以数据为中心的工程 （2025年），xx：xx 1–31

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

arXiv:2601.04921v1 [physics.flu-dyn] 8 Jan 2026

研究论文

用于增强物理信息神经网络湍流模型的混合数据源迁移学习

Christian Toma[1], Bharathram Ganapathisubramani[1] 和 Sean Symon[1]†南安普顿大学航空与航天系，英国南安普顿，SO16 7QF。**关键词：** 物理信息神经网络、迁移学习、实验数据同化、硬约束物理信息神经网络
MSC代码： 主要 – CODE1；次要 – CODE2、CODE3

摘要
物理信息神经网络（PINNs）近年来已成为从实验数据中提取未知物理量的一种有前景的替代方法。尽管具有这一潜力，近期的大量文献仍依赖于来自直接数值模拟（DNS）的稀疏高保真数据，而非粒子图像测速（PIV）等实验数据；后者并不适合验证所有重构物理量。以PIV为例，压力无法直接测量，且数据存在噪声污染或视场有限等缺陷。为克服这些局限性，我们提出了一种新方法：首先在RANS模拟上训练物理信息神经网络，使其学习计算域中每个位置的所有状态。随后，我们应用迁移学习，利用子采样PIV数据更新该物理信息神经网络。与仅使用实验数据训练的物理信息神经网络相比，所得预测结果与完整PIV数据集的一致性显著提高。本研究在近期文献的基础上，集成了Spalart–Allmaras湍流模型，并对无滑移壁面边界条件施加了硬约束。我们将这一新方法应用于一个二维NACA 0012翼型，该翼型倾斜角为迎角$\alpha = 15°$，对应两个雷诺数：$Re = 10{,}000$和$75{,}000$。所提出的方法首先使用大涡模拟（LES）数据进行验证，随后在实验PIV数据上进行了展示。与采用随机网络初始化相比，我们的迁移学习方法能够改善预测结果并缩短训练时间。

影响声明

在流体动力学中，数据同化能够弥合实验与高保真模拟之间的差距，弥补两者各自的一些不足。本研究将近期采用物理信息神经网络（PINNs）的工作拓展至更高雷诺数的失速翼型流动实验数据集。通过所提出的方法，我们展示了物理信息神经网络能够根据稀疏测量重建整个流场，并预测压力等关键表面物理量，而无需提供参考数据。

1. 引言

计算流体动力学（CFD）模拟涵盖了从低成本的雷诺平均纳维–斯托克斯（RANS）到最先进的直接数值模拟（DNS）等一系列建模技术，后者需要消耗大量计算资源才能求解（Doran 2013）。成本较低的模拟的不足之处在于，它们依赖建模假设来平衡计算成本与所获数据的保真度。另一种方式是，实验数据有望通过对流动的直接测量提供真实值。然而，噪声和数据损坏会降低实验数据的质量，并使其可靠性存在不同程度的不确定性。因此，模拟和实验都无法

单独提供关于复杂流动的完整信息，而这一固有差距促使人们开发替代方法来应对这些挑战。

近年来，第三种途径提出利用基于优化的方法融合模拟与实验，弥合二者之间的差异，并结合各自的优势。解决这一问题的最新方法之一是物理信息神经网络（PINN）。该方法最初由 Raissi 等人（2019年）提出。物理信息神经网络利用机器学习和神经网络领域的最新进展，通过自动微分计算所需的梯度，从而直接求解偏微分方程（PDE）。其核心假设是，神经网络可以近似非线性函数的解；在此处，该函数即纳维-斯托克斯方程（Hornik等人，1989）。物理信息神经网络与计算流体力学的区别在于，前者直接将预测结果与离散位置处的参考数据进行比较，从而求得整个流场的解。

关于物理信息神经网络方法以及利用稀疏参考数据重构平均流动量的基础性论文之一，出自 Sliwinski 和 Rigas（2023）。在这项研究中，他们探讨了如何根据直接数值模拟解的稀疏采样，预测雷诺数为 Re = 150 时的时间平均圆柱绕流。为此，他们采用 Foures 等人（2014）最初提出的雷诺应力强迫项表示，以减小待求未知量与方程之间的不一致。通过亥姆霍兹分解对强迫项进行分解，未知量与方程的数量差为一。即使方程组欠定，这种物理信息神经网络公式仍能利用均匀稀疏的数据（每个圆柱直径范围内两个点）改进平均速度场的预测。此外，结果凸显了物理信息神经网络处理稀疏含噪数据的能力。不过，作者在结论中指出，圆柱表面处仍存在偏差。

另一种简化雷诺平均纳维–斯托克斯方程和雷诺应力张量的方法，是采用 Boussinesq近似，通过引入一个称为涡黏度的黏度项，将平均速度梯度与雷诺应力联系起来，ν_t (Boussinesq 1877)。von Saldern 等人 (2022年)采用这一方法，将参考立体粒子图像测速数据集中的旋流湍射流数据同化到模型中。神经网络从数据中隐式推导出一个涡黏度模型；利用该模型计算雷诺应力后，所得结果与数据吻合良好。

与其让物理信息神经网络间接构建用于计算雷诺应力的模型，另一种方法是像其他数值方法中常见的那样，纳入成熟的湍流模型。Patel等人 (2024)扩展了方程，将 Spalart–Allmaras 湍流模型纳入其中，并求解一个额外变量 $\tilde{\nu}$。该变量表示一种经过修正的湍流运动黏度，用于计算涡黏度项 ν_t，该项反映了湍流脉动引起的额外动量传递。这种公式并未改变未知数与方程数量之间的不匹配，但为物理信息神经网络准确模拟物理过程提供了更多约束。在这项工作中，他们将这一新公式应用于雷诺数 Re =5600 的周期山丘算例。与未采用湍流模型的基准物理信息神经网络相比，加入湍流模型后，整个计算域内的流动预测均有所改善，尤其是在近壁区和分离点处（Patel 等人，2024）。其他研究者也将湍流模型纳入物理信息神经网络的方程公式中。Pioch等人 (2023)将 k-ω模型以及其他基于混合长度的模型应用于雷诺数 Re = 5100 下的后向台阶算例，发现结果与参考数据吻合良好，但也指出训练稳定性较难保证，可能导致非物理预测。

在许多这类案例中，用于训练物理信息神经网络的参考数据源自直接数值模拟解，而非实验测量。即使采用当前最先进的直接数值模拟求解器，生成此类数据的计算成本仍高得难以承受，尤其是在参数研究或快速设计迭代中（Pope2001）。因此，尽管实验数据存在局限性，但可能更为合适。一些研究尝试复现实验数据中的噪声，但直接将原始实验数据整合进物理信息神经网络的研究相对较少。Steinfurth 等人等(2024) 的一项研究使用从多个平面采集的平面粒子图像测速数据、后向台阶模型的表面压力和壁面剪切应力测量数据训练物理信息神经网络模型。这些测量数据经过汇总后，用于训练一个三维物理信息神经网络，并采用混合长度模型近似雷诺剪切应力，而不是使用前述涡黏性模型之一。在训练物理信息神经网络时，损失

函数会同时纳入参考数据集中的数据点和随机生成的配点进行评估。在物理信息神经网络中，配点相当于计算流体力学求解器中的单元，用于评估预测物理量与控制方程及边界条件的符合程度。在 Steinfurth等人(2024) 的研究中，鉴于计算域中的数据点数量较多，他们只需额外使用少量配点来评估物理损失和边界条件。此外，作者发现，大幅降低物理损失对总损失的贡献，整体上改善了预测结果。这种方法适用于数据丰富的同化问题，并且已证明尤其有助于修正参考粒子图像测速数据集中的拼接误差。其他将湍流模型整合进物理信息神经网络的尝试包括 Villié等人(2025年)。作者将 Spalart–Allmaras 湍流模型用于增强对过渡性狭窄流动的实验磁共振成像测量。该物理信息神经网络降低了测量技术在速度分量中引入的误差，并且对于压力和雷诺应力等其他物理量，其预测与模拟结果吻合良好。

Klopsch 等 (2025年) 扩展了 Patel等人(2024) 的工作，采用相同的 Spalart–Allmaras 方程表述方式，将物理信息神经网络应用于绕波音高斯凸起流动在两个雷诺数下的实验粒子图像测速测量，雷诺数分别为 $= 1 \times 10^6$ 和 2×10^6。这两个雷诺数分别对应基本附着流动和完全分离流动。作者提供了沿高斯凸起不同流向位置的时间平均粒子图像测速数据窗口。随后，物理信息神经网络重构了计算域内的连续速度场，并预测了压力场和涡黏度场。尽管得到的场在物理上保持一致，但值得注意的是，同化得到的涡黏度并未完全符合 Spalart–Allmaras 模型。

对于大多数现有的物理信息神经网络方法，网络权重和偏置均随机初始化，并根据所用激活函数对应的分布进行采样。在更广泛的机器学习领域，从为解决类似任务而开发的预训练模型开始训练十分常见，例如用于计算机视觉或文本任务的模型（Too 等，2019年；Ziegler等，2019年）。这一过程称为迁移学习，涉及使用新的领域专用数据集重新训练或微调模型。这样做的好处是可以缩短后续训练时间，从而降低计算成本；与直接构建模型相比，通常还能取得更好的结果（Torrey 和 Shavlik 2010年；Weiss 等，2016年）。

在本研究中，我们将迁移学习应用于物理信息神经网络，使其能够根据有限的实验测量重建平均流动。该物理信息神经网络通过采用 Spalart–Allmaras 湍流模型来满足不可压缩雷诺平均纳维–斯托克斯方程。首先，我们使用基准雷诺平均纳维–斯托克斯模拟对其进行训练，使其能够成功预测所有状态，包括涡黏度和压力。随后，我们将该物理信息神经网络迁移至经过子采样的大涡模拟和粒子图像测速数据，以重建实验计算域内外的所有状态。本文其余部分安排如下。第 2 节详细介绍物理信息神经网络公式及本研究配置的具体内容。第 3 节概述新的训练方法以及本研究中使用的数据集。第 4 节展示结果，并讨论在此应用中使用物理信息神经网络时面临的一些基本挑战。第 5 节总结应用这些新方法所得的发现，并探讨一些可能的扩展方向。

2. 物理信息神经网络与问题设置

与许多其他数据同化技术一样，PINN 框架将稀疏的高保真测量数据拟合到一组控制方程中（Raissi 等，2019年）。鉴于本研究旨在同化二维流动测量数据，我们根据二维雷诺平均纳维–斯托克斯方程构建 PINN 的物理损失。本文介绍的方法以 Sliwinski 和 Rigas（2023）以及 Patel等人（2024）近期的研究为基础。第 2.1 节重点介绍本研究采用的控制方程，第 2.2 节说明这些方程如何融入损失函数。第 2.3 节概述如何通过应用硬约束将边界条件纳入其中。第 2.4 节详细介绍神经网络架构，第 2.5 节则汇总 PINN 的各个方面，并提供本文结果部分所述工作的具体实现信息。

2.1. 控制方程

对于平均流动问题，我们可以应用雷诺分解，将流动量拆分为各自的稳态部分（U_i, P）和非稳态部分（u_i', p'）。将其代入纳维-斯托克斯方程并进行时间平均后，可得到雷诺平均纳维–斯托克斯方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_i} &= 0, \\ \overline{U_j}\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} - \frac{\partial (2\nu S_{ij})}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j} &= 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 $\overline{U_i}$ 表示平均速度，P 表示压力，ρ 表示密度，而 ν 表示运动黏度。剩余的两项分别表示应变率张量 $S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)$，以及雷诺应力张量的散度 $\overline{u_i' u_j'}$。对于二维问题，方程2.1 给出了三个方程和六个未知数，形成了一个待求解的欠定系统。这个问题称为闭合问题。在湍流建模和数据同化领域，人们提出了许多复杂程度各异的方法来解决闭合问题。在本文中，我们将考虑两种方法：一种是无模型方法，另一种是基于 Spalart–Allmaras 湍流模型的方法。

对于无模型方法，我们允许物理信息神经网络在训练过程中确定雷诺应力。在这种情况下，输出层包含一个节点，对应雷诺应力张量的每个分量。然而，缩小方程与未知数之间的差距会更有效（Sliwinski 和 Rigas 2023）。Foures 等人 (2014) 最初提出，可将雷诺应力的散度表示为强迫项，

$$f_i \equiv -\frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + f_{s,i}. \tag{2.2}$$

对 f_i 进行亥姆霍兹分解 ϕ 可得到两个项：势项$f_{s和i}$无散项。结合方程2.1 和方程2.2，可推导出含强迫项的 RANS（RANS-F）方程，如下所示：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_i} &= 0, \\ \overline{U_j}\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial (\overline{P} - \phi)}{\partial x_i} - \frac{\partial (2\nu S_{ij})}{\partial x_j} - f_{s,i} &= 0, \\ \frac{\partial f_{s,i}}{\partial x_i} &= 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

由于强迫项$f_{s,\ i}$是无散的，因此也可以规定强迫项必须满足散度为零。此外，为减少未知数的数量，可以将压力与 ϕ 合并为一个项（$P - \phi$）。由此得到的系统仍然欠定，但未知数的数量已减少到五个，方程有四个。减少未知数虽试图缓解一个问题，却带来了压力仍与 ϕ耦合的问题。因此，即使速度场已完全确定，从而使系统成为定解系统，预测压力也可能不等于真实压力，因为 ϕ 的影响未知（Foures 等，2014；Sliwinski 和 Rigas 2023）。

解决闭合问题的第二种方法是通过湍流模型对雷诺应力进行经验建模。这种方法常见于数值求解器，并依赖于

Boussinesq近似将雷诺应力与平均速度梯度及一个模型化的涡黏度项 ν_t 联系起来，如下式所示：

$$\overline{u_i' u_j'} = -2\nu_t S_{ij} + \frac{2}{3} k \delta_{ij}, \tag{2.4}$$

对于不可压缩流，其中 k 为湍动能，而 δ_{ij} 为克罗内克δ函数（Boussinesq 1877）。在本研究中，遵循近期文献的做法，选用 Spalart-Allmaras（SA）湍流模型来建模涡黏度项（Franceschini 等，2020；Patel 等 2024）。对于平均流动问题，输运方程可简化为：

$$\overline{U_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} - c_{b1} \tilde{S} \tilde{\nu} + c_{w1} f_w \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2 - \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) + c_{b2} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right)^2 \right] = 0. \tag{2.5}$$

该公式增加了一个未知量 $\tilde{\nu}$以及一个附加方程（Spalart和Allmaras 1994）。对于 Spalart-Allmaras 输运方程（方程 2.5），平均速度梯度主要驱动涡黏度在计算域中的生成与耗散。因此，对于物理信息神经网络，需提高其对平均速度梯度的敏感度，才能正确求解该方程。下式将这一附加项与动量方程中的涡黏度联系起来

$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{v1}, \tag{2.6a}$$

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3}, \tag{2.6b}$$

$$\chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}, \tag{2.6c}$$

其中 $c_{v1} = 7。3$。采用这种方法，方程 2.2中的强迫项 f_i仍表示雷诺应力的散度。关键区别在于，此处的强迫项是修正强迫项 $f_{c,\ i}$，可采用相同方法将其分解为各自的无散分量和势分量，如下所示

$$f_i = \frac{\partial (2\nu_t S_{ij})}{\partial x_j} + f_{c,i} = \frac{\partial (2\nu_t S_{ij})}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + f_{s,i}. \tag{2.7}$$

这种修正强迫项公式旨在捕捉湍流模型与测量数据之间的任何差异。值得注意的是，散度为零的强迫项，$f_{s,\ i}$ 根据方程2.2 并不会相同，但 f_i 在收敛时应当相同。湍流模型的目的是计算雷诺应力，因此，方程$f_{s,\ i}$中的强迫项2.7 捕捉了模型因 Boussinesq近似的约束而无法表示的任何分量。虽然这并未解决待求解方程组欠定的问题，但湍流模型的优点在于能够帮助改进高雷诺数流动的预测，这与传统数值方法的作用相同。此前，方程2.2 中的等效强迫项需要完成所有这些工作。为促进物理信息神经网络使用湍流模型，我们通过最小化所有散度为零的强迫项之和的幅值，对强迫项的生成施加惩罚。将其代入方程2.1中的动量方程后，RANS-SA方程的最终定义为

$$\overline{U_j} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\overline{P} - \phi)}{\partial x_i} - \frac{\partial (2(\nu + \nu_t) S_{ij})}{\partial x_j} - f_{s,i} = 0. \tag{2.8}$$

2.2. 损失函数的构建

传统上，深度神经网络通过均方误差最小化预测值与参考值之间的逐点差异来解决回归问题，这通常称为监督学习。物理信息神经网络在此方法基础上进行了扩展，将额外的监督项和无监督项纳入损失函数。这些项分为三类：物理损失、边界损失和数据损失，

$$\mathcal{L}_{total} = \mathcal{L}_P + \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_D. \tag{2.9}$$

随后使用各组成部分的贡献 $\mathcal{L}_{total}$ 来评估预测的物理量并更新神经网络参数。对于物理损失 $\mathcal{L}_P$，我们可以利用神经网络预测的物理量求解控制偏微分方程（PDE）。所有物理信息神经网络（PINN）问题的基本假设是：通过自动微分计算出的神经网络梯度能够正确表示解的导数，并可用于施加控制偏微分方程。例如，将 RANS-F 方程的所有项移至等式一侧，如方程 2.3所示，PINN 计算出的各左侧项的值即为我们要最小化的残差。这种训练方式属于无监督训练，因为在求解损失函数的这一部分时，我们不提供参考值。实际操作中，我们会生成随机配置点，类似于网格中的单元，并将其输入神经网络，以计算局部值及其对应的梯度。物理损失可表示为：

$$\mathcal{L}_P = \frac{\lambda_P}{N_P} \sum_{i=1}^{N_P} ||f(\boldsymbol{X}_i)||_2^2, \tag{2.10}$$

其中，N_p 是针对每个方程进行评估的配点数量，f，其总体贡献由 λ_P加权。

对于许多非线性偏微分方程问题，平凡解是有效的；如果缺乏监督，神经网络就会将其识别为最优解。为防止这种情况，我们必须通过监督方法为问题施加额外约束。一种方法是提供具有物理推导参考值的边界条件，例如无滑移壁面。对于物理信息神经网络，这相当于损失函数中的一个监督分量，并按照所述方式通过均方误差进行评估，

$$\mathcal{L}_B = \frac{\lambda_B}{N_{B,i}} \sum_{i=1}^{R} \left[\sum_{j=1}^{N_{B,i}} \left(\boldsymbol{X}_{i,j} - \hat{\boldsymbol{X}}_{i,j} \right)^2 \right], \tag{2.11}$$

其中 λ_B 是边界损失在总损失中的权重。这里的关键区别在于 N_B的来源。这些点来自生成的配点，与物理损失中的点类似，具体而言，是位于指定边界上的点。具体的边界条件、计算域的构建以及配点的生成将在第 2.5节中详细讨论。

与边界损失类似，数据损失在离散位置提供参考数据，但这些数据来自测量数据集，而非我们对流动的物理认识。样本数据可以取自数值或实验数据集，并按照所述方式通过均方误差进行评估，

$$\mathcal{L}_D = \frac{\lambda_D}{N_{D,i}} \sum_{i=1}^{R} \left[\sum_{j=1}^{N_{D,i}} \left(\boldsymbol{X}_{i,j} - \hat{\boldsymbol{X}}_{i,j} \right)^2 \right], \tag{2.12}$$

其中 i 表示参考数据中的流动变量，$\boldsymbol{X}$，以及在每个第 j 个数据点处的预测值，$\hat{}\boldsymbol{X}$。L_D 的贡献由 λ_D 加权，并针对所提供的每个量在 N_D 个数据点处进行评估。重要的是，该数据点的相关位置作为神经网络的输入，不

一定需要位于配置点中。在这种情况下，额外的前向传播会计算损失函数所需的预测值，而神经网络则汇总上述所有损失分量，以进行反向传播。

2.3. 硬约束

在第2.2节中，总损失函数的每个分量都隐含地构成一个软约束，并通过最小化使其趋近于零。因此，优化器会通过最小化对总损失贡献最大的分量来更新神经网络参数，这些贡献可能来自残差本身，也可能来自相应乘子对残差的放大作用，λ。这些约束称为软约束，因为预测量只有在残差收敛时才可能满足约束。对于某些约束而言，这种行为或许更可取，例如数据损失，因为数据可能包含噪声或异常值。然而，对于某些边界条件，不满足这些约束可能会导致不符合物理规律或不理想的结果。一个实际例子是，地面效应机翼采用滑移壁面或无滑移壁面时产生的升力差异。

为避免可能出现的不符合物理规律的行为，硬约束被施加于这些边界，以确保预测值与边界条件规定的值一致。与许多其他数据同化方法不同，由于神经网络具有随机性，其实际实现并不简单。一种提出的方法采用增广拉格朗日方法（ALM）（Lu等，2021）。从根本上说，这些方法的作用与损失乘子类似；然而，在训练过程中，有多种方法可以更新拉格朗日乘子的值，从而更严格地施加约束。

在本文中，我们采用了 Basir 和 Senocak（2023）提出的方法。作者使用 RMSprop 算法（Hinton 等，2012）更新拉格朗日乘子。这种为每个边界点设置唯一乘子的做法，无需进行大量超参数调优，便能在应用后为含有许多约束的复杂偏微分方程问题实现更均衡的学习过程。然而，与单调递增乘子等较简单的方法相比，这种自适应 ALM 方法会增加计算成本，包括所需的训练时间和内存用量。计算成本的增加源于 RMSprop 算法需要两个额外参数——动量和梯度——来更新拉格朗日乘子。这些额外参数也会增加计算时间，因为每次迭代都需要通过一个相应的方程来更新每个参数。此外，由于乘子是针对配置点单独设置的，因此对于给定硬约束，需要保存在内存中的额外参数数量是边界点数量的三倍。因此，创建物理信息神经网络时，谨慎选择哪些约束设为硬约束至关重要。

2.4. 网络架构

本研究的目标之一，是探究通过迁移学习，某个 PINN 模型所捕捉到的趋势能否推广至新的模型。第 3.3 节详细介绍了将迁移学习应用于 PINN 的具体方法。要实现这一点，根本上必须采用相同的网络架构，才能将一个神经网络的所有权重和偏置直接复制到另一个神经网络。因此，遵循近期文献的做法，我们构建了一个全连接神经网络（FCNN），包含两个输入节点（x & y）、七个隐藏层（每层 50 个节点），以及一个含六个节点的输出层；除输出层外，各层均采用双曲正切（tanh）激活函数。这六个节点分别对应二维 RANS-SA 方程表述中的六个未知量（U，V，$(P-\phi)$，$f_{s,x}$，$f_{s,y}$& $\sqrt{\tilde{\nu}}$）。关于这一表述，有两点值得注意。首先，与 Patel 等人 (2024) 的做法相同，为确保 $\tilde{\nu}$ 为正，神经网络的输出会进行平方运算，因此需要预测 $\sqrt{\tilde{\nu}}$。其次，为了实现方程之间的迁移学习，对于采用 RANS-F 方程组训练的模型，输出层仍包含 $\tilde{\nu}$ 这一节点。仍会针对 $\tilde{\nu}$ 施加相应的边界条件和数据损失项，以软约束限制预测值的范围，但物理损失不会在整个计算域内评估该场。

2.5. 物理信息神经网络配置

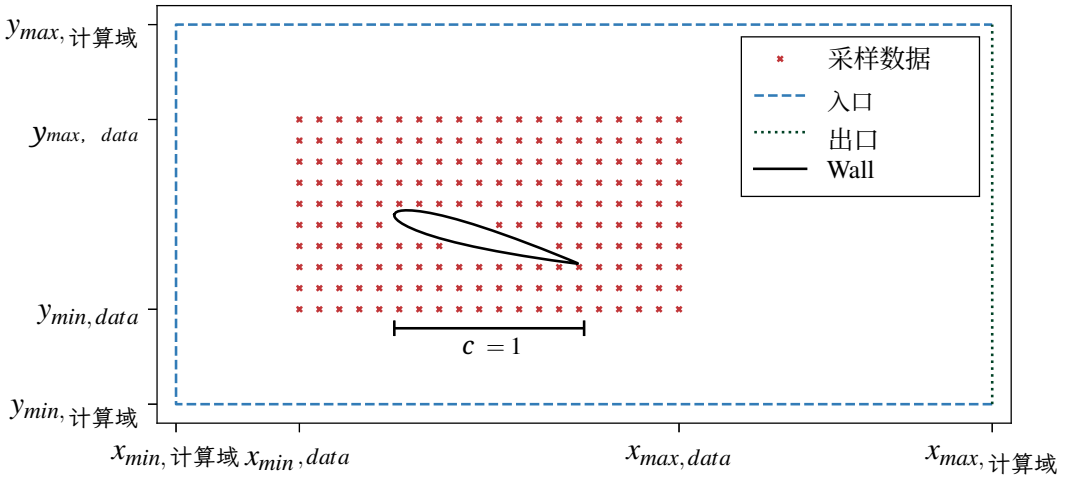

图 1. 计算域示意图，图中标出了内部数据“框”中的代表性数据损失点，以及施加边界条件的边界。

与任何数值方法一样，所采用的计算域和边界条件对于获得具有物理意义的结果至关重要。如第 2.2节所述，计算域的作用是提供配点，以便针对每个损失分量评估神经网络。在本研究中，我们使用了总计 180,000 个训练点（计算域内 150,000 个，边界上 30,000 个）来评估物理损失和边界损失，并使用 25,000 个验证点（计算域内 20,000 个，边界上 5,000 个）来评估这些指标及神经网络的性能。所有点均通过汉默斯利分布随机生成，分别位于计算域内或沿其边界分布。选择配点数量时，兼顾了缩短训练时间和满足图形处理器的内存限制。本文将研究 PINN 在不同雷诺数和数据保真度下应用于失速翼型流动的情况。具体而言，我们选取迎角为 $\alpha = 15°$的 NACA 0012 翼型，并考察两个雷诺数：Re = 10,000 和 75,000。如图 1的示意图所示，计算域由一个外部方框和一个内部翼型构成。我们可以在外部方框的外边缘设置入口和出口条件，并将翼型的内部边界视为固壁。该计算域几何形状不受数据集或雷诺数变化的影响，因此在所有模型中保持不变。为确保 PINN 满足无滑移条件，我们在翼型表面施加硬约束。对于其他所有边界条件（包括数据损失），则施加软约束，以降低计算成本，并使 PINN 能够灵活处理含噪或错误数据。表 1总结了所有 PINN 配置所采用的边界条件。

表 1。 应用于所有物理信息神经网络模型的边界条件，包括约束施加类型框。

边界	施加	约束
入口	Soft	$\overline{U} = 1, \overline{V} = 0, \tilde{\nu} = 4\nu_\infty$
翼型（壁面）	Hard	$\overline{U} = \overline{V} = f_{s,\ x} = f_{s\ ,y} = \tilde{\nu} = 0$
出口	–	–

对于此处展示的所有案例，计算域保持固定，长度为 15c（-5c 至 10c），高度为 10c（-5c 至 5c），翼型前缘位于原点。本研究考虑四个数据集

，包括两个 RANS模拟（R10 和R75），以及分别来自大涡模拟（L10）和粒子图像测速（P75）的两个高保真数据集。这些数据将作为基线模型以及迁移学习模型的参考数据；迁移学习模型将先在 RANS 数据上预训练，再利用高保真数据进行微调。关于这些模型中物理信息神经网络的配置和训练方法，完整细节见第 3 节。具体而言，表 3 和表4 介绍了数据框的尺寸、参考数据的子采样情况、作为数据损失一部分用于训练的物理量，以及为验证物理信息神经网络物理一致性而在整个计算域内评估的物理量。

表*2*。 总结 *Adam* 和 *L-BFGS* 优化阶段所有软约束的损失函数权重。

优化器	数据集	λ_P	λ_B	λ_D
Adam	R10 R75	1	10	0.01
	L10 P75	1	10	10
L-BFGS	All	1	1	1

表 2 详细说明了方程2.9中所述损失函数的基础权重。此处详细列出的权重仅适用于软约束边界条件。对于硬约束边界条件（例如翼型壁面），我们假设 $\lambda_B = 1$，并且在边界上的每个配置点处，拉格朗日乘子均在内部更新。所提供的数据和预测的物理量均根据自由来流速度进行尺度缩放，U_∞以及翼型的弦长 c 进行缩放。与文献中其他领域的做法不同，本文未对输入或输出进行额外的尺度缩放或归一化。

3. 向高保真度数据迁移

为了使用涡黏度模型高效地将物理信息神经网络应用于更高雷诺数的问题，我们需要重新考虑这些模型的训练方式。第 3.1 节 总结了本研究中基准模型和迁移学习模型所用的数据集。第 3.2 节 详细介绍了一种将参考雷诺平均纳维–斯托克斯涡黏度场纳入数据损失的新方法，该方法可防止物理信息神经网络对涡黏度得出平凡解。第 3.3 节 讨论如何通过迁移学习，将经过雷诺平均纳维–斯托克斯训练的基准模型微调至高保真数值数据集或实验数据集。

3.1. 参考数据集

为了应用所提出的方法，我们首先需要完整定义用于生成各个模型的参考数据。对于每个物理信息神经网络模型及其相应的参考数据集，我们可以将各个物理量分为驱动量或受驱动量。驱动量是指出现在数据损失中的物理量，而受驱动量则是不出现在数据损失中，或是由物理信息神经网络的预测结果求导得到的物理量。分析结果时，区分这两类物理量十分重要，因为我们预计驱动量能够得到准确预测，尤其是在数据所在位置。然而，受驱动量依赖神经网络对其进行重构。通过比较已有数据的受驱动量，我们可以更加确信其他缺少数据的物理量具有物理可解释性。

对于两个雷诺平均纳维–斯托克斯数据集（R10 和 R75），基线模型的驱动量包括$\overline{U}$、$\overline{V}$和 $\overline{\tilde{\nu}}$，用于比较的受驱动量是压力系数 C_p，其中

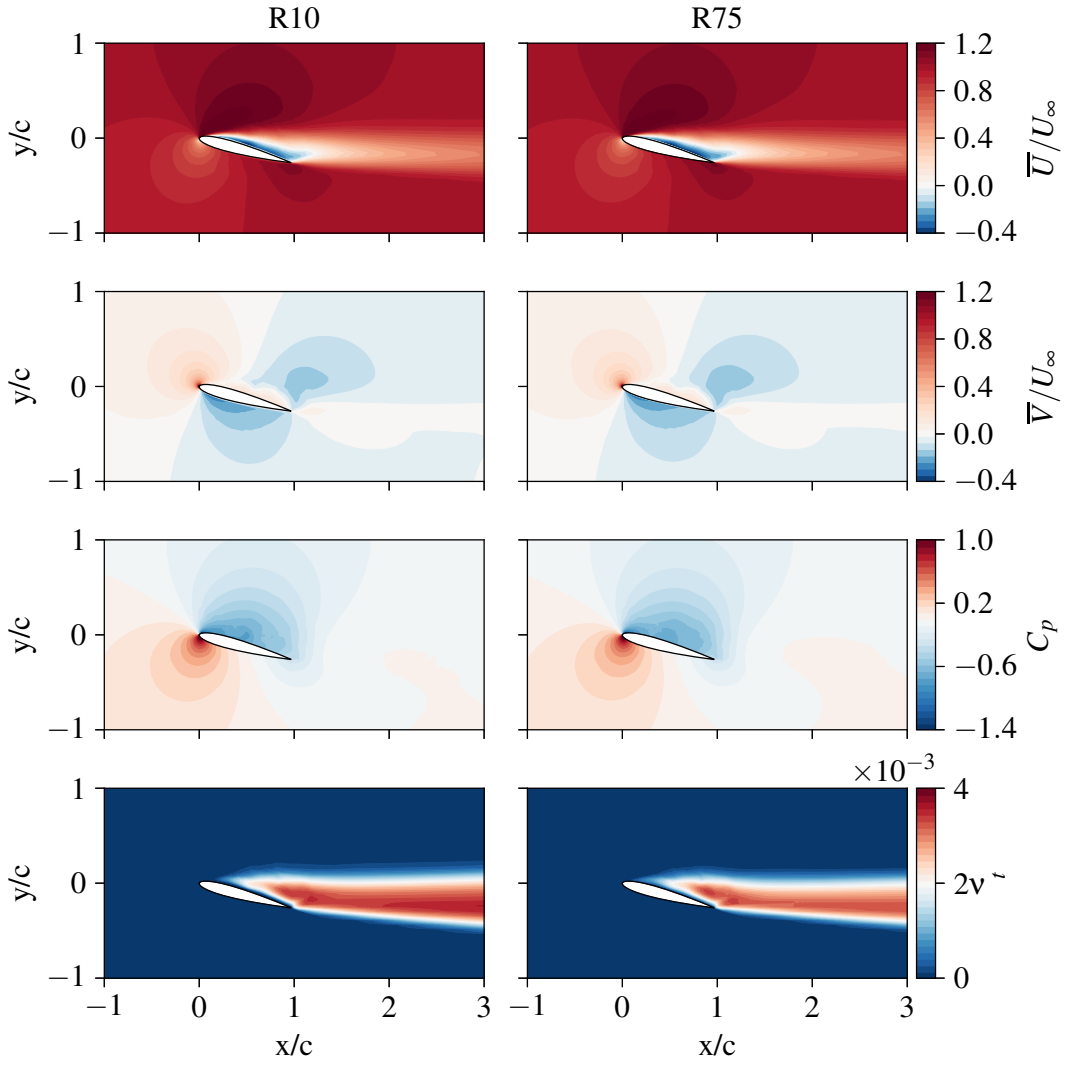

图**2.** 雷诺数 *Re* = *10,000*（左）& *Re* = *75,000*（右）下，*NACA 0012* 在 $\alpha = 15°$ 时的速度、压力系数、C_p 和涡黏度 ν_t 参考场。

$$C_p = \frac{\overline{P} - \overline{P}_\infty}{q_\infty}, \tag{3.1}$$

和 $q_\infty = \frac{1}{2}\rho U^2$。对于物理信息神经网络，由于公式 2.2中的亥姆霍兹分解，压力系数计算如下：

$$C_p = \frac{(\overline{P} - \phi) - (\overline{P} - \phi)_\infty}{q_\infty}. \tag{3.2}$$

使用雷诺平均纳维–斯托克斯数据集进行训练时，不进行子采样，所有 28,934 个单元均作为数据点，驱动量则在这些位置进行评估。

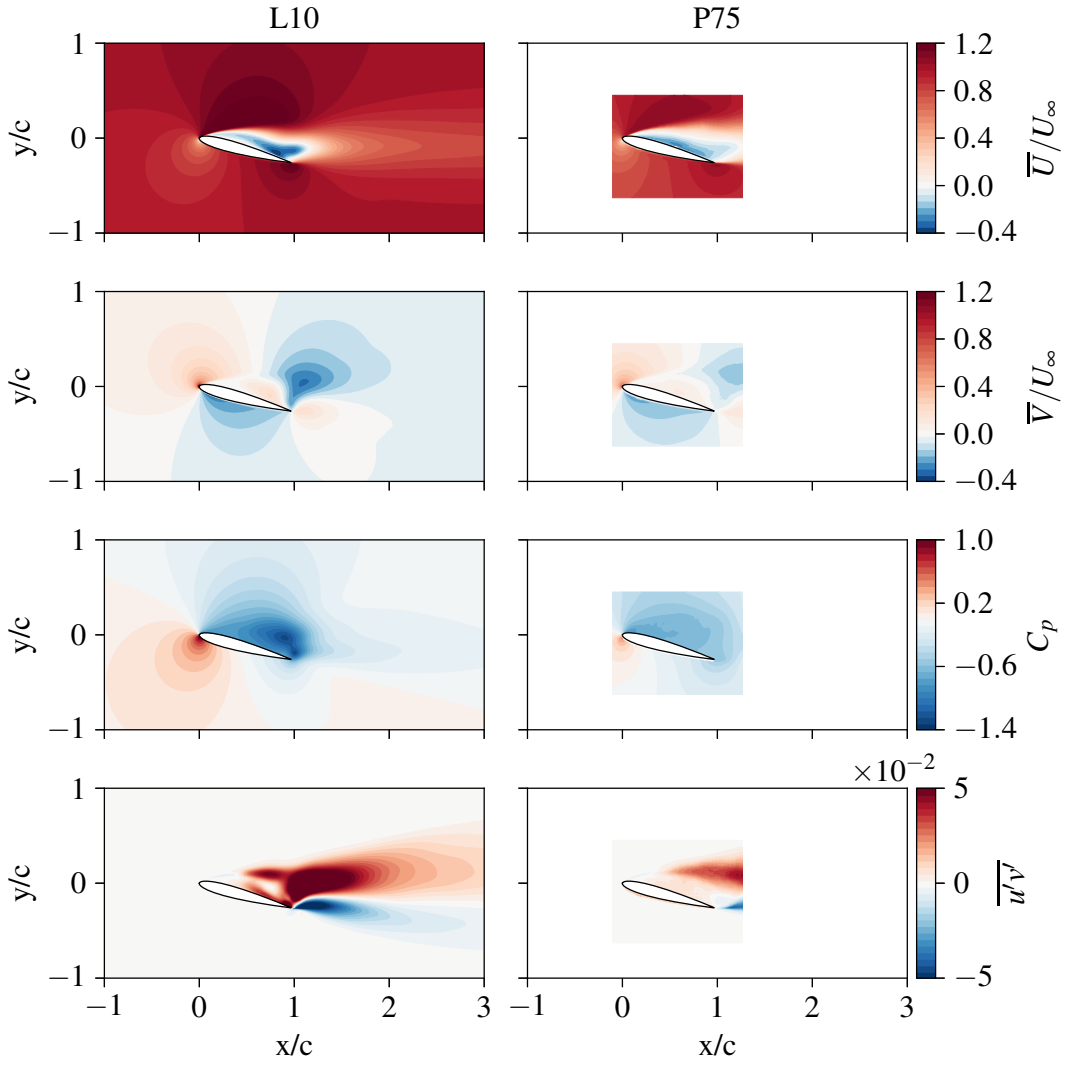

图**3.** *NACA 0012* 在 $\alpha = 15°$ 条件下的速度、压力系数、 C_p 和雷诺剪切应力 $u'v'$ 参考场：$\overline{Re}$ 为 $= 10{,}000$ 时的大涡模拟结果（左） & 以及 Re 为 $= 75{,}000$ 时的粒子图像测速结果（右）。粒子图像测速 C_p 是通过泊松求解器计算得出的，并非直接测量所得。

对于来自大涡模拟和粒子图像测速的两个高保真数据集（分别为 L10 和 P75），驱动量仅包括 U 和 V。受驱动量为雷诺剪切应力、 $u'v'$ 和 C_p。图2 和图3提供了参考数据，用于与基于这些数据集生成的基准模型进行比较，也用于迁移学习。比较图2 与图3可知，高保真数据相较于雷诺平均纳维–斯托克斯数据的必要性显而易见。对于这个失速翼型案例，雷诺平均纳维–斯托克斯模型无法可靠地捕捉回流泡的大小和逆流区域的强度。表3汇总了数据损失中使用的物理量，以及计算域内的采样频率。

使用这些高保真数据集时，我们对数据进行了均匀子采样，以评估物理信息神经网络在稀疏测量条件下的性能。在此过程中，子采样前未进行插值，以确保物理信息神经网络不会传播任何误差。粒子图像测速数据来自 Carter 等人 (2023)开展的一组实验。尽管我们以每弦长 20 个点的间隔对数据进行子采样，但我们舍弃了

所有存在明显后处理误差或靠近壁面的数据，以提高训练稳定性和预测准确性。使用粒子图像测速数据进行训练时，共有 586 个数据点用于评估两个驱动量。对于大涡模拟数据，缩小窗口尺寸可以模拟典型实验的视场。研究还发现，这有助于改善尾流中的预测，因为它能自然地引导优化器将重点放在改善该区域的预测上。鉴于数据窗口略大，训练中使用了共 769 个数据点来评估数据损失。

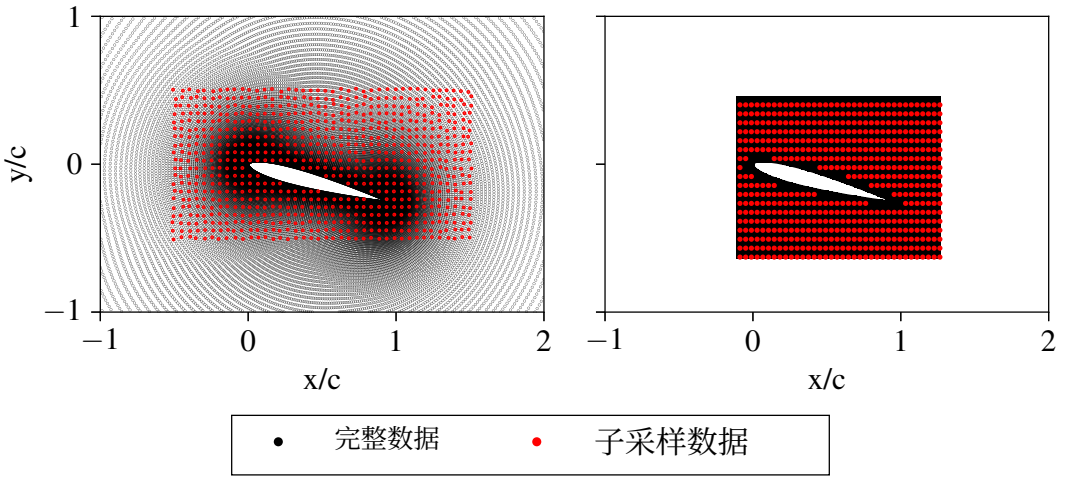

图 ***4.*** 原始参考数据（黑色）与子采样数据（红色）的对比，分别对应大涡模拟（左）和粒子图像测速（右）数据集。

图 4 图中展示了大涡模拟和粒子图像测速数据集的子采样数据（红色）与全部可用数据（黑色）。对于大涡模拟数据，为避免潜在的插值误差，采样时选取了距离均匀网格点最近的点，因此采样略有不均匀。

3.2. 基线训练

近期大量关于物理信息神经网络的文献中，神经网络的训练过程通常先采用基于随机梯度下降的优化方法（例如 Adam），再采用拟牛顿法（例如 L-BFGS），直至收敛（Raissi 等，2019年；Sliwinski 和 Rigas2023）。这一过程在各种流体问题中总体上效果显著，但对于采用湍流模型的物理信息神经网络，却存在训练稳定性问题（Patel 等，2024）。本文提出，问题源于一个负反馈循环：初始预测中的平均速度梯度误差会导致涡黏性生成不准确，进而在训练过程中进一步影响预测的速度场。

为解决这一问题，我们提出将训练过程分为两个不同阶段。首先，仅使用 *Adam*优化器和 RANS-F 方程组对物理信息神经网络进行训练，使速度场稳定在更符合物理规律的状态。随后，以较低的学习率再进行一次 *Adam* 优化，以避免速度场发生显著变化。最后，使用 *L-BFGS* 优化器继续训练，直至收敛。算法1 给出了完整细节，该过程适用于第 ***4***节中的所有基线模型。

除了让我们能够参考物理信息神经网络在同一问题的不同数据集上的性能外，基准模型还为应用迁移学习提供了起点。表 3 总结了将使用算法1 训练的四个模型，这些模型将作为比较的基准

算法1： 基准模型 - 使用自适应学习率的神经网络训练过程 .

输入： 网络参数 $\theta_0 = (\mathbf{W}, \mathbf{b})$，损失函数 $L(\theta)$。
将方程设为 RANS-F
次 $t \leftarrow 1$ 至 100 ,000 **执行**
  优化 $\theta_t \leftarrow \text{Adam}(L(\theta_{t-1}), \gamma)$.
  如果 经过 5,000步后检测到**平台期，则**
    $\gamma \leftarrow \gamma \cdot \gamma_{\text{plateau}}$
  end
结束
将方程设为 RANS-SA。
$\gamma \leftarrow 10^{-4}$
对于 $t \leftarrow 1$ 到 50 ,000 **执行**
  优化 $\theta_t \leftarrow \text{Adam}(L(\theta_{t-1}), \gamma)$。
  如果平台期持续超过 5，000步**则**
    $\gamma \leftarrow \gamma \cdot \gamma_{\text{plateau}}$
  end
结束
$\gamma \leftarrow 1$
对于 $t \leftarrow 1$ 直至收敛 **执行**
  优化 $\theta_t \leftarrow \text{L-BFGS}(L(\theta_{t-1}), \gamma)$
结束
输出： 最终网络参数 θ_t。
默认值： $\gamma = 10^{-3}$，$\gamma_{\text{plateau}} = 0.5$，$\theta_0 =$（$\mathbf{W} \sim U(-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2)$、$\mathbf{b} \leftarrow 0$）。

表*3*。 内部数据框的尺寸、驱动量及其采样频率，以及用于基准模型模型验证的受驱动量汇总。

	数据框				物理量		
模型	x_{min}	x_{max}	y_{min}	y_{max}	驱动	每弦长点数	受驱动量
$L10_b$	-5	10	-5	5	$\overline{U}, \overline{V}$	20	$C_p, \overline{u'v'}$
$P75_b$	-0.1	1.3	-0.6	0.5	$\overline{U}, \overline{V}$	20	$C_p, \overline{u'v'}$
$R10_b$	-5	10	-5	5	$\overline{U}, \overline{V}, \tilde{\nu}$	n/a	C_p
$R75_b$	-5	10	-5	5	$\overline{U}, \overline{V}, \tilde{\nu}$	n/a	C_p

用于迁移学习案例（$L10_b$ 和 $P75_b$），并作为迁移学习模型（$R10_b$ 和 $R75_b$）的初始化。

3.3. 迁移学习

物理信息神经网络的一个缺点是，它们会将流动构型固有地嵌入神经网络中，因此难以直接应用于新问题，例如几何形状发生变化时，除非采取额外步骤或修改网络架构。然而，对于足够相似的流动问题，可以合理地假设，所得解或物理信息神经网络的网络参数会具有可比性。因此，这一局限也可以视为一种优势，因为许多问题依赖固定的几何形状，但参数（如雷诺数）会发生变化。利用这一优势的一种方法是迁移学习。

迁移学习是指在神经网络中，将预训练模型微调到新的数据集上，以增强其针对与该数据集相关的特定任务的预测能力（Weiss 等，2016年）。这种技术常见于大语言模型和计算机视觉等领域；在这些领域，从头开始训练此类模型的成本极高，或者会导致整体结果更差。在物理信息神经网络的语境中，我们可以采用现有模型，以较低的学习率在新数据集上重新训练模型，并替换损失函数中原有的数据损失项。

算法 2： 迁移学习训练过程——仅针对 RANS-SA。

输入： 网络参数 θ_0，损失函数 $L(\theta)$。
对于 $t \leftarrow 1$ 到 $10{,}000$ **执行**
  使用 $\theta_t \leftarrow \text{Adam}(L(\theta_{t-1}),\ \gamma)$ 进行优化
结束
$\gamma \leftarrow 1$
对于 $t \leftarrow 1$，直至收敛 **执行**
  优化 $\theta_t \leftarrow \text{L-BFGS}(L(\theta_{t-1}),\ \gamma)$
结束
输出： 最终神经网络参数 θ_t。
默认值： $\gamma = 10^{-4}$，$\theta_0 = (\mathbf{W},\ \mathbf{b})_{\text{baseline}}$

迁移学习有许多不同的变体，新神经网络在迭代次数、学习率或可更新参数（也称为冻结/解冻层）方面拥有不同程度的参数更新自由度（Torrey 和 Shavlik2010年）。如算法 2所述，本文采用的流程相当简单，仅减少了迭代次数和学习率。此举有助于缩小生成这些模型时需要搜索的参数空间，但也可以通过更复杂的流程进一步优化该过程。在第 4节中，所有采用迁移学习的模型均使用算法 2 训练新模型。

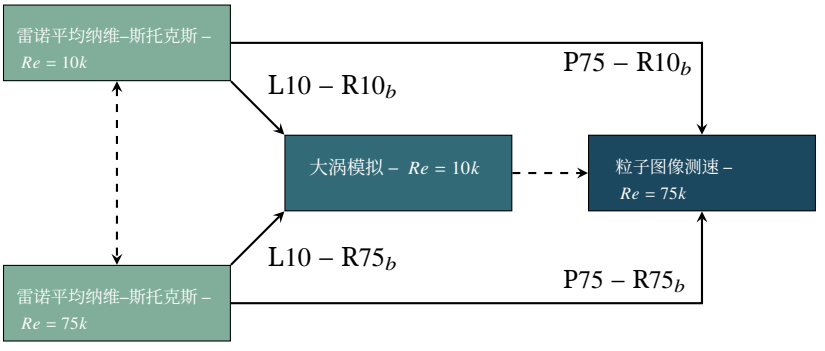

图*5.* 可能的迁移学习方案流程图：实线箭头表示已研究的方案（标注了相应的模型名称，带下标“*b*”表示基准模型），虚线箭头表示未考虑的方案。

该方法提出，将高保真数据集应用于几何形状相匹配的单个基准模型。为研究这一点，如图5所示，我们基于两个雷诺数下的低保真雷诺平均纳维–斯托克斯数据集生成基准模型，然后针对相应雷诺数，将迁移学习应用于来自大涡模拟和粒子图像测速的两个高保真数据集。对于表4中的四个模型，我们考虑雷诺数相匹配的情况，以及从基准模型雷诺数向上或向下进行尺度缩放的可行性

。本研究未探讨相近保真度数据之间的迁移学习应用，因为我们只关注从低保真度向高保真度的过渡。表4 还分别汇总了训练和验证所用数据的采样频率及物理量。

表*4.* 迁移学习案例模型验证所用内部数据框的尺寸、驱动量及其采样频率，以及受驱动量的汇总。

	数据框				物理量		
模型	x_{min}	x_{max}	y_{min}	y_{max}	驱动	每弦长点数	受驱动量
$L10-R10_b$ $L10-R75_b$	-0.5	1.5	-0.5	0.5	$\overline{U},\overline{V}$	20	$C_p, \overline{u'v'}$
$P75-R10_b$ $P75-R75_b$	-0.1	1.3	-0.6	0.5	$\overline{U},\overline{V}$	20	$C_p, \overline{u'v'}$

表 *5.* 物理信息神经网络训练算法和计算时间概览。

算法	Adam 迭代次数	L-BFGS 迭代次数	壁面时间（小时）
1. 基线	150,000	50,000 或收敛	10
2. 迁移学习	10,000	50,000 次或收敛	1（+10 用于基准模型）

迁移学习的一个优势是，在训练第一个模型后，后续模型的训练时间会缩短。使用算法1训练的基线模型总训练时间约为 10 小时（使用 NVIDIA A100 GPU），而采用迁移学习流程的模型在同等硬件上只需一小时。表5总结了按迭代次数和壁钟时间计算的训练时间详情。这种成本节省凸显了迁移学习的另一项潜在优势，尤其是在将大型数据集应用于物理信息神经网络时。

4. 结果

结果部分按照第3节定义的模型顺序展开。第4.1 节概述了将高保真数据集直接用于物理信息神经网络的难点，涉及 $L10_b$ 和 $P75_b$ 模型。第4.2节将相同的基线训练方法应用于模型 $R10_b$ 和 $R75_b$的雷诺平均纳维–斯托克斯数据集。第4.3 节介绍首先应用于大涡模拟数据集的迁移学习，并将其作为所提方法的验证案例，同时探讨硬约束的重要性。第4.4节随后将迁移学习方法应用于粒子图像测速数据。第4.5 节总结结果部分的发现，并展示基线雷诺数与高保真数据集不同情况下的迁移学习模型结果。

4.1. 使用高保真数据的物理信息神经网络

为了突出直接使用高保真数据训练物理信息神经网络时遇到的一些问题，我们首先创建了两个未采用迁移学习的物理信息神经网络模型。这些模型 $L10_b$ 和 $P75_b$遵循算法1 中概述的基准模型创建流程，以及第3节中列出的参数。对于所有比较，我们将考察它们的相对差异，其中误差 ϵ定义如下：

$$\epsilon = \hat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X}, \tag{4.1}$$

对于驱动变量。对于受驱变量，我们只考察预测物理量相对于参考值的结构和大小。

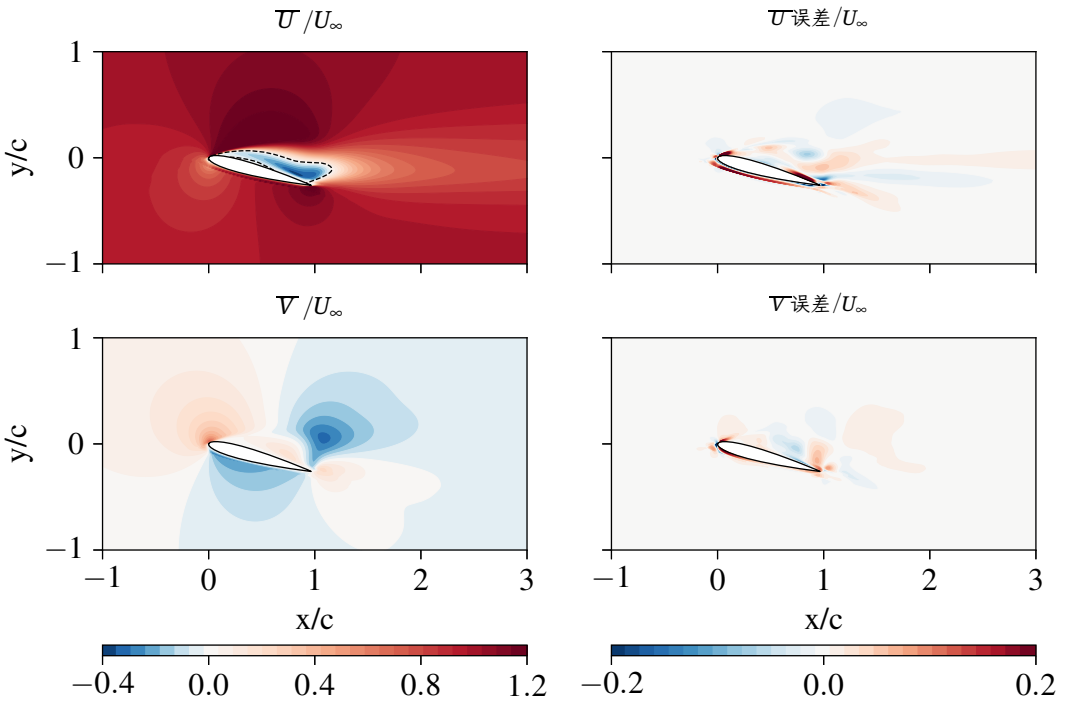

图 ***6.*** 物理信息神经网络根据每个速度分量的驱动量预测的模型 $\overline{L10}_b$ 场，U & V，以及相对于参考 $\overline{L10}$ 数据集的相应误差。对于 U，虚线表示实验数据中的回流区边缘。

图 6 展示了驱动变量（U & V）及其误差，ϵ。由于速度分量包含在物理信息神经网络的数据损失中，因此参考场与预测结果应当能够很好地吻合。对于尾流的大部分区域，残差误差较小，但回流区等大型结构得到了较为准确的匹配。最大误差出现在机翼压力面的翼型表面附近。虽然数据经过了子采样，但数据点一直延伸至翼型表面，且近壁区没有进行额外屏蔽。在数据稀疏的情况下，可以合理推断，物理信息神经网络无法重建正确的速度梯度，而对这些梯度的敏感性导致物理信息神经网络在计算域的该区域内优化到了非物理解。因此，为了改进这一点，我们可能需要增加壁面附近或壁面上的数据。

图 7突显了翼型下表面附近的这一非物理解，以及它如何向计算域的相邻区域传播。尽管远离翼型表面处的压力等值线与参考数据吻合良好，但主要问题集中在前缘。仔细观察后发现，翼型表面似乎略微向上游偏移，但这只是对压力的非物理预测。由此得出的结论是，当速度梯度与方程之间存在负反馈时，物理信息神经网络会倾向于产生非物理解，因为此处压力仅受物理损失约束。观察图 7中的雷诺剪切应力，也可以得出类似结论：远离翼型处的大部分预测结果吻合尚可，但在翼型附近的表现较差。这表明，如果能在翼型周围增加更多数据，结果可能会显著改善，因为流动其他区域的物理特性基本上都得到了匹配。

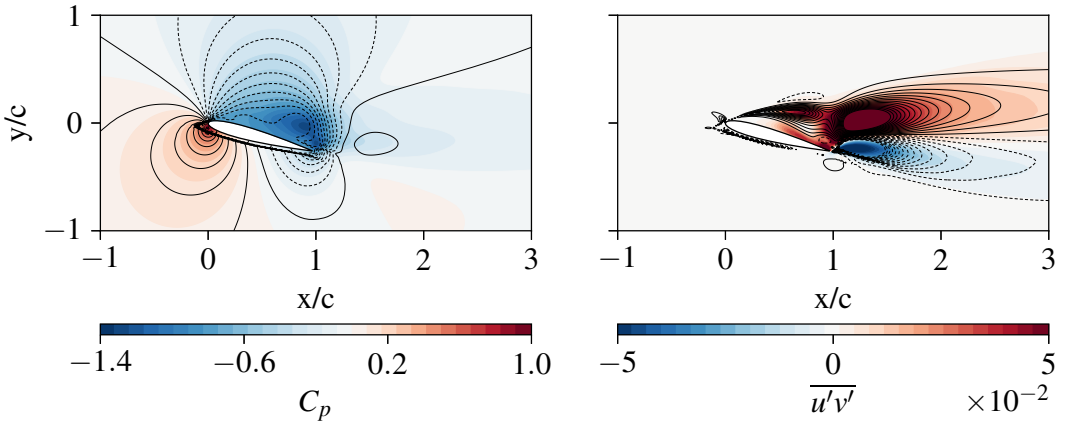

图 **7.** 模型 $L10_b$ 的物理信息神经网络预测场（线条等值线）以及驱动量（包括压力系数，C_p 和雷诺剪切应力，$u'v'$）的参考大涡模拟场（填充等值线）。实线表示正值，虚线表示物理信息神经网络预测中的负值。

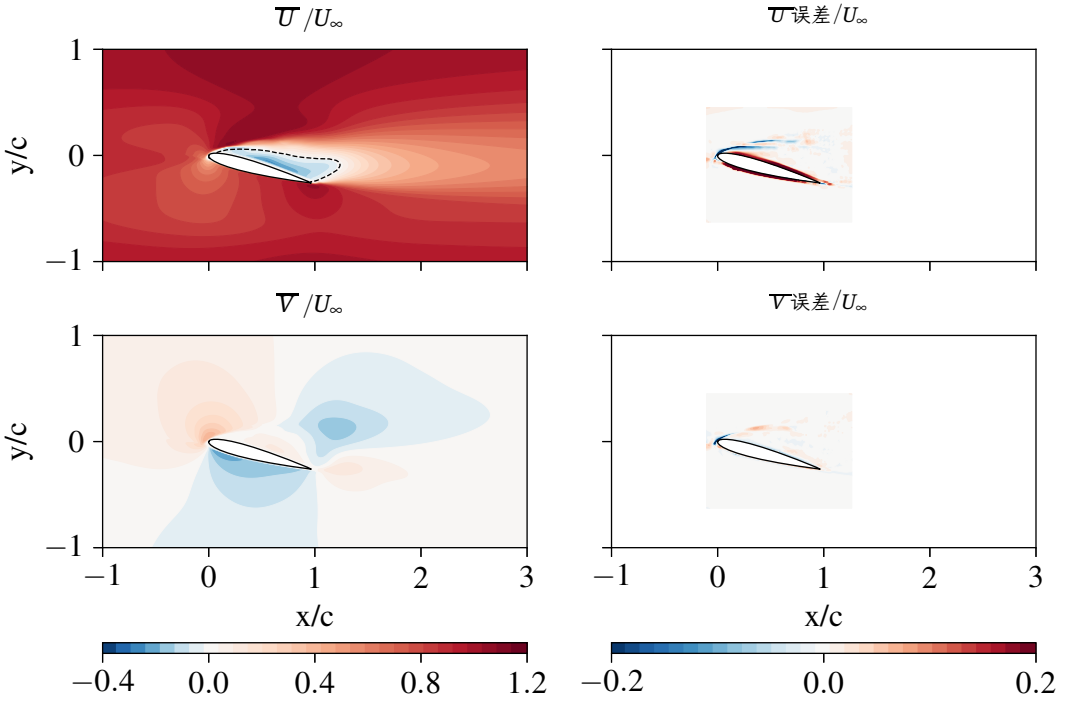

图**8**。物理信息神经网络根据驱动量模型 $P75_b$ 预测的各速度分量场，U & V，以及它们相对于参考 *P75* 数据集的误差。对于 U，虚线表示实验数据中的回流区边界。

从图 8中可以看出，湍流模型的引入使我们能够准确预测回流区，其结果与虚线标示的粒子图像测速数据吻合良好。在粒子图像测速窗口之外的远尾流区，等值线表明湍流模型正确地施加了

速度场需要额外耗散才能恢复物理合理性。然而，查看误差图可以看出，在采用这种基线方法时，物理信息神经网络在哪些方面表现不佳。例如，对于粒子图像测速，由于激光在表面产生反射，近壁区域可能难以解析。因此，该区域的误差可能是参考数据质量较差所致，而非物理信息神经网络未能正确模拟物理规律。在这种情况下，误差出现在三个不同区域：驻点、近壁区域和剪切层。

从剪切层开始，可以看到速度被大幅低估，这似乎对应于一个次级回流区。这种现象不符合物理规律，可能是物理信息神经网络在处理包含错误数据点的复杂流动时出现了问题。对于近壁区域的预测，考虑到沿弦长方向误差的壁法向距离一致，这更可能是粒子图像测速的问题，而非物理信息神经网络的问题。不过，这一解释不适用于驻点。与计算域的其他部分相比，驻点区域很小，却需要捕捉大量物理现象，这给物理信息神经网络带来了困难。由于该区域的数据点有限，物理信息神经网络只能依靠物理损失来模拟此处的速度梯度。因此，从误差集中分布和等值线不连续的情况可以看出，物理信息神经网络无法准确模拟驻点。

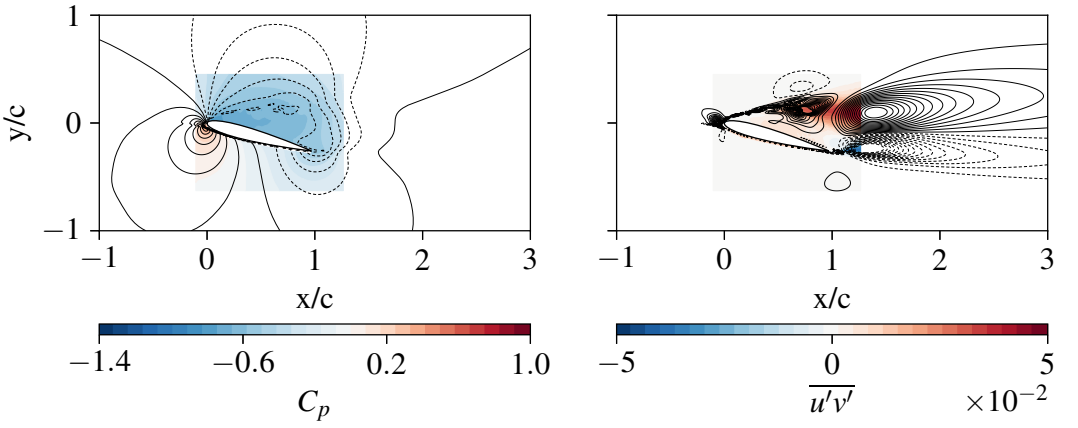

图**9**。 物理信息神经网络预测的场（线条等值线）来自模型 $P75_b$ ，以及驱动量（包括压力系数、 C_p 和雷诺剪切应力，$u'v'$）的参考粒子图像测速场（填充等值线）。实线表示物理信息神经网络预测中的正值，虚线表示负值。

图中受驱变量 9 进一步印证了该模型预测结果所反映的现象。从压力分布可以看出，最大 C_p 并不位于翼型表面。此外，缺少驻点可能会影响吸力面上的压力大小，使前缘上方的加速减弱。雷诺剪切应力形式的二阶统计量对比显示，该物理信息神经网络模型存在过拟合。重要的是，讨论过拟合时需要考虑两个方面：一是对数据过拟合，即在未提供数据的位置，驱动物理量的误差较大（因为我们仅提供了粗略的、经过子采样的数据集）；二是对方程过拟合，即受驱变量或验证物理量不符合物理规律。在本例中，前者与前述观察结果以及图 8所示结果一致。后者则体现在图 9中的雷诺应力上：尽管其整体结构与粒子图像测速数据相似，但它在前缘之前出现，且在流动的其他区域存在不连续性，这表明湍流模型和强迫项缺乏物理意义。由于我们根据公式 2.4，利用涡黏度和平均速度梯度计算预测的雷诺应力，因此图 9 中所见误差直接源于涡黏度存在较大的

不连续性，以及遍布整个计算域的其他非物理特征。从这个基准案例可以清楚看出，要有效地将实验数据与物理信息神经网络相结合，必须采用其他方法。

4.2. 基线模型

为了利用高保真数据实施迁移学习，我们首先需要创建一个基准模型。在这里，我们旨在创建一个能够捕捉流动中一些基本特征的模型，例如驻点和无滑移壁面的位置。随后，微调训练过程可以对回流区等近似特征进行修改，使其与高保真数据集相匹配。通过基于雷诺平均纳维–斯托克斯数据集构建基准模型，我们可以直接将CFD数据中的涡黏度场用作数据损失，从而避免平凡解。这里的关键假设是，在不同数据保真度之间，流动特征的相似性应当导致湍流生成结构相似，而物理信息神经网络只需对预测的涡黏度进行轻微修改。

图 10 展示了这些RANS基线模型的预测结果。在各个基线模型中，我们可以看到预测结果与图 2中列出的参考数据吻合良好；预测场捕捉到了所有物理量中的关键结构，包括未提供数据的物理量。与PIV基线模型不同，RANS基线模型能够捕捉驻点等基本特征。CFD网格细化所增加的近壁面数据可能使RANS模型具备了这一能力。通过PIV等方法获取这种分辨率和与壁面的接近程度将非常困难。因此，在利用这些基线模型进行迁移学习时，目标是在流动中那些我们无法获得数据的区域提供合理的估计。

实施湍流模型时的一项基本挑战，是鉴于输运方程（方程2.5）的性质以及 ν_t的典型量级，避免得到平凡解。将该量纳入数据损失，可以降低这种情况发生的可能性。尽管如图10所示，$R75_b$ 模型的精度更高，但 $R10_b$ 模型中的一些非物理特征表明，模型并未对数据过拟合。此外，$R10_b$ 和 $R75_b$ 模型的预测压力相似，这进一步印证了采用该方法训练的物理信息神经网络并未过拟合，也凸显了输运方程解的非唯一性。

4.3. 采用迁移学习处理大涡模拟数据的物理信息神经网络

处理实验数据时，一种可能的情况是数据集包含过多噪声或错误数据点，导致无法将其用于物理信息神经网络，因为数据所反映的内在物理规律可能与真实情况相差甚远。例如，测量速度场可能不满足二维连续性；对于存在某些展向分量的失速翼型流动而言，这种情况确实可能发生。造成这一误差的原因可能是实验不确定性与平面粒子图像测速中速度分量缺失共同作用的结果。因此，为了在测试迁移学习时单独考察这一问题，我们首先使用大涡模拟数据集进行了研究。附录A 进一步介绍了该数据集的生成与验证。以下各节中，所有模型均遵循算法2 ，并采用第3章所述的参数。

4.3.1. $L10-R10_b$

在第一个案例中，我们考虑了在雷诺数为 $\mathrm{Re} = 10{,}000$ 的数据集之间应用迁移学习。对于物理信息神经网络而言，这应当是最直接的案例，因为同时具备干净的数据和较低的雷诺数。从图 11中可以看出，物理信息神经网络已经能够调整速度场，尤其是在回流区周围。对于流向分量，物理信息神经网络将原始回流泡从翼型表面移开，使其尺寸得以扩大。表示参考零速度等值线的虚线流线清楚地展示了其捕捉新轮廓的能力。虽然我们无法直接将其与粒子图像测速基线模型（$P75_b$）的预测结果进行比较，但该模型中的问题特征要么已被完全消除，要么其幅度已得到减小。这

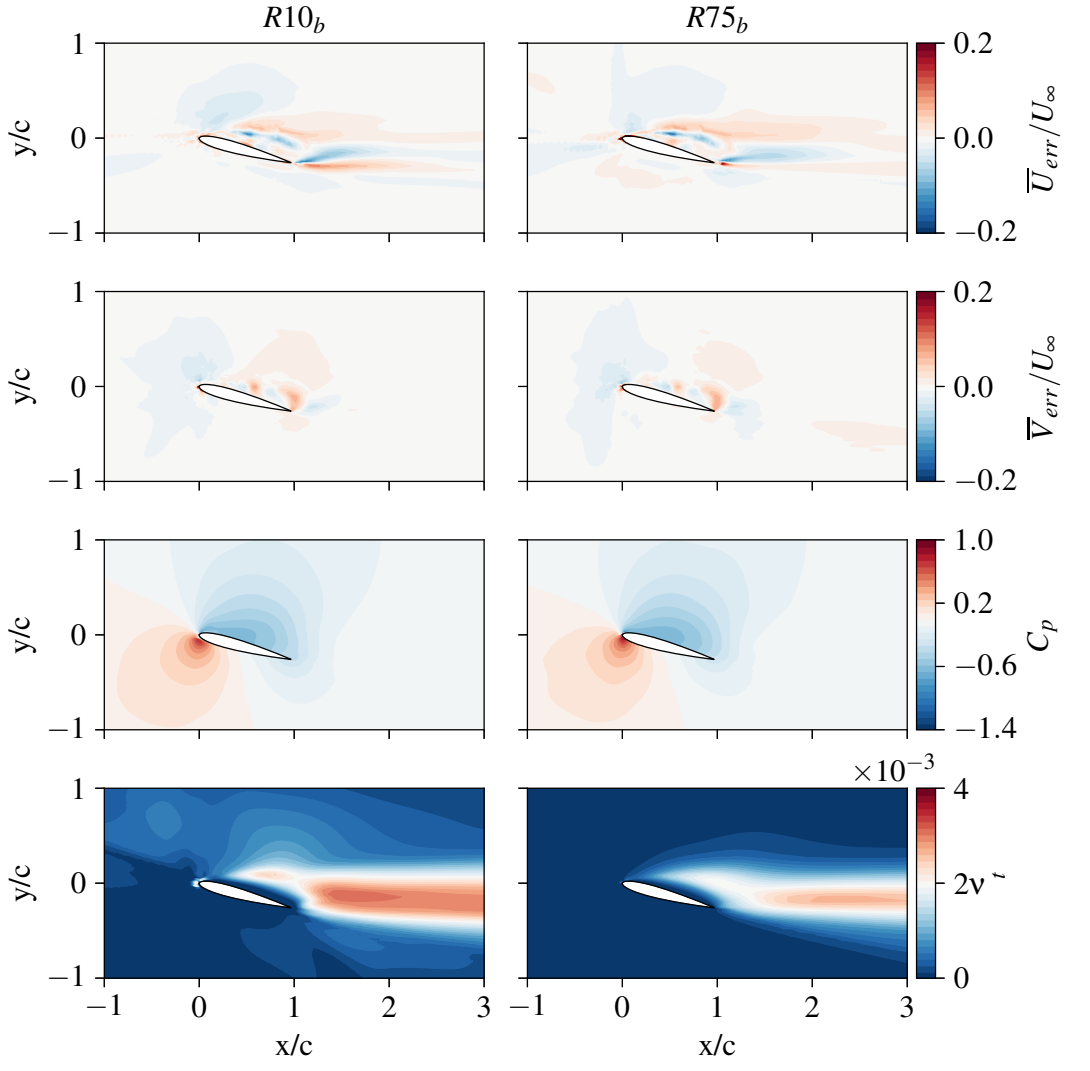

图 ***10.*** $R10_b$ 和 $R75_b$ 模型对各速度分量误差、U & V、压力系数 C_p以及涡黏度 ν_t的物理信息神经网络预测。

表明误差主要集中在前缘和驻点处。然而，与粒子图像测速基线模型不同，该误差不会在剪切层或近壁区域内传播。

我们还可以检查图 12 中的受驱变量，以验证这些结果并确保模型不会对新数据过拟合。对于压力，可以看到物理信息神经网络再现了部分关键特征，例如后缘上方的低压区。然而，对于吸力面和驻点，压力极值均被低估。值得注意的是，驻点略微偏离翼型表面，如图 11中前缘附近的误差集中现象所示。与PIV基线模型一样，这种无法捕捉驻点的情况很可能导致下游压力偏低。

关于雷诺剪切应力，从图 12可以看出，即使加入湍流模型，物理信息神经网络也能捕捉到剪切层中的转捩。实现这一点的确切机制尚不清楚。由于物理信息神经网络只能获取采样的平均速度和基准

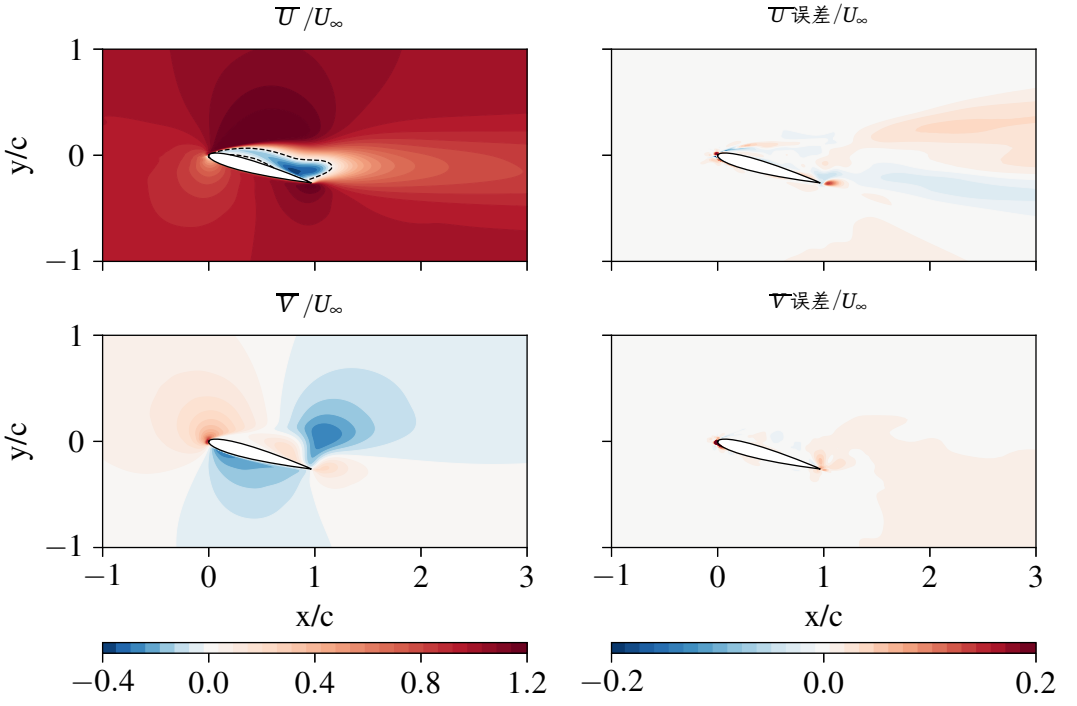

图***11.*** 物理信息神经网络根据每个速度分量的驱动量模型 $L10-R10_b$ 预测的场，$U\,\&\,V$，以及它们相对于 *L10* 数据集的误差。对于 U，虚线表示大涡模拟数据中回流区的边界。

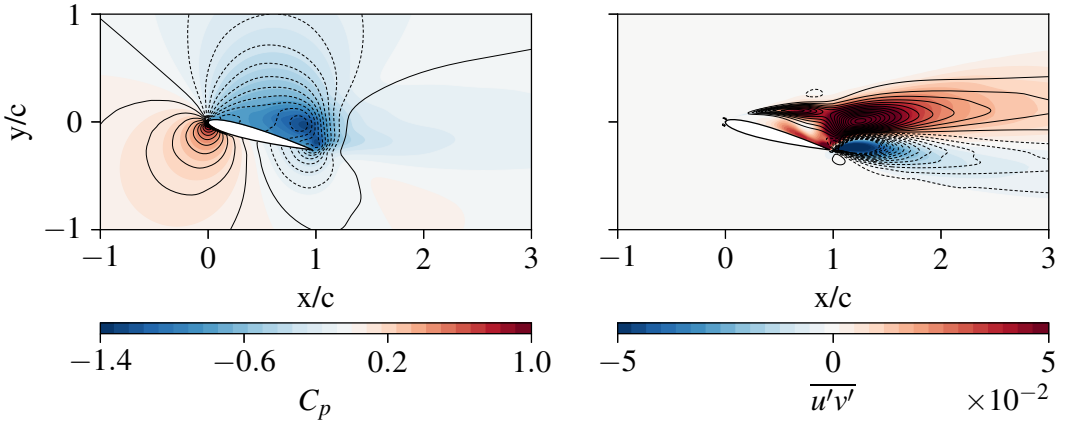

图 ***12***。 模型 $L10-R10_b$ 预测的受驱动量物理信息神经网络场（线条等值线）与大涡模拟参考场（填充等值线），包括压力系数、C_p和雷诺剪切应力，$\overline{u'v'}$。

模型，这表明物理信息神经网络结合了这些要素来预测正确的雷诺应力。用于生成这一解的两种信息来源是采样的平均速度场和基准物理信息神经网络模型。我们可以假定，按照定义，雷诺平均纳维–斯托克斯数据中不会出现过渡剪切层，因此基准模型中也不会包含过渡剪切层。尽管采样数据相对稀疏，但由配点计算得到的梯度必定

相应地进行调整，以匹配各位置的数值。这些速度梯度以及壁法向距离共同决定了计算域内涡黏度的产生。对于等效几何形状，我们预计会存在一定差异；通过仅以较弱的方式施加方程约束，与采用通常不用于捕捉这种转捩行为的湍流模型所得的大涡模拟结果相比，我们仍能获得物理上相一致的结果。不过，还需要对这一假设进行更多验证。

4.3.2. 硬约束的影响

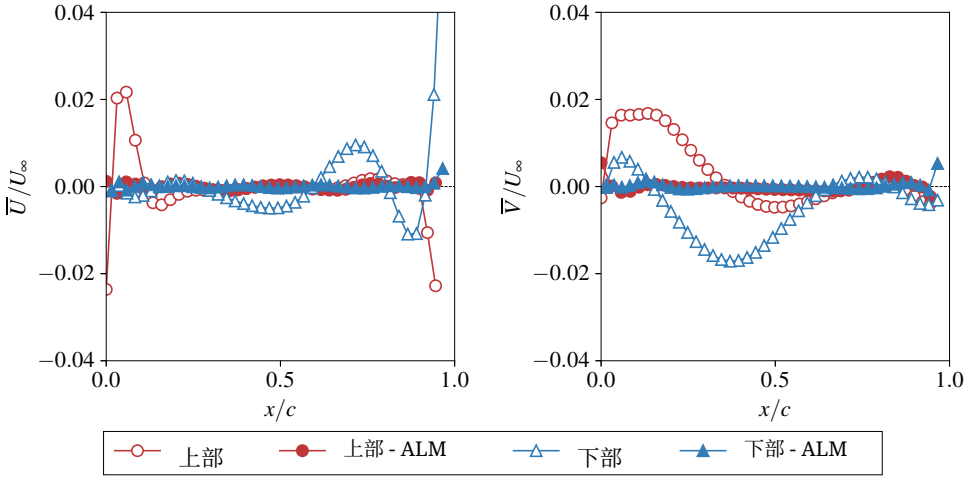

图 ***13.*** 针对每个速度分量，比较软约束与硬约束（*ALM*）下物理信息神经网络的翼面预测结果，U & V。

在结果部分中，我们尚未考察壁面处的物理量，而是主要关注计算域内的预测结果。如第 2.3 节所述，我们对所展示的所有模型均采用了硬约束来强制施加无滑移壁面边界条件。为了解这样做的必要性以及采用硬约束的影响，图 13 比较了第 10 –R10$_b$ 模型（见第 4.3.1 节）与采用壁面软约束的等效大涡模拟模型在翼型各表面上的各速度分量。值得注意的是，基准模型也采用软约束，因为大部分训练都在该模型上进行，正如表 5 所示。沿翼型的大部分区域，速度最多降低了两个数量级。对于软约束物理信息神经网络，我们发现驻点位于前缘上游，导致训练不稳定性和预测不准确，尤其是对驱动量的预测。

为了突出软约束在整个计算域中的作用，图14展示了预测的流向速度，虚线表示大涡模拟的回流区，并以等值线对比大涡模拟压力与物理信息神经网络预测的压力。加入硬约束不仅有助于减小速度波动的幅度，还能约束翼型的几何形状，使其曲率保持正确，从而提高压力预测的准确性。

4.3.3. 预测压力

与翼型表面上的其他物理量不同，压力是唯一的受驱动量，因为我们没有规定任何与压力相关的边界条件。图15 对压力作出了与第 4.3.2 节相同的比较，并绘出了参考表面压力。这里可以看到，在没有硬约束的情况下，压力在整个翼型表面附近都近似保持为 $C_p \approx -0。2$ 。即使没有参考数据，我们也可以推断，对于这类流动而言，这并不符合物理规律，而这是弦长方向上的速度波动造成的，如图13所示。当我们施加硬

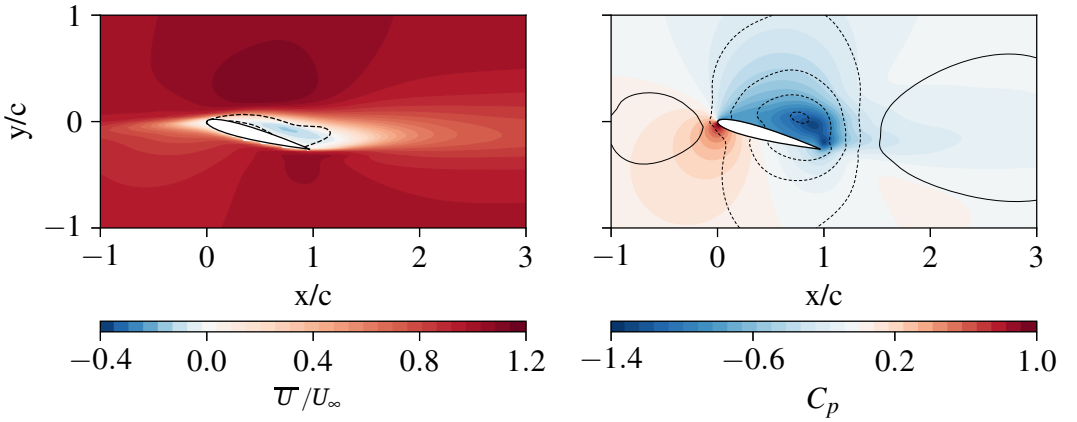

图 **14.** 软约束物理信息神经网络对流向速度（左侧）的预测 U，虚线表示参考回流区域；以及对压力系数（右侧）的预测 C_p，填充等值线表示参考大涡模拟数据，线条等值线表示物理信息神经网络预测。

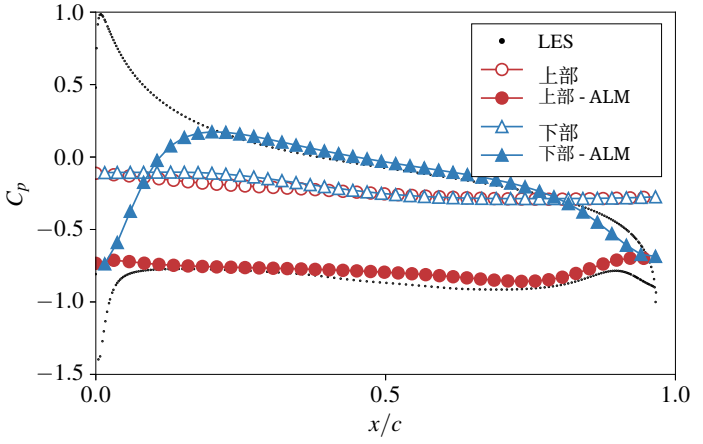

图**15.** 软约束与硬约束（*ALM*）下物理信息神经网络表面压力系数 C_p 预测的比较。参考表面压力系数取自 *L10* 数据集。

约束后，在 $x/c = 0.2$ 之后，压力基本恢复到参考数据所示的状态，尽管没有任何显式数据或边界条件对此加以约束。受驱动量的这一改进凸显了正确施加这些边界条件对于获得物理预测的重要性。

对于这些 $x/c < 0.2$ 处的点，这很可能是壁面上存在一些非零速度（见图 13）以及物理信息神经网络难以对翼型几何形状造成的不连续性进行建模共同导致的。虽然翼型内部没有配置点或数据点，但神经网络生成的函数按定义必须连续。因此，在前缘处对复杂物理现象进行建模时，微小几何形状引入的不连续性会使物理信息神经网络难以准确捕捉这些变化趋势。结果是，实际驻点略微偏离表面，如图12所示；这一现象在图15中不会出现。

结果中尚未讨论的压力预测的另一方面，是 P 与 ϕ的耦合。为减少未知数的数量，我们应用方程 2.2 中的亥姆霍兹分解，并将势分量与压力合并。要从方程 3.2 还原方程 3.1，我们必须假设

该 $\phi \equiv \phi_\infty$，使物理信息神经网络预测的压力与参考压力相匹配。然而，我们无法确定这是否成立，因为这两个分量不易分离。Foures等人(2014) 指出，ϕ 的贡献很小，且 $\nabla\phi \approx -\nabla k$ 以及 $(P-\phi)$ 会非常接近真实压力，P。在分析其他物理信息神经网络模型时，尤其是在实验未能提供可靠参考数据的情况下，这种方法能让我们更加确信预测压力场的可靠性。

4.4. 采用迁移学习的物理信息神经网络应用于粒子图像测速数据

以 LES 模型验证该方法后，我们现在可以将相同的技术应用于实验PIV数据。我们可以直接将迁移学习的能力与第 4.1 节中的原始基准模型进行比较。与将迁移学习应用于 LES 时一样，所有模型均遵循算法 2，并使用第 3 节中列出的参数。在以下小节中，我们将基准模型的顺序反过来，先讨论雷诺数匹配的情况，再考察数据集之间的差异。

4.4.1. $P75-R75_b$

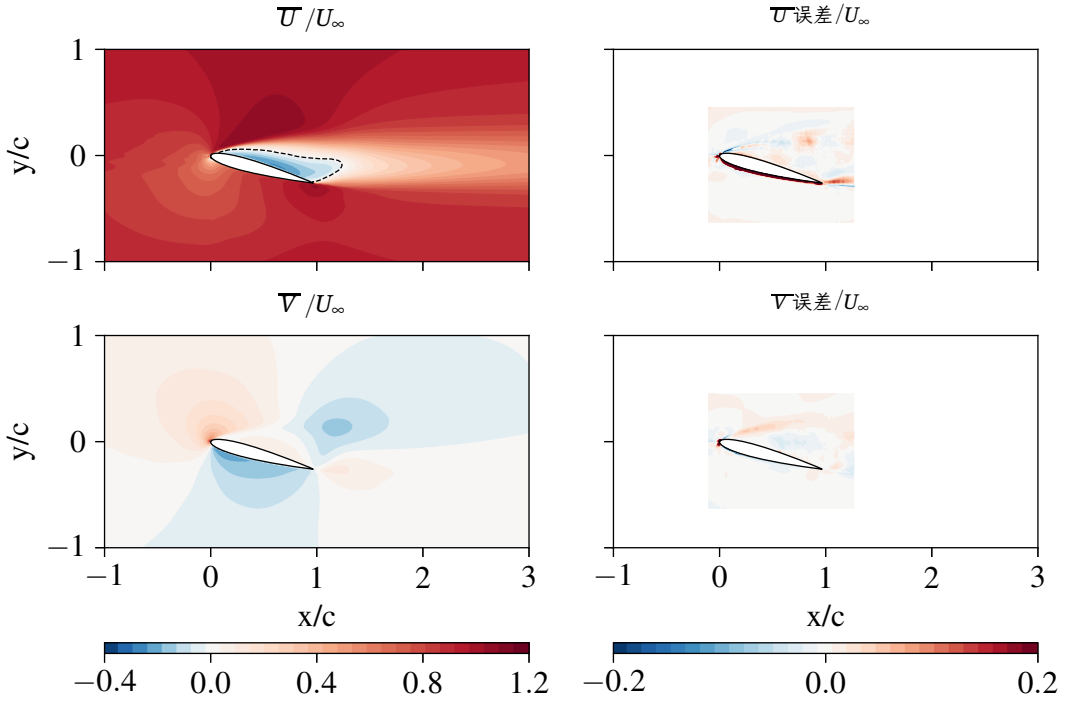

图 ***16.*** 物理信息神经网络根据各速度分量的驱动量预测的模型 $P75-R75_b$ 场，U & V，以及它们相对于参考 *P75* 数据集的误差。对于 U，虚线表示实验数据中的回流区边界。

图 16展示了该物理信息神经网络设置中驱动量的预测场。从图中可以进行两项比较：首先与训练所用的参考数据比较，其次与未采用迁移学习的初始基准尝试比较。先看参考数据，可以发现两个速度分量都吻合良好。与大涡模拟迁移学习模型一样，物理信息神经网络能够准确修正回流区，参考数据中的零速度流线便体现了这一点。在该区域还可以看到，物理信息神经网络能够平滑不连续数据，同时不丢失信息。这类

不连续现象源于粒子图像测速在存在多个摄像机或光源时的后处理问题。除了获得流动中原本未知的物理量外，物理信息神经网络还能够更好地分析实验数据。

与基线粒子图像测速模型相比，可以看出，采用迁移学习抑制了物理信息神经网络产生非物理预测。首先，前缘剪切层内没有出现次级回流区。在近壁区，翼型压力面的误差分布与 $P75_b$ 案例几乎相同。考虑到误差与翼型表面之间的距离相对恒定，可以合理推断，该区域的误差源于数据集中激光反射和错误矢量。由于 $P75_b$ 模型在此处没有表现出任何明显的非物理特征，这进一步说明该误差是由参考数据驱动的。翼型压力面的物理情况较为简单，因此物理信息神经网络比在需要额外支持的吸力面上更容易修正此误差。在吸力面上，迁移学习情形下的误差要小得多。这表明，通过基准模型提供初始猜测，物理信息神经网络能够更准确地预测具有逆压梯度的流动近壁区。

最后，从误差图中可以看出，翼型前缘附近的误差有所降低。前缘等值线形状的改善表明，与基线尝试相比，驻点得到了更准确的解析。这一改进可能有助于进一步提升速度场其他特征的表现。

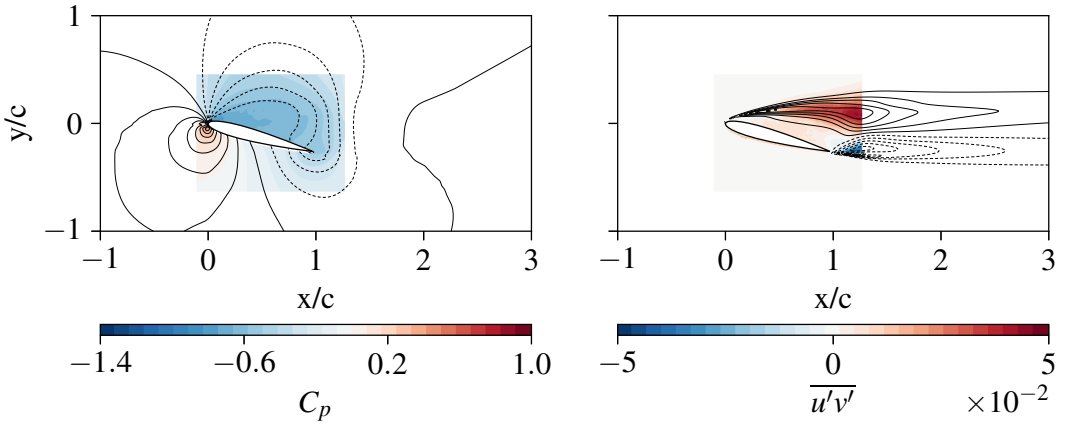

图**17.** 模型 $P75-R75_b$ 预测的物理信息神经网络场（线状等值线）以及驱动量的参考粒子图像测速场（填色等值线），包括压力系数、C_p和雷诺剪切应力、$u'v'$。参考文献 C_p。

翼型前缘处的改进也使驱动量呈现出更符合物理规律的结果。对于压力，我们可以看到，这些改进消除了驻点脱离翼型并位于其前方的现象。此外，在图 9 中，可以看到远离翼型的低压区存在一些不连续现象。在图 17 中，我们看到压力变化更加平滑且连续。对于雷诺剪切应力，与原始基线相比有了显著改进。剪切层中应力分布的不连续性和斑块状特征被消除，并且接近实验分布。我们并不希望该物理量实现完全匹配，因为前缘产生的剪切层中缺乏应力并不符合物理规律。如前所述，这很可能是实验数据造成的伪影，而 PINN 对这些数据进行修正表明，它学到了问题的内在物理规律，而不是简单地对所提供的数据进行模型过拟合。然而，与基线和参考结果相比，该模型抑制了应力的峰值幅度

数据。流动的三维特性很可能是产生差异的原因，因为 PINN 正在尝试将数据拟合到二维方程中（Cadambi Padmanaban 等，2025年）。

4.5. 迁移学习性能概述

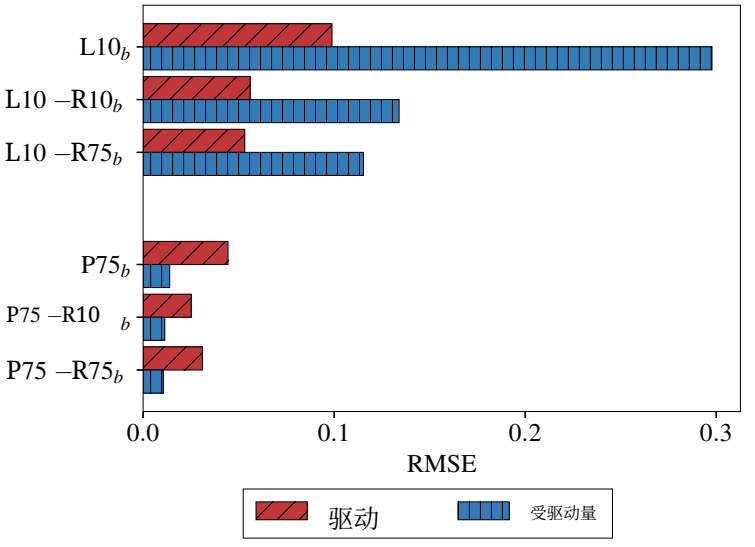

图 ***18***。 分别针对驱动变量和受驱变量，总结仅使用基线算法与采用迁移学习时的性能提升。

为补充这些结果，图 18 定量概述了针对给定数据集和基准模型使用迁移学习时预期的性能提升。由于这些模型是在不同数据集上训练的，因此无法直接比较，但这里汇总了所有结果，以展示本文所述迁移学习案例的一般趋势。对于表 4 中列出的每个模型以及表 3中的高保真模型，分别计算驱动变量和受驱变量的合并 RMSE（仅针对存在真实值的变量）。值得注意的是，这不包括 C_p中的所有 P75模型。因此，使用不同数据集的模型之间无法比较准确度，只能定性地比较其呈现的趋势。合并 RMSE 定义如下：

$$\text{RMSE} = \sqrt{\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{M}[\hat{\boldsymbol{X}}_{n,i} - \boldsymbol{X}_{n,i}]^2}, \tag{4.2}$$

其中 i 表示参考点的数量， n 表示物理量的数量。RMSE 使用表 4中定义的数据域内的完整参考数据进行评估。

除了测试雷诺平均纳维–斯托克斯与相应高保真数据集的雷诺数匹配时的迁移学习外，我们还考察了在模型 $L10 - R75_b$ 和 $P75 - R10_b$中应用此方法时雷诺数不匹配的影响。对于这两个模型，我们的设想是，鉴于几何形状相同且雷诺平均纳维–斯托克斯涡黏度场相似，或许可以重新利用基准模型，从而避免耗费大量训练时间。

在两个模型中，都明显表现出对基准模型质量的轻微依赖性，基准模型中的任何误差都会传播到最终模型中。对于给定的数据集（例如 $L10 - R10_b$ 和 $L10 - R75_b$），这并未导致两个模型之间出现重大差异，但任何细微的不一致都可能

归因于基准模型的变化。图 18 通过显示受驱动量的均方根误差在使用 $R75_b$ 基准模型初始化的模型中最低，进一步印证了这些发现。

对于 $P75 - R10_b$，与 $P75 - R75_b$ 预测结果的一致性凸显了该方法的稳健性。此外，通过将两个模型的误差与参考粒子图像测速数据进行比较，我们可以确定哪些误差源于物理信息神经网络，哪些误差源于参考数据中的不确定性。特别是，近壁区和前缘剪切层中的激光反射会造成误差。

在所有情况下，迁移学习都使所有变量至少提升了 18%；在 $L10 - R75_b$ 情况下，受驱变量的提升幅度最高可达 61%。这项分析的关键结论是，要准确获得未知物理量，基准模型的质量比匹配雷诺数更为重要。

5. 结论

总而言之，本文展示了一种基于迁移学习的新方法，利用稀疏的高保真测量数据提升物理信息神经网络的性能。我们首先将该方法应用于大涡模拟数据集，随后应用于雷诺数更高的粒子图像测速数据集；两种情况下均取得了稳定的性能提升，证明了该方法的稳健性。结果表明，本文提出的扩展方法——迁移学习和硬约束边界条件——有助于克服物理信息神经网络方法面临的根本挑战，并实现其他平均物理量的恢复，包括压力和雷诺剪切应力。

将粒子图像测速数据集直接应用于物理信息神经网络模型时，我们发现，驱动变量（U & V）与原始参考数据仅有尚可的吻合度。通过预测的雷诺剪切应力，我们发现，误差源于无法以符合物理规律的方式预测涡黏度。采用基于雷诺平均纳维–斯托克斯训练的物理信息神经网络基准模型进行迁移学习后，我们观察到驱动量和受驱动量的预测均有显著改善。受驱动量预测的改善表明，物理信息神经网络正在从方程中学习内在物理规律，而非对数据过拟合。此外，能够从模型间接学习到的物理量中提取物理含义，有助于提升模型的可解释性；这正日益受到人工智能和机器学习领域的关注。

除了这一新方法，我们还研究了匹配流动中所有物理约束（包括无滑移边界条件）的重要性。在此，我们采用增广拉格朗日方法，在每个边界配置点上更新拉格朗日乘子，以提高该点在物理信息神经网络总损失中的有效权重。对约束的这一扩展使表面速度降低了两个数量级。比较表面压力时，增广拉格朗日物理信息神经网络与传入的参考大涡模拟数据 $x/c = 0$。2吻合得更好；而软约束物理信息神经网络预测的压力在整个翼型表面上几乎保持恒定。对此的一种可能扩展是研究不同优化器的影响，以及更先进的优化器（例如 L-BFGS）能否消除偏差，尤其是翼型前缘处的偏差。

此外，我们展示了该方法可在不同数据集间重复使用，且适用于雷诺数不同的数据集之间的迁移学习。由于涡黏度场具有相似性，雷诺数之间的可迁移性表明，与其针对数据集中每个实验案例匹配特定的雷诺数，不如着力构建精度更高的基准模型。该方法还有助于降低计算成本，尤其是在处理较大的数据集时。仍需进一步研究，以验证不同雷诺数之间可迁移性的程度，以及该方法是否适用于在相似几何形状之间迁移，例如从 NACA 0012 翼型迁移到 NACA 0020。

A. 大涡模拟数据生成与验证

A.1. 生成数据集

通过对 $\alpha = 15°$ 条件下绕 NACA 0012 翼型流动进行壁面解析大涡模拟（WRLES），生成高保真计算数据集，所用软件为 OpenFOAM（Weller 等，1998年）。控制方程采用 `pimpleFoam` 求解器求解，该求解器结合了 PISO（压力隐式分裂算子法）（Issa1986）和 SIMPLE（半隐式压力关联方程算法）（Patankar 和 Spalding1972）。这种组合允许采用更大的时间步长，从而降低总体计算成本。 `pimpleFoam` 求解器通过在每个时间步寻求解的准稳态近似来工作，这一过程通过多次“内层”迭代实现。一个时间步的收敛解随后被推进至下一个时间步。

湍流建模采用壁面自适应局部涡黏性（WALE）模型（Nicoud 和 Ducros 1999）。该模型非常适合捕捉转捩，且耗散低于传统的 Smagorinsky 模型（Duan 和 Wang 2024），因此更能有效保留小尺度湍流结构。翼型弦长为 $c = 1m$，具有钝尾缘，周围由直径为 $L_x/c = 120$ 的 O 型网格包围。翼型的压力面和吸力面各用 200 个点离散，钝尾缘则用 15 个点离散。由于在此雷诺数下流动会转变为三维状态，且主导展向波长为 $\lambda_z \approx c/3$（Gupta 等人，2023），计算域沿展向延伸 $L_z/c = 1$。翼展方向上以 25 个点离散，间距为 $\Delta_z = 0。04c$，网格总规模为 2,266,000 个单元。

来流设置为 $U_\infty = 1m/s$。通过将运动黏度设为 $\nu = 10^{-4}m^2/s$，将雷诺数固定为 $Re_c = 10,000$。第一个网格点位于 $y_1 = 0.5mm$处，平均值为 $y^+ = 0.27$。梯度采用二阶精度中心差分格式计算。速度项采用限制中心差分格式离散，该格式在梯度较大的区域使用迎风法。湍流变量 $\tilde{\nu}$ 采用无界二阶格式离散。标量变量方程使用预条件共轭梯度（PCG）求解器求解，矢量变量则使用预条件双共轭梯度稳定（PBiCGStab）求解器求解。时间步进采用二阶隐式格式。时间步长设为 $\Delta t = 0.001$，对应的最大库朗数为 $Co \approx 2$。

对速度和湍流变量采用混合边界条件，根据速度通量的符号，在定值狄利克雷型和定梯度诺伊曼型之间切换。计算域周界施加压力出口边界，翼型表面则设为无滑移边界。由于 $y^+ < 1$，黏性底层得以完全解析，因此无需使用壁面函数。初始瞬态阶段结束后，对流动进行平均，历时 565 个涡周转时间 T^+，其中一个涡周转时间定义为$T^+ = c/U_\infty$。将探针置于翼型后方约 $0.2c$ 处的尾流中，以及前缘剪切层沿线，以估算积分时间尺度 T_i，得到 $T_i = 0.3$。基于此，选取 $f_s = 1/0.3 = 3.33$ Hz 的采样频率，获得约 1800 个速度瞬时快照，并据此计算时间平均速度场。随后对其进行展向平均，得到最终参考数据集。

A.2. 验证数据集

虽然有多种方法可用于验证高保真数据集，但我们给出了积分升力系数 C_L的频谱，其定义如下：

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 Sc}, \tag{A.1}$$

其中 ρ 为流体密度， U_∞ 为自由来流速度， S 为机翼翼展。积分升力系数的采样频率为 $f_s = 10\,\text{kHz}$。对应的频谱如图19所示。由此估算斯特劳哈尔数（St）为

$$St = \frac{fc}{U_\infty}, \tag{A.2}$$

其中 f 为主频。

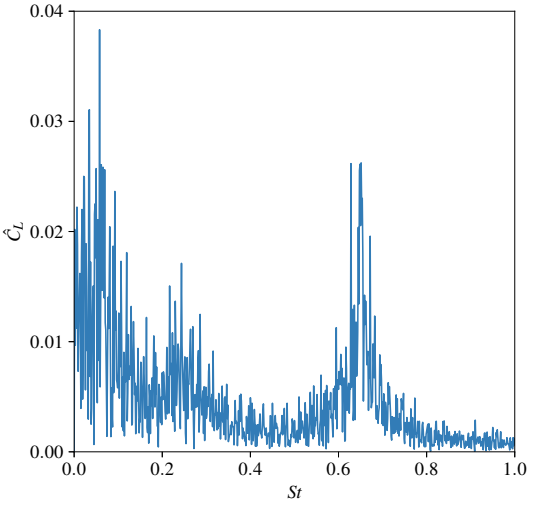

图**19**。 雷诺数 $Re = 10{,}000$、迎角为 $\alpha = 15°$ 时 *NACA 0012* 翼型的大涡模拟升力频谱。

峰值频率对应的斯特劳哈尔数为 $St = 0$。6515，与 Rolandi 等人 (2025年) 报告的数值高度吻合；他们在相同雷诺数、迎角为 $St = 0$。675 的类似案例中得到了这一结果。此外，升力系数频谱中此前由 Rolandi 等人(2025年) 观察到的典型三峰结构也出现在我们的结果中。此外， $U = 0$ 等值线（如图 3所示）勾勒出一个小型分离泡，位于前缘分离点稍下游处。这是该雷诺数下流动的已知特征，Rolandi 等人在图 4 中也提到了这一点。(2025年)

致谢。 我们衷心感谢 UttamCadambiPadmanaban 在生成大涡模拟数据方面提供的技术协助，以及南安普顿大学高性能计算设施 IRIDIS X 为完成本研究提供的技术支持和计算资源。

经费声明。 我们衷心感谢南安普顿大学工程学院为 CT 的博士生奖学金提供经费支持。

利益冲突。 作者声明不存在利益冲突。

数据可用性声明。 相关数据将在论文发表时通过数字对象标识符（DOI）提供，网址为： https://doi.org/10.5258/ SOTON/D3539。

伦理准则。 本研究符合所有伦理准则，包括遵守研究所在国的法律要求。

作者贡献。 CT 参与了物理信息神经网络代码的实现、相关训练流程的制定、结果分析以及多份稿件的撰写。BG 和 SS 负责概念构思、经费获取、稿件编辑和项目管理。

人工智能（AI）工具的使用。 本研究仅使用人工智能工具（ChatGPT）润色文字。

参考文献

[1] Basir, S. 和 Senocak, I.（2023）一种用于训练物理约束与等式约束人工神经网络的自适应增广拉格朗日方法，arXiv预印本 arXiv:2306.04904。[2] Boussinesq, J.（1877）《流动水理论试论》，《科学院各位学者提交的回忆录》。巴黎国家印刷局，XXIII。[3] Cadambi Padmanaban., U.、Ganapathisubramani, B. 和 Symon, S.（2025）使用时间平均实验数据对分离流进行三维变分数据同化，arXiv电子预印本，arXiv–2503。[4] Carter, D. W. 和 Ganapathisubramani, B.（2023）中等雷诺数下失速翼型的低阶建模与基于传感器的预测，《AIAA期刊》61(7)，2893–2905。[5] Chakraborty, S.（2021）基于迁移学习的多保真度物理信息深度神经网络，《计算物理学期刊》426，109942。[6] Doran, P. M.（2013）第7章——流体流动，载于《生物过程工程原理》（第二版），201–254，学术出版社，ISBN 978-0-12-220851-5。[7] Duan, Z. 和 Wang, Z.J（2024）为高阶壁面建模大涡模拟校准亚格子尺度模型，《空气动力学进展》6(1)，5。[8] Foures, D. P.G.、Dovetta, N.、Sipp, D. 和 Schmid, P. J.（2014）一种用于雷诺平均纳维–斯托克斯受驱动量平均流重构的数据同化方法，《流体力学期刊》759，404–431。[9] Franceschini, L.、Sipp, D. 和 Marquet, O.（2020）基于最小化湍流模型校正的平均流数据同化：在高雷诺数湍流后向台阶中的应用，《物理评论：流体》5(9)，094603。[10] Gupta, S.、Zhao, J.、Sharma, A.、Agrawal, A.、Hourigan, K. 和 Thompson, M. C.（2023）NACA0012翼型尾流的二维与三维转捩，《流体力学期刊》954，A26。[11] Hinton, G.、Srivastava, N. 和 Swersky, K.（2012）机器学习神经网络，第6a讲：小批量梯度下降概述，引证于14(8)，2。[12] Hornik, K.、Stinchcombe, M. 和 White, H.（1989）多层前馈网络是通用逼近器，《神经网络》2(5)，359–366。[13] Issa, R. I.（1986）通过算子分裂求解隐式离散化的流体流动方程，《计算物理学期刊》62(1)，40–65。[14] Klopsch, R.、Fuchs, L. M.、Rigas, G.、Oberleithner, K. 和 von Saldern, J. G.（2025）通过使用物理信息神经网络同化实验平均流动实现解析子分析：波音高斯凸起案例研究，载于《AIAA航空论坛与ASCEND 2025》，3604。[15] Lu, L.、Pestourie, R.、Yao, W.、Wang, Z.、Verdugo, F. 和 Johnson, S. G.（2021）用于逆向设计的硬约束物理信息神经网络，《SIAM科学计算期刊》43(6)，B1105–B1132。[16] Mons, V. 和 Marquet, O.（2021）通过数据同化进行平均流重构的线性与非线性传感器布置策略，《流体力学期刊》923，A1。[17] Nicoud, F. 和 Ducros, F.（1999）基于速度梯度张量平方的亚格子尺度应力建模，《流动、湍流与燃烧》62(3)，183–200。[18] Patankar, S. V. 和 Spalding, D. B.（1972）三维抛物型流动中热量、质量与动量传递的计算方法，《国际传热与传质期刊》15(10)，1787–1806。[19] Patel, Y.、Mons, V.、Marquet, O. 和 Rigas, G.（2024）用于平均流重构的湍流模型增强物理信息神经网络，《物理评论：流体》9(3):034605。[20] Pioch, F.、Harmening, J.H.、Müller, A.M.、Peitzmann, F.、Schramm, D. 和 Moctar, O.（2023）物理信息神经网络的湍流建模：后向台阶流动中不同RANS模型的比较，《流体》8(2)，43。[21] Pope, S. B.（2001）《湍流》，《测量科学与技术》12(11)，2020–2021。[22] Raissi, M.、Perdikaris, P. 和 Karniadakis, G.E.（2019）物理信息神经网络：用于求解涉及非线性偏微分方程的正向与逆向问题的深度学习框架，《计算物理学期刊》378，686–707。[23] Rolandi, L. V.、Smith, L.、Amitay, M.、Theofilis, V. 和 Taira, K.（2025）NACA0012翼型上分离流的全局解析子分析，arXiv预印本 arXiv:2501.04255。[24] Sliwinski, L. 和 Rigas, G.（2023）使用物理信息神经网络重构非定常流的平均流，《以数据为中心的工程》4，e4。[25] Spalart, P.R. 和 Allmaras, S.R.（1994）一种用于空气动力学流动的单方程湍流模型，《航空研究》1，5–21。[26] Steinfurth, B. 和 Weiss, J.（2024）使用物理信息神经网络同化三维分离平均流的实验数据，《流体物理学》36(1)。[27] Symon, S.、Dovetta, N.、McKeon, B. J.、Sipp, D. 和 Schmid, P. J.（2017）对二维PIV测量的理想化翼型绕流平均速度进行数据同化，《流体实验》58，1–17。

[28] **Too, E.C. andYujian, L.and Njuki,S. andYingchun, L.**（2019）用于植物病害识别的深度学习模型微调比较研究，《农业中的计算机与电子学》*161*，272–279。[29] **Torrey,L.and Shavlik,J.**（2010）迁移学习，载于《机器学习应用与趋势研究手册：算法、方法与技术》，242–264。[30] **Villié,A. and Schmitter, S. and von Saldern,J.G.R.and Demange,S. andOberleithner, K.**（2025）用于增强医学流动磁共振成像的物理信息神经网络：伪影校正、平均压力与雷诺应力同化，《流体物理学》*37*(2)。[31] **von Saldern, J. G. R. and Reumschüssel J. M. and Kaiser, T. L. andSieber, M. and Oberleithner K.**（2022）基于物理信息神经网络的平均流数据同化，《流体物理学》*34*(11)，115129。[32] **Weiss, K. and Khoshgoftaar, T. M. and Wang, D. D.**（2016）迁移学习综述，《大数据期刊》*3*，1–40。[33] **Weller, H. G. and Tabor, G. and Jasak, H. and Fureby, C.**（1998）采用面向对象技术的计算连续介质力学张量方法，《计算物理》*12*(6)，620–631。[34] **Ziegler,D. M.and Stiennon,N.and Wu,J. andBrown, T.B.and Radford,A. andAmodei,D. andChristiano, P.andIrving, G.**（2019）根据人类偏好微调语言模型，*arXiv*预印本 *arXiv:1909.08593*。