ell)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}<0$。因此，对于给定的 ℓ，若不存在满足 $\arg(\alpha_j-\alpha_\ell)=\omega$的 α_j，则 C_ω的第 ℓ 列为零。更多细节请参见 [37]。

注意，斯托克斯矩阵不仅取决于形式基本解的选择，也取决于 determination ω的选择；而它所表示的 Stokes 自同构仅取决于方向 ω。

例 *3.3*。— 考虑矩阵 $\mathfrak{L}$ 包含一个大小为 2 的约旦块和一个大小为 1 的块的情形：$\mathfrak{L} = (L_1 I_2 + J_2) \oplus (L_3 I_1)$。必然有 $q_1(1/x) = q_2(1/x) := -\alpha_1/x$，并假设 $q_1(1/x) \neq q_3(1/x)$，其中 $q_3(1/x) := -\alpha_3/x$。形式基本解为

$$\begin{cases} \widetilde{y}_1(x) = \widetilde{f}_1(x)\, x^{\mathcal{L}_1}\, \mathrm{e}^{-\alpha_1/x}, \\ \widetilde{y}_2(x) = \big(\widetilde{f}_2(x) + \widetilde{f}_1(x) \ln x\big)\, x^{\mathcal{L}_1}\, \mathrm{e}^{-\alpha_1/x}, \\ \widetilde{y}_3(x) = \widetilde{f}_3(x)\, x^{\mathcal{L}_3}\, \mathrm{e}^{-\alpha_3/x}. \end{cases}$$

$y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 的唯一反斯托克斯方向是 $\omega_1 = \arg(\alpha_3 - \alpha_1)$。$y_3(x)$ 的唯一反斯托克斯方向是 $\omega_3 = \arg(\alpha_1 - \alpha_3)$。

斯托克斯矩阵 $I + C_{\omega_1}$ 和 $I + C_{\omega_3}$ 具有如下形式

$$I + C_{\omega_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ C_{\omega_1}^{[3\,;1]} & C_{\omega_1}^{[3\,;2]} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad I + C_{\omega_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & C_{\omega_3}^{[1\,;3]} \\ 0 & 1 & C_{\omega_3}^{[2\,;3]} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

我们注意到，这两个矩阵都是幺幂矩阵，并且满足以下关系：

$$\begin{cases} y_1^-(x) - y_1^+(x) = y_3^+(x)\, C_{\omega_1}^{[3\,;1]} \\ y_2^-(x) - y_2^+(x) = y_3^+(x)\, C_{\omega_1}^{[3\,;2]} \end{cases}$$

and

$$y_3^-(x) - y_3^+(x) = y_1^+(x) C_{\omega_3}^{[1\,;3]} + y_2^+(x) C_{\omega_3}^{[3\,;2]}.$$

注意，ω_1（分别地，ω_3）不是 y_3（分别地，y_1 和 y_2）的反斯托克斯方向；因此，C_{ω_1} 的第三列（分别地，C_{ω_3}的第三行）中的元素为零。

3.2. 预备基本解的情形

现在，沿用第 1.3 节第 11 页的记号，我们聚焦于指数矩阵 $\mathfrak{L}$ 中大小为 m_1 的第一个块 $\mathfrak{L}_1$。回想一下，$\mathfrak{L}_1$ 与决定多项式矩阵 Q 的第一个块 $Q_1 = q_1(1/x) I_{k_1}$ 的一个子块相关联。考虑前 m_1 个形式解，将使我们能够确定斯托克斯矩阵 $I + C_\omega$ 的前 m_1 列。将自身限制于 $\mathfrak{L}_1$ 并不会失去一般性，因为通过解的置换，可以将分解中的任意块置于首位。

第一个 m_1 形式解 $\widetilde{Y}_1(x) = \big[\widetilde{y}_1(x) \quad \widetilde{y}_2(x) \quad \dots \quad \widetilde{y}_{m_1}(x)\big]$ 的形式为

$$\begin{cases} \widetilde{y}_1(x) = \widetilde{f}_1(x)\, x^{\mathcal{L}_1}\, \mathrm{e}^{q_1(1/x)} \\ \widetilde{y}_2(x) = (\widetilde{f}_2(x) + \widetilde{f}_1(x) \ln x)\, x^{\mathcal{L}_1}\, \mathrm{e}^{q_1(1/x)} \\ \cdots \\ \widetilde{y}_{m_1}(x) = \big(\widetilde{f}_{m_1}(x) + \cdots + \widetilde{f}_1(x) \ln^{m_1-1} x\big)\, x^{\mathcal{L}_1}\, \mathrm{e}^{q_1(1/x)} \end{cases} \tag{3.2}$$

它们与反斯托克斯方向相关

$$\arg(\alpha_2-\alpha_1),\dots,\arg(\alpha_N-\alpha_1).$$

给定这样一个方向 ω，其主值分支为 ω，我们定义

$$\beta_1=\alpha_{i_1}-\alpha_1,\quad \beta_2=\alpha_{i_2}-\alpha_1,\quad \cdots,\quad \beta_r=\alpha_{i_r}-\alpha_1 \tag{3.3}$$

其中 $\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_r}$ 是位于从 0 出发、方向为 ω 的射线 d_ω 上的斯托克斯值，按距 0 的距离递增排列。

限制在前 m_1 列时，$C_\omega(x)$ 中前 k_1 行均为零，只有对应于块 $i\in I_{i_1}\cup I_{i_2}\cup\cdots\cup I_{i_r}$ 的行可能非零

$$Q_{i\ell}(1/x)=q_{i\ell}(1/x)I_{k_{i\ell}}=-\alpha_{i\ell}/xI_{k_{i\ell}}\quad\text{for}\quad \ell=1,2,\dots,r$$

根据斯托克斯矩阵的定义 (3.1)，我们推导得出

$$h_\ell^-(x)-h_\ell^+(x)=\sum_{s=1}^{r}\mathrm{e}^{-\beta_s/x}\Big(\sum_{j\in\mathcal{I}_{i_s}}h_j^+(x)C_{\underline{\omega}}^{[j\,;\ell]}\Big)\quad\text{for }\ell=1,2,\dots,m_1 \tag{3.4}$$

其中，当 $j\in I_i$ 时，$h_j(x)$ 定义为 $y_j(x)=h_j(x)\mathrm{e}^{-\alpha_i/x}$。

4. 从博雷尔平面观察斯托克斯现象

现在的思路是从博雷尔平面的角度重写定义 (3.1)，以得到一个关于斯托克斯乘子的线性方程组。与上一节一样，我们聚焦于这个块

$$\begin{bmatrix}\widetilde{y}_1 & \dots & \widetilde{y}_{m_1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\widetilde{h}_1 & \dots & \widetilde{h}_{m_1}\end{bmatrix}\mathrm{e}^{-\alpha_1/x}$$

$$\text{with }\begin{bmatrix}\widetilde{h}_1 & \dots & \widetilde{h}_{m_1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\widetilde{f}_1 & \dots & \widetilde{f}_{m_1}\end{bmatrix}x^{\mathfrak{L}_1}\text{ and }\mathfrak{L}_1=\mathcal{L}_1I_{m_1}+J_{m_1}.$$

理论指出，幂级数 $f_\ell(x)$ 在除反斯托克斯方向之外的所有方向上都是 1- 可求和的，并且可以先进行博雷尔变换，再进行拉普拉斯变换，从而得到这些和。给定反斯托克斯方向 ω，我们关心的是当 ε 足够小时，沿方向 $\omega\pm\varepsilon$ 的和。由于预备解所需满足的赋值条件，我们可以直接对 $\widetilde{\ }$ 中的 $h_\ell(x)$ 应用这些变换。事实上，由于 h_ℓ 具有正赋值，$h_\ell=B(h_\ell)$ 的赋值为 >-1，且拉普拉斯积分在 0 处收敛。作为一个在线段 $d_{\omega\pm\varepsilon}$，h_ℓ 上没有奇点的线性 $\widehat{\ }$ 微分方程的解，它可沿这些射线解析延拓至无穷远。所得函数在无穷远处至多呈指数增长，因为算子 $\Delta_{[\alpha_1]}$ 在无穷远处的级别为 $\leqslant 1$，因此拉普拉斯积分收敛。

为得到公式 (3.1) 的左侧，原则上应先将 $h_\ell(\zeta)$ 从 d_ω向右和向左作解析延拓^，然后沿方向 $\omega-\varepsilon$对 $h_\ell(\zeta)$ 从 $\zeta=0$ 到无穷远作拉普拉斯积分^，再沿方向 $\omega+\varepsilon$从无穷远积分到 $\zeta=0$。更方便的做法是将积分路径 γ 拆分为 r 条路径 γ_j，使它们分别绕过 ζ- 平面中的每个奇点 β_1，β_2、..... β_r（即，ξ-平面中的点 α_{i_1}，α_{i_2}，$\cdots$，α_{i_r}），如图4.1所示。

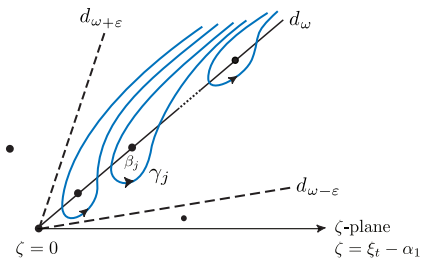


图4.1。路径 γ_ω 分成有限条路径 γ_j；黑色大点表示 Δ的奇点

^线性微分方程 $\Delta_{[\alpha_1]}\widehat{y}=0$ 的解 $h_\ell(\zeta)$，对于 $\ell=1,\ldots,m_1$，可以沿着避开 $\Delta_{[\alpha_1]}$的奇点的任意路径进行解析延拓。沿积分路径 γ_ω 对 $h_\ell(\zeta)$进行解析延拓时，应按如下方式进行：首先，沿着图4.2所示的路径 $\gamma_{0\to\beta_r}$，将 $h_\ell(\zeta)$解析延拓至 d_ω 的右侧。然后，一旦已知 $h_\ell(\zeta)$ 在每个 γ_j的一段弧上的值，就从这些值出发，沿着 γ_j的两个分支进行解析延拓。我们将所得函数记为 h_ℓ^-。请注意，实际计算中，只需显式求出沿路径 $\gamma_{0\to\beta_r}$ 的解析延拓；借助柯西–魏尔斯特拉斯方法，这可通过有限步完成（参见第 6 节，第 31 页）。

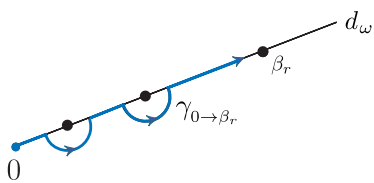


图4.2。 ζ平面中的路径 $\gamma_{0\to\beta_r}$ $(\zeta=\xi-\alpha_1)$

沿分段路径 γ积分，我们得到，对于 $\ell = 1, \dots, m_1$,

$$h_\ell^-(x) - h_\ell^+(x) \;=\; \sum_{s=1}^{r} \mathrm{e}^{-\beta_s/x} \int_{\gamma_0} \widehat{h}_\ell^-\big(\beta_s + \zeta\big)\, \mathrm{e}^{-\zeta/x} d\zeta \tag{4.1}$$

其中， γ_0 是绕 $\zeta = 0$ 的汉克尔型路径，由 γ_{i_s} 经平移 $-\beta_s$得到。

5. 比较两种方法

比较第 26 页的方程 (3.4) 和方程 (4.1)，我们得到，对于 $\ell = 1$，2，...， m_1，

$$\sum_{s=1}^{r} \mathrm{e}^{-\beta_s/x} \Big(\sum_{j \in \mathcal{I}_{i_s}} h_j^+(x) C_{\underline{\omega}}^{[j\,;\ell]} \Big) = \sum_{s=1}^{r} \mathrm{e}^{-\beta_s/x} \int_{\gamma_0} \widehat{h}_\ell^-\big(\beta_s + \zeta\big)\, \mathrm{e}^{-\zeta/x} d\zeta.$$

这种方法中或许最微妙的一点是，尽管等式两边的指数项都以函数为系数，我们仍能将它们识别出来。原因在于，这些函数是可求和的、可复苏的 [40, 引理 4.2]。由此，对于所有列指标 $\ell = 1$，...， m_1和行块指标 $s = 1$，..., r（回想一下，$\boldsymbol{I}_{i_s}$是由 k_{i_s} 个连续行指标组成的集合），我们得到以下关系

$$\sum_{j \in \mathcal{I}_{i_s}} h_j^+(x)\, C_{\underline{\omega}}^{[j\,;\ell]} = \int_{\gamma_0} \widehat{h}_\ell^-\big(\beta_s + \zeta\big)\, \mathrm{e}^{-\zeta/x} d\zeta. \tag{5.1}$$

该公式应作如下理解。给定 s，对于 $j \in \boldsymbol{I}_{i_s}$，函数 $h_j^+(x)$构成一个维数为 k_{i_s} 的线性空间的一组基，我们必须求出右端函数在这组基下的坐标 $C_{\underline{\omega}}^{[j\,;\ell]}$。尽管函数$h_j^+$ 和 $\widehat{y}_\ell^-$ 在理论上定义良好，为了有效计算这些坐标，将方程 (5.1) 两边都替换为它们在 $x \to 0$时的渐近展开会更方便。换言之，将 (5.1) 替换为以下形式更为有利：

$$\boxed{\sum_{j \in \mathcal{I}_{i_s}} \widetilde{h}_j(x)\, C_{\underline{\omega}}^{[j\,;\ell]} = T_{(x=0)} \int_{\gamma_0} \widehat{h}_\ell^-\big(\beta_s + \zeta\big)\, \mathrm{e}^{-\zeta/x} d\zeta} \tag{5.2}$$

其中，右侧积分的渐近展开借助以下引理即可轻松计算。

引理 5.1. — 设 Γ_ω 是围绕半直线 d_ω的汉克尔围道，从 $\arg\zeta = \omega - 2\pi$ 到 $\arg\zeta = \omega$沿正向取向，并设 $x \in \mathbb{C}$ 是半平面 $|\arg(x) - \omega| < \pi/2$中的一个点。

(1) 假设 $\varphi(\zeta)\mathrm{e}^{-\zeta/x}$ 在方向 ω上于无穷远处可积，且 $\varphi(\zeta)$ 在 Γ_ω上及其内部解析。那么，

$$\int_{\Gamma_\omega} \varphi(\zeta)\,\mathrm{e}^{-\zeta/x}\,\mathrm{d}\zeta = 0.$$

(2) 对任意 $\lambda\in\mathbb{C}$，有

$$I_\lambda(x) := \int_{\Gamma_\omega} \zeta^\lambda\,\mathrm{e}^{-\zeta/x}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{2\pi\,\mathrm{i}}{\Gamma(-\lambda)}\left(x\,\mathrm{e}^{-\pi\,\mathrm{i}}\right)^{1+\lambda}.$$

特别地，根据第 *(1)* 项，$I_\lambda = 0$ 对所有 $\lambda\in\mathbb{N}$ 都成立。*(3)* 对任意 $\lambda\in\mathbb{C}$ 和 $p\in\mathbb{N}$，有

$$J_{\lambda\,;\,p}(x) := \int_{\Gamma_\omega} \zeta^\lambda\,\ln^p(\zeta)\,\mathrm{e}^{-\zeta/x}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\lambda^p}\,I_\lambda(x)$$

且 $J_{\lambda\,;\,p}(x)$ 具有如下形式：$x^{1+\lambda}R\big(\ln(x)\big)$，其中 $R\big(\ln(x)\big)\in\mathbb{C}[\ln(x)]$。特别地，对于 $\lambda\in\mathbb{N}$，

$$J_{\lambda\,;\,1} = 2\pi\,\mathrm{i}\,\Gamma(1+\lambda)\,x^{1+\lambda}$$

$$J_{\lambda\,;\,2} = 4\pi\,\mathrm{i}\,\Gamma(1+\lambda)\left(-\gamma+\mathcal{H}_\lambda-\pi\,\mathrm{i}+\ln x\right)x^{1+\lambda}.$$

其中 $H_\lambda = \sum_{j=1}^{\lambda}\frac{1}{j}$是 λ 阶调和和。

注 *5.2.*— 引理中的被积函数在邻近 d_ω 的扇区上除了 0 以外没有其他奇点。因此，可以变形积分路径，使其呈现为公式 (4.1) 中的路径 γ_0，或图 4.1 第 27 页上的路径 γ_s。

证明。— 第（1）项由柯西留数定理得出。

在接下来的两项中，对于任意满足 $x-\pi/2<\omega-\arg(x)<\pi/2$ 的 x，积分 I 和 J 在无穷远处收敛。

为证明（2），先假设 $\arg(x)=\omega$（这是我们所关注的情形）。变量替换 $u=\zeta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}/x$ 导出

$$\int_{\Gamma_\omega} \zeta^\lambda\,\mathrm{e}^{-\zeta/x}\,\mathrm{d}\zeta = (x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi})^{\lambda+1}\int_{\Gamma_\pi} u^\lambda\,\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u$$

右侧的积分正是出现在 $1/\Gamma(-\lambda)$ [13, 的积分公式（4.8.1）第 296] 页中的积分，该公式对所有 $\lambda\in\mathbb{C}$ 都成立。$\arg(x)=\omega+\varphi$ 且 $|\varphi|<\pi/2$ 的情形可通过旋转归结为前一种情形。

第（3）点的一般公式由（2）和勒贝格导子定理得出。特殊情形的证明与引理 2.1（3），第 14 页的证明类似，不同之处在于此处我们使用二阶展开

$$\frac{1}{\Gamma(-\lambda-z)} = (-1)^\lambda\Gamma(1+\lambda)\,z\left(1+(\mathcal{H}_\lambda-\gamma)z+O(z^2)\right)$$

（可通过对级数展开 $1/\Gamma(z) = z + \gamma z^2 + O(z^3)$[51, 5.7.i] 反复应用关系式 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ 得出）。将此展开代入 I_λ 的表达式，我们得到

$$\begin{aligned} I_{\lambda+z}(x) &= 2\pi\,\mathrm{i}(-1)^\lambda\Gamma(1+\lambda)\,z\left(1+(\mathcal{H}_\lambda-\gamma)z+O(z^2)\right)\\ &\quad\cdot(xe^{-\pi\,\mathrm{i}})^{1+\lambda}\left(1+(\ln x-\pi\,\mathrm{i})z+O(z^2)\right)\\ &= 2\pi\,\mathrm{i}\,x^{1+\lambda}\,\Gamma(1+\lambda)\left(z+(\mathcal{H}_\lambda-\gamma+\ln x-\pi\,\mathrm{i})z^2+O(z^3)\right)\end{aligned}$$

由此可得结论。 □

注 *5.3*。— 在第 1.3 节第 11 页定义预备基本解时，我们将原方程的解乘以 x 的一个幂，以化为具有正赋值的解。这样可以确保这些解的博雷尔变换的拉普拉斯变换定义良好。不过，这也会提高变换后算子的阶数：假设我们必须在原方程$D_1\,z = 0$中作变量替换 $z = x^{-u}y$，才能得到预备方程 $D\,y = 0$。那么， D 的博雷尔变换 Δ的阶数将比 D_1的博雷尔变换 Δ_1 高 u。因此，从实际角度看，直接处理 Δ_1会更经济；如下文所示，这确实可行。

斯托克斯乘子由公式（5.2）给出，该公式是相对于预备算子 D而言的。将相对于方程 $D_1\,z = 0$定义的、与 h_j 和h_ℓ^- 相对应的量分别记为 k_j 和 k_ℓ^-。我们先用k_ℓ^- 改写（5.2）的右端。为此，将 $h_j(x)$ $\sim$ $\sim$ $\sim$分解为 $P_j(x) + H_j(x)$，其中多项式部分 $P_j(x)$ 的次数为 u。相应地，写成 $k_j(x) = R_j(1/x) + K_j(x)$，其中 $K_j(x) = (1/x^u)H_j(x)$，而 $R_j(1/x)$是主部。经过博雷尔变换后，我们得到如下分解（与解析延拓相容）：

$$\widehat{h}_\ell^-(\zeta) = \widehat{P}_\ell(\zeta) + \widehat{H}_\ell^-(\zeta), \qquad \widehat{k}_\ell^-(\zeta) = \widehat{R}_\ell(\delta) + \widehat{K}_\ell^-(\zeta)$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$其中 $P_\ell(\zeta)$ 是次数至多为 $u-1$ 的多项式，而 $R_\ell(\delta)$ 是位于 $\zeta \equiv \xi - \alpha_1 = 0$处的狄拉克质量的导数组合。关系 $\widetilde{K}_\ell(x) = (1/x^u)\widetilde{H}_\ell(\overline{x})$推出 $\widehat{K}_\ell(\zeta) = \frac{\mathrm{d}^u}{\mathrm{d}\zeta^u}\widehat{H}_\ell(\zeta)$。此外， $\widehat{H}_\ell(\zeta)$ 及其直到 u 阶的导数在无穷远处至多呈指数增长，因此有

$$\int_{\gamma_0}\widehat{K}_\ell^-(\beta_s+\zeta)\,\mathrm{e}^{-\zeta/x}\,\mathrm{d}\zeta = \int_{\gamma_0}\frac{\mathrm{d}^u}{\mathrm{d}\zeta^u}\widehat{H}_\ell^-(\beta_s+\zeta)\,\mathrm{e}^{-\zeta/x}\,\mathrm{d}\zeta$$

经过 u 次分部积分后

$$\int_{\gamma_0} \widehat{K}_\ell^-(\beta_s+\zeta)\,\mathrm{e}^{-\zeta/x}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{x^u}\int_{\gamma_0} \widehat{H}_\ell^-(\beta_s+\zeta)\,\mathrm{e}^{-\zeta/x}\,\mathrm{d}\zeta$$
$$= \frac{1}{x^u}\int_{\gamma_0} \widehat{h}_\ell^-(\beta_s+\zeta)\,\mathrm{e}^{-\zeta/x}\,\mathrm{d}\zeta.$$

~ ~转向 (5.2) 的左端，我们有 $k_j(x) = (1/x^u)h_j(x)$, 因此

$$\sum_{j\in\mathcal{I}_{i_s}} \widetilde{k}_j(x)\,C_{\underline{\omega}}^{[j\,;\ell]} = \frac{1}{x^u}\sum_{j\in\mathcal{I}_{i_s}} \widetilde{h}_j(x)\,C_{\underline{\omega}}^{[j\,;\ell]}$$

将 h替换为 k后，方程 (5.2) 仍然成立。

总之，给定 $\ell \in \{1,\dots,m_1\}$（采用第 12 页引入的记号）以及 s，恒等式 (5.1) 中出现的 k_{i_s} 斯托克斯乘子 $C_\omega^{[j\,;\ell]}$位于斯托克斯矩阵的第 $j \in \mathcal{I}_{i_s}$ 行和第 ℓ 列。将所有函数替换为它们的渐近展开，并比较等式两边展开式的系数，我们得到一个无限维非齐次线性系统，其解即为斯托克斯乘子 $(C^{[j}{}_{;\omega}{}^{\ell]})_{j\in\mathcal{I}_{i_s}}$。

为了计算右端积分的渐近展开，我们需要知道 $\widehat{y}_\ell^-(\zeta)$ 在其每个奇点 β_s 处的渐近展开。计算这些展开是下一节所讨论的有效解析延拓过程的主要任务。

对所有 $\ell \in \{1,\dots,m_1\}$ 和 $s = 1,\dots,r$ 重复这些计算后，我们便可以确定与L_1 和 $\mathrm{e}^{-\alpha_1/x}$ 相关的前 m_1 列中的所有斯托克斯乘子。接下来，必须对与 $\mathrm{e}^{-\alpha_1/x}$, 相关的其他子块L_i 应用相同的步骤，最后再对所有指数部分 $\mathrm{e}^{-\alpha_j/x}, j = 1,\dots,N$应用此步骤。

6. 解析延拓

作为第一部分的总结，我们现在回顾如何在实践中使用柯西–魏尔斯特拉斯级数展开方法，在彼此重叠的圆盘上沿图4.2所示路径对 h_ℓ 进行解析延拓$\widehat{\ }$ $\gamma = \gamma_{0\to\beta_r}$。

与之前一样，我们考虑一个解 $\widetilde{y}_\ell(x) = \widetilde{h}_\ell(x)\mathrm{e}^{-\alpha_1/x}$, $1 \leqslant \ell \leqslant m_1$.$\widehat{\ }$关于 $\widetilde{y}_\ell(x)$ 的博雷尔变换 $h_\ell(\zeta)$ （其中 $\zeta = \xi - \alpha_1$）是幂级数、 ζ 的复幂和对数的乘积之和。幂级数收敛，并且我们通过选择 arg ζ 的主值分支，将复幂和对数解释为解析

函数。此外，回想一下，$\curvearrowright h_\ell(\zeta)$ 是 $\Delta_{[\alpha_1]}$ 的一个解，并且

$$\beta_1 = \alpha_{i_1} - \alpha_1,\ \beta_2 = \alpha_{i_2} - \alpha_1,\ \ldots,\ \beta_r = \alpha_{i_r} - \alpha_1$$

是射线 d_ω 上的 $\Delta_{[\alpha_1]}$ 奇点，按从 $\zeta = 0$ 到无穷远的顺序排列。

由于我们需要了解 $h(\zeta)$ 在所有 β_s、$s = 1$、2、…、r 处的行为，因此我们选择用一条由圆盘 $\mathcal{D}_0$、$\mathcal{D}_1$、…、$\mathcal{D}_t$ 组成的圆盘链覆盖 γ，这些圆盘的圆心包含所有奇点 β_s。我们将它们的圆心（在 ζ 平面上）记为 χ_0、χ_1、…、χ_t，半径记为 $1/\rho_0, \ldots, 1/\rho_t$。第一个圆盘 $\mathcal{D}_0$ 以 $\chi_0 = 0$ 为圆心；最后一个圆盘 $\mathcal{D}_t$ 以 $\chi_t = \beta_r$ 为圆心；这些圆盘中不含 $\Delta_{[\alpha_1]}$ 的奇点，但圆心处可能有奇点。我们将圆盘编号

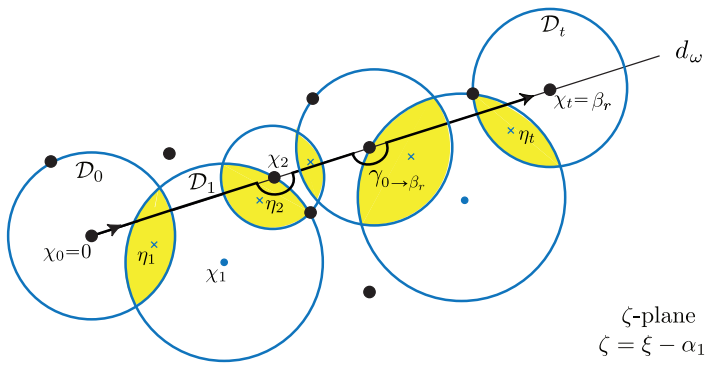


图6.1。路径 $\mathrm{Cov}(\gamma_{0\to\beta_r})$ 的覆盖 $\gamma_{0\to\beta_r}$；大黑点表示限制圆盘大小的 $\Delta_{[\alpha_1]}$ 奇点，蓝点表示其余圆心，点 η_1、…、η_t 选在连续交集中

使任意两个相邻的圆盘彼此重叠，并固定点

$$\eta_1 \in \mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_1,\ \eta_2 \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2,\ \ldots,\ \eta_t \in \mathcal{D}_{t-1} \cap \mathcal{D}_t.$$

我们将 $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_t$ 处的局部坐标记为 $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_t$，其定义为

$$\zeta_0 = \xi - \alpha_1,\ \zeta_1 = \zeta_0 - \chi_1,\ \ldots,\ \zeta_{t-1} = \zeta_0 - \chi_{t-1},\ \zeta_t = \zeta_0 - \chi_t$$

并为所有 p 选择主值分支 $-\pi < \arg \zeta_p \leqslant +\pi$。

对于每个圆盘 $\mathcal{D}_p$，我们选择方程 $\Delta_{[\chi_p]}\widehat{y}=0$ 在 $\zeta_p=0$ 处的局部基本解 $Y_{[\chi_p]}(\zeta_p)$，其形式为经典形式

$$\begin{aligned}\widehat{Y}_{[\chi_p]}(\zeta_p) &= \begin{bmatrix}\widehat{y}_{[\chi_p],1}(\zeta_p) & \widehat{y}_{[\chi_p],2}(\zeta_p) & \cdots & \widehat{y}_{[\chi_p],\nu}(\zeta_p)\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}\widehat{h}_{[\chi_p],1}(\zeta_p) & \widehat{h}_{[\chi_p],2}(\zeta_p) & \cdots & \widehat{h}_{[\chi_p],\nu}(\zeta_p)\end{bmatrix}\zeta_p^{\Lambda_p}\end{aligned} \tag{6.1}$$

其中 h 是幂级数。指数矩阵 Λ_p 在 χ_p 是常点时为零；否则，它具有约当标准形，其对角项由命题 2.6（第 18 页）给出。

记 $\phi_0(\zeta_0)$ 为级数 $\widehat{y}_\ell(\zeta_0)$ 在其收敛圆盘 $\mathcal{D}_0$ 上的和。通过计算该和及其前 $\nu-1$ 阶导数在 $\zeta_0=\eta_1$ 处的值，我们将它在点 $\zeta_1=\eta_1-\chi_1$ 处用基 $Y_{[\chi_1]}(\zeta_1)$ 表示（取辐角 $-\pi<\arg(\eta_1-\chi_1)\leqslant+\pi$ 的主值）。这得到一个常向量 T_1，使得

$$\phi_0(\eta_1) = \widehat{Y}_{[\chi_1]}(\eta_1-\chi_1)\,T_1 \tag{6.2}$$

以及一个函数

$$\phi_1(\chi_1+\zeta_1)=\widehat{Y}_{[\chi_1]}(\zeta_1)\,T_1$$

它是 $\phi_0(\zeta_0)$ 到 $\mathcal{D}_1$ 的解析延拓。重复这一过程，我们得到一个函数

$$\phi_p(\chi_p+\zeta_p)=\widehat{Y}_{[\chi_p]}(\zeta_p)\,T_p \tag{6.3}$$

它定义在每个 χ_p 的邻域内，并且是沿着 γ 对 $\phi_0(\zeta_0)$ 的解析延拓。由于解析延拓唯一性，结果与圆盘 $\mathcal{D}_0$、…、$\mathcal{D}_t$ 的选取无关。实际应用中，为了提高性能，宜使交集尽可能大，这样我们选择的点 η 就不必太靠近边界。

h_ℓ^- 在奇点 β_p, $p=1$、2、……、r 处的局部展开，随后可从圆盘 $\mathcal{D}_p$ 对应的方程 (6.3) 中读出。该圆盘的中心为 $\chi_p=\beta_s$，因为 $Y_{[\chi_p]}$ 中的基函数最初就是根据它们的局部展开定义的。

第 2 部分。算法与实现

现在，我们的目标是将前两节所述的计算斯托克斯矩阵的过程转化为详细算法，以便利用现有的计算机代数系统功能加以实现。该详细算法消除了方法中的诸多冗余，使其在实践中快得多。不过，完整的复杂度分析留待未来工作；我们仅指出，该算法可以实现为：在误差不超过 2^{-p} 的情况下，计算任意固定算子 D 的斯托克斯乘子，所需运算次数为 $\mathrm{O}(p\log(p)^3)$（见第 64 页的注 13.8）。

与第 31 页第 5 节末尾概述的算法相比，完整版本尽可能使用基本矩阵，或至少使用与第 11 页第 1.3 节分解中给定斯托克斯值和指数相对应的解块，而不是逐一处理每个解 $\widetilde{y}_j(x)$ 。本着同样的思路，该算法会同时计算所有方向上的斯托克斯矩阵。这种改进结构的主要优点是将所需的解析延拓步骤降至最低。

我们使用 SageMath 计算机代数系统实现了这一算法，并根据本文的描述作了一些细微调整。该实现作为 `ore_algebra` 软件包的一部分，依据 GNU通用公共许可证（第 2 版或更高版本）免费提供，可从 `https://www.github.com/mkauers/ore_algebra/` 下载。算法实现在模块 `ore_algebra.analytic.stokes` 中。下文将给出一些使用示例，并偶尔介绍实现细节。如需了解更多信息和其他示例，请参阅软件包随附的文档。安装 `ore_algebra` 并启动 SageMath 后，可以使用以下命令查看 `stokes` 模块中主函数的文档：

```
sage: from ore_algebra.analytic.stokes import stokes_dict
sage: ?stokes_dict
```

在接下来的章节中，我们首先通过一个示例（第 7 节）说明该实现的用法；在详细介绍算法时，这个示例也将贯穿全文。接着，我们讨论算法所处理的复数（第 8 节）和广义幂级数（第 9 节）的表示方法。然后说明在每个斯托克斯矩阵中，与给定一对斯托克斯值相关联的块如何分解为三个辅助矩阵的乘积；这些辅助矩阵可以独立计算，并在多个块中重复使用（第 10 节）。据此，我们可以阐述主过程（第 11 节），起初以计算辅助矩阵的子程序来表述。接下来的两节将详细介绍这些子程序，其中最重要的是对应于解析延拓步骤的子程序（第 13 节）。最后，我们将给出一些补充示例（第 14 节）。

7. 一个例子

A. Duval 和 C.Mitschi [14] 计算合流广义超几何算子的斯托克斯矩阵

$$D_{q,p} = (-1)^{q-p} z \prod_{j=1}^{p} \left(z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} + \mu_j \right) - \prod_{j=1}^{q} \left(z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} + \nu_j - 1 \right) \qquad (7.1)$$

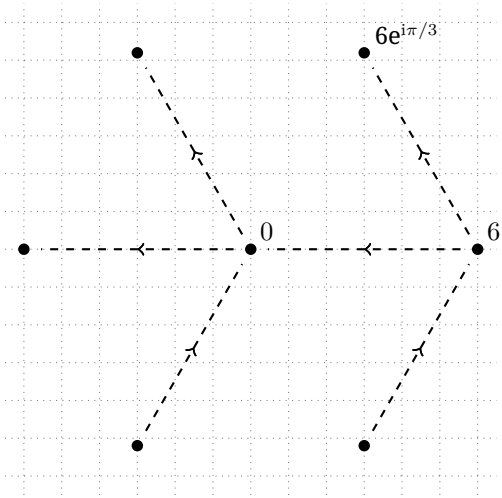


图 7.1。算子 D 在我们的示例中、采用第 13 节所述的生成树时的斯托克斯值。

用伽马函数的值表示。作为贯穿全文的示例，我们采用其特殊情形

$$p = 1, \quad q = 7, \quad \mu = \left(\frac{1}{2}\right), \quad \nu = \left(1, 0, 0, 0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \tag{7.2}$$

Mitschi 和 Sauzin 的讲义中例 2.45 所讨论的情形 [47]。在例 14.1（第 65 页）中，我们讨论了情形 $q = 2$、 $p = 1$ 的几个实例，以说明各种退化情况。

例 *7.1*。— 按照第 1 部分中的变量替换 $x = z^{-1/6}$ 和 $\partial = x^2\mathrm{d}/\mathrm{d}x$，将算子（7.1）特化到参数（7.2）后得到

$$D = \tfrac{1}{x^6}\partial^7 + \tfrac{9}{x^5}\partial^6 + \tfrac{58}{x^4}\partial^5 + \tfrac{272}{x^3}\partial^4 + \tfrac{897}{x^2}\partial^3 + \tfrac{1875}{x}\partial^2 + \left(-\tfrac{46656}{x^6} + 1875\right)\partial + \tfrac{139968}{x^5}.$$

这是一个纯 1 级算子，其斯托克斯值为 0 和 $6\mathrm{e}^{j\mathrm{i}\pi/3}, -2 \leqslant j < 2$（图 7.1）。

为了以数值方式复现 Mitschi 的例子，我们加载 `ore_algebra` 的相关部分，并使用以下命令建立一个微分算子代数

```
sage: from ore_algebra.analytic.stokes import stokes_dict
sage: R.<x> = PolynomialRing(QQ)
sage: A.<Dx> = OreAlgebra(R)
```

最后两行将 `x` 定义为环 $R = \mathbb{Q}[x]$ 的不定元，并将 `Dx` 定义为斜多项式环 $A = \mathbb{Q}[x]\langle D_x\rangle$ 的不定元，其中 D_x作用于涉及 x 的表达式上，作为标准导子 $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$。因此，我们可以定义算子 D，其

```
sage: d = x^2*Dx
sage: diffop = (1/x^6*d^7 + 9*1/x^5*d^6 + 58*1/x^4*d^5
....:    + 272*1/x^3*d^4 + 897*1/x^2*d^3 + 1875*1/x*d^2
....:    + (-46656*1/x^6 + 1875)*d + 139968*1/x^5)
```

然后，为了计算 D 的斯托克斯矩阵，我们使用本节所述算法的实现，执行以下命令

```
sage: stokes = stokes_dict(diffop, 10^-50)
```

第二个参数 `10^-50` 粗略表示我们希望达到的精度，内部用于选择中间计算的工作精度。下文将更详细地讨论它的作用。此示例的计算在一台于2020年 购置的中档笔记本电脑上耗时约 1 秒。 `stokes_dict` 函数返回一个字典`stokes`，将 $\mathsf{e}^{\mathrm{i}\omega}$ （其中 ω 是一个反斯托克斯方向）映射到相应的斯托克斯矩阵。选择 $\mathsf{e}^{\mathrm{i}\omega}$ 而不是 ω 本身作为索引键，是出于 SageMath 所提供基础设施中的一些技术细节；这些细节使得使用代数数作为键更加方便。

特别是，对于方向 $\omega = 0$，我们得到一个如下形式的矩阵（为便于阅读，输出已重新排版并省略了中间数字）

```
sage: stokes[1]
```

$$\begin{bmatrix}
1.0 & 0 & \cdots \\
0 & 1.0 & \cdots \\
0 & 0 & \cdots \\
[\pm 2.11\cdot 10^{-47}] + [0.14\ldots 78 \pm 3.86\cdot 10^{-47}]\mathrm{i} & 0 & \cdots \\
0 & [-2.5 \pm 5.88\cdot 10^{-35}] + [4.33\ldots 09 \pm 7.62\cdot 10^{-35}]\mathrm{i} & \cdots \\
0 & 0 & \cdots \\
[16.0 \pm 6.61\cdot 10^{-42}] + [\pm 6.61\cdot 10^{-42}]\mathrm{i} & 0 & \cdots
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\
[2.5 \pm 2.36\cdot 10^{-23}] + [4.33\ldots 86 \pm 3.95\cdot 10^{-23}]\mathrm{i} & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\
0 & [\pm 4.36\cdot 10^{-44}] + [-221.7\ldots 25 \pm 5.58\cdot 10^{-44}]\mathrm{i} & 0 & 0 & 1.0
\end{bmatrix}$$

此输出中的条目 $[c \pm r]$ 表示相应的精确值包含在区间 $[c - r,\ c + r]$ 中。请注意，有些半径 r明显大于输入时指定的容差 10^{-50}；该容差仅供参考。不过，减小容差会得到

更紧的包围区间，如此处第三列中的非平凡条目所示（注意，Sage 中的行指标和列指标从零开始）：

```
sage: stokes_dict(diffop, 10^-100)[1][5,2]
```

$$[2.5 \pm 4.41 \cdot 10^{-69}] + [4.3301270189\ldots1744862983 \pm 6.95 \cdot 10^{-69}]\mathrm{i}$$

进一步缩小该范围后，原则上可以计算出任意精确的斯托克斯乘子包络。

顺带一提，值得注意的是，这个斯托克斯乘子是代数数，因此很容易根据近似值猜出它的最小多项式；这里使用 Pari 的 `algdep` 函数 [56], ，由此得到精确值 $5e^{i\pi/3}$:

```
sage: algdep(stokes_dict(diffop, 10^-100)[1][5,2].mid(), 2)
x^2 - 5*x + 25
```

类似地，对于 $\underline{\omega} = \pi/6$, ，我们有

```
sage: stokes[exp(I*pi/6)]
```

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \\ & & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ [-5.5 \pm 5.33 \cdot 10^{-31}] + [9.52\ldots82 \pm 8.31 \cdot 10^{-31}]\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & [5.5 \pm 1.06 \cdot 10^{-32}] + [9.52\ldots23 \pm 1.26 \cdot 10^{-32}]\mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}$$

我们省略其余十个 $-\pi < \omega \leqslant \pi$ 的斯托克斯矩阵；由于去分歧步骤带来的对称性，它们很容易用前两个表示。

Mitschi 的结果针对的是形式基本解 $\mathcal{Z}(x)$ ，该解在 [14] 的命题 1.3 和 2.1 中给出，并且与我们的形式基本解 $\mathcal{Y}(x)$ （详见下文例9.4）之间的关系为

$$\mathcal{Z}(x) = \mathcal{Y}(x) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{where } c = \frac{4\pi^{5/2}}{\sqrt{3}}.$$

此外，她的斯托克斯矩阵与我们的矩阵互为逆元。考虑到这一点，我们对斯托克斯乘子的计算与 [47, 例 2.43][(9)] 中列出的公式一致，但我们得到的是 $\eta = 16$ ，而非 $\eta = -16$。

(9)在将这些公式专门应用于 [47, 例 2.45] 中的参数 (7.2) 时，似乎出现了一个错误。

8. 复数的表示

可计算复数与区间。斯托克斯乘子通常是超越数，除了其定义之外，目前尚无已知的、更简单的“精确”表示方法。我们的算法必须能够在误差不超过给定 ε 的情况下计算这些数；而且，由于必然只能对已知近似值的复数进行运算，因此需要某种机制来跟踪计算过程中近似误差的累积。

首先想到的这类机制，或许是预先确定每个中间运算需要达到多高的精度，才能使最终结果满足误差容限。这种策略极其繁琐且容易出错，因此我们不打算给出任何此类界限。

不过，出于理论上的考虑，如果我们采用以下经典定义中的可计算复数概念，大体上就可以忽略这个问题。

定义 8.1. — 如果存在一种算法，以容差 $\varepsilon > 0$ 为输入，并返回一个满足 $|\tilde{x} - x| \leqslant \varepsilon$的 x 的近似值$\tilde{x} \in \mathbb{Q}[i]$，那么复数 x 就是可计算的。我们用 $\mathbb{C}_{\circlearrowleft}$ 表示可计算复数的集合。

如果 x 和 y 是可计算复数，那么 $x + y$ 和 xy 显然也是可计算的；如果 x 是非零的可计算数，那么它的逆元$1/x$ 也是可计算的。同样，以下将用到的 $\log x$ 和 $1/\Gamma(x)$等标准函数，都将某个开域中的可计算数映射为可计算数。然而，不存在能够判定两个可计算数是否相等的算法。

严格来说，本文提出的算法输出由可计算复数组成的矩阵。矩阵中的元素是可计算的，这意味着对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，都可以获得误差保证不超过 ε 的近似值。

原则上，可计算复数可以实现为一个对象，其中包含数值 $x \in \mathbb{C}$ 的近似值，同时还记录了 x 如何用其他可计算数（例如，[25, 49]）来定义。要求对象给出 x 的 ε 近似值时，它会通过递归地重新计算 x 所依赖的量，不断提高精度，直到满足误差容限。按照这种模型，只要我们的算法所依赖的基本函数已作为 $\mathbb{C}_{\circlearrowleft}$ 上的函数提供，整个算法所需的误差传播

以生成严格的任意精度近似值便会自动完成。以下算法的输入中不会出现显式的误差容限，因为输出实际上是一个程序，它以容差为输入，并返回数学结果的近似值。

这种模型在实践中偶尔会用到，但计算开销很大。正如例 7.1 所示，在我们的实现中，我们用区间算术替代可计算复数。

定义 8.2. — 我们用 $\mathbb{C}_\bullet$ 表示复区间 $[a,b]+[c,d]i$ 的集合，其中端点 a, b, c, d 属于一个固定的有理数稠密集。算术运算以及标准初等函数和特殊函数f： $\mathbb{C}^s \to \mathbb{C}$ 被扩展为偏函数 $\mathbb{C}_\bullet^s \to \mathbb{C}_\bullet$，使得对于 $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_s \in \mathbb{C}_\bullet$, 若值 $f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_s)$有定义，则满足

$$f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_s) \supseteq \{f(x_1, \ldots, x_s) : x_1 \in \mathbf{x}_1, \ldots, x_s \in \mathbf{x}_s\}$$

并且，如果存在某个 $(x_1, \ldots, x_s) \in \mathbf{x}_1 \times \cdots \times \mathbf{x}_s$使得 $f(x_1, \ldots, x_s)$ 无定义，则 $f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_s)$ 无定义。

例如， π 可以表示为 $[3.14,\ 3.15] + [-0.1,\ 0.1]i$ 和$[3.14,\ 3.15] + [0.1,\ 0.2]$ 可以定义为 $[3.2,\ 3.4]$。除了在 $\mathbb{C}_{\circlearrowleft}$上运行的版本所需的参数外，区间版本还将工作精度 $p \in \mathbb{N}$ 作为输入，用于指定计算过程中使用的有效数字位数(10)。对可计算复数执行的所有基本运算都将替换为相应的区间运算。当基本运算的输出精度尚未受到输入精度限制时，工作精度决定其输出的精度：例如，虽然无论工作精度如何， $1/[0.9, 1.0]$都必须是宽度至少为 0.1 的区间，$1/[3, 3]$ 在精度为 1 时可以定义为 $[0.3,\ 0.4]$ 而在精度为 2 时可以定义为 $[0.33,\ 0.34]$。请注意，如果输入包含函数未定义的点，或者输入区间过宽，区间运算可能未定义。在这种情况下，整个算法都会引发错误。

一般来说，区间运算的输出只能保证包含相应的精确结果，而不能保证满足任何预设的误差容限。不过，我们只将区间用作可计算复数的近似值。这意味着，我们可以假设基本区间运算的实现方式能够确保：只要工作精度足够高，任何区间运算都不会失败；并且随着工作精度趋于无穷，每个输出都会趋于一个点。如例 7.1 所示，要以不超过 $\varepsilon > 0$ 的误差计算斯托克斯常数，

(10)在例 7.1 中，工作精度会根据误差容限参数的值自动选取。

我们的实现的用户[11] 可以先以满足 $2^{-p} \approx \varepsilon$ 的工作精度 p 运行整个算法，并在算法失败或结果精度超出容差时重复运行。

精确复数。并非我们所需的所有运算都能使用可计算复数完成。事实上，找出位于给定射线上的 Stokes 值，或判断两个局部指数之差是否为整数，都需要进行精确 相等性测试。这些测试作用于通过对算子 D 的系数进行代数运算所得到的量。

因此，从现在起我们假设 D 的系数属于某个子域 $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ 中的 $\mathbb{K}(x)$，并且所需的运算可以在其中完成。具体而言，我们假设 $\mathbb{K}$ 是代数闭的，并且在复共轭下封闭，同时可以用有限量的数据表示其中的元素。我们还需要能够在这种表示上运行算法，以便

- 判断 $\mathbb{K}$ 中的两个给定元素是否相等，
- 在 $+$、$-$、$\times$、$/$ 中进行域运算，对 $\mathbb{K}$、
- 中的元素计算复共轭，计算系数属于 $\mathbb{K}$的一元多项式的根，给定 $a \in \mathbb{K}$ 和 $\varepsilon > 0$，计算 a的一个近似值 $\tilde{a} \in \mathbb{Q}[i]$，使得 $|\tilde{a} - a| \leqslant \varepsilon$。

这些假设意味着，给定 $a \in \mathbb{K}$，我们可以计算 $\mathrm{Re}(a)$、$\mathrm{Im}(a)$、$|a|$，并且可以判断对于给定的 a，$b \in \mathbb{K} \cap \mathbb{R}$，$a < b$ 是否成立。后者意味着 $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}_{\circlearrowleft}$。

¯这类域的典型示例是 $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$，其元素表示为有理系数一元多项式的根，并附带隔离区间。Johansson [32] 介绍了一套实用的¯系统，用于处理这类“精确”的 $\mathbb{C}$ 覆盖 $\mathbb{Q}$ 的子域，以及在适当的数论假设下，由超越常数扩张得到的子域。我们的实现目前仅限于代数情形。

(11)通常，最好让用户自行重复计算，直至达到所需容差，而不是自动执行，因为在许多应用中，人们真正需要的输出只是足以用于检查某个性质或进行后续计算的精度，却很难预先确定究竟需要多高的精度。另请参阅 Arb 文档 [30]，了解有关这一点的更多信息。

9. 解的局部基

我们算法中的符号部分对 D 的解及其博雷尔变换进行运算。为了用有限量的数据表示这些对象，我们用算子 $D_{[\alpha]}$ 和 $\Delta_{[\alpha]}$的（形式或解析）解的固定“局部”基中的坐标来编码它们。

拉普拉斯平面中的形式解。对于 D 的每个斯托克斯值 α，我们将由不含 $D_{[\alpha]}$ 指数项的形式解构成的空间记作 $\mathrm{FSol}_0(D_{[\alpha]})$。换言之，$\mathrm{FSol}_0(D_{[\alpha_i]})$ 是由预备形式基本解的正则部分 h 中的˜ ˜块 $(h_j)_{j\in\mathcal{I}_i}$ 生成的向量空间；该预备形式基本解在第 1.3 节中引入，其中I_i 如式 (1.7) 所示。

我们将 $\mathrm{FSol}_0(D_{[\alpha]})$ 的一个固定基记作$H^{[\alpha]}$。在大多数讨论中，任何按模 $\mathbb{Z}$ 指数排列的基都可以，包括按照第 1.3 节所述进行归一化后的 $(h_j)_{j\in\mathcal{I}_i}$。不过，为了兼容既有代码，我们的实现采用$H^{[\alpha]}$ 的一种特定取法，它与该节中所考虑的形式略有不同[12]。下文中的某些子程序声明适用于这一基，或者更一般地，适用于按以下意义阶梯化的任意基$H^{[\alpha]}$；否则则需要稍作调整。

为得到阶梯化基，我们从 $\mathrm{FSol}_0(D_{[\alpha]})$ 的任意一组基出发，该基由如下形式的级数组成

$$x^{\mathcal{L}}\sum_{r=0}^{s-1}\sum_{m\geqslant 0} c_{r,m}x^m\ln(x)^r \tag{9.1}$$

其中 L 是附属于斯托克斯值 α 的 D 的一个指数，而 s 是 $\mathfrak{L}$中相应若尔当块的维数。对于每一类 $L+\mathbb{Z}$（其指数之差为整数），我们将相应的基元素写成具有共同 L 的形式，其中该 L 具有最大的实部（即下文定义 9.1 中的“组首”），并按以下顺序列出这些展开中的系数

$$c_{s-1,0}, c_{s-2,0}, \ldots, c_{0,0}, \quad c_{s-1,1}, c_{s-2,1}, \ldots, c_{0,1}, \quad \ldots \tag{9.2}$$

然后，我们将得到的这些数列族化为简化阶梯形。可以证明（例如，[52, 第五章]），出现的主元是系数 $c_{\rho,\mu}$ 其中 $(L\ \mu,\rho)$ 属于如下定义的集合 $E(D_{[\alpha]})$。

---

[12]具体而言，它所使用的基与第 1.3 节的块和子块结构相容，但未必能分解为一个形式幂级数矩阵与一个 $x^{\mathfrak{L}}$ 矩阵的乘积，其中 $\mathfrak{L}$ 处于若尔当标准形。我们所要求的阶梯形式性质简化了算法的某些方面，但失去分解会使其他方面变得复杂；目前我们尚不清楚，在不考虑向后兼容性的情况下，哪种选择更好。

定义 9.1. — 给定任意微分算子 D，我们称 D 在原点处的一个指数 L 为组首，如果 $L-1$、$L-2$、……中没有任何一个数也是指数。我们用 $E(D)$ 表示由满足以下条件的三元组组成的集合：$(L,\ \mu,\ \rho)\in\mathbb{K}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$，其中 L 是组首，且 $L+\mu$ 是一个重数严格大于 ρ 的指数；我们称集合 $E(D)$ 为 D的无指数项局部解的结构。

阶梯化基自然地以$E(D_{[\alpha]})$ 为索引，意思是：对于恰好一个三元组 $(L,\ m,r)\in E(D_{[\alpha]})$，给定基元素中 $x^{\mathcal{L}+m}\ln(x)^r$ 的系数为 1；对于其他所有三元组，该系数均为 0。我们将自由运用这种对应关系，例如，使用取自$E(D_{[\alpha]})$的索引来指称矩阵的行和列。

从现在起，我们假设$H_{[\alpha]}$ 是阶梯化的，并记 b y

$$\mathcal{Y}(x)=\left(\mathrm{e}^{-\alpha_1/x}\mathcal{H}_{[\alpha_1]},\dots,\mathrm{e}^{-\alpha_N/x}\mathcal{H}_{[\alpha_N]}\right)=(y_1(x),\dots,y_n(x))$$

通过汇集所有斯托克斯值 α对应的$H_{[\alpha]}$ 族而得到的形式基本解。

注 *9.2.* — 当解 (9.1) 的系数$c_{j,m}$ 按 (9.2) 的顺序排列时，每个系数都可以利用由微分算子 [52, 第五章]推导出的简单递推关系，根据前面的系数计算得到。这意味着，解 y_n的级数展开可以轻松计算到任意所需阶数。

注 *9.3.* — 上述条件将 $\mathcal{Y}$ 确定下来，唯一的不确定性在于斯托克斯值和指数类的排列。在我们的实现中，族 $H_{[\alpha]}$ 始终按如下方式排序：每当两个解在渐近意义下可比较时，主导解 $x\to 0$ 排在前面。具体而言，我们先按 $\mathrm{Re}(L)$递增排序；若相同，则按 $\zeta^{\mathcal{L}}$的系数关于 $\ln(\zeta)$ 的次数递减排序；若仍相同，则按 $\mathrm{Im}(L)$ 的绝对值递减排序（因此，对给定的 $\mathrm{Re}(L)$，纯实指数排在最后）；最后按 $\mathrm{Im}(L)$递增排序。

类似地，我们首先按实部递增的顺序排列斯托克斯值，使得整体上 y_1，……，y_n 的排序也反映出渐近支配关系，即 $x\to 0$，其中 $x>0$。当多个斯托克斯值具有相同的实部时，我们按虚部绝对值递减的顺序排列它们，因此，对于每个实部而言，纯实值排在最后。最后，共轭复数按虚部递增的顺序排列。特别地，我们在方向 $\omega=0$ 上的斯托克斯矩阵是下三角矩阵。

—

例*9.4*（接续例 *7.1*）。— 记 $\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$，为第 7 节中算子 D 的形式基本解，我们在实现中使用的是 $\mathcal{Y} = (y_1, \ldots\ldots, y_7)$，其中

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= \mathrm{e}^{+6/x} x^{-2} \left(1 + \tfrac{2}{9}x + \tfrac{49}{648}x^2 + \tfrac{67}{17496}x^3 + \cdots\right) \\
y_2(x) &= \mathrm{e}^{-6\theta^{-2}/x} x^{-2} \left(1 + \tfrac{\theta^{-2}+6}{27}x + \tfrac{49}{3888}\theta^{-2}x^2 + \tfrac{67}{17496}x^3 + \cdots\right) \\
y_3(x) &= \mathrm{e}^{-6\theta^{2}/x} x^{-2} \left(1 + \tfrac{\theta^{2}+6}{27}x + \tfrac{49}{3888}\theta^{2}x^2 + \tfrac{67}{17496}x^3 + \cdots\right) \\
y_4(x) &= x^3 + \tfrac{315}{128}x^6 + \cdots \\
y_5(x) &= \mathrm{e}^{-6\theta^{-1}/x} x^{-2} \left(1 + \tfrac{\theta^{-1}-6}{27}x + \tfrac{49}{3888}\theta^{-2}x^2 - \tfrac{67}{17496}x^3 + \cdots\right) \\
y_6(x) &= \mathrm{e}^{-6\theta/x} x^{-2} \left(1 + \tfrac{\theta-6}{27}x + \tfrac{49}{3888}\theta x^2 - \tfrac{67}{17496}x^3 + \cdots\right) \\
y_7(x) &= \mathrm{e}^{-6/x} x^{-2} \left(1 - \tfrac{2}{9}x + \tfrac{49}{648}x^2 - \tfrac{67}{17496}x^3 + \cdots\right).
\end{aligned}
$$

每个空间 $\mathsf{FSol}_0(D_{[\alpha]})$ 都是一维的，例如 $\mathsf{FSol}_0(D_{[0]}) = \mathbb{C}y_4$ 和 $\mathsf{FSol}_0(D_{[6]}) = \mathbb{C}\mathrm{e}^{6/x}y_7$。

D 的博雷尔变换等于

$$
\begin{aligned}
\Delta = \Delta_{[0]} = (\zeta^7 - 46656\zeta)\frac{\mathrm{d}^6}{\mathrm{d}\,\zeta^6} + (51\zeta^6 - 139968)\frac{\mathrm{d}^5}{\mathrm{d}\,\zeta^5} + 958\zeta^5\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}\,\zeta^4} \\
+ 8332\zeta^4\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\,\zeta^3} + 34521\zeta^3\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,\zeta^2} + 62289\zeta^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\zeta} + 36015\zeta.
\end{aligned}
$$

˜其指标多项式为 $\Pi_{[0]}(\lambda) = [\lambda]_{5^-}(\lambda - 2)$，相应的基结构为

$$
\mathcal{E}(\Delta_{[0]}) = \{(0,0,0), (0,1,0), (0,2,1), (0,2,0), (0,3,0), (0,4,0)\}.
$$

空间 $\mathsf{Sol}(\Delta_{[0]})$ 的基 $\hat{\mathcal{Y}}_0$，同样按照我们实现中的约定，形式为

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathcal{Y}}_0(\zeta) = \Big(& 1 + \tfrac{2401}{8957952}\zeta^6 + \mathrm{O}(\zeta^{12}), \\
& \zeta + \tfrac{64}{382725}\zeta^7 + \mathrm{O}(\zeta^{12}), \\
& \zeta^2\log(\zeta) + \left(\tfrac{1}{8192}\log(\zeta) - \tfrac{19}{589824}\right)\zeta^8 + \mathrm{O}(\zeta^{12}), \\
& \zeta^2 + \tfrac{1}{8192}\zeta^8 + \mathrm{O}(\zeta^{12}), \\
& \zeta^3 + \tfrac{125}{1285956}\zeta^9 + \mathrm{O}(\zeta^{12}), \\
& \zeta^4 + \tfrac{14641}{179159040}\zeta^{10} + \mathrm{O}(\zeta^{12})\Big).
\end{aligned}
$$

˜对于所有其他斯托克斯值 α，都有 $\Pi_{[\alpha]}(\lambda) = [\lambda]_{5^-}(\lambda + 3)$。

博雷尔平面中的局部基。类似地，对于任意 $\alpha \in \mathbb{C}$，我们将 $\mathrm{Sol}_0(\Delta_{[\alpha]})$ 记为在沿负实轴开割的原点邻域内解析的 $\Delta_{[\alpha]}$ 解芽空间，并固定一个基

$$\hat{\mathcal{Y}}_\alpha = (\hat{y}_{\alpha,1}, \dots, \hat{y}_{\alpha,\nu})$$

$\mathrm{Sol}_0(\Delta_{[\alpha]})$ 的。我们将每个基元素 $\hat{y}_{\alpha,i}$ 选为以下形式

$$\zeta^\lambda \sum_{r=0}^{s-1} \sum_{m \geqslant 0} c_{r,m} \zeta^m \ln(\zeta)^r \tag{9.3}$$

其中 λ 是 $\Delta_{[\alpha]}$ 在 0 处的指数之一，且 $s \in \mathbb{N}$。与上文在拉普拉斯平面中形式解的情形一样，我们假设在指数模 $\mathbb{Z}$相同的级数 (9.3) 族中，序列

$$c_{s-1,0}, c_{s-2,0}, \dots, c_{0,0}, \quad c_{s-1,1}, c_{s-2,1}, \dots, c_{0,1}, \quad \dots \tag{9.4}$$

具有简化阶梯形。这样，$\mathrm{Sol}_0(\Delta_{[\alpha]})$ 的基 $\hat{\mathcal{Y}}_\alpha$ 自然地以 $E(\Delta_{[\alpha]})$ 为索引。在实现中，指数类 $\lambda + \mathbb{Z}$ 按照注 9.3 中的规定排序。

10. 斯托克斯块的分解

如第 3.1 节第 24 页所述，方向 ω 上的斯托克斯矩阵对每一对满足 $\arg(\beta - \alpha) = \omega$ 的斯托克斯值 (α, β) 都有一个（可能非平凡的）关联块。下面的算法 1 将每个这样的块计算为一个博雷尔变换矩阵、一个连接矩阵和一个连接-斯托克斯矩阵的乘积，现将其定义如下。

连接矩阵。 **</style}令 ,** β 为 D 的两个斯托克斯值。对于任意路径 $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$，该路径避开 Δ 的奇点，并且满足

- $\gamma(0)$ 足够接近 α，但不在局部分支切割线 $\alpha + \mathbb{R}_{\leqslant 0}$ 上，• $\gamma(1)$ 足够接近 β，但不在局部分支切割线 $\beta + \mathbb{R}_{\leqslant 0}$ 上，

沿 γ 进行解析延拓，可得到从 $\mathrm{Sol}_0(\Delta_{[\alpha]})$ 到 $\mathrm{Sol}_0(\Delta_{[\beta]})$ 的一个同构。这个同构取决于 γ 的选择。我们作如下具体选择：给定 $\eta > 0$，考虑一条直线路径 γ，使得（另见图 13.1，第 58 页）

- $\gamma(0) = \alpha + (\eta - i\eta^2)(\beta - \alpha)$，即，$\gamma$ 从靠近 α的位置开始，稍稍位于指向 β的射线[13] 右侧，

[13]选择扰动因子 $\eta - i\eta^2$，而不是可能会选择的更简单的 $\eta - i\eta$，可以确保扰动后的点不恰好落在局部辐角的支割线上。

- $\gamma(1)=\beta+(\eta-i\eta^2)(\beta-\alpha)$，即，从 α看去， γ结束于 β的正后方，稍稍位于同一条射线的右侧。

特别地， γ 经过位于开线段 $(\alpha,\ \beta)$上的 Δ 的任意奇点右侧。对于足够小的 η，沿 γ 进行解析延拓所得到的从 $\mathsf{Sol}_0(\Delta_{[\alpha]})$ 到 $\mathsf{Sol}_0(\Delta_{[\beta]})$ 的映射不依赖于 η的选择。

定义 10.1。—我们用$\mathbf{T}_{\alpha,\ \beta}\in\mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ 表示该映射在基 $\mathcal{Y}_\alpha$ 和 $\mathcal{Y}_\beta$下的矩阵$\hat{}$ $\hat{}$。

$\hat{}$ $\hat{}$换言之，$\mathbf{T}_{\alpha,\ \beta}$ 是从 $\mathcal{Y}_\alpha$ 到 $\mathcal{Y}_\beta$的换基矩阵，其中二者均视为 Δ 在 γ的某个单连通邻域上的解空间的一组基。

博雷尔变换矩阵。设 D 的一个斯托克斯值 α 的重数为 k。形式博雷尔变换（2.5），第 16 页，按定义之后所述，将x^{-j} 在非负整数 j 时映为零后，定义了一个映射$B_\alpha:\mathsf{FSol}_0(D_{[\alpha]})\to\mathsf{Sol}_0(\Delta_\alpha)$，其连接前一节定义的局部解空间。

定义 10.2。— 我们用$\mathbf{B}_\alpha\in\mathbb{C}^{\nu\times k}$ 表示此映射在基 $H^{[\alpha]}$ 和 $\mathcal{Y}_\alpha$下的矩阵$\hat{}$。

由第 2.3 节的讨论可知，当 $D_{[\alpha]}$的指数都属于 $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_{\leqslant 0}$时，有 $k\leqslant\nu$，且矩阵$\mathbf{B}_\alpha$ 满列秩。

例 *10.3*（续例*9.4*）。— 对于例 7.1 中考虑的问题，变换后的算子 Δ 的阶为 $\nu=6$，所有斯托克斯值的重数均为 $k=1$。由于$y_4(x)=x^3+\mathsf{O}(x^6)$ 的形式博雷尔变换为 $\zeta^2/2+\mathsf{O}(\zeta^5)$，与斯托克斯值 0 相关的博雷尔变换矩阵为

$$\mathbf{B}_0=\left(0,0,0,\tfrac{1}{2},0,0\right)^{\mathrm{T}}.$$

类似地， $\alpha=6$ 的博雷尔变换矩阵为

$$\mathbf{B}_6=\left(0,-\tfrac{67}{17496},-\tfrac{9347}{2519424},\tfrac{56135}{22674816},-\tfrac{13289119}{29386561536},-\tfrac{57551105}{1057916215296}\right)^{\mathrm{T}}$$

其中，各项是$B_\alpha(y_7)$的展开中， ζ^λ 在 $\lambda=-3,0,1,2,3,4$ 处的系数（即，对于 $\Pi_{[6]}$ 的根按递增顺序枚举时， λ 遍历这些根所对应的$\tilde{}$）$\tilde{}$。

连接到斯托克斯矩阵。固定一个多重度为 k' 的 D 的斯托克斯值 β，以及一个方向 $\omega\in(-\pi,\ \pi]$。我们将 $\xi=\beta+\zeta$ 所给出的局部变量记为 ζ。与第 5 节一样，设 γ_0 是 ζ 平面中的一条汉克尔型路径，

该路径沿正向绕过原点，且两条分支都在方向 ω 左侧附近趋于无穷远。

考虑 $\mathrm{Sol}_0(\Delta_{[\beta]})$ 中的任意元素 $\hat{y}(\zeta)$。最初，$\hat{y}(\zeta)$ 定义在 ζ 平面上原点附近的一个邻域内，该平面沿 $\mathbb{R}_{\leqslant 0}$ 切开。我们仍将其从足够小的 $\zeta > 0$ 出发并沿 γ_0 进行解析延拓所得的函数记为 $\hat{y}$。由于作为 $\Delta_{[\beta]}$ 的一个解，该解析延拓在无穷远处的指数增长至多为 $\mathrm{e}^{a\Re\zeta}$，因此对于足够小的 $x > 0$

$$\partial \int_{\gamma_0} \hat{y}(\zeta)\mathrm{e}^{-\zeta/x}\mathrm{d}\zeta = \int_{\gamma_0} \zeta\hat{y}(\zeta)\mathrm{e}^{-\zeta/x}\mathrm{d}\zeta, \quad \frac{1}{x}\int_{\gamma_0} \hat{y}(\zeta)\mathrm{e}^{-\zeta/x}\mathrm{d}\zeta = \int_{\gamma_0} \hat{y}'(\zeta)\mathrm{e}^{-\zeta/x}\mathrm{d}\zeta.$$

因此，函数 $L_{\beta,\,\omega}\hat{y}(x) = \int_{\gamma_0} \hat{y}(\zeta)\mathrm{e}^{-\zeta/x}\mathrm{d}\zeta$ 是 $D_{[\beta]}$ 的一个解，其定义在直径为 $[0,\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}/a]$ 的 Borel圆盘上。取其在 $x \to 0$ 且 $\arg x = \omega$ 时的渐近展开式，我们得到 $\mathrm{FSol}_0(D_{[\beta]})$ 中的一个元素 $L_{\beta,\,\omega}\hat{y}$。

虽然函数 $L_{\beta,\,\omega}\hat{y}$ 取决于 ω，但将路径 γ_0 旋转一个小角度，只会使 $L_{\beta,\,\omega}\hat{y}$ 发生指数小量的变化，当 $x \to 0$时。这表明，对于任意两个 $\omega,\ \omega'$，$L_{\beta,\,\omega}\hat{y}$ 在 $x \to 0$且 $\arg x = \omega$ 时的渐近展开，等于 $L_{\beta,\,\omega'}\hat{y}$ 在 $x \to 0$ 且 $\arg x = \omega'$时的渐近展开。换言之，$L_{\beta,\,\omega}\hat{y}$ 与 ω无关。（另一种理解这一点的方式是，$L_{\beta,\,\omega}\hat{y}$ 由 $\hat{y}$ 在 β 处的局部展开的初始项决定，利用引理 2.1即可。）从记号中省略不必要的 ω 后，这一构造定义了一个线性映射 $L_\beta : \mathrm{Sol}_0(\Delta_{[\beta]}) \to \mathrm{FSol}_0(D_{[\beta]})$。

定义10.4。——我们用 $\mathbf{L}_\beta \in \mathbb{C}^{k'\times\nu}$ 表示映射 $\tilde{L}_\beta$ 在基 $\mathcal{Y}_\beta$ 和 $H_{[\beta]}$下的矩阵。

例 *10.5*（接例*9.4*）。— 对于例 7.1 中考虑的问题，有

$$\mathbf{L}_0 = (0, 0, 4\pi\mathrm{i}, 0, 0, 0),$$

这表明，$\mathcal{Y}_0$ 中只有以 $x^2\log(x)$开头的项，其在定义10.4中的积分才不为零，而此时积分值为 $4\pi\mathrm{i}(x^3 + \cdots)$。类似地，有$\mathbf{L}_6 = (\pi\mathrm{i}\,0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$。

另请参见第67页的例 14.2，其中给出了一个稍复杂的例子。$\mathbf{B}_\alpha$ 和$\mathbf{L}^\beta$ 的计算将在第12节中详细讨论。

斯托克斯块的分解。根据这些定义，与给定一对斯托克斯值相关联的斯托克斯矩阵块可分解如下。

引理 10.1。——设 α、β 是 D 的两个不同斯托克斯值。设 I、I' 是分解 (1.7)（第 *12* 页）中对应的指标块，属于

形式基本解。那么，在方向 $\omega = \arg(\beta - \alpha)$ 上，$\underline{D}$ 的斯托克斯矩阵的块 $C^{[\mathcal{I}';I_\omega]}$ 等于 $\mathbf{L}^\beta \mathbf{T}_{\alpha,\beta} \mathbf{B}_\alpha$。

证明。— 这一结果本质上是对第 28 页方程 (5.2) 的重新表述，并考虑到根据注 5.3，无须假设解中不存在非正整数次数的单项式。更确切地说，给定 $\ell \in I$，考虑 $\mathcal{Y}$ 中的元素 y_ℓ。由于该 y_ℓ 是未预备的方程的一个解，它在注 5.3 的记号中对应于 $\tilde{z}_\ell$。与注中一样，写作 $\tilde{z}(x) = \tilde{k}(x)\mathrm{e}^{-\alpha/x}$，并令 $\tilde{K}(x)$ 为从 $k(x)$ 中删去属于 $\mathbb{C}[1/x]$ 的项后得到的级数˜。

˜矩阵 $\mathbf{B}_\alpha$ 将 $\mathrm{FSol}_0(D_{[\alpha]})$ 的基 $\mathcal{Y}_\alpha(x)$ 下 $k(x)$ 的坐标映射为 $\mathrm{Sol}_0(\Delta_{[\alpha]})$ 的基 $\hat{\mathcal{Y}}_\alpha(\zeta)$ 下 $\hat{K}_\ell$ 的坐标。

矩阵 $\mathbf{T}_{\alpha,\beta}$ 将这些坐标映射为 $\hat{K}^-_\ell(\beta+\zeta)$ 在 $\mathrm{Sol}_0(\Delta_{[\beta]})$ 的基 $\hat{\mathcal{Y}}_\beta(\zeta)$ 下的坐标。

最后，矩阵 $\mathbf{L}^\beta$ 将 $\hat{K}^-_\ell(\beta+\zeta)$ 在 $\mathrm{Sol}_0(\Delta_{[\beta]})$ 的基$\hat{\mathcal{Y}}_\beta(\zeta)$ 下的坐标映射为展开式中，$\int_{\gamma_0} \hat{K}^-(\alpha+\zeta)\mathrm{e}^{-\zeta/x}\mathrm{d}\zeta$在基 $H_{[\beta]}(x)$ 下的坐标，其展开为 $x \to 0\,(\arg x = \omega)$。

根据注 5.3，这些坐标恰好就是 $j \in I'$的 $C_\omega^{[j;\ell]}$。 □

例 *10.6*（续例 *10.3* 和例 *10.5*）。— 在例 7.1 中计算得到的方向 $\omega = 0$ 上的斯托克斯矩阵中，对应于斯托克斯值对 $(\alpha,\beta) = (0,6)$ 的块化简为单个元素$c \approx -221.7025\mathrm{i}$，它位于第四列（对应于 $y_4(x) = e^{-\alpha/x}(x^{-2}+\cdots)$）和最后一行（对应于 $y_7(x) = \mathrm{e}^{-\beta/x}(x^{-2}+\cdots)$）。引理 10.1 将此 c 表示为乘积 $c = \pi\mathrm{i} \times a \times \frac{1}{2}$，其中 $a \approx 141.1420$ 是连接矩阵 $\mathbf{T}^{0,6}$ 中第四列（对应于 $\hat{\mathcal{Y}}_0$ 的元素 $\zeta^2\log(\zeta)+\cdots$）和第一行（对应于 $\hat{\mathcal{Y}}_6$ 的元素 $\zeta^{-3}+\cdots$）中的元素。

另请参见例 14.1（第 65 页），其中还给出了分解$\mathbf{L}^\beta\mathbf{T}_{\alpha,\beta}\mathbf{B}_\alpha$的其他几个例子，包括一个指数为非正整数的情形。

11. 主要算法

有了这些记号，我们现在可以描述一种算法：它以一个微分算子为输入，并计算其在原点处所有斯托克斯矩阵的区间包络。算法的结构如下方的算法 1 所示。它首先计算所有博雷尔变换矩阵 $\mathbf{B}_\alpha$，

连接矩阵 $\mathbf{T}_{\alpha,\,\beta}$，以及连接到斯托克斯矩阵 $\mathbf{L}^{\beta}$，然后用形如 $\mathbf{L}^{\beta}\mathbf{T}_{\alpha,\,\beta}\mathbf{B}_{\alpha}$ 的块填充斯托克斯矩阵。

为便于阅读，算法 1 将方向 ω 视为 $(-\pi,\pi]$ 中的元素。不过，它所用的所有方向都具有 $\omega=\arg\theta$ 的形式，其中 $\theta\in\mathbb{K}$，因此可通过适当的 θ 对其进行编码，从而精确地处理这些方向。

算法 1。—斯托克斯矩阵

输入： 一个算子 $D=D(x^{-1},\partial)\in\mathbb{K}[x^{-1}][\partial]$。**输出：** 一组有序对 $(\omega,\mathbf{C}_{\omega})$，其中 $\omega=\arg\theta$，对于某个 $\theta\in\mathbb{K}$，且 $\mathbf{C}_{\omega}\in\mathbb{C}^{n\times n}_{\mathcal{O}}$。

(1) 计算 D 的博雷尔变换 $\Delta=D(\mathrm{d}\,\mathrm{d}_{\xi},\xi)\in\mathbb{K}[\xi][\mathrm{d}\,\mathrm{d}_{\xi}]$。(2) 计算 Δ 的奇点集合 $\Sigma\subset\mathbb{K}$ 及其重数。(3) 计算集合 $\Omega=\{\arg(\beta-\alpha)\colon\ \alpha,\beta\in\Sigma,\alpha\neq\beta\}$，并针对每个 $\omega\in\Omega$，计算集合 $\mathcal{A}(\omega)=\{(\alpha,\beta)\colon \arg(\beta-\alpha)=\omega\}$。(4) 调用算法 4，计算所有 $(\alpha,\beta)\in\Sigma^2$ 对应的矩阵 $\mathrm{T}_{\alpha,\beta}$。(5) 对每个 $\alpha\in\Sigma$：(a) 将 Δ 中的 ξ 替换为 $\alpha+\zeta$，以计算 $\Delta_{[\alpha]}\in\mathbb{K}[\zeta][\mathrm{d}\,\mathrm{d}_{\zeta}]$。(b) 调用算法 2，计算矩阵 B_{α}。(c) 调用算法 3，计算矩阵 L_{α}。(6) 对每个 $\omega\in\Omega$：(a) 将 $\mathrm{C}_{\omega}\in\mathbb{C}^{n\times n}_{\mathcal{O}}$ 初始化为零矩阵。(b) 对每个 $(\alpha,\beta)\in\mathcal{A}(\omega)$，将矩阵 C_{ω} 的块 $\mathrm{C}_{\omega}^{[I',I]}$ 设为 $\mathrm{L}^{\beta}\mathrm{T}_{\alpha,\beta}\mathrm{B}_{\alpha}$，其中 I 和 I′ 分别是与 α 和 β 对应的行、列指标集合（参见第 1.3 节）。(7) 返回

$$\{(\omega,\,\mathbf{C}_{\omega})\ :\ \omega\in\Omega\}.$$

注 *11.1*。— 步骤 3 可以先按照 $\omega=\arg(\beta-\alpha)$ 对 (α,β) 进行排序，然后将具有相同 ω 的对分组在一起。事实上，鉴于连接矩阵的计算（见下文注 13.7），将每个 $\mathcal{A}(\omega)$ 表示为一个列表集合会比较方便，其中每个列表包含沿方向 ω 位于某一直线上的所有斯托克斯值。例如，对于第 7 节所考虑的算子，在方向 $\omega=0$ 上有三组对齐

$$[6\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3},6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}],\quad[-6,0,6],\quad[6\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi/3},6\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}]$$

编码五对 $(\alpha,\ \beta)$，它们对应于斯托克斯矩阵的五个非平凡块（每块都化简为单个元素）。这项计算的大部分可以使用区间算术进行数值计算，只有当参数彼此非常接近或非常接近 π 时，才需要进行较慢的精确比较。

该算法能够正确计算单层一级算子的斯托克斯矩阵。更明确地说，这意味着以下结果成立。

定理 11.2。— 假设作为输入提供给算法 *1* 的算子 D 为单层级一。该算法返回一个集合 $\{(\omega,\mathbf{C}_\omega) : \omega \in \Omega\}$，使得

(1) Ω 是 D 的反斯托克斯方向集合；*(2)* 每个 $\mathbf{C}_\omega$ 都是由可计算数构成的矩阵，且 $I+\mathbf{C}_\omega$ 是相对于基本矩阵 $\mathcal{Y}$、沿方向 ω 的 D 的斯托克斯矩阵。

注记 *11.3*（区间版本与误差界）。— 使用区间算术而非可计算复数时，算法要么报错，要么其输出满足上述第 (1) 项，并且

(2) 对所有 $\omega \in \Omega$ 和 $1 \leqslant j,\ell \leqslant n$，$\mathbf{C}_\omega$ 的元素 $\mathbf{C}_\omega^{[j;\ell]} \in \mathbb{C}$，包含 $C_\omega^{[j;\ell]}$；其中 $I + C_\omega$ 是相对于基本矩阵 $\mathcal{Y}$、沿方向 ω 的 D 的斯托克斯矩阵。

此外，对于固定的输入算子 D，算法可能失败的工作精度值有上界，并且当工作精度趋于无穷时，所有$\mathbf{C}_\omega^{[j;\ell]}$的直径都趋于零。

证明。— 算法 2、3 和 4 的正确性分别由下文的命题 12.3、12.6 和 13.6 证明。我们在第 3 节中已经看到，Ω 是 D的反斯托克斯方向集合。现在固定$\omega \in \Omega$。如第 3.1 节所述，当 $\alpha = \beta$时，以及当 $\alpha \neq \beta$且 $(\alpha, \beta) \notin \mathcal{A}(\omega)$时，块$\mathbf{C}_\omega^{[\mathcal{I}']}$为零。最后，引理 10.1 指出，$(\alpha,\beta) \in \mathcal{A}(\omega)$ 对应的块都能正确计算。□

与博雷尔变换矩阵和连接到斯托克斯矩阵的数量不同，连接矩阵的数量会随着斯托克斯值的数量 N 呈二次增长。然而，这些矩阵中有许多可以相互推导，因此需要通过数值解析延拓计算的连接矩阵数量仅为 $\mathrm{O}(N)$，详见下文第 13 节。根据我们的经验，计算这 $\mathrm{O}(N)$ 个核心过渡矩阵是实际应用中计算成本最高的步骤。

12. 博雷尔变换与连接到斯托克斯矩阵

在本节中，我们讨论第 10 节中引入的矩阵 $\mathbf{B}_\alpha$ 和$\mathbf{L}_\alpha$的计算。算法的这两个部分分别实现

D 的解的形式博雷尔变换，以及将连接到斯托克斯公式应用于 Δ的解的解析延拓。与第 1 部分对这些操作的概述相比，主要区别在于，我们现在明确使用$H_{[\alpha]}$ 和 $\mathcal{Y}_\alpha$这两组基中的坐标。

12.1. 博雷尔变换矩阵

回顾一下，我们已将$\mathbf{B}_\alpha$ 定义为博雷尔变换的矩阵，其中单项式 x^{-j} with $j \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 映射为零，并将其视为一个线性映射

$$\tilde{\mathcal{B}}_\alpha : \mathrm{FSol}_0(D_{[\alpha]}) \to \mathrm{Sol}(\Delta_{[\alpha]}).$$

为计算该矩阵，我们需要确定源基$H_{[\alpha]}$中每个元素的博雷尔变换在目标基tion basis $\mathcal{Y}_\alpha$ 中的坐标。根据我们对 $\mathcal{Y}_\alpha$ 的选择，这些坐标就是单项式 $\zeta^{\lambda+\mu'}\log(\zeta)^{\rho'}$ 对于 $(\lambda, \mu', \rho') \in E(\Delta_{[\alpha]})$的系数。我们在第 2.1 节第 16 页看到，单项式的朴素形式博雷尔变换为

$$\tilde{\mathcal{B}}(x^{\lambda+1}\ln(x)^m) = \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\lambda^m}\frac{\zeta^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}, \tag{12.1}$$

解释为当 $\lambda \in \mathbb{Z}_{<0}$ and $m = 0$ 时取 0。因此，给定 $y \in \mathrm{FSol}_0(D_{[\alpha]})$，级数 $\tilde{B}_\alpha(y)$ 中单项式 $\zeta^{\lambda+\mu'}\log(\zeta)^{\rho'}$ 的系数仅取决于 y 的有限多个项；我们可以通过计算 y 的这些项并应用公式 (12.1)，得到$B_\alpha(y)$在基 $\hat{\mathcal{Y}}_\alpha$ 下的坐标。该过程将我们在例 10.3 中采用的方法系统化，详见算法 2。

算法 2。— $\mathbf{B}_\alpha$ 的计算

输入： 两个算子 $D \in \mathbb{K}[x^{-1}][\partial]$ 和 $\Delta \in \mathbb{K}[\zeta][\mathrm{d}\,\mathrm{d}\zeta]$。—
输出： 一个矩阵 $\mathbf{B} \in \mathbb{C}_{\circlearrowleft}^{\nu\times k}$，其中 $\nu =$ 阶(Δ) 且 $k =$ 维 $\mathrm{FSol}(D)$。

（1）计算不含指数的 D 的局部解的结构$E(D)$ （参见定义 9.1）。
（2）计算 Δ的局部解的结构$E(\Delta)$ 。（3）将$\mathbf{B} \in \mathbb{C}_{\circlearrowleft}^{\nu\times k}$初始化为零矩阵。
（4）对于每个三元组 $(L\ \mu,\ \rho) \in E(D)$: （a）如果$L \notin \mathbb{Z}$，则令 $\lambda = L - 1$ 和 $\delta = 0$。如果$L \in \mathbb{Z}$，且存在整数 λ使得 $(\lambda,\ 0,\ 0) \in E(\Delta)$，则将 λ设为满足该性质的唯一整数，并令 $\delta = \lambda - L + 1$。否则，继续处理L的下一个值。

（b）考虑唯一的解

$$y(x) = x^{\mathcal{L}} \sum_{r=0}^{s-1} \sum_{m \geqslant 0} c_{r,m} x^m \ln(x)^r \in \mathrm{FSol}(D)$$

使得 $c_{\rho,\ \mu} = 1$ 且 $c_{r,\ m} = 0$ 对于 $(L\ m,\ r) \in E(D) \backslash \{(L\ \mu,\ \rho)\}$。计算系数 $c_{r,\ \delta+\mu'} \in \mathbb{C}_{\circlearrowleft}$，对所有 $0 \leqslant r < s$ 和 $\mu' \geqslant \mu - \delta$ 使得 $(\lambda,\ \mu',\ 0) \in E(\Delta)$（参见第 9 节）。

(c) 对每个 $(\mu',\ \rho')$ 使得 $(\lambda,\ \mu',\ \rho') \in E(\Delta)$ 且 $\mu' \geqslant \mu - \delta$：(i) 计算展开式的系数 $\gamma_0, \ldots, \gamma_{s-1-\rho'}$

$$\frac{1}{\Gamma(\lambda + \mu' + 1 + X)} = \gamma_0 + \gamma_1 X + \cdots + \gamma_{s-1-\rho'} X^{s-1-\rho'} + \mathrm{O}(X^{s-\rho'}). \quad (12.2)$$

(ii) 将 $\mathbf{B}$ 中第 $(\lambda,\ \mu',\ \rho')$ 行、第 $(L\ \mu,\ \rho)$列的元素设为

$$\sum_{r=\rho'}^{s-1} \frac{r!}{\rho'!} \gamma_{r-\rho'} c_{r,\delta+\mu'}.$$

(5) 返回$\mathbf{B}$。

注释 *12.1*。— (1) 步骤 1、2 和 4a 涉及对 $\mathbb{K}$ 中元素进行精确计算。我们将其余步骤作为在 $\mathbb{C}_{\circlearrowleft}$ 中的计算来呈现，因为这些计算可以通过数值方法完成。然而，$\mathbf{B}_\alpha$ 的元素属于域扩张 $\mathbb{K}(\mathbf{\Gamma})$，其中

$$\mathbf{\Gamma} = \{(1/\Gamma)^{(i)}(a) : a \in \mathbb{K}, i \in \mathbb{N}\}$$

也可以根据 $\mathbf{\Gamma}$ 中的元素精确计算得出。

(2) 当 $\lambda + \mu'$ 是负整数且 $\rho' = 0$ 时，(12.2) 中有 $\gamma_0 = 0$。此外，若 $\delta + \mu'$ 等于 μ，则根据级数 $y(x)$ 的定义，对于所有 $r > \rho'$，都有 $c_{r,\ \delta+\mu'} = 0$，因此可以跳过循环 (4c) 中相应的迭代。

注释 *12.2*。— 如这里所示，该算法包含若干容易避免的冗余。

(1) 为简单起见，我们对每一对 $(\mu',\ \rho')$ 都重复进行计算。不过，当 $\lambda + 1 + \mu'$ 是 Δ 的重指数时，可以将为 $(\mu',\ 0)$ 这一对计算出的系数 γ_i，复用于所有满足 $\rho' > 0$ 的配对 $(\mu',\ \rho')$。(2) 利用伽马函数的函数方程，可以从 $\Gamma(\lambda + 1 + X)$ 的级数展开推出 $\mu' \neq 0$ 时 $\Gamma(\lambda + \mu' + 1 + X)$ 的级数展开。

命题 12.3。——将 D 设为 $D_{[\alpha]}$、将 Δ 设为 $\Delta_{[\alpha]}$ 后调用算法 *2*，即可计算第 *10* 节中定义的博雷尔变换矩阵 $\mathbf{B}_\alpha$。

证明。——如上所述，计算 $\mathbf{B}_\alpha$ 等价于对每个 $y \in \mathcal{Y}_\alpha$ 和 $(\lambda,\ \mu',\ \rho') \in E(\Delta_{[\alpha]})$，计算 $\tilde{B}_\alpha(y)$ 中 $\zeta^{\lambda+\mu'}\log(\zeta)^{\rho'}$ 的系数。主循环的每次迭代处理 $\mathcal{Y}_\alpha$ 中的一个元素，并填充 $\mathbf{B}_\alpha$ 中相应的列。由于 $\Delta_{[\alpha]}$ 的指标多项式次数为 ν，集合 $E(\Delta_{[\alpha]})$ 的基数为 ν，因此得到一个 $\nu \times k$ 矩阵。

固定 $(\mathrm{L}\ \mu, \rho) \in \mathrm{E}(D_{[\alpha]})$，并令 $y \in \mathcal{Y}_\alpha$ 为对应的基元素。由于 $\mathcal{Y}_\alpha$ 的选择，级数 y 属于 $x^{\mathcal{L}}\mathbb{C}[[x]][\ln x]$。其像 $\tilde{\mathrm{B}}_\alpha(y)$ 定义为 y 各项的博雷尔变换之和（减去极部和常数部分）。由 (12.1) 可知，$\mathrm{B}(x^{\lambda+1}\ln(x)^m)$具有 $\zeta^\lambda P(\ln\ \zeta)$ 的形式，其中 P是次数至多为 m的多项式，因此 $\tilde{\mathrm{B}}_\alpha(y)$ 属于 $\zeta^{\mathcal{L}+\mu-1}\mathbb{C}[[\zeta]][\ln\ \zeta]$。特别地，在 $\mathrm{E}(\Delta_{[\alpha]})$ 中，能够对应于非零坐标的三元组 (λ,μ',ρ')只有满足 $\lambda - \mathrm{L} \in \mathbb{Z}$ 的那些。满足这一性质的 [(14)] λ 至多有一个。算法的第 4a 步利用以下事实计算这个 λ：当 $\lambda \notin \mathbb{Z}$时，根据方程 (2.8) 或 (2.10)，有 $\lambda = \mathrm{L} - 1$。完成第 4a 步后，有 $\lambda + 1 = \mathrm{L} + \delta$。

上文指出的方程 (12.1) 的推论还表明，$\tilde{B}_\alpha(y)$ 中 $\zeta^{\lambda+\mu'}\log(\zeta)^{\rho'}$ 的系数仅取决于 y 中 $x^{\mathcal{L}+m}\ln(x)^\rho$ 的系数，其中 $L + m = \lambda + \mu' + 1$ 和 $\rho \geqslant \rho'$。因此，基 $\hat{\mathcal{Y}}_\alpha$ 下 $\tilde{B}_\alpha(y)$ 的坐标由 y 中 $x^{\mathcal{L}+\delta+\mu'}\ln(x)^r$ 的系数确定，其中 $(\lambda,\mu',\rho') \in E(\Delta_{[\alpha]})$ 和 $r \geqslant \rho'$ 满足 $\delta + \mu' \geqslant \mu$。这些系数属于步骤 4b 中计算的系数，因为如果 (λ,μ',ρ') 属于 $E(\Delta_{[\alpha]})$，那么 $(\lambda,\mu',0)$ 也属于其中。

接着，内层循环遍历 $\tilde{B}_\alpha(y)$ 中可能非零的坐标。根据 (12.1)，$B(x^{\mathcal{L}+\delta+\mu'}\ln(x)^r)$ 对指标为 $(\lambda,\mu',\rho') \in E(\Delta_{[\alpha]})$ 的坐标的贡献，是下式中 $\zeta^{\lambda+\mu'}\ln(\zeta)^{\rho'}$ 的系数

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}\lambda^r}\frac{\zeta^{\lambda+\mu'}}{\Gamma(\lambda+\mu'+1)} &= \sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\zeta^{\lambda+\mu'}\ln(\zeta)^i\frac{\mathrm{d}^{r-i}}{\mathrm{d}\lambda^{r-i}}\frac{1}{\Gamma(\lambda+\mu'+1)}\\ &= \zeta^{\lambda+\mu'}\sum_{i=0}^{r}\frac{r!}{i!}\gamma_{r-i}\ln(\zeta)^i.\end{aligned}$$

循环体会计算所有 $r \geqslant \rho'$ 的这些贡献之和，并将结果存储在矩阵的相应元素中。□

(14)顺带一提，当 $L \in \mathbb{Z}$ 但不存在合适的 $\lambda \in \mathbb{Z}$，且算法直接继续下一次迭代时，这种情况只会在 $k > \nu$ 且在步骤 4b 中考察的 $\mathcal{Y}_\alpha$ 中索引为 $(L\ \mu,\rho)$ 的元素 $y(x)$ 是平凡解 x^{-j}, $j \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ $k > \nu$ $y(x)$
时出现。不过，即使 和 是平凡解，也可能发生 Δ 具有整数指数的情况；此时，只有到循环体后续部分才能发现 $y(x)$ 不会对斯托克斯矩阵作出贡献。

12.2. 连接到斯托克斯矩阵

连接到斯托克斯矩阵的计算方法类似，只需交换 $D_{[\beta]}$ 和 $\Delta_{[\beta]}$ 的角色，并由引理 5.1 提供系数。我们已经在例 10.5 中看到了一个简单的示例。

算法 3. — $\mathbf{L}^{\beta}$ 的计算

输入： 两个算子 $\Delta \in \mathbb{K}[\zeta][\,\mathrm{d}\,\mathrm{d}\zeta\,]$ 和 $D \in \mathbb{K}[x^{-1}][\partial]$。

输出： 一个矩阵 $\mathbf{L} \in \mathbb{C}_{\circlearrowleft}^{k\times\nu}$，其中 $k = \dim \mathrm{FSol}(D)$ 和 $\nu = \mathrm{ord}(\Delta)$。

(1) 计算不含指数项的局部解的结构$E(D)$（参见 第 9.1 节）。(2) 计算局部解的结构$E(\Delta)$ Δ。(3) 将$\mathbf{L} \in \mathbb{C}_{\circlearrowleft}^{k\times\nu}$初始化为零矩阵。(4) 对每个三元组 $(\lambda, \mu, \rho) \in E(\Delta)$: (a) 若 $\lambda \notin \mathbb{Z}$，则设定$L = \lambda + 1$ 和 $\delta = 0$。若 $\lambda \in \mathbb{Z}$ 且存在整数L 使得 $(L0, 0) \in E(D)$，则将L 设为满足该性质的唯一整数，并设定 $\delta = L - \lambda - 1$。否则，继续处理 λ 的下一个值。

(b) 考虑唯一解

$$\hat{y}(\zeta) = \zeta^{\lambda} \sum_{r=0}^{s-1} \sum_{m\geqslant 0} c_{r,m}\zeta^{m} \ln(\zeta)^{r} \in \mathrm{Sol}_0(\Delta)$$

使得 $c_{\rho,\ \mu} = 1$ 且 $c_{r,\ m} = 0$ 对于 $(\lambda,\ m,\ r) \in E(\Delta)\backslash\{(\lambda,\ \mu,\ \rho)\}$。计算系数 $c_{r,\ \delta+\mu'}$, $0 \leqslant r < s$，对于所有满足 $\mu' \geqslant \mu - \delta$ $(L\ \mu',\ 0) \in E(D)$ 的情形（参见 第 9 节）。

(c) 对于每个满足 $(\mu',\ \rho')$ $(L\ \mu',\ \rho') \in E(D)$ 且 $\mu' \geqslant \mu$ 的情形: (i) 计算展开 $\mathrm{e}^{\Gamma(1 - L - \mu' - X)} = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{s-1-\rho'} X^{s-1-\rho'} + \mathrm{O}(X^{s-\rho'})$. 的系数 $a_0,\ \ldots,\ a_{s-1-\rho'}$ (12.3)

(ii) 将$\mathbf{L}$ 在第 $(L+\mu', \rho')$ 行、第 $(\lambda+\mu, \rho)$列处的元素设为

$$2\pi i \sum_{r=\rho'}^{s-1} \frac{r!}{\rho'!} a_{r-\rho'} c_{r,\delta+\mu'}.$$

(5) 返回$\mathbf{L}$。

注 *12.4*。——第 4(c)i 步或许需要进一步说明。在公式 (12.3) 中，对于每个 λ，$\mathrm{e}^{-i\pi(1+\lambda+X)}$ 和 $1/\Gamma(-\lambda-X)$ 都是关于 X 的解析函数。所需的级数展开可以通过计算这两个函数截至 $s-1-\rho'$ 阶的展开（即系数属于 $\mathbb{C}_{\circlearrowleft}$ 的截断级数），然后将它们相乘来获得。我们参阅

Johansson [33]，以了解关于倒伽马函数及其导数的严格任意精度计算的详细讨论。

正如 F. Johansson 指出我们的方法实际上将线性微分方程解的汉克尔积分的计算归约为伽马函数的求值，但某些用于求值伽马函数的方法反过来又基于对微分方程解的汉克尔积分的数值计算（例如，[55]）——另一些方法则基于连接常数的数值计算 [33, 第 6] 节。这或许提示了一种更直接的斯托克斯乘子近似方法，其效率至少不逊于本文的方法。不过，就目前而言，当除精度之外的所有参数均固定时，用于直接计算我们所求汉克尔积分的最先进算法，其复杂度略高于通过伽马函数进行计算的算法（见下文注 13.8）。从实践角度看，能够利用现有的、经过充分优化的 Γ 及相关函数实现，益处很大。

注释 *12.5.* — 此处同样适用注释 12.2 中的类似说明：可由$E(D)$推导出$E(\Delta)$；对于每个 $(L\ \mu')$，只需计算一次级数展开 (12.3)，并且得益于伽马函数的函数方程，同一L 对应的所有迭代可以共享部分计算。此外，$\Gamma(-\lambda-\mu'-X)$的值不依赖于ω。

命题 12.6. — 算法 *3* 在将 Δ 设为 $\Delta_{[\beta]}$ 且将 D 设为 $D_{[\beta]}$后运行，计算第 *10* 节中定义的连接-斯托克斯矩阵$\mathbf{L}^{\beta}$。

证明. — 证明与命题 12.3 的证明类似。该算法用 $x^{\mathcal{L}+\mu'}\ln(x)^{\rho'}$ 的系数填充$\mathbf{L}$ 的每一列，其中$(L\ \mu',\rho')\in E(D_{[\beta]})$ 出现在渐近展开中，其展开方向为 $x\to 0$ 方向$\hat{}\arg x=\omega$；这里取积分的一个给定元素 $\hat{y}$，该元素属于 $\mathcal{Y}_{\beta}$:

$$\int_{\gamma_0}\hat{y}(\zeta)\mathrm{e}^{-\zeta/x}\mathrm{d}\zeta,$$

其中，γ_0 是与方程 (4.1) 中相同的汉克尔型路径（取决于 ω）。

固定 $(\lambda,\ \mu,\ \rho)\in E(\Delta_{[\beta]})$，并考虑相应的 $\hat{y}$。

当 λ是整数且 $\lambda+\mu+\mathbb{N}$不含 $\Delta_{[\beta]}$的任何指数（可能的平凡指数除外；参见第 20 页）时，函数 $\hat{y}$ 在 0 处解析，积分因此为零，所以整列都为零。第 4a 步会检测到这一点，在这种情况下会跳过循环迭代。否则，第 4a 步会设置 $\delta\in\mathbb{Z}$，使得$L=\lambda+1+\delta$（注意，L、λ和 δ之间的关系与命题 12.3 的证明中不同）。逐项对级数展开积分

$\hat{y}(\zeta)$ 项，得到渐近展开

$$\int_{\gamma_0} \hat{y}(\zeta)\mathrm{e}^{-\zeta/x}\mathrm{d}\zeta \sim \sum_{r=0}^{s-1}\sum_{m\geqslant\mu} c_{r,m}\int_{\Gamma_{\underline{\omega}}} \zeta^{\lambda+m}\ln(\zeta)^r\mathrm{e}^{-\zeta/x}\mathrm{d}\zeta, \tag{12.4}$$

根据引理 5.1，有

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_{\underline{\omega}}} \zeta^{\lambda+m}\ln(\zeta)^r\mathrm{e}^{-\zeta/x}\mathrm{d}\zeta &= \frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}\,\lambda^r}\left(\frac{2\pi\mathrm{i}}{\Gamma(-\lambda-m)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi(\lambda+m+1)}x^{\lambda+m+1}\right)\\ &= 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}\left(\frac{\mathrm{d}^{r-j}}{\mathrm{d}\,\lambda^{r-j}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi(\lambda+m+1)}}{\Gamma(-\lambda-m)}\right)x^{\lambda+m+1}\ln(x)^j\end{aligned}$$

当 $\arg x=\omega$ 时。

展开式（12.4）中，对结果中 $x^{\mathcal{L}+\mu'}\ln(x)^{\rho'}$ 的系数有贡献的项只有那些满足 $\lambda+m+1=L+\mu'$ 的项，即 $m=\delta+\mu'$ 和 $r\geqslant\rho'$。相应的系数 $c_{r,m}$ 在步骤 4b 中计算。随后，内层循环计算余因子

$$a_{r-j}=\frac{1}{(r-j)!}\frac{\mathrm{d}^{r-j}}{\mathrm{d}\,\lambda^{r-j}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi(\lambda+m+1)}}{\Gamma(-\lambda-m)}$$

并收集各项

$$2\pi\mathrm{i}c_{r,m}\binom{r}{j}[(r-j)!a_{r-j}]x^{\lambda+m+1}\ln(x)^j$$

满足 $m=\delta+\mu'$ 和 $j=\rho'$。 □

有关含有对数时计算 $\mathbf{L}^\beta$ 的示例，请参见例 14.2（第 67 页）。

13. 计算所有连接矩阵

现在我们开始计算连接矩阵，这是算法 1 第 4 步所要求的。从多个角度来看，这是该算法的核心步骤。具体而言，在实际应用中，这一步的计算成本最高，也是唯一可能引入无法用函数 e^x、$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi x}$ 和 $(1/\Gamma)^{(i)}(x)$ 在 $\mathbb{K}$ 中各点处的取值表示的超越常数的步骤。

回顾一下，连接矩阵 $\mathbf{T}_{\alpha,\,\beta}$ 定义为解析延拓映射的矩阵：该映射沿着第 10 节中指定的路径 γ，将算子 Δ 的解从 α 延拓至 β，并以固定解基 $\mathcal{Y}_{\hat{\alpha}}$ 和 $\mathcal{Y}_\beta$ 表示。原则上，可以使用第 6 节中概述的过程计算 $\mathbf{T}_{\alpha,\,\beta}$。这一过程也可以视为实现一个严格的常微分方程求解器，该求解器支持正则奇点处的广义初值

（也可以使用任何其他满足这些要求的常微分方程求解器来替代它）。遵循这一通用方案的微分方程数值方法称为泰勒方法。现有高效算法可用于计算具有有理系数的线性微分方程的级数解之和（例如，[5, 10, 27]），因此泰勒方法非常适合任意精度计算。使计算达到严格要求所需的误差界，基本上可以从微分方程解的柯西存在定理的经典证明中推导出来；详情及更紧的误差界见 [46]。我们的代码使用 `ore_algebra` [45] 中提供的常微分方程求解器，该求解器实现了这一类方法。

算法 1 要求我们为所有不同斯托克斯值的成对组合计算 $\mathbf{T}_{\alpha,\,\beta}$。分别对每一对使用上述方法会导致大量重复计算。然而，给定三个点 p，q，r，从 p 到 r 的解析延拓，与先从 p 到 q，再从 q 到 r 的解析延拓相同，但需要乘以相应的修正因子；这些因子与将对应路径彼此变形时所穿过的奇点有关。当三角形 pqr 的内部以及其边的内部均不包含任何奇点时，修正因子就是围绕某些顶点的局部单值矩阵。下面我们详细介绍一种算法：该算法利用数值常微分方程求解，计算生成树 Σ上的 $(\alpha,\ \beta)$ 所对应的矩阵 $\mathbf{T}_{\alpha,\,\beta}$，并通过复合已知矩阵以及酌情应用修正因子，恢复所有其余的连接矩阵。

局部单值矩阵。令 α 为 D的一个斯托克斯值。将 $\Delta_{[\alpha]}$ 在原点处的局部解沿原点周围的简单正向回路作解析延拓后，所得到的单值化映射是 $\mathrm{Sol}_0(\Delta_{[\alpha]})$的一个线性自态射。

定义 13.1。— $\alpha\in\mathbb{C}$ 处的局部单值矩阵 是单值化映射关于 α周围的基 $\mathcal{Y}_\alpha$ 的矩-$\hat{}$阵 $\mathbf{M}_\alpha\in\mathbb{C}^{\nu\times\nu}$。

由于 α 是 $\Delta_{[\alpha]}$的正则奇点，α处的局部单值化与形式单值相同。它可以根据指数结构 $E(\Delta_{[\alpha]})$ 和级数 $\hat{\mathcal{Y}}_\alpha$ 中选取的单项式来计算，推理过程与第12节类似，但更简单。

引理 13.1. — 与某个元素相关联的$\mathbf{M}_\alpha$ 列中第 $(\lambda,\mu,\rho)\in E(\Delta_{[\alpha]})$ 行的项

$$\hat{y}_{\alpha,i}(\zeta)=\zeta^{\lambda}\sum_{r=0}^{s-1}\sum_{m\geqslant 0}c_{r,m}\zeta^{m}\ln(\zeta)^{r}\in\hat{\mathcal{Y}}_\alpha \tag{13.1}$$

由 α 处的局部基给出

$$\mathrm{e}^{2\pi i\lambda}\sum_{\delta=0}^{s-1-\rho} c_{\rho+\delta,\mu}\binom{\rho+\delta}{\delta}(2\pi i)^{\delta}. \tag{13.2}$$

不属于 $\lambda+\mathbb{Z}$ 的指数对应项均为零。

证明。— $\hat{y}_{\alpha,\ i}$ 在单值化映射下的像等于

$$\mathrm{e}^{2\pi i\lambda}\zeta^{\lambda}\sum_{r=0}^{s-1}\sum_{m\geqslant 0} c_{r,m}\zeta^{m}(\ln(\zeta)+2\pi i)^{r}.$$

提取 $\zeta^{\lambda+m}\ln(\zeta)^{\rho}$的系数即可得方程（13.2）。 □

复合规则。令 Σ 表示 Δ的奇点集合。

定义13.2 （空三角形）。— 若三角形 $p\,q\,r$ 的顶点不在同一条直线上，且其闭包与$\Sigma\backslash\{p、\ q、\ r\}$均不相交，则称其为空三角形。

给定一个空三角形 $p\,q\,r$，我们需要了解如何根据 $\mathbf{T}_{p,q}$ 和 $\mathbf{T}_{q,r}$ 计算 $\mathbf{T}_{p,r}$。为此，引入以下几何谓词会很方便。

定义 13.3 (自下而上的顺序)。— 对于两个点 $\alpha、\ \beta\in\mathbb{C}$，当 $\mathrm{Im}(\alpha)<\mathrm{Im}(\beta)$ 或 $\mathrm{Im}(\alpha)=\mathrm{Im}(\beta)\wedge\mathrm{Re}(\alpha)>\mathrm{Re}(\beta)$ 时，我们记作 $\alpha<^{\uparrow}\beta$。

等价地，当 $\alpha\neq\beta$ 且 $0<\arg(\beta-\alpha)\leqslant\pi$ 时，我们有 $\alpha<^{\uparrow}\beta$。当 $\mathrm{Im}(\alpha)=\mathrm{Im}(\beta)$ 时，该定义的依据是这样一个事实：按照约定 $-\pi<\arg(\xi-\alpha)\leqslant\pi$，位于 α 左侧的点 β 在局部分支切割线的“上方”。关系 $<^{\uparrow}$ 是一种严格全序。

定义 13.4 (定向)。— 对于任意三个不全在同一直线上的点 $p、\ q、\ r\in\mathbb{C}$，当 $p、\ q、\ r$ 围绕其凸包内部的某一点按逆时针顺序排列时，令 定向$(p,q,r)=+1$；也就是说，当 r 位于有向线段 (p,q) 的左侧时，令 定向$(p,q,r)=-1$，否则亦然。

与空三角形各边相关联的过渡矩阵可以按照以下规则进行复合。

引理 13.2. — 设 $t=p\,q\,r$ 是一个空三角形。沿着 t 的边的连接矩阵满足

$$\mathbf{T}_{p,r}=\mathbf{V}_r\mathbf{T}_{q,r}\mathbf{V}_q\mathbf{T}_{p,q}\mathbf{V}_p \tag{13.3}$$

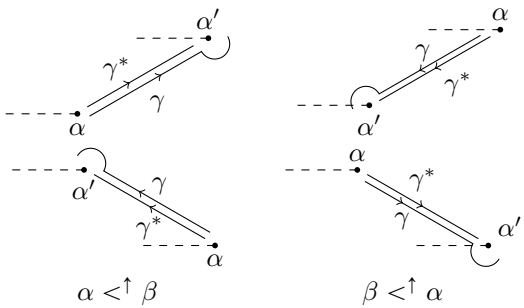


图 13.1。路径 γ （为清晰起见添加了钩状部分）和 γ^*

其中

$$\mathbf{V}_p = \begin{cases} \mathbf{M}_p & \text{if } q <^{\uparrow} p <^{\uparrow} r \text{ and } \operatorname{orient}(p,q,r) = -1, \\ \mathbf{M}_p^{-1} & \text{if } r <^{\uparrow} p <^{\uparrow} q \text{ and } \operatorname{orient}(p,q,r) = +1, \\ \mathbf{I} & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{13.4}$$

$$\mathbf{V}_q = \begin{cases} \mathbf{M}_q^{-1} & \text{if } q = \min_{<^{\uparrow}}(p,q,r) \\ & \quad \text{or } \big(p <^{\uparrow} q <^{\uparrow} r \text{ or } r <^{\uparrow} q <^{\uparrow} p\big) \\ & \quad\quad \text{and } \operatorname{orient}(p,q,r) = +1, \\ \mathbf{I} & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{13.5}$$

$$\mathbf{V}_r = \begin{cases} \mathbf{M}_r & \text{if } q <^{\uparrow} r <^{\uparrow} p \text{ and } \operatorname{orient}(p,q,r) = -1, \\ \mathbf{M}_r^{-1} & \text{if } p <^{\uparrow} r <^{\uparrow} q \text{ and } \operatorname{orient}(p,q,r) = +1, \\ \mathbf{I} & \text{otherwise}. \end{cases} \tag{13.6}$$

证明。— 为了得到矩阵 $\mathbf{T}_{\alpha,\,\beta}$ 的复合规则 (13.3)–(13.6)，我们首先定义这些矩阵的变体 $\mathbf{T}^*_{\alpha,\,\beta}$，使其满足更简单的关系，并将 $\mathbf{T}^*_{\alpha,\,\beta}$ 表示为 $\mathbf{T}_{\alpha,\,\beta}$ 的形式。然后，我们在 $\mathbf{T}^*_{\alpha,\,\beta}$ 的情形下证明 (13.3)–(13.6) 的类似结果，并由这些类似结果推出 (13.3)–(13.6)。

为定义 $\mathbf{T}^*_{\alpha,\,\beta}$，设 α、$\beta \in \mathbb{C}$ 为两个点，使得 $\operatorname{Im}(\alpha) \neq \operatorname{Im}(\beta)$，且开线段 (α, β) 不包含 Δ 的任何奇点。则 $\mathbf{T}^*_{\alpha,\,\beta}$ 是以类似于 $\mathbf{T}_{\alpha,\,\beta}$ 的方式定义的连接矩阵（参见 第 10 节），其中解析延拓路径 γ 被替换为

$$\gamma^* = [(1-\eta)\alpha + \eta\beta + i\eta^2, (1-\eta)\beta + \eta\alpha + i\eta^2],$$

也就是说，沿着包含在 (α, β) 中的一段线段，并略微向上平移，以避免在 $\operatorname{Im}(\alpha) = \operatorname{Im}(\beta)$ 时定义产生歧义。注意，我们有 $\mathbf{T}^*_{\beta,\alpha} = \big(\mathbf{T}^*_{\alpha,\beta}\big)^{-1}$。

将 γ^* 延伸为一段连接 $\gamma^*(0)$ 和 $\gamma(0)$、且包含于局部基 $\hat{\mathcal{Y}}_\alpha$ 的解析域内的小圆弧，不会改变矩阵 $\mathbf{T}^*_{\alpha,\,\beta}$。

类似地，可以在不离开 $\hat{\mathcal{Y}}_\beta$ 的解析域的情况下将 $\gamma^*(1)$ 与 $\gamma(1)$ 连接起来，这不会改变 $\mathbf{T}^*_{\alpha,\,\beta}$。这些延伸得到一条路径 $\gamma^*_{\rm ext}$，其端点与 γ 相同。当 $\alpha <^\uparrow \beta$ 时，路径 γ 和 $\gamma^*_{\rm ext}$ 在 $\mathbb{C}\backslash\Sigma$ 中是同伦的（图 13.1，左），因此 $\mathbf{T}^*_{\alpha,\,\beta}$ 等于 $\mathbf{T}_{\alpha,\,\beta}$。相反，当 $\beta <^\uparrow \alpha$ 时，循环 $(\gamma^*_{\rm ext})^{-1}\gamma$ 沿正方向绕 β 一周（图 13.1，右），因此有 $(\mathbf{T}^*_{\alpha,\,\beta})^{-1}\mathbf{T}_{\alpha,\,\beta} = \mathbf{M}_\beta$。我们得出结论：

$$\mathbf{T}^*_{\alpha,\beta} = \begin{cases} \mathbf{T}_{\alpha,\beta}, & \alpha <^\uparrow \beta, \\ \mathbf{M}_\beta^{-1}\mathbf{T}_{\alpha,\beta}, & \beta <^\uparrow \alpha. \end{cases} \tag{13.7}$$

现在考虑矩阵 $\mathbf{T}^*_{p,q}$、$\mathbf{T}_{q,r}$ 和 $\mathbf{T}_{r,p}$ 的复合。再次地，我们可以用包含在 p、q、r 处局部解基的解析域中的小弧连接相应的路径 γ^*，从而得到一个闭环。当位于另外两个顶点正中间的顶点 $v \in \{p,q,r\}$ 位于 t 的对边左侧时（即局部分支切割线 $v+(-\infty,0]$ 指向 t 外部时），由于 $t \cap \Sigma \subseteq \{p,q,r\}$，该循环在 $\mathbb{C}\backslash\Sigma$ 中是可缩的。当 t 的底边为水平线时，结论在极限情形下同样成立，此时按照 $<^\uparrow$，中间顶点就是该边的左端点。否则，也就是说，当按 $<^\uparrow$ 顺序排列的中间顶点位于对边右侧时，包括顶边为水平线的情形，该循环会绕该顶点一次，其方向为正或负，取决于定向(p,q,r)。令 u,v,w 表示按 $u <^\uparrow v <^\uparrow w$ 排序的点 p,q,r，于是有

$$\mathbf{T}^*_{u,v}\mathbf{T}^*_{w,u}\mathbf{T}^*_{v,w} = \mathbf{M}_v^\tau, \quad \tau := \begin{cases} 0, & \mathrm{orient}(u,v,w) = -1, \\ 1, & \mathrm{orient}(u,v,w) = +1. \end{cases}$$

由于$\mathbf{T}^*_{\beta,\alpha} = (\mathbf{T}^*_{\alpha,\beta})^{-1}$，这意味着

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^*_{u,v} &= \mathbf{M}_v^\tau \mathbf{T}^*_{w,v}\mathbf{T}^*_{u,w}, & \mathbf{T}^*_{v,u} &= \mathbf{T}^*_{w,u}\mathbf{T}^*_{v,w}\mathbf{M}_v^{-\tau}, \\ \mathbf{T}^*_{w,u} &= \mathbf{T}^*_{v,u}\mathbf{M}_v^\tau \mathbf{T}^*_{w,v}, & \mathbf{T}^*_{u,w} &= \mathbf{T}^*_{v,w}\mathbf{M}_v^{-\tau}\mathbf{T}^*_{u,v}, \\ \mathbf{T}^*_{v,w} &= \mathbf{T}^*_{u,w}\mathbf{T}^*_{v,u}\mathbf{M}_v^\tau, & \mathbf{T}^*_{w,v} &= \mathbf{M}_v^{-\tau}\mathbf{T}^*_{u,v}\mathbf{T}^*_{w,u}, \end{aligned}$$

因此，利用 (13.7)，

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{u,v} &= \mathbf{M}_v^{\tau-1}\mathbf{T}_{w,v}\mathbf{T}_{u,w}, & \mathbf{M}_u^{-1}\mathbf{T}_{v,u} &= \mathbf{M}_u^{-1}\mathbf{T}_{w,u}\mathbf{T}_{v,w}\mathbf{M}_v^{-\tau}, \\ \mathbf{M}_u^{-1}\mathbf{T}_{w,u} &= \mathbf{M}_u^{-1}\mathbf{T}_{v,u}\mathbf{M}_v^{\tau-1}\mathbf{T}_{w,v}, & \mathbf{T}_{u,w} &= \mathbf{M}_w^{-1}\mathbf{T}_{v,w}\mathbf{M}_v^{-\tau}\mathbf{T}_{u,v}, \\ \mathbf{T}_{v,w} &= \mathbf{T}_{u,w}\mathbf{M}_u^{-1}\mathbf{T}_{v,u}\mathbf{M}_v^\tau, & \mathbf{M}_v^{-1}\mathbf{T}_{w,v} &= \mathbf{M}_v^{-\tau}\mathbf{T}_{u,v}\mathbf{M}_u^{-1}\mathbf{T}_{w,u}. \end{aligned}$$

通过讨论 $(u、\ v、\ w)$ 与 $(p、\ q、\ r)$之间的匹配关系，可得表达式 (13.4)–(13.6)。例如，在 $\mathbf{V}_p$的情况下：

- when $(p,r) = (v,w)$, that is, $q <^\uparrow p <^\uparrow r$, one has $\mathbf{V}_p = \mathbf{M}_v^\tau = \mathbf{M}_p^\tau$ and $\mathrm{orient}(u,v,w) = -\,\mathrm{orient}(p,q,r)$;

• 当 $(p、\ r) = (v、\ u)$时，即 $r <^{\uparrow} p <^{\uparrow} q$，有 $\mathbf{V}_P = \mathbf{M}_p^{-\tau}$，此时将$(u、\ v、\ w) =$定向$(p、\ q、\ r)$；• 在所有其他情况下，有 $\mathbf{V}_P = \mathbf{I}$。

□

我们可以利用类似的论证，从 $\mathbf{T}_{p,q}$ 推导出 $\mathbf{T}_{q,p}$。

引理 13.3。— 对于满足 $(p, q) \cap \Sigma = \varnothing$ 的两个点 $p <^{\uparrow} q$，有 $\mathbf{T}_{q,p} = \mathbf{M}_P \mathbf{T}_{p\ q,}^{-1}$。

证明。— 将与$\mathbf{T}_{p,q}$ 和 $\mathbf{T}_{q,p}$（按此顺序）相关的路径 γ 用小弧连接起来，得到一个循环；这些小弧绕过 p 和 q，且不经过相应点的左侧。该循环逆时针绕 p 一周。□

最后，处理 q 位于 p 和 r 之间的情形也很有用。相应规则可直接由 $\mathbf{T}_{\alpha,\ \beta}$ 的定义得出。

引理 13.4。— 设 $p\,q\,r$ 是一个平三角形，满足 $q \in (p, r)$。那么有$\mathbf{T}_{p,r} = \mathbf{T}_{q,r}\mathbf{T}_{p,q}$。

算法。上述讨论引出了算法 4，用于同时计算所有连接矩阵。

算法 4。— 连接矩阵

输入： 一个具有正则奇点的算子 $\Delta \in \mathbb{K}[\zeta][\mathrm{d}\ \mathrm{d}\zeta]$。

输出： 一族矩阵 $(\mathbf{T}_{\alpha,\ \beta})_{\alpha,\ \beta\in\Sigma}$，其中$\mathbf{T}_{\alpha,\ \beta} \in \mathbb{C}_{\mathcal{O}}^{\nu\times\nu}$，$\Sigma$ 是 Δ 的奇点集合，且 $\nu =$ord(Δ)。

(1) 计算 Δ 的奇点的欧几里得最小生成树 $\mathcal{S}$。

(2) 通过令$\mathbf{T}_{\alpha,\ \beta} = \perp$（对 $\alpha \neq \beta$）来初始化映射 $(\mathbf{T}_{\alpha,\ \beta})_{\alpha,\ \beta\in\Sigma}$，并 $\mathbf{T}_{\alpha,\alpha} =$**对所有** α。

（3）对于每个 $\alpha \in \Sigma$，使用（13.2）计算矩阵$\mathbf{M}_\alpha$。

（4）对于每条边 $\{\alpha,\ \beta\} \in \mathcal{S}$，满足 $\alpha <^{\uparrow} \beta$：（a）通过数值求解方程 $\Delta(\hat{y}) = 0$ 计算$\mathbf{T}_{\alpha,\ \beta}$。（b）令$\mathbf{T}_{\beta,\ \alpha} = \mathbf{M}_\alpha \mathbf{T}_\alpha^{-1}{}_{,\ \beta}$。

（5）计算三元组 $\{p,\ q,\ r\} \subseteq \Sigma$的集合 $\mathcal{V}$，使得三角形$p\,q\,r$为空（三角形的定义 13.2），以及三元组 $\{p,\ q,\ r\} \subseteq \Sigma$的集合$F$，使得 $p,\ q,\ r$ 共线且两两不同。令 $\mathcal{T} = \mathcal{V} \cup F$。

（6）当存在 α时 $,\beta \in \Sigma$ 使得$\mathbf{T}_{\alpha,\beta} = \perp$：

(a) 选择三元组 $t = \{p,\ q,\ r\} \in \mathcal{T}$，使得 $\mathbf{T}_{p,\ q} \neq \perp$且$\mathbf{T}_{q,\ r} \neq \perp$。

(b) 若 $t \in F$:

(i) 若 $q \in (p, r)$，则设 $\mathrm{T}_{p,r} = \mathrm{T}_{q,r}\mathrm{T}_{p,q}$ 和 $\mathrm{T}_{r,p} = \mathrm{T}_{q,p}\mathrm{T}_{r,q}$。

(ii) 若 $p \in (q, r)$，则设 $\mathrm{T}_{p,r} = \mathrm{T}_{q,r}\mathrm{T}_q^{-1}{}_{,p}$ 和 $\mathrm{T}_{r,p} = \mathrm{T}_p^{-1}{}_{q,}\mathrm{T}_{r,q}$。

(iii) 若 $r \in (p, q)$，则设 $\mathrm{T}_{r,p} = \mathrm{T}_{q,p}\mathrm{T}_q^{-1}{}_{,r}$ 和 $\mathrm{T}_{p,r} = \mathrm{T}_r^{-1}{}_{,q}\mathrm{T}_{p,q}$。

(c) 否则：(i) 根据 $<^{\uparrow}$ 比较 p, q, r。(ii) 计算定向(p, q, r)。(iii) 使用 (13.3) 计算$\mathbf{T}_{p,r}$ 和 $\mathbf{T}_{r,p}$。(d) 从 $\mathcal{T}$ 中移除所有满足 $\mathbf{T}_{p,q'} \neq \perp$ 且 $\mathbf{T}_{q',r} \neq \perp$ 的三元组 $\{p, q', r\}$。(7) 返回 $(\mathbf{T}_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\in\Sigma_\circ}$

例 *13.5*（续例 *7.1*）。—— 在第 7 节中引入的贯穿示例里，我们的实现在 $\mathcal{S}$ 中选择了图 7.1 所示的生成树。沿着自底向上的顺序对生成树各边定向后，与这些边关联的六个核心连接矩阵通过调用 `ore_algebra` 中的常微分方程求解器计算得出，所用容差略低于提供给 `stokes_dict` 的容差。例如，$\mathbf{T}^{6,0}$ 的计算可通过以下命令单独重现

```
sage: diffop.borel_transform().numerical_transition_matrix(
....:                                                 [6,0],  1e-50/26)
```

并得到一个 6×6 矩阵，其前两列为

$$\begin{bmatrix}
[0.207\ldots79 \pm 9.31\cdot10^{-56}] + [-0.007\ldots24 \pm 8.03\cdot10^{-57}]\mathbf{i} \\
[-0.455\ldots77 \pm 3.68\cdot10^{-56}] + [\pm 9.06\cdot10^{-58}]\mathbf{i} \\
[-0.192\ldots97 \pm 1.99\cdot10^{-55}] + [-0.018\ldots49 \pm 2.45\cdot10^{-56}]\mathbf{i} \\
[0.243\ldots32 \pm 3.94\cdot10^{-55}] + [0.024\ldots86 \pm 3.26\cdot10^{-56}]\mathbf{i} \\
[0.034\ldots24 \pm 1.02\cdot10^{-56}] + [\pm 3.38\cdot10^{-60}]\mathbf{i} \\
[-0.001\ldots52 \pm 4.45\cdot10^{-57}] + [4.037\ldots94\cdot10^{-5} \pm 5.46\cdot10^{-60}]\mathbf{i}
\end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix}
[126.0\ldots22 \pm 2.50\cdot10^{-52}] \\
[-200.0\ldots33 \pm 3.34\cdot10^{-52}] \\
[-62.47\ldots78 \pm 2.65\cdot10^{-53}] \\
[96.43\ldots32 \pm 4.14\cdot10^{-53}] \\
[9.263\ldots28 \pm 3.96\cdot10^{-54}] \\
[-0.336\ldots15 \pm 1.74\cdot10^{-55}]
\end{bmatrix}$$

我们注意到，在这个特殊情况下，可以利用算子 Δ 在 $\xi \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}\xi$ 作用下不变这一事实，从单个连接矩阵得到完整的核心连接矩阵集合，而不必分别计算它们。作为一种类似但适用范围更广的优化，由于 Δ 的系数属于 $\mathbb{R}[\xi]$，我们可以通过复共轭，根据其他连接矩阵推导出与 $\mathcal{S}$ 的边相关联、且对应斯托克斯值位于开上半平面中的连接矩阵。目前，我们的代码不会自动执行这两种约简。

使用引理 13.3 计算 $\mathcal{S}$ 取反向的边上的连接矩阵。例如，$\mathbf{T}^{0,6}$ 计算为 $\mathbf{M}_6\mathbf{T}^{-1}_{6,0}$，其中 $\mathbf{M}_6$ 除第一列外均为单位矩阵，第一列为 $(1, -67\mathbf{i}\,\pi/17496, -9347\mathbf{i}\pi/2519424, \ldots)^{\mathrm{T}}$,；在乘积的第一行中，我们得到系数 $a = [-141.140\ldots09 \pm 9.36\cdot10^{-41}]$，它曾出现在例 10.6 中。顺便指出，由于在区间算术中对 $\mathbf{T}^{6,0}$ 求逆，精度显著损失。类似地，$\mathbf{T}^{-6,0}$ 计算为 $\mathbf{M}_0\mathbf{T}^{-1}_{0,-6}$，其中 $\mathbf{M}_0$ 除第三列中的一个次对角线元素等于 $2\pi\mathbf{i}$ 外均为单位矩阵。

其余连接矩阵在主循环中使用引理 13.2 和 13.4 计算。令 $\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$。首先可以计算出若干项，其中包括：

- $\mathrm{T}_{-6,6} = \mathrm{T}_{0,6}\mathrm{T}_{-6,0}$，以及 $\mathrm{T}_{6,-6} = \mathrm{T}_{0,-6}\mathrm{T}_{6,0}$，由引理 13.4 得出；
- $\mathrm{T}_{0,6\theta} = \mathrm{T}_{6,6\theta^{-1}}\mathrm{T}_{0,6}$，在 $r <^{\uparrow} q <^{\uparrow} p$ 的情形下由引理 13.2 得出，并定向 $(p,q,r) = -1$，
- $\mathrm{T}_{6\theta^{-1},0} = \mathrm{T}_{6,0}\mathrm{M}_6^{-1}\mathrm{T}_{6\theta^{-1},6}$；$p <^{\uparrow} q <^{\uparrow} r$ 的情形下由引理 13.2 得出，并定向 $(p,q,r) = +1$，
- $\mathrm{T}_{6\theta,6\theta^{-1}} = \mathrm{T}_{6,6\theta^{-1}}\mathrm{T}_{6\theta,6}$ 和 $\mathrm{T}_{6\theta^{-1},6\theta} = \mathrm{T}_{6,6\theta}\mathrm{M}_6^{-1}\mathrm{T}_{6\theta^{-1},6}$，则由相同的两条规则得出。

一旦已知 $\mathbf{T}_{6\theta^{-1},\,0}$，便可用它来计算，例如

$$\mathbf{T}_{6\theta^{-1},6\theta^{-2}} = \mathbf{M}_{6\theta^{-2}}^{-1}\mathbf{T}_{0,6\theta^{-2}}\mathbf{T}_{6\theta^{-1},0}$$

根据引理 13.2 的情形 $p <^{\uparrow} r <^{\uparrow} q$，并对 $(p,\ q,\ r) = +1$ 定向。算法以这种方式继续，直到求出所有 42 个可能的连接矩阵。

命题 13.6.— 假设第 *4a* 步使用的算法在给定 α、β 和 Δ 时，计算出 $\mathbf{T}_{\alpha,\,\beta} \in \mathbb{C}\{x\}^{\nu\times\nu}$。那么，对算子 D 的博雷尔变换 Δ 调用算法 *4* 时，将计算出第 *10* 节中定义的连接矩阵族 $(\mathbf{T}_{\alpha,\,\beta})_{\alpha,\,\beta\in\Sigma}$。

证明。— 由于 Δ 有正则奇点，第 4a 步是合理的，并且可以按照上文所述实现。在第 4a、4b、6(b)i–6(b)iii 和 6(c)iii 步计算出的矩阵 $\mathbf{T}_{\alpha,\,\beta}$ 正确这一事实，分别由假设、引理 13.3、引理 13.4 和引理 13.2 得出。还需证明该算法对所有 $(\alpha,\ \beta)$ 都能计算出 $\mathbf{T}_{\alpha,\,\beta}$。

令 $\mathcal{T}_0 = \mathcal{V} \cup F$ 为集合 $\mathcal{T}$ 的初始内容。若 $|\Sigma| \leqslant 2$，则 $\mathcal{T}_0 = \varnothing$，算法会在未进入主循环的情况下终止。在这种情况下，所有 $\mathbf{T}_{\alpha,\,\beta}$ 均已计算得出。以下假设 $|\Sigma| \geqslant 3$。首先注意，每当算法在步骤 6 检查循环条件时：

- 对所有 α，β，当且仅当 $\mathbf{T}_{\beta,\,\alpha} = \perp$ 时，有 $\mathbf{T}_{\alpha,\,\beta} = \perp$；满足 $\mathbf{T}_{\alpha,\,\beta} \neq \perp$ 的数对 $\{\alpha,\ \beta\}$ 构成无向连通图 $\mathcal{G}$ 的边；
- $\mathcal{T}$ 等于满足以下条件的三元组集合 $\{p,\ q,\ r\} \in \mathcal{T}_0$：$\mathbf{T}_{p,\,q}$、$\mathbf{T}_{q,\,r}$ 和 $\mathbf{T}_{p,\,r}$ 中至少有一个为 $\perp$。

如果循环无错误地终止，那么 $\mathcal{G}$ 就是 Σ 上的完全图，且算法的输出正确。因此，只需证明每次执行到第 6a 步时，都存在一个三角形 $\{p、\ q、\ r\} \in \mathcal{T}_0$，它恰有两条边

属于 $\mathcal{G}$。由于欧几里得生成树 $\mathcal{S}$ 的边互不相交，我们可以将 $\mathcal{S}$ 补全为 Σ [12, 的一个完全三角剖分[(15)] $\mathcal{C}$ 引理 3.1.2]。

如果 $\mathcal{C}$ 包含一条尚未属于 $\mathcal{G}$的边，令 $\mathcal{U}$ 为与 $\mathcal{C}\backslash\mathcal{S}$对偶的图，也就是说，该图的顶点是三角剖分 $\mathcal{C}$ 的面；当两个对应的面被一条不属于生成树的三角剖分边分隔时，这两个顶点相邻。图 $\mathcal{U}$ 是连通的，因为 $\mathcal{S}$ 无环；同时它也是无环的，因为 $\mathcal{S}$ 是连通的，所以$\mathcal{U}$ 是一棵树。现在按照以无穷远处的面为根的 $\mathcal{U}$ 后序遍历，考察 $\mathcal{C}$ 的各个面。第一个边界不包含在 $\mathcal{G}$ 中的面，是一个空三角形，且恰有一条边不属于 $\mathcal{G}$。

如果此时 $\mathcal{C}$ 的所有边都属于 $\mathcal{G}$，但 $\mathcal{V}$ 中存在一个元素，其有一条边不属于 $\mathcal{G}$，那么考虑由 $\mathcal{C}$ 经过一次翻转得到的三角剖分 $\mathcal{C}'$：也就是说，将两个相邻三角形的公共边替换为由这两个三角形合并后形成的凸四边形的另一条对角线。翻转产生的新面是 $\mathcal{T}_0$ 中的元素，且至少有两条边属于 $\mathcal{G}$。如果剩下的那条边不属于 $\mathcal{G}$，问题就解决了；否则，我们可以从 $\mathcal{C}'$出发重复这一论证。由于 $\mathcal{V}$ 中的任意元素都可以补全为一个三角剖分，而且任意两个三角剖分都可以通过一系列翻转相互连接（见第 3.4 节） [12, 1], ，我们最终会到达一个恰有两条边属于 $\mathcal{G}$的三角形。

最后，如果 $\mathcal{V}$ 中各元素的边都属于 $\mathcal{G}$，那么在 Σ 中满足 $\alpha \neq \beta$ 的唯一 $\{\alpha、\beta\} \notin \mathcal{G}$ 是指线段 $[\alpha、\beta]$ 上包含 Σ的另一个点的情形。事实上，考虑一条线段 $[\alpha、\beta]$ ，其上没有其他 Σ。要么 Σ 中的元素都共线，此时 $\{\alpha、\beta\} \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{G}$；要么存在一点 $\beta' \in \Sigma$ ，它到经过 α 和 β 的直线的距离最近，但不在这条直线上，并且 $\{\alpha、\beta、\beta'\} \in \mathcal{T}$。那么，对于任意满足 $\{\alpha、\beta\} \notin \mathcal{G}$ 的最近 α、β，都存在一点 $\beta' \in [\alpha、\beta]$，使得 $\{\alpha、\beta、\beta'\} \in \mathrm{F}$ 在 $\mathcal{G}$ 中恰有两条边。□

注 *13.7*。— Σ 的任意平面生成树都可以用作骨架 $\mathcal{S}$。采用欧几里得最小生成树有助于降低计算成本，但更好的做法是根据计算对应 $\mathbf{T}_{\alpha,\ \beta}$ 的成本的更精确估计为边赋权，也可以考虑其估计条件数。

(2) 在步骤 6(b)i 和 6(c)iii 中，我们分别计算 $\mathbf{T}_{p,r}$ 和 $\mathbf{T}_{r,p}$ ，而不是利用引理 13.3 从前者推导后者，以尽量减少反复求矩阵逆元造成的数值精度损失

(15)这里所说的 Σ 完全三角剖分是指这样一个单纯复形：其顶点恰好是 Σ Σ [12, 2 2 1, 中的 1 0 元素，并且其并集是定义.....2]中的凸包。例如，三个不同的共线点的唯一完全三角剖分由连接中间点与另外两个点的两条线段、这三个点本身以及空面组成。

。同样，将步骤 4a 中使用的算法调整为同时计算 $\mathbf{T}_{\alpha}^{-1}{}_{,\beta}$ 和 $\mathbf{T}_{\alpha,\beta}$，可能会得到更精确的结果。按照 $(\mathbf{T}_{p,q}, \mathbf{T}_{q,r})$ 的精度递减顺序处理三元组 $\{p, q, r\}$，也可能有所帮助。

(3) 在第 5 步中，我们可以只考虑那些利用区间算术能够验证不包含任何其他奇点的三角形，前提是在退出算法前确认已计算的矩阵数量等于 $|\Sigma|(|\Sigma|-1)/2$，若不等，则提高工作精度并重新开始整个计算。

(4) 如注 11.1 所述，计算 F（其中涉及 $\mathbb{K}$ 中的精确运算）可以与计算来自算法 1 的集合 $\mathcal{A}(\omega)$ 合并进行。 −

(5) 虽然我们只需计算 $\mathsf{O}(n^2)$ 个矩阵，但 $\mathcal{V}$ 的基数可能达到 $\Theta(n^3)$；以显而易见的方式计算它（第 5 步）最多需要 $\Theta(n^4)$ 次运算，而保持 $\mathcal{T}$ 更新（第 6d 步）总共最多需要 $\Theta(n^3)$ 次运算。（通过修改第 6d 步，使其按照“已知”边的数量维护 $\mathcal{T}$ 的一个划分，不难让第 6a 步以常数时间执行。）这些朴素估计很可能可以借助几何数据结构加以改进；然而，通过给 $\mathbb{K}$ 或 $\mathbb{C}_{\mathcal{O}}$ 中的运算赋予单位成本来估计算法的复杂度，是极不现实的。

注 *13.8*。— （关于精度的复杂度）当算子 D 固定时，算法 1 的输出作为 $\mathbb{C}_{\mathcal{O}}$上的一族矩阵是完全确定的；但探讨当 p趋于无穷时，计算这些矩阵各元素的 2^{-p}近似值所需的代价仍有意义。在这种情况下，算法简化为对可计算复数执行的一组固定操作。此外，对于每个中间结果 x_i，都存在一个常数 $c_i > 0$，使得当 p 足够大时，从 $x_0, \dots, x_{i-1}$的2^{-p-c_i}近似值出发，可以将 x_i 计算到误差不超过 2^{-p}。

¯假设 $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$，也就是说，微分方程 $Dy = 0$ 的多项式系数均为代数数。那么，算法 4 的第 4a 步可在 $\mathsf{O}(\mathsf{M}(p\log(p)^2))$ 位运算内完成，其中 $\mathsf{M}(p)$ 表示乘法 p位整数的复杂度 [24]。算法 1 中其余依赖于 p 的步骤，归结为复数的加法和乘法、指数项和对数的计算，以及在 $\mathbb{K}$ 中的点处计算 $1/\Gamma$ 的导数；所有这些运算都能在相同的复杂度界 [8] 内完成。因此，算法 1 关于目标精度的复杂度为 $\mathsf{O}(\mathsf{M}(p\log(p)^2))$，或者在采用界 $\mathsf{M}(p) = \mathsf{O}(p \log p)$ [23] 时为 $\mathsf{O}(p\log(p)^3)$。这比此情形下已发表的最佳复杂度界快 $\asymp \log(p)$ 倍

，该复杂度界归功于 van der Hoeven [26]。不过，van der Hoeven 算法适用于任意多层级的奇异性。

对于更一般的可计算 $\mathbb{K}$，所需基本运算 [4, 9] 的经典算法给出的复杂度上界为 $O(p^{3/2}\log(p)^{O(1)})$，但不包括计算 D系数数值近似值所需的时间。此结论对我们的方法和 van der Hoeven 的方法均成立。

14. 更多示例

最后，我们给出几个补充示例，以展示该算法和实现的不同方面：第一个示例说明简单超几何方程中可能出现的一些退化情形，以及指数所起的作用；另一个示例中，拉普拉斯平面上的形式解已经包含对数；还有一个示例，其中数值解析延拓步骤更具挑战性。我们还提供了这些示例中部分示例的实现性能数据。此举旨在让读者了解无需投入大量优化工作便能处理的问题，而非进行全面分析。所有测量均在一台配备 Intel i 7-10810U 处理器的笔记本电脑上完成，运行 SageMath 10.7 版和 `ore_algebra` 修订版 `07a1adbb`。

例 *14.1*（合流超几何方程的变体 $D_{2,\,1}$）。现在我们在简单情形 $q=2$,$p=1$ 下，再次考虑算子 (7.1)（第 34 页）。用 $x=z^{-1}$ 和 ∂ 表示，该算子写作

$$D = x^{-2}\partial^2 - ((\nu_1+\nu_2-1)x^{-1}+x^{-2})\partial + ((\nu_1-1)(\nu_2-1)+\mu x^{-1}).$$

斯托克斯值为 0 和 1，我们的标准形式基本解（第 9 节）为

$$y_1 = x^{\mu}(1+(\mu-\nu_1+1)(\mu-\nu_2+1)x+\cdots),$$
$$y_2 = \mathrm{e}^{-1/x}x^{\nu_1+\nu_2-\mu-1}(1-(\mu-\nu_1)(\mu-\nu_2)x+\cdots).$$

已知在方向 $\omega=0$ 上，相应的斯托克斯矩阵等于

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}, \quad c = \frac{2\pi\mathrm{i}}{\Gamma(1+\mu-\nu_1)\Gamma(1+\mu-\nu_2)}.$$

D 的博雷尔变换对于一般参数为

$$\Delta = \xi(\xi-1)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,\xi^2} + ((-\nu_1-\nu_2+5)\xi+\mu-2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\xi} + (\nu_1-2)(\nu_2-2), \quad (14.1)$$

在 0 处的指数为 $(0,\mu-1)$，在 1 处的指数为 $(0,\nu_1+\nu_2-\mu-2)$。当 $\nu_1=1$ 时，可以用 xD 替换 D，同时保持解空间不变，并保留系数是 $(0$ 的多项式这一性质

这一点。因此，博雷尔变换可简化为

$$\Delta = \xi(\xi-1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} + (-\nu_2+2)\xi + \mu - 1 \tag{14.2}$$

只剩下 0 处的自由指数 $\lambda_{[0]} = \mu - 1$ 和 1 处的自由指数 $\lambda_{[1]} = \nu_2 - \mu - 1$。我们的实现会自动执行这一简化。

首先考虑情形 $\mu = 1$, $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 3/2$。简化后，有 $\Delta = x(x-1)_{\mathrm{d}\,\mathrm{d}\,\xi} + \frac{1}{2}x$, $\lambda_{[0]} = 0$, $\lambda_{[1]} = -1/2$。结果发现，

$\hat{\mathcal{Y}}_1$ 与 $-\mathcal{Y}_0$ 的解析延拓重合，不过算法只能通过计算 $\mathbf{T}_{0,1} = [-1.00\ldots]$，以数值方式检测出这种重合。此外，$\hat{\mathcal{Y}}_0$ 就是 $[B(y_0)]$，也就是说，$\mathbf{B}_0 = \mathbf{I}_1$, ，并且有

$$\mathbf{L}_1 = \left[2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(\lambda_{[1]}+1)}\Gamma(\lambda_{[1]})^{-1}\right] = \left[2\sqrt{\pi}\right],$$

因此，方向 $\omega = 0$ 上的斯托克斯乘子可表示为乘积 $1 \times (-1.00\ldots) \times 2\sqrt{\pi} = -3.54\ldots$。在方向 $\omega = \pi$ 上，斯托克斯矩阵是平凡的，因为 Δ 的所有解在原点处都是解析的，因此算法得出 $\mathbf{L}_0 = 0$。

现在假设 $\mu = 1$, $\nu_1 = 4/3$, $\nu_2 = 5/3$。那么，在 0 和 1 处，博雷尔变换 (14.1) 都有一个等于 0 的二重指数。相应的解基为

$$\hat{\mathcal{Y}}_0(\zeta) = \left(1 + \frac{2}{9}\zeta\log\zeta + \frac{5}{9}\zeta + \cdots,\quad 1 + \frac{2}{9}\zeta + \cdots\right),$$

$$\hat{\mathcal{Y}}_1(\zeta) = \left(1 - \frac{2}{9}(\zeta-1)\log(\zeta-1) - \frac{5}{9}(\zeta-1) + \cdots,\quad 1 - \frac{2}{9}(\zeta-1) + \cdots\right).$$

两个博雷尔变换矩阵都会将 D 的相关解映射为 $\hat{\mathcal{Y}}_\alpha$ 中不含对数的元素，也就是说，$\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_1 = [0,1]^{\mathrm{T}}$。如第 2.3 节所述，算子 Δ 有“额外”的解，可将其解释为当 $a \in \mathbb{C}$ 时，$D(y) = a$ 的解的博雷尔变换。该算法计算连接矩阵

$$\mathbf{T}_{0,1} = \begin{pmatrix} 0.90854\ldots + 0.00000\ldots\mathrm{i} & 0.27566\ldots + 0.00000\ldots\mathrm{i} \\ 0.63318\ldots - 2.85427\ldots\mathrm{i} & -0.90854\ldots - 0.86602\ldots\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

并推导出 $\mathbf{T}_{1,0} = \mathbf{T}_{0,1}^{-1} = \mathbf{T}_{0,1}^{-1} + 0.86602\cdots\mathbf{i}$。对于 $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_1 = (2\pi\mathbf{i}\ 0)$，有 $c = -1.73205\ldots\mathbf{i}$，因此在这种情况下，方向 $\omega = \pi$ 上的斯托克斯矩阵是方向 $\omega = 0$ 上的斯托克斯矩阵的转置。

最后令 $\mu = 0$, $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = 1/2$。这将得到一个“未预处理”方程，其中 $y_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \cdots$ 的指数 $\mu = 0$ 和 $y_2 = \mathrm{e}^{-1/x}x^{-1/2}$ 的指数 $\nu_1 + \nu_2 - \mu - 1 = -1/2$ 均不在右半平面内。形式博雷尔变换

$$\mathcal{B}(y_1)(\zeta) = \delta_0(\zeta) + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\zeta + \cdots$$

包含一个 Dirac项，而

$$\mathcal{B}(\mathrm{e}^{1/x}y_2)(\zeta) = -\frac{\zeta^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}}$$

在原点不可积。于是有

$$\Delta = \zeta(\zeta-1)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,\zeta^2} + \left(\frac{9}{2}\zeta - 2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\zeta} + 3,$$

and

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{Y}}_0(\zeta) &= \left(\zeta^{-1} + \frac{1}{2}\log\zeta + \frac{3}{4}\zeta\log\zeta + \cdots, 1 + \frac{3}{2}\zeta + \cdots\right),\\
\hat{\mathcal{Y}}_1(\zeta) &= \left((\zeta-1)^{-3/2}, 1 - \frac{6}{5}(\zeta-1) + \cdots\right).
\end{aligned}$$

根据这些截断展开，可以计算 $\mathbf{B}_0 = [0,\ 1/2]^{\mathrm{T}}$, 将 y_1映射为其博雷尔变换减去 Dirac项。连接矩阵为

$$\mathbf{T}_{0,1} = \begin{pmatrix} 0.69314\ldots\mathrm{i} & -1.00000\ldots \\ 2.00000\ldots & 0.00000\ldots \end{pmatrix}$$

并且有 $\mathbf{L}_0 = (2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(\lambda_{[0]}+1)}\Gamma(\lambda_{[0]})^{-1},\ 0) = (-4\sqrt{\pi},\ 0)$从而得到值 $c = -3.54490\ldots\mathrm{i}$。沿另一方向，有 $\mathbf{B}_1 = [-1/(2\sqrt{\pi}), 0]^{\mathrm{T}}$以及 $\mathbf{L}_0 = (2\pi\mathrm{i}, 0)$, 因此斯托克斯矩阵是平凡的。

例 *14.2*（*Pólya*游走）。—— 记 $w_\ell^{(d)}$ 为从原点出发并在经过 ℓ 步后返回原点的最近邻游走的数量。对于 $3 \leqslant d \leqslant 15$, 考虑湮灭生成级数 $\sum_{\ell=0}^{\infty} w_\ell^{(d)}$ 的最小阶“微分算子” $\Delta^{(d)}$，并令 $D^{(d)}$ 为其逆Borel变换。

在 $d = 3$ 的情况下，有

$$\begin{aligned}
\Delta^{(d)} &= \xi^2(4\xi^2-1)(36\xi^2-1)\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\,\xi^3} + (1296\xi^5 - 240\xi^3 + 3\xi)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,\xi^2}\\
&\quad + (2592\xi^4 - 288\xi^2 + 1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} + 864\xi^3 - 48\xi,\\
D^{(d)} &= 144x^{-3}\partial^6 - 1296x^{-2}\partial^5 + (-40x^{-3} + 2592x^{-1})\partial^4 + (240x^{-2} - 864)\partial^3\\
&\quad + (x^{-3} - 288x^{-1})\partial^2 + (-3x^{-2} + 48)\partial + x^{-1},
\end{aligned}$$

而 $D^{(d)}$ 的标准基本解的各个分量为

$$\begin{aligned} y_1(x), y_6(x) &= \mathrm{e}^{\pm 1/(6x)} x^{3/2} \left(1 \pm \tfrac{27}{4} x + \cdots\right), \\ y_2(x), y_5(x) &= \mathrm{e}^{\pm 1/(2x)} x^{3/2} \left(1 \pm \tfrac{17}{4} x + \cdots\right), \\ y_3(x) &= x \ln x + 12x^3 \ln x + 32x^3 + \cdots, \\ y_4(x) &= x + 12x^3 + \cdots. \end{aligned}$$

算子 $\Delta^{(d)}$ 在 0 处的指数为 $(0,\ 0,\ 0)$，在其余四个奇点各处的指数为 $(0,\ 1/2, 1)$。在 0 处，我们的实现使用局部基

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{Y}}_0(\zeta) = \big(&\tfrac{1}{2}\ln^2\zeta + 3\zeta^2\ln^2\zeta + 7\zeta^2\ln\zeta + \mathrm{O}(\zeta^4\ln^2\zeta), \\ &\ln\zeta + 6\zeta^2\ln\zeta + 7\zeta^2 + \mathrm{O}(\zeta^4\ln^2\zeta), \\ &1 + 6\zeta^2 + \mathrm{O}(\zeta^4)\big). \end{aligned}$$

由于与斯托克斯值 0 关联的 D 的解 $y_3(x)$ 和 $y_4(x)$ 只涉及对数的一次项，并且根据引理 2.1，博雷尔变换不会增加 $\log(x)$ 的次数，因此我们已经知道，它们的博雷尔变换在此基中的第一坐标为零。令

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(y_3)(\zeta) &= \ln\zeta + \gamma + \frac{\zeta^2}{\Gamma(3)}(12\ln\zeta + 12\gamma - 18 + 32) + \cdots, \\ \mathcal{B}(y_4)(\zeta) &= \zeta + \frac{12\zeta^2}{\Gamma(3)} + \cdots \end{aligned}$$

我们得到

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{bmatrix}.$$

类似地，积分的展开

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_0} (\ln\zeta + 6\zeta^2\ln\zeta + 7\zeta^2 + \cdots)\mathrm{e}^{-\zeta/x}\mathrm{d}\zeta &= 2\pi\mathrm{i}x + 24\pi\mathrm{i}x^3 + \cdots \\ \int_{\Gamma_0} \left(\frac{1}{2}\ln^2\zeta + \cdots\right)\mathrm{e}^{-\zeta/x}\mathrm{d}\zeta &= \frac{1}{2}[2\pi\mathrm{i}x(2\ln x - 2\gamma - 2\pi\mathrm{i})] + \cdots \end{aligned}$$

得到

$$\mathbf{L}_0 = \begin{bmatrix} 2\pi\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 2\pi^2 - 2\pi\mathrm{i}\gamma & 2\pi\mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}.$$

其他斯托克斯值 α 对应的$\mathbf{B}_\alpha$ 和$\mathbf{L}_\alpha$ 的计算与之前的例子更为接近，因此我们略去。计算由相邻两个斯托克斯值界定的四条线段各自对应的连接矩阵，并进行适当组合后，最终得到如下

ν	n	$\varepsilon = 10^{-10}$	$\varepsilon = 10^{-100}$	$\varepsilon = 10^{-1000}$
3	6	0.3	0.9	4.3
4	7	0.6	0.5	6.8
5	10	1.3	2.0	7.8
6	11	1.4	2.2	9.3
7	14	3.5	5.6	23.5
8	15	7.7	6.9	26.5
9	18	23.9	18.8	62.5
10	19	29.7	24.0	81.9
11	22	53.8	38.0	146.0
12	23	—	55.2	199.3
13	26	129.2	70.0	306.2
14	27	—	96.7	404.1
15	30	261.0	115.3	558.8

表14.1. 计算 $1/x$ 中阶数为 n、次数为 $\nu = d$ 的 $D^{(d)}$ 的所有斯托克斯矩阵所需的时间（秒）；每个元素的绝对误差不超过 ε。缺失项表示由于精度不足，某些中间计算失败。

方向 $\omega = 0$上的斯托克斯矩阵:_

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0.000\ldots - 18.000\ldots i & 1 & 0 & \cdots \\ 13.540\ldots + 0.000\ldots i & 0.000\ldots + 1.504\ldots i & 1 & \cdots \\ -7.815\ldots - 14.179\ldots i & 0.000\ldots - 0.868\ldots i & 0 & \cdots \\ 36.000\ldots + 0.000\ldots i & 0.000\ldots + 8.000\ldots i & 0.000\ldots - 2.930\ldots i & \cdots \\ 0.000\ldots - 4.000\ldots i & 1.333\ldots - 0.000\ldots i & -0.976\ldots + 1.772\ldots i & \cdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.000\ldots - 5.077\ldots i & 1. & 0 \\ -1.692\ldots + 0.000\ldots i & 0.000\ldots - 0.666\ldots i & 1 \end{bmatrix}$$

（以及沿方向 $\omega = \pi$ 的另一个上三角矩阵。）_

更一般地， $D^{(d)}$ 是一个 $n = 2d$ 阶算子：当 d 为奇数时为 $n = 2d - 1$，当 d 为偶数时为 $\nu = d$ 阶，其系数的次数为 $\nu = d$，并遵循我们通常的约定。其斯托克斯值包括重数为 $d - 1$ 的0，以及 $\lfloor (d+3)/2 \rfloor$ 对互为相反数的有理数；特别地，它们全部位于实轴上。斯托克斯值0的重数为 $d - 1$，且唯一相关的指数等于0，因此 $D^{(d)}$ 的相应解涉及

次数不超过 $d-2$的对数。所有其他斯托克斯值的重数均为1，相关指数等于 $d/2-1$。相应地， $\Delta^{(d)}$ 在0处的解涉及次数不超过 $d-1$的对数；而在其他奇点处，存在一个由 $d-1$ 个幂级数组成的解基，以及一个具有半整数指数（当 d为奇数时）或含对数项（当 d为偶数时）的解。

表14.1展示了我们的实现以不同精度计算 $D^{(d)}$ 的斯托克斯矩阵所耗费的时间。每种情况下，我们首先调用带有所示 ε 的 `stokes dict` 函数。如果计算所得 _ 区间的最大半径 δ 超过 ε，我们就将 ε 替换为 $\varepsilon^{2.1}/\delta,$，并重新进行计算，如此反复，直到所有斯托克斯乘子的误差都小于初始的 ε。报告的运行时间是所有运行时间的总和。对于较大的实例，低精度计算比中等精度计算更慢，因为当初始精度较低时，这一过程可能需要更多次迭代。更普遍地说，随着误差容限降低，运行时间增长得非常缓慢（相对于位数增长甚至不到线性！）；这表明计算过程中精度损失显著，且自动工作精度管理存在缺陷。

例 *14.3*（隧道）。— 对于 $\eta > 0$，我们考虑算子

$$D = x^{-2}\partial^4 + (1-4x^{-2})\partial^3 + (\eta^2 x^{-1} + (5+\eta^2)x^{-2})\partial + 2(1+\eta^2)x^{-2}.$$

斯托克斯值为 0、2 和 $1 \pm \eta\mathbf{i}$。变换后的算子 Δ 在原点的指数为 $(0,\ 0)$ 在 2 处的指数为 $(-4,\ 1)$ 在 $1 \pm \eta\mathbf{i}$ 处的指数为 $(1,\ \mp(2/\eta - \eta/2)\mathbf{i})$。在方向 $\omega = 0$上，只有一个非平凡的斯托克斯乘子，它对应于斯托克斯值对 $(0,\ 2)$。当 η 较小时，对该斯托克斯乘子进行数值计算颇具挑战性，因为连接这些斯托克斯值的线段经过 $1 \pm \eta\mathbf{i}$ 之间，而那里存在较大的虚指数。

为了检验我们的实现在这种情况下的表现，我们使用以下 SageMath 代码，该代码计算 D 的斯托克斯矩阵，并提取所关注的斯托克斯乘子：

```
sage: d = x^2*Dx
sage: dop = (d^4 + (x^2 - 4)*d^3 + (eta^2*x + 5 + eta^2)*d^2
....:         + (2*x - 2 - 2*eta^2)*d + (2 + 2*eta^2)*x)
sage: stokes = stokes_dict(dop, 1e-50)
sage: stokes[1][3,0]
```

表14.2展示了 η 的各种取值及相应的运行时间。我们注意到，代码放弃了计算

η	计算得到的斯托克斯常数	时间（秒）
10^{-1}	$[\pm 1.75\cdot 10^{11}]+\ [-3.34009\ldots 269\cdot 10^{52}\pm 3.58\cdot 10^{11}]\,\mathrm{i}$	0.4
10^{-2}	$[\pm 1.32\cdot 10^{490}]+\ [-6.39027\ldots 429\cdot 10^{543}\pm 3.01\cdot 10^{489}]\,\mathrm{i}$	3.5
10^{-3}	$[\pm 4.92\cdot 10^{5403}]+[-3.73685\ldots 673\cdot 10^{5455}\pm 6.22\cdot 10^{5403}]\,\mathrm{i}$	100

表14.2。例 14.3 的计算斯托克斯常数及耗时。

结果的绝对误差未达到输入的 10^{-50} 容差，但确实返回了一个具有该数量级相对 误差的结果。这一结果在一定程度上取决于容差的选择。对于 $\eta = 10^{-4}$，必须降低容差，计算才能成功完成。

参考文献

[1] D. G. Babbitt & V. S. Varadarajan, 《亚纯微分方程的形式约化理论：群论视角》, *Pac. J. Math.* **109** （1983）, 第 1–80 页。[2] W. Balser、W. B. Jurkat & D. A. Lutz, 《亚纯微分方程不变量的一般理论 I：形式不变量》, 《函数方程国际辑》 **22**（1979）, 第 197–221 页。[3] W. Balser, 《通过迭代拉普拉斯积分对形式幂级数求和》, 《*Mathematica Scandinavica*》 **70** （1992）, 第 2 期, 第 161–171 页。[4] P. B. Borwein, 《超几何函数的降复杂度求值》, *Jour- nal of Approximation Theory* **50** （1987）, 第 3 期, 第 193–199 页。[5] A. Bostan、F. Chyzak、F. Ollivier、B. Salvy、E. Schost & A. Sedoglavic, 《微分方程组幂级数解的快速计算》, 载于*SODA'07*, 美国工业与应用数学学会, 2007年, 第 1012–1021 页。[6] D. Boucher & J.-A. Weil, 《线性微分方程、微分伽罗瓦群、微分系统的第一积分》（法国吕米尼）, 2007年。[7] B. L. J. Braaksma, 《线性亚纯微分方程的多重可求和性与斯托克斯乘子》, 《微分方程杂志》 **92** （1991）, 第 1 期, 第 45–75 页。[8] R. P. Brent, 《Fortran 多精度算术程序包》, *ACM Transac- tions on Mathematical Software* **4** （1978）, 第 1 期, 第 57–70 页。[9] D. V. Chudnovsky & G. V. Chudnovsky, 《根据拉马努金进行的近似与复乘》, 载于《重访拉马努金》, Academic Press, 1988年, 第 375–472 页。[10] ———, 《服务于数理物理与数论的计算机代数》, 载于*Computers in Mathematics*（D. V. Chudnovsky & R. D. Jenks 编）, 《纯粹与应用数学讲义》, 第 125 卷, Dekker, 1990年, 第 109–232 页。[11] O. Costin, 《渐近分析与博雷尔可求和性》, Chapman Hall/CRC 专著与综述《纯粹与应用数学》, 第 141 卷, 佛罗里达州博卡拉顿：Chapman & Hall/CRC, 2009年。[12] J. A. De Loera、J. Rambau & F. Santos, 《三角剖分》, 《数学与计算丛书》, 第 25 卷, 施普林格, 柏林、海德堡, 2010年。[13] J. Dieudonné, 《无穷小微积分》, Hermann, 巴黎, 1968年。[14] A. Duval & C. Mitschi, 《广义合流超几何方程的斯托克斯矩阵与伽罗瓦群》, *Pacific J. Math.* **138** （1989）, 第 1 期, 第 25–56 页。

[15] J. Écalle，《复苏函数 I》，技术报告 81-05，奥赛数学出版物，1981年。[16] ———，《复苏函数 II》，技术报告 81-06，奥赛数学出版物，1981年。[17] ———，《复苏函数 III：桥方程与局部对象的解析分类》，技术报告 85-05，奥赛数学出版物，1985年。[18] ———，《可解析函数导论及 Dulac 猜想的构造性证明》，Hermann，1992年。[19] F. Fauvet、F. Richard-Jung & J. Thomann，《斯托克斯矩阵的自动计算》，《数值算法》50（2009），第 2 期，第 179–213 页。[20] F. Fauvet & J. Thomann，《复苏函数的形式与数值计算》，《数值算法》40（2005），第 4 期，第 323–353 页。[21] A. Goyer，《微分代数中的符号数值算法》，博士论文，Université Paris-Saclay，2025年。[22] D. Guzzetti，《从连接系数角度研究斯托克斯矩阵》，《Funkcialaj Ekvacioj》59（2016），第 3 期，第 383–433 页。[23] D. Harvey & J. van der Hoeven，《在 $O(n\log\ n)$ 时间内进行整数乘法》，《数学年刊》193（2021），第 2 期，第 563–617 页。[24] J. van der Hoeven，《正规奇点附近及其中全纯函数的快速求值》，《符号计算杂志》31（2001），第 6 期，第 717–743 页。[25] ———，《Mmxlib 中的有效实数》，载于 ISSAC '06（美国纽约），美国计算机协会，2006年，第 138–145 页。[26] ———，《全纯函数的高效加速求和》，《符号计算杂志》42（2007），第 4 期，第 389–428 页。[27] ———，《牛顿法与快速傅里叶变换的权衡》，《符号计算杂志》45（2010），第 8 期，第 857–878 页。[28] ———，《全纯函数的一致快速求值》，2016年。[29] E. L. Ince，《常微分方程》，Dover 出版社，纽约，1944年。[30] F. Johansson，《使用球算术》，FLINT 文档，`https://flintlib.org/doc/using.html`。

[31] ———，《Arb：高效任意精度中点半径区间算术》，《IEEE 计算机汇刊》66（2017），第 8 期，第 1281–1292 页。[32] ———，《Calcium：精确实数域与复数域中的计算》，载于 ISSAC '21（美国纽约），美国计算机协会，2021 年，第 225–232 页。[33] ———，《伽马函数的任意精度计算》，《Maple Transactions》3（2023），第 1 期。[34] F. Jung、F. Naegele & J. Thomann，《形式幂级数及线性常微分方程解的多重求和算法》，《数学与计算机仿真》42（1996），第 4–6 期，第 409–425 页。[35] W. B. Jurkat、D. A. Lutz & A. Peyerimhoff，《亚纯线性微分方程的比尔科夫不变量与有效计算 II》，《休斯敦数学杂志》2（1976），第 207–238 页。[36] M. Loday-Richaud，《二阶系统比尔科夫不变量的计算》，《函数方程国际辑》33（1990），第 2 期，第 161–225 页。[37] ———，《斯托克斯现象、多重可求和性与微分伽罗瓦群》，《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔）44（1994），第 3 期，第 849–906 页。[38] ———，《降秩、标准形与斯托克斯矩阵》，《数学博览》19（2001），第 3 期，第 229–250 页。[39] ———，《发散级数、可求和性与复苏 II》，《数学讲义》，第 2154 卷，施普林格，2016年，《简单与多重可求和性》，xxiii+272 页。

[40] M. Loday-Richaud 与 P. Remy，《复苏、斯托克斯现象及一级线性微分系统的奇异导数》，《微分方程杂志》250（2011），第3期，第1591–1630页。[41] D. A. Lutz 与 R. Schäfke，《亚纯微分方程的连接系数计算》，《复变函数：理论与应用》34（1997），第1–2期，第145–170页。[42] B. Malgrange，《关于具有不规则奇异点的微分方程的 टपिप्पणी》，载于《复数域中的微分方程与Pfaff系统》，《数学讲义》712卷，1979年，第77–86页。[43] ———，《傅里叶变换与微分方程》，载于《量子力学的新近发展》，会议论文集，Braşov/罗马尼亚，1989年，《数学物理研究》12，第33–48页，1991年。[44] J. Martinet 与 J.-P. Ramis，《一阶非线性微分方程的模问题》，Publ. Math. IHES 55（1982），第63–164页。[45] M. Mezzarobba，《SageMath中D有限函数的严格多精度计算》，`https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01342769`，2016年。[46] ———，《微分有限级数的截断界》，《亨利·勒贝格年刊》2（2019），第99–148页。[47] C. Mitschi 与 D. Sauzin，《发散级数、可求和性与复苏 I》，《数学讲义》2153卷，施普林格，2016年，《单值化与复苏》，xxi+298 页。[48] J. J. Morales-Ruiz 与 J.-P. Ramis，《通过微分伽罗瓦理论研究动力系统的可积性：实用指南》，《微分代数、复分析与正交多项式》509（2010），第143–220页。[49] N. T. Müller，《iRRAM：C++中的精确算术》，载于《分析中的可计算性与复杂度》（G. Goos、J. Hartmanis、J. Van Leeuwen、J. Blanck、V. Brattka 与 P. Hertling编），第2064卷，施普林格，柏林、海德堡，2001年，第222–252页。[50] F. Naegele，《关于若干解析函数方程》，博士论文，格勒诺布尔国立理工学院，1995年。[51] F. W. Olver、D. W. Lozier、R. F. Boisvert 与 C. W. Clark（编），《数学函数数字图书馆》，美国国家标准与技术研究院，2010年，`http://dlmf.nist.gov/`。[52] E. G. C. Poole，《线性微分方程理论导论》，克拉伦登出版社，纽约，1936年。[53] J.-P. Ramis，《结语：Stokes现象——动力学、分类问题与变体》，载于《奇异性几何与拓扑手册 VI：叶层》（F. Cano等编），施普林格·自然出版社，瑞士，Cham，2024年，第383–482页。[54] F. Richard-Jung，《Stokes 现象：图形可视化与认证计算》，载于 SNC'11 （M. Moreno Maza编），美国计算机协会，2011年。[55] T. Schmelzer 与 L. N. Trefethen，《利用轮廓积分与有理逼近计算伽马函数》，《SIAM数值分析杂志》45（2007），第2期，第558–571页。[56] PARI小组，波尔多大学，PARI/GP 2.17.2版，2025年。[57] J. Thomann，《形式级数的复求和》，Numerische Mathematik 58（1990），第1期，第503–535页。[58] ———，《微分方程解级数的形式与数值求和方法》，Expositiones Mathematicae 13（1995），第223–246页。