arXiv:2601.04923v1 [math.CV] 8 Jan 2026

含 q-移位的复薛定谔方程亚纯解的存在性

Risto Korhonen 和 Wenlong Liu*

Abstract. 本文研究以下含有 q-差分项的复薛定谔方程:

$$(\dagger) \qquad f'(z) = a(z)f(qz) + R(z, f(z)), \quad R(z, f(z)) = \frac{P(z, f(z))}{Q(z, f(z))},$$

其中 $a(z) \not\equiv 0$ 是相对于 $f(z)$ 的小亚纯函数，而 $R(z, f(z))$ 的所有系数函数也都是相对于 $f(z)$ 的小亚纯函数。我们假设 $q \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, 1\}$，且 $R(z, f(z))$ 关于 $f(z)$和 z均为不可约有理函数。我们分别得到方程（†）存在零阶亚纯解和非常数整函数解的一些必要条件。

特别地，如果 $R(z, f(z))$ 化为关于 $f(z)$ 的多项式，且 $\deg_f(R) \leq 2$，所有系数均为常数，那么在此假设下且不对 $f(z)$ 的增长阶施加任何限制，我们证明了在许多情况下整函数解的存在性，研究其数量，并进一步考察方程（†）的局部和整体亚纯解。此外，我们还讨论了某些条件下方程（†）的亚纯解可能具有的形式，并考察指数多项式作为方程（†）可能解的情形。

1. Introduction

我们假设读者熟悉亚纯函数的 Nevanlinna 理论中的标准记号（参见 [7, 12, 15]），例如特征函数 $T(r, f)$、逼近函数 $m(r, f)$ 和积分计数函数 $N(r, f)$ 等。符号 $S(r, f)$ 表示满足 $S(r, f) = o(T(r, f))$ 的任意量，其中 $r \to \infty$，且可能需要排除一个线性测度有限的 r 例外集。若亚纯函数 $a(z)$ 满足 $T(r, a(z)) = S(r, f(z))$，则称其为相对于 $f(z)$ 的小函数。

近年来，多位研究者应用 Nevanlinna理论研究复平面上时滞微分方程亚纯解的存在性与增长。具有代表性的工作包括 Xu 和 Cao [27]；Cao 与 Chen 及第一作者 [4]；Laine 和 Latreuch [16]；Chen 和 Cao [6]；Zhang 和 Huang [30]；Liu 和 Song [20]；Hu 和 Liu [13]；Wang、Han 和 Hu [24]；Cao 与本文作者 [5]；Halburd 和第一作者[11]；Li [18]；Zhang 和 Huang [30]；Zhao 和 Huang [31]；Zhang 和 Liao [29]。在这一领域，Nevanlinna理论是一种强有力的分析工具，为研究此类解的存在性与增长提供了有效框架。特别是，Halburd 和 Korhonen [10], 以及 Chiang 独立地

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：92B05、39B32、39A45；次要分类号：30D05。
Key words and phrases. Nevanlinna 理论；亚纯解；薛定谔方程。
* 通讯作者。第二作者受国家留学基金管理委员会（#202306820018）资助。1

和 Feng [8], 建立了对数导数引理的差分类比，这已成为分析微分差分方程亚纯解的一种基本方法。

值得一提的是，Barnett 等人 [2] 于 2007 年建立了对数导数引理的 q-差分类比。这一结果为研究含有 q-差分项的复微分方程的亚纯解是否存在提供了新的视角。因此，自然会问，这类方程是否确实存在亚纯解。关于 Schr¨oder 方程的经典论文

$$y(qz) = R(y(z)),$$

其中 $q \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$，且 $R(y)$ 是 $y(z)$ 的有理函数，该论文出自 J. Ritt [21]。L. Rubel [22]提出了如下问题：对于更一般的方程，能得出什么结论?

$$y(qz) = R(z, y(z)),$$

其中 $R(z,\ y(z))$ 关于 $y(z)$ 和 z 都是有理函数? 若干研究 [9, 14, 23, 26] 考察了非自治 Schr¨oder$q$-差分方程的亚纯解是否存在:

$$f(qz) = R(z, f(z)),$$

其中，$R(z,\ f(z))$ 关于两个变量都是有理函数。

Agirseven [1]引入了以下薛定谔型微分-延迟方程:

$$\begin{cases} i\dfrac{dv(t)}{dt} + Av(t) = bAv(t-w) + f(t), \quad t \in (0,\infty), \\ v(t) = \varphi(t), \quad -w \le t \le 0, \end{cases}$$

其中，A 是一个自伴正定算子，$\varphi(t)$ 和 $f(t)$ 是连续函数。由这个薛定谔型微分-差分方程，可得到以下方程:

$$f'(z) = a(z)f(z+n) + b(z)f(z) + c(z), \tag{1}$$

可将其视为带延迟项的复薛定谔方程。同样地,

$$f'(z) = a(z)f(qz) + b(z)f(z) + c(z), \tag{2}$$

可将其视为带有 q-移位项的复薛定谔方程。

Cao 和本文的另外两位作者 [5] 研究了方程（1）及其推广，获得了亚纯解存在的若干必要条件。本文研究以下方程的亚纯解的存在性:

$$f'(z) = a(z)f(qz) + \frac{P(z,f(z))}{Q(z,f(z))}, \quad R(z,f(z)) = \frac{P(z,f(z))}{Q(z,f(z))}, \tag{3}$$

and

$$f'(z) = a(z)f(qz) + P(z,f(z)), \quad \deg_f(P) \le 2, \tag{4}$$

其中 $a(z) \not\equiv 0$、$q \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$，并且 $R(z,\ f(z))$ 的所有系数函数，按照 Nevanlinna理论的定义，都是 $f(z)$ 的小函数。

本文的目的有两个。首先，我们运用 Nevanlinna理论研究使方程 (3) 分别存在非常数整函数解或零阶非常数亚纯解所需满足的条件。其次，我们旨在研究

方程 (4) 的局部和整体亚纯解的存在性，而不对亚纯解 $f(z)$施加任何增长阶限制，且这一研究独立于 Nevanlinna理论。特别地，当 $0<|q|<1$时，我们证明了许多情形下整函数解的存在性，研究了其个数，并进一步考察方程 (4) 的局部和整体亚纯解。此外，我们考虑指数多项式作为方程 (4) 的可能解。而且，若 $q>1$且 $\deg_f(P)=2$，我们推导出零阶亚纯解的显式形式；若 $|q|>1$且 $\deg_f(P)=1$，则方程 (4) 不存在整函数解。下面回顾形如.....的指数多项式的定义

$$f(z)=P_1(z)e^{Q_1(z)}+\cdots+P_k(z)e^{Q_k(z)}, \tag{5}$$

其中 $P_j(z)$和 $Q_j(z)$是关于 z的多项式。令 $t=\max\{\deg(Q_j):\ Q_j\not\equiv 0\}$，并令 ω_1、.....、ω_m为次数达到最大值 t的多项式 $Q_j(z)$的互不相同的首项系数。于是，(5)可改写为

$$f(z)=H_0(z)+H_1(z)e^{\omega_1 z^t}+\cdots+H_m(z)e^{\omega_m z^t}, \tag{6}$$

其中，每个 $H_j(z)$要么是次数为 $<t$ 的指数多项式，要么是关于 z的普通多项式。根据构造，$H_j(z)\not\equiv 0$ 对 $1\le j\le m$成立。

本文其余部分安排如下。第2节给出主要结果。第3节提供若干引理，用于证明主要结果。第4–6节包含三个主要结果的证明。

2. MAIN RESULTS

在定理 2.1中，我们应用Nevanlinna理论研究方程(7)的亚纯解是否存在，并建立其存在的若干必要条件。在该定理中，我们要求 $f(z)$的增长阶为零。接着我们得到：如果 $R(z,\ f(z))$可化为关于 $f(z)$的多项式，并且 $R(z,\ f(z))$和 $a(z)$的所有系数都是有理函数，那么$\deg_f(P)\le 2$。

定理 2.1。设 $f(z)$ 是下列方程的亚纯解：

$$f'(z)=a(z)f(qz)+\frac{P(z,f(z))}{Q(z,f(z))},\quad R(z,f(z))=\frac{P(z,f(z))}{Q(z,f(z))}, \tag{7}$$

其中，$R(z,f(z))$是关于 $f(z)$的、具有亚纯系数的不可约有理函数。设 $a(z)$及 $R(z,f(z))$的所有系数函数都是关于 $f(z)$的小亚纯函数，并令 $a(z)\not\equiv 0$, $q\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,1\}$.

(i) 设 $0<|q|<1$，且 (7) 具有非常数整函数解 $f(z)$。

(a)如果 $f(z)$是 $P(z,f(z))$的一个因子，则

$$\deg_f(P)\le 3,\ \ \deg_f(Q)\le 2;$$

(b)如果 $f(z)$不是 $P(z,f(z))$的因子，则

$$\deg_f(P)\le 2,\ \ \deg_f(Q)\le 1.$$

(ii) 设 $f(z)$ 是 (7)的一个阶为 0 的非常数亚纯解。

(a) 若 $\deg_f(P)>\deg_f(Q)+1$，则 $\deg_f(Q)\le 1$，$\deg_f(P)\ge 2\deg_f(Q)$。(b) 若 $\deg_f(P)\le\deg_f(Q)+1$，则 $\deg_f(Q)\le 1$，$\deg_f(P)\le 2$.(c) 若 $N(r,f(z))=S(r,f(z))$，则 $\deg_f(Q)=0$，$\deg_f(P)\le 1$.

(iii) 设 $f(z)$ 是方程 (7) 的一个阶为0的超越亚纯解，且 $a(z)$ 以及 $R(z,f(z)$ 的所有系数都是有理函数。则有

(a)

$$\deg_f(Q) = 1, \deg_f(P) = 3, \ \ or \ \ \deg_f(Q) = 0, \deg_f(P) \leq 2.$$

(b) *If* $\deg_f(P) - \deg_f(Q) = 2$, *then* $\overline{N}(r, f(z)) = T(r, f(z)) + S(r, f(z))$.

在下面的定理 2.2 和定理 2.3 中，我们将进一步考察方程 (4) 的亚纯解和整函数解的存在性。现在假设 $R(z, f(z))$ 可化为关于 $f(z)$ 的多项式，且其系数均为常数。也就是说，(7) 变为

$$f'(z) = Af(qz) + Bf(z)^2 + Cf(z) + D. \tag{8}$$

若 $B \neq 0$，则定理 2.2 表明，当 $0 < |q| < 1$，我们可以得到关于方程 (8) 的亚纯解（或整函数解）存在与否的结果；而对于 $q > 1$，则给出了方程 (8) 的零级亚纯解的精确形式。若$B = 0$，则定理 2.3 表明，当 $0 < |q| < 1$，我们可以得到关于方程 (8) 的整函数解存在及亚纯解不存在的结果；而对于 $|q| > 1$，则表明方程 (8) 不存在整函数解。

定理 2.2。设 A、 B、 C、 D 和 q 为固定常数，且满足条件$A \neq 0$、 $B \neq 0$ 和 $q \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, 1\}$. 。则有以下结论：

(i) 设 $0 < |q| < 1$，并设 $D = 0$. 。那么(8) 有不可数多个超越整函数解。

(ii) 设 $0 < |q| < 1$，并设 $D \neq 0$.(a) 若 $f(0) = 0$，则(8) 仅有一个超越整函数解。(b) 若 $f(0) \neq 0$，则(8) 有不可数多个超越整函数解。

(iii) 设 $0 < |q| < 1$. 。那么(8) 没有指数多项式解。

(iv) (a) 设 $0 < |q| < 1$. 。那么 $f(z)$ 的所有极点都是简单极点，并且(8) 在 $z = 0$ 附近有一个局部亚纯解，该解可以亚纯延拓到整个复平面 $\mathbb{C}$. 。特别地，设$C = -\frac{A}{q}$. 。若 $D \neq 0$，则(8) 在 $z = 0$ 附近有一个局部超越亚纯解；而若 $D = 0$，则 (8) 有一个如下形式的局部亚纯解

$$f(z) = -\frac{1}{Bz}$$

在 $z = 0$. 附近

(b) 对于任意固定的 $z_0 \neq 0$，(8) 在 $z = z_0$ 的某个邻域内有局部亚纯解，且该解有简单极点。

(v) 设 $q > 1$，并设 A、 B、 C 和 D 为正实数。假设(8) 存在如下形式的亚纯解：

$$f(z) = \frac{t_n}{(z - z_0)^n} + \frac{t_{n-1}}{(z - z_0)^{n-1}} + \cdots + \sum_{j=0}^{\infty} s_j (z - z_0)^j, \ \ z_0 \in \mathbb{C},$$

其中 s_0、 $s_1 \in \mathbb{R}$. 。那么，(8) 的所有零阶亚纯解均具有如下形式：

$$f(z) = -\frac{1}{B} \cdot \frac{1}{z - z_0} + s_0.$$

定理 2.3。 假设 A、 B、 C、 D 和 q 是固定常数，使得 $A \neq 0$、 $B = 0$，并且 $q \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. 。那么有如下结论：

(i) 若 $0 < |q| < 1$，则 (8) 有不可数多个超越整函数解。然而，若 $|q| > 1$，则 (8) 没有整函数解。(ii) (8) 当 $0 < |q| < 1$. 时没有亚纯解。

3. Preliminary lemmas

命题 3.1 ([3])**.** 若 f 是亚纯函数，则

$$T(r, f(qz)) = T(|q|r, f(z)) + O(1) \tag{9}$$

对所有常数 $q \neq 0$ 均成立。

引理 3.2. 任意非常数亚纯函数 $f(z)$ 在 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 中至多遗漏两个值；并且，若 $f(z)$ 是非有理函数，则它会无穷多次取到其他每一个复数值。

以下是著名的对数导数引理，也是Nevanlinna理论中的一项基本结果。Nevanlinna第二主定理是该引理的一个应用。

引理 3.3. 设 $f(z)$ 是一个非常数亚纯函数。则

$$m\left(r, \frac{f'(z)}{f(z)}\right) = O(\log rT(r, f(z))) \quad r \notin E,$$

其中 E 具有有限线性测度。

现在我们给出 Barnett 等人 [2]所述的、针对零阶亚纯函数的 q-差分类比对数导数引理。

引理 3.4。 *[2,* 定理 *1*。*2]* 设 $f(z)$ 是一个非恒定零阶亚纯函数，且 $q \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. 则

$$m\left(r, \frac{f(qz)}{f(z)}\right) = o(T(r, f(z)))$$

在对数密度为1的集合上。

引理 3.5。 *[28,* 定理 *1.1*、*1*。*3]* 设 $f(z)$ 是一个非恒定零阶亚纯函数，且 $q \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. 则

$$N(r, f(qz)) = (1 + o(1))N(r, f(z)),$$
$$T(r, f(qz)) = (1 + o(1))T(r, f(z)),$$

在下对数密度为一的集合上。

在 q定理 2.1]中给出了 Clunie 引理的 q-差分类比； q一般差分多项式的改进形式见 [17, 定理 2.5] 。采用与 [17,定理 2.5]类似的方法，我们还得到了 Clunie 引理的 q-时滞微分类比；见下文。在介绍 Mo'honko 定理的 q-时滞微分类比 [19, 定理 10.1.7], 之前，我们先回顾 q-时滞微分多项式的定义（见 [20, 第 215] 页）。 $f(z)$ 中的 q 时滞微分多项式可写成如下形式:

$$P(z, f(z)) = \sum_{l \in L} b_l(z) f(z)^{l_0,0} f(c_1 z)^{l_1,0} \dots f(c_v z)^{l_v,0} f'(z)^{l_0,1} \dots f^{\mu}(c_v z)^{l_v,\mu}$$

其中，系数 $b_l(z)$ 是关于 $f(z)$ 的小亚纯函数，这意味着它们的 Nevanlinna 特征函数在一个对数密度为一的集合上为 $o(T(r, f))$。

引理 3.6. 设 $f(z)$ 是一个 q-延迟微分方程的零阶超越亚纯解，其形式为

$$U_q(z,f)P_q(z,f) = Q_q(z,f),$$

其中 $U_q(z,f)$ $P_q(z,f)$ 和 $Q_q(z,f)$ 是 q-延迟微分多项式，其总次数满足 $\deg U_q(z,f) = n$ 关于 $f(z)$ 及其 q-移位，而 $\deg Q_q(z,f) \leq n$.此外，我们假设 $U_q(z,f)$ 关于 $f(z)$ 及其 q-移位仅包含一个总次数最高的项。则

$$m(r, P_q(z,f)) = o(T(r,f))$$

在对数密度为 1 的集合上。

引理 3.7。 *[2,* 定理 *2,2]* 设 $f(z)$ 是一个零阶非常数亚纯解，满足

$$P(z,f) = 0,$$

其中 $P(z,f)$ 是关于 $f(z)$ 的 q-延迟微分多项式。若 $P(z,a) \not\equiv 0$ 对于小函数 $a(z)$，则

$$m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = S(r,f)$$

在对数密度为 1 的集合上。

下一个引理的原始形式见于 [11, 引理 2.1], ，其中该引理针对延迟微分方程陈述。这里，我们遵循原文证明的主要思路，给出其 q-延迟微分类比。

引理 3.8。 设 $f(z)$ 是下列方程的一个非有理亚纯解

$$P(z, f(z)) = 0 \tag{10}$$

这里， $P(z,f(z))$ 表示关于 $f(z)$ 的一个 q延迟微分多项式，其系数为有理函数。设 $a_1, \ldots,$ a_k 为有理函数，使得对所有 $j \in \{1,\ldots,k\}$., 均有 $P(z,a_j) \not\equiv 0$ 。进一步假设 $q \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$. 。若存在 $s > 0$ 和 $\tau \in (0,1)$ ，使得

$$\sum_{j=1}^{k} n\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) \leq k\tau n(|q|\, r, f) + O(1), \tag{11}$$

则 $f(z)$ 的阶为正。

证明。 为导出矛盾，我们反设结论不成立，即 $\rho(f) = 0,$ 。首先证明，假设 $P(z,a_j) \not\equiv 0$ 意味着

$$m\left(r, \frac{1}{f(z)-a_j(z)}\right) = S(r, f(z)). \tag{12}$$

利用引理 3.3 和引理 3.4 可显然得到这一点，其证明与原证明类似。此处省略证明。为完成证明，我们注意到，由假设 (11) 可知

$$\sum_{j=1}^{k} N\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) \leq k(\tau+\epsilon)N\left(|q|\, r, f(z)\right) + O(\log r) \tag{13}$$

其中， $\epsilon > 0$ 的选取满足 $\tau + \epsilon < 1$. 奈望林纳理论的第一基本定理给出

$$kT(r, f(z)) = \sum_{j=1}^{k} \left(m\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) + N\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right)\right) + O(\log r). \tag{14}$$

结合 (12)、(13)、(14) 和 (9)，可得

$$\begin{aligned} kT(r, f(z)) &\leq k(\tau + \epsilon)N\left(|q|\, r, f(z)\right) + S(r, f(z)) \\ &\leq k(\tau + \epsilon)T\left(|q|\, r, f(z)\right) + S(r, f(z)) \\ &= k(\tau + \epsilon)T\left(r, f(qz)\right) + S(r, f(z)) \\ &= k(\tau + \epsilon)T\left(r, f(z)\right) + S(r, f(z)) \\ &< kT\left(r, f(z)\right) + S(r, f(z)). \end{aligned} \tag{15}$$

这产生矛盾。因此， $\rho(f) > 0$. □

推论 3.9. *[25]*设 t 为正整数， $a_0(z)$，...， $a_n(z)$ 均为次数为 $< t$ 的指数多项式或关于 z的普通多项式，且 b_1，...， $b_n \in \mathbb{C} \setminus 0$为互不相同的常数。则

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(z) e^{b_j z^t} = a_0$$

仅当 $a_0(z) \equiv \cdots \equiv a_n(z) \equiv 0$. 时成立

4. proof of Theorem 2.1

证明。 (i) 假设 $f(z)$ 是方程 (7) 的非恒定整函数解。那么，(7) 可写为

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = a(z)\frac{f(qz)}{f(z)} + \frac{P(z, f(z))}{f(z) \cdot Q(z, f(z))}. \tag{16}$$

设 $\frac{P(z,\ f(z))}{f(z) \cdot Q(z,\ f(z))} = K(z,\ f(z))$。则 (7) 变为

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = a(z)\frac{f(qz)}{f(z)} + K(z, f(z)). \tag{17}$$

利用引理 3.3，我们有

$$\begin{aligned} m\left(r, K(z, f(z))\right) &\leq m\left(r, \frac{f'(z)}{f(z)}\right) + m\left(r, \frac{f(qz)}{f(z)}\right) + S(r, f(z)) \\ &\leq m\left(r, \frac{1}{f(z)}\right) + m(r, f(qz)) + S(r, f(z)). \end{aligned} \tag{18}$$

此外，由于 $f(z)$ 是方程 (7) 的整函数解，因此

$$\begin{aligned} N\left(r, K(z, f(z))\right) &\leq N\left(r, \frac{1}{f(z)}\right) + N\left(r, f'(z) - a(z)f(qz)\right) \\ &= N\left(r, \frac{1}{f(z)}\right) + S(r, f(z)). \end{aligned} \tag{19}$$

结合 (9)、(18)、(19)、奈望林纳的第一个主定理以及小函数的定义，我们得到

$$\begin{aligned} T(r,K(z,f(z))) &\leq T(r,f)+m(r,f(qz))+S(r,f(z)) \\ &= T(r,f)+T(r,f(qz))+S(r,f(z)) \\ &= T(r,f)+T(|q|r,f)+S(r,f(z)). \end{aligned} \tag{20}$$

于是我们看到

$$T(r,K(z,f(z))) \leq 2T(r,f(z))+S(r,f). \tag{21}$$

注意到 $K(z,\ f(z)) = {}^{P}\!/_{Q}(z,\ f(z))$，由此可知，需要讨论两种情形。首先，如果 $f(z)$ 是 $P(z,\ f(z))$ 的因子，那么利用 [15, 定理 2.2.5] 可得

$$T(r,K(z,f(z))) = \max\left\{\deg_f(P)-1,\deg_f(Q)\right\}T(r,f(z))+S(r,f(z)). \tag{22}$$

结合 (21) 和 (22)，我们得到

$$\deg_f(P)\leq 3,\ \ \deg_f(Q)\leq 2.$$

如果 $f(z)$ 不是 $P(z,\ f(z))$ 的因子，那么利用 [15, 定理 2.2.5] 可得

$$T(r,K(z,f(z))) = \max\left\{\deg_f(P),1+\deg_f(Q)\right\}T(r,f(z))+S(r,f(z)). \tag{23}$$

结合 (21) 和 (23) 可推出

$$\deg_f(P)\leq 2,\ \ \deg_f(Q)\leq 1.$$

(ii) 现在假设 $f(z)$ 是方程 (7) 的一个零级非非常数亚纯解。由 (16) 以及引理 3.3 和引理 3.4，可知

$$m(r,K(z,f(z))) = S(r,f(z)) \tag{24}$$

在一个对数密度为 1 的集合上成立。定义两个集合 $A=\{z:\ f(z)=\infty\}$，$B=\{z:\ f(z)\neq\infty\}$. 然后，对 (16) 应用引理 3.5，可得

$$\begin{aligned} N_B(r,K(z,f(z))) &= N_B\left(r,\frac{f'(z)-a(z)f(qz)}{f(z)}\right) \\ &\leq N\left(r,\frac{1}{f(z)}\right)+N_B(r,f(qz))+S(r,f(z)) \\ &\leq N\left(r,\frac{1}{f(z)}\right)+N(r,f(z))+S(r,f(z)) \end{aligned} \tag{25}$$

在一个下对数密度为一的集合上。由于 $K(f(z)) = {}^{P}\!/_{(z,\ f(z))f(z)Q(z,\ f(z))}$，因此有两种情况需要讨论。

首先，如果 $f(z)$ 不是 $P(z,\ f(z))$ 的因子，那么

$$
\begin{aligned}
N_B(r,K(z,f(z))) &= N_B\left(r,\frac{P(z,f(z))}{f(z)Q(z,f(z))}\right)\\
&= N_B\left(r,\frac{1}{f(z)Q(z,f(z))}\right)+S(r,f(z))\\
&= N\left(r,\frac{1}{f(z)Q(z,f(z))}\right)+S(r,f(z)).
\end{aligned}
\tag{26}
$$

综合 (25) 和 (26) 可得

$$
N\left(r,\frac{1}{f(z)Q(z,f(z))}\right)\le N\left(r,f(z)\right)+N\left(r,\frac{1}{f(z)}\right)+S(r,f(z))
\tag{27}
$$

在一个下对数密度为 1 的集合上。由 (27)，可得

$$
\begin{aligned}
&N\left(r,K(z,f(z))\right)\\
=&N\left(r,\frac{P(z,f(z))}{f(z)Q(z,f(z))}\right)\\
=&\max\left\{\deg_f(P)-\deg_f(Q)-1,0\right\}N(r,f)+N\left(r,\frac{1}{f(z)Q(z,f)}\right)+S(r,f)\\
\le&\max\left\{\deg_f(P)-\deg_f(Q)-1,0\right\}N(r,f)+N(r,f)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)+S(r,f)
\end{aligned}
\tag{28}
$$

在一个下对数密度为 1 的集合上。若 $\deg_f(P)>\deg_f(Q)+1$，则

$$
N\left(r,K(z,f(z))\right)\le(\deg_f(P)-\deg_f(Q))N(r,f)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)+S(r,f)
\tag{29}
$$

在一个下对数密度为 1 的集合上。综合 (24)、(29) 和 [15,定理 2.2。5] 可得

$$
\begin{aligned}
T\left(r,K(z,f(z))\right) &= T\left(r,\frac{P(z,f(z))}{f(z)Q(z,f(z))}\right)\\
&= \max\left\{\deg_f(P),1+\deg_f(Q)\right\}T(r,f(z))+S(r,f)\\
&\le(\deg_f(P)-\deg_f(Q))N(r,f)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)+S(r,f)\\
&\le(\deg_f(P)-\deg_f(Q)+1)T(r,f)+S(r,f)
\end{aligned}
\tag{30}
$$

在一个对数密度为 1 或具有无穷线性测度的集合上。这意味着

$$
\deg_f(Q)\le 1,\quad \deg_f(P)\ge 2\deg_f(Q).
\tag{31}
$$

若 $\deg_f(P)\le\deg_f(Q)+1$，则由 (28) 可得

$$
N(r,K(f(z)))\le N(r,f)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)+S(r,f)
\tag{32}
$$

在一个下对数密度为 1 的集合上。综合 (24)、(32) 和 [15,定理 2.2.5] 可得

$$\begin{aligned} T\left(r, K(z, f(z))\right) &= T\left(r, \frac{P(z, f(z))}{f(z)Q(z, f(z))}\right) \\ &= \max\left\{\deg_f(P), 1 + \deg_f(Q)\right\} T(r, f(z)) \\ &\leq N(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r, f) \\ &\leq 2T(r, f) + S(r, f) \end{aligned}$$

在下对数密度为 1 或具有无穷线性测度的集合上。这意味着

$$\deg_f(P) \leq 2, \quad \deg_f(Q) \leq 1. \tag{33}$$

此外，如果 $N(r, f(z)) = S(r, f(z))$,那么由 (28) 可知

$$N(r, K(f(z))) \leq N\left(r, \frac{1}{f(z)}\right) + S(r, f(z)). \tag{34}$$

综合 (24)、(34) 和 [15,定理 2.2.5]，可得

$$\begin{aligned} T(r, K(f(z))) &= \max\left\{\deg_f(P), \deg_f(Q) + 1\right\} T(r, f(z)) \\ &\leq N\left(r, \frac{1}{f(z)}\right) + S(r, f(z)) \\ &\leq T(r, f(z)) + S(r, f(z)) \end{aligned} \tag{35}$$

在下对数密度为 1 或具有无穷线性测度的集合上。这意味着

$$\deg_f(P) \leq 1, \quad \deg_f(Q) = 0.$$

现在假设 $f(z)$ 是 $P(z, f(z))$. 的一个因子。那么

$$K(z, f(z)) = \frac{P(z, f(z))}{f(z)Q(z, f(z))} = \frac{\hat{P}(z, f(z))}{Q(z, f(z))}, \tag{36}$$

其中 $\hat{P}(z, f(z)) = \frac{P(z, f(z))}{f(z)}$是关于 $f(z)$ 的一个多项式。根据集合 B 的定义，可得

$$N_B\left(r, R(z, f(z))\right) = N_B\left(r, \frac{P(z, f(z))}{Q(z, f(z))}\right) = N\left(r, \frac{1}{Q(z, f(z))}\right) + S(r, f(z)). \tag{37}$$

此外，利用引理 3.5 和（7），可得

$$\begin{aligned} N_B\left(r, R(z, f(z))\right) =& N_B\left(r, f'(z) - a(z)f(qz)\right) \\ =& N_B(r, f(qz)) + S(r, f(z)) \\ \leq& N(r, f(z)) + S(r, f(z)) \end{aligned} \tag{38}$$

在一个下对数密度为 1 的集合上。结合（37）和（38）可得

$$N\left(r, \frac{1}{Q(z, f(z))}\right) \leq N(r, f(z)) + S(r, f(z)) \tag{39}$$

在一个下对数密度为 1 的集合上。在这种情况下，将（36）与（39）结合可得

(40)

$$\begin{aligned}&N\left(r,K(z,f(z))\right)\\=&\max\left\{\deg_f(P)-\deg_f(Q)-1,0\right\}N(r,f(z))+N\left(r,\frac{1}{Q(z,f(z))}\right)+S(r,f(z))\\\leq&\max\left\{\deg_f(P)-\deg_f(Q)-1,0\right\}N(r,f(z))+N(r,f)+S(r,f)\end{aligned}$$

在下对数密度为一的集合上。如果 $\deg_f(P)>\deg_f(Q)+1$，则结合 (24)、(40) 与 [15, 定理 2.2。5], 可得

(41)
$$\begin{aligned}&T\left(r,K(z,f(z))\right)\\=&\max\left\{\deg_f(P)-1,\deg_f(Q)\right\}T(r,f(z))+S(r,f)\\\leq&(\deg_f(P)-\deg_f(Q))N(r,f(z))+S(r,f(z))\\\leq&(\deg_f(P)-\deg_f(Q))T(r,f(z))+S(r,f(z))\end{aligned}$$

在下对数密度为一或具有无穷线性测度的集合上。这意味着

(42)
$$\deg_f(P)\geq 2\deg_f(Q),\quad \deg_f(Q)\leq 1.$$

如果 $\deg_f(P)\leq\deg_f(Q)+1$，则结合 (24)、(40) 与 [15, 定理 2.2。5],可得

(43)
$$\begin{aligned}&T\left(r,K(z,f(z))\right)\\=&\max\left\{\deg_f(P)-1,\deg_f(Q)\right\}T(r,f(z))+S(r,f(z))\\\leq&N(r,f)+S(r,f).\\\leq&T(r,f)+S(r,f)\end{aligned}$$

在下对数密度为一或具有无穷线性测度的集合上。这意味着

(44)
$$\deg_f(P)\leq 2,\quad \deg_f(Q)\leq 1.$$

此外，如果 $N(r,\ f(z))=S(r,\ f(z))$，那么由 (40) 可知

(45)
$$N(r,K(f(z)))=S(r,f(z)).$$

综合 (24)、(45) 和 [15,定理 2.2。5] 可得

$$T(r,K(f(z)))=\max\left\{\deg_f(P)-1,\deg_f(Q)\right\}T(r,f(z))=S(r,f(z))$$

在下对数密度为 1 或具有无穷线性测度的集合上。这意味着

$$\deg_f(P)\leq 1,\quad \deg_f(Q)=0.$$

由上述分析可知，无论 $f(z)$ 是否为$P(z,\ f(z))$，以下结论均成立：若 $\deg_f(P)>\deg_f(Q)+1$，则

$$\deg_f(Q)\leq 1,\quad \deg_f(P)\geq 2\deg_f(Q).$$

若 $\deg_f(P) \leq \deg_f(Q) + 1$，则

$$\deg_f(Q) \leq 1, \quad \deg_f(P) \leq 2.$$

如果 $N(r, f(z)) = S(r, f(z))$，那么

$$\deg_f(Q) = 0, \quad \deg_f(P) \leq 1.$$

(iii) (a) 我们首先证明，如果 $0 < |q| < 1$，那么 $\deg_f(Q) = 1$，$\deg_f(P)$ =3，或者 $\deg_f(Q) = 0$，$\deg_f(P) \leq 2$.

将引理 3.5 和 [15,定理 2.2.5]应用于 (7)，可得

$$\begin{aligned}\max\left\{\deg_f(P), \deg_f(Q)\right\} T(r,f) &= T(r, R(z, f(z))) \\ &= T(r, f'(z) - a(z)f(qz)) \\ &\leq 2T(r, f(z)) + (1 + o(1))T(r, f(z)) + S(r, f(z)) \\ &= 3T(r, f(z)) + S(r, f(z))\end{aligned}$$

(46)

在下对数密度为一的集合上。由 (ii) 可知，如果 $f(z)$ 的阶为零，那么 $\deg_f(Q) \leq 1.$。现在我们证明，如果 $\deg_f(Q) = 1$，那么 $\deg_f(P)$ =$\deg_f(Q) + 2 = 3.$。设 $\deg_f(Q) = 1.$。于是方程 (7) 可写成以下形式:

$$f'(z) = a(z)f(qz) + \frac{P(z, f(z))}{f(z) - b(z)}, \tag{47}$$

其中 $b(z)$是有理函数。将引理 3.7 应用于（47），可得

$$N\left(r, \frac{1}{f(z) - b(z)}\right) = T(r, f(z)) + S(r, f(z)) \tag{48}$$

在一个对数密度为 1 的集合上。注意， $a(z)$以及$R(z, f(z))$的所有系数均为有理函数。这意味着， $a(z)$的所有零点和极点、 $R(z, f(z))$的系数的所有零点和极点，以及它们经有限次迭代产生的零点和极点，都可以包含在一个足够大的有界圆盘 D. 内。于是，由（48），我们可以选取充分大的 $|z_0|$，使得 $f(z_0) - b(z_0)$有一个重数为$t \geq 1$的零点，其中 $z = z_0$ 既不是 $a(z)$的零点也不是其极点，也不是$R(z, f(z))$任何系数的零点或极点，亦非 $a(z)$或 $R(z, f(z))$的系数经任何有限次迭代所得的零点或极点。这样的点 $z = z_0$称为 $f(z) - b(z)$的一般零点，并满足 $z = q^n z_0$位于圆盘 D之外，其中 $0 < |q| < 1$ 为任意给定的正整数，且 n 。然后，我们可以对（47）迭代 n 次，而 $a(z)$的零点和极点、$R(z, f(z))$的系数及其迭代项不会影响（47）迭代过程中 $f(q^n z)$的极点数。于是，由（47），有 $f(qz_0) = \infty^t$. 将（47）迭代一步后，得到

$$f'(qz) = a(qz)f(q^2 z) + \frac{P(qz, f(qz))}{f(qz) - b(qz)}. \tag{49}$$

现在假设 $\deg_f(P) \leq \deg_f(Q) = 1.$于是 $f(q^2 z_0) = \infty^{t+1}.$继续迭代（49），可得

$$f'(q^2 z) = a(q^2 z)f(q^3 z) + \frac{P(q^2 z, f(q^2 z))}{f(q^2 z) - b(q^2 z)}. \tag{50}$$

于是 $f(q^3 z_0) = \infty^{t+2}.$注意到 $z = q^n z_0$ 仍位于圆盘 $D.$ 之外。因此，我们可以继续上述迭代，而无需考虑零点或

$a(z)$ 的极点， $R(z,\ f(z))$ 的系数，或它们的有限次迭代。于是可得 $f(q^n z_0) = \infty^{t+n-1}$, 其中 n 是任意给定的正整数。

注意到 $0 < |q| < 1$. 对于给定的 n，在对（47）迭代多步后，系数可能会抵消 $f(q^m z)$ 的部分极点，其中 $m \geq n+1$. 我们定义

$$m_j := \max_{i=1,\ldots,s} \left\{ l_i \in \mathbb{N} : k_i(z_0) = 0^{l_i} \right\},$$

其中 $k_i(z)$ 表示 $a(z)$、 $R(z, f(z))$ 的系数及其迭代项。由于 $a(z)$ 和 $R(z, f(z))$ 的系数是有理函数，因此我们总能找到足够大的 $|z_0|$，使得 $m_j < t+n-1$，即系数的零点不可能完全抵消 $f(q^n z_0)$ 的极点。换句话说，我们可以看到 $z = z_0$ 仍然是 $f(q^n z)$ 的一个极点。因此，我们总能在原点的任意邻域内找到 $f(z)$ 的极点。这意味着 $f(z)$ 不可能是亚纯函数，这与定理 2.1 的假设矛盾。因此，$\deg_f(P) > \deg_f(Q) = 1$. 在 $\deg_f(P) = \deg_f(Q) + 1 = 2$ 的情况下，我们可以用相同的方法得出 $f(z)$ 不是亚纯函数。此外，由（46）可知，$\deg_f(P) \leq 3$. 因此，如果 $\deg_f(Q) = 1$, 那么

$$\deg_f(P) = \deg_f(Q) + 2 = 3.$$

现在证明，若 $\deg_f(Q) = 0$, 则 $\deg_f(P) \leq 2.$。令 $\deg_f(Q) = 0.$。需要讨论两种情况。若 $N(r, f) = S(r, f)$，则由 (ii) 可知，$\deg_f(P) \leq 1.$。现在假设 $N(r, f) \neq S(r, f)$。因此，存在一点 $\hat{}z_0$ ，使得 $f(\hat{}z_0) = \infty^l$ (≥ 1)，但 $z = \hat{}z_0$ 既不是 $a(z)$ 的零点或极点，也不是 $R(z, f(z))$ 的任何系数的零点或极点，也不是 $a(z)$ 的任何有限次迭代或 $R(z, f(z))$ 的系数的零点或极点。也就是说， $z = \hat{}z_0$ 是 $f(z)$ 的一般极点。在这种情况下，(7) 化简为

$$f'(z) = a(z)f(qz) + P(z, f(z)). \tag{51}$$

假设 $\deg_f(P) = 3.$。那么 $f(q\hat{}z_0) = \infty^{3l}.$。将 (51) 迭代一步，得到:

$$f'(qz) = a(qz)f(q^2 z) + P(qz, f(qz)). \tag{52}$$

那么 $f(q^2\hat{}z_0) = \infty^{9l}.$继续迭代（52）可得

$$f'(q^2 z) = a(q^2 z)f(q^3 z) + P(q^2 z, f(q^2 z)). \tag{53}$$

那么 $f(q^3\hat{}z_0) = \infty^{27l}.$继续迭代（53），由上述分析可知， $f(z)$ 不是亚纯函数。这是矛盾。也就是说，$\deg_f(P) \leq 2.$因此，我们总可以得出结论：如果 $\deg_f(Q) = 0$, 那么 $\deg_f(P) \leq 2.$

现在证明，若 $|q| > 1$, 则 $\deg_f(Q) = 1$, $\deg_f(P) = 3$, 或 $\deg_f(Q) =0$, $\deg_f(P) \leq 2.$

由（ii）可知，若 $f(z)$ 为零阶，则 $\deg_f(Q) \leq 1.$设 $\deg_f(Q) = 0.$则（7）变为

$$f'(z) = a(z)f(qz) + P(z, f(z)). \tag{54}$$

若 $N(r, f(z)) = S(r, f(z))$，则由 (ii) 可得 $\deg_f(P) \leq 1.$。现在考虑 $N(r, f(z)) \neq S(r, f(z))$ 的情形。由 (46) 可知 $\deg_f(P) \leq 3.$。令 $\deg_f(P) = 3$, 并设 $f(z)$ 在 $z = \widetilde{z}.$ 处有一个阶为 k 的一般极点。则 $f'(\widetilde{z}) =\infty^{k+1}$ ，且 $f(q\widetilde{z}) = \infty^{3k}$; 迭代序列 $z = \widetilde{z}$ 的起点满足 $|\widetilde{z}|$ 足够大且位于闭圆盘 D之外。注意 $|q| > 1.$。因此， $a(z)$ 的零点和极点、 $P(z, f(z))$ 的系数，以及它们的 n

次迭代项不会影响 (54) 的迭代中 $f(q^n z)$ $(n \geq 1)$ 的极点个数。将 (54) 迭代一步，可得

$$f'(qz) = a(qz)f(q^2 z) + P(qz, f(qz)). \tag{55}$$

于是 $f'(q\widetilde{z}) = \infty^{3k+1}$和 $f(q^2\widetilde{z}) = \infty^{9k}$.。将 (54) 再迭代若干步后，我们有$f(q^n z) = \infty^{3^n k}$. 。因此,

$$\begin{aligned}\rho(f) \geq \lambda\left(\frac{1}{f}\right) &= \limsup_{r\to\infty} \frac{\log n(r, f)}{\log r} \\ &\geq \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(3^n k)}{\log|q^n \hat{z}|} = \frac{\log 3}{\log|q|} > 0.\end{aligned} \tag{56}$$

这与我们的假设矛盾。因此，$\deg f(P) \leq 2$.。令 $\deg f(Q) = 1$.。那么 (7) 变为

$$f'(z) = a(z)f(qz) + \frac{P(z, f(z))}{f(z) - b(z)}, \tag{57}$$

其中 $b(z)$ 是一个有理函数。如果 $\deg f(P) \leq 1$，那么根据引理 3.7，存在 $f(z) - b(z)$ 的一个阶为 k 的一般零点 $z = z_1$.。另一方面，注意到 $a(z)$ 以及 $R(z, f(z))$ 的系数均为有理函数，因此对于 $f(z) - b(z)$ 的一个非一般零点 $z = \hat{} z_0$，我们看到 $z = \hat{} z_0$ 必须是大有界圆盘$D(0, R)$ 的一个内点，并且

$$n\left(R, \frac{1}{f(z) - b(z)}\right) = O(1). \tag{58}$$

于是 $f(qz_1) = \infty^k$. 将 (57) 再迭代一步，得到:

$$f'(qz) = a(qz)f(q^2 z) + \frac{P(qz, f(qz))}{f(qz) - b(qz)}, \tag{59}$$

于是 $f(q^2 z_1) = \infty^{k+1}$. 继续迭代 (59)，得到

$$f'(q^2 z) = a(q^2 z)f(q^3 z) + \frac{P(q^2 z, f(q^2 z))}{f(q^2 z) - b(q^2 z)}. \tag{60}$$

于是 $f(q^3 z_1) = \infty^{k+2}$. 于是

$$\frac{n\left(r, \frac{1}{f(z)-b(z)}\right)}{n(|q|^2 r, f(z))} = \frac{n\left(r, \frac{1}{f(z)-b(z)}\right)}{n(r, f(q^2 z))} \leq \frac{1}{2} + \epsilon \tag{61}$$

对所有 $r \geq r_0$，其中 r_0 足够大，且 ϵ 是任意正常数。结合 (58) 和 (61)，可知对于 $f(z) - b(z)$ 的每个零点，我们有如下结论:

$$n\left(r, \frac{1}{f(z) - b(z)}\right) \leq \frac{1}{2} n(|q|^2 r, f(z)) + O(1).$$

由引理 3.8 可得 $\rho(f) > 0$. 这与我们的假设矛盾。因此，$\deg f(P) \geq 2$. 若 $\deg f(P) = 2$，则可用相同的方法导出矛盾。综合起来，由 (46) 可得 $\deg f(P) = 3$.

(b) 由（46）可知，需要讨论两种情况。

我们首先考虑 $\deg_f(P) = 3, \deg_f(Q) = 1.$ 的情况。在这种情况下，变为 (7)

$$f'(z) = a(z)f(qz) + \frac{b_0(z)f(z)^3 + b_1(z)f(z)^2 + b_2(z)f(z) + b_3(z)}{f(z) - b_4(z)}, \tag{62}$$

其中 $b_0(z) \not\equiv 0$, $b_3(z)$ 和 $b_4(z)$ 不同时恒等于零。方程 (62) 可写为:

$$f(z)\left[b_0(z)f(z)^2 + b_1(z)f(z) + b_2(z)\right] = (f'(z) - a(z)f(qz))(f(z) - b_4(z)) - b_3(z). \tag{63}$$

将引理 3.6 应用于 (63)，可得在一个对数密度为 1 的集合上， $m(r, f(z)) = S(r, f(z))$。这意味着

$$N(r, f(z)) = T(r, f(z)) + S(r, f(z)) \tag{64}$$

在一个对数密度为 1 的集合上。

若 $\deg_f(P) = 2, \deg_f(Q) = 0,$ 则 (7) 变为

$$f'(z) = a(z)f(qz) + c_0(z)f(z)^2 + c_1(z)f(z) + c_2(z), \tag{65}$$

其中 $c_0(z) \not\equiv 0.$ 方程 (65) 可写为:

$$f(z)(c_0(z)f(z) + c_1(z)) = f'(z) - a(z)f(qz) - c_2(z). \tag{66}$$

将引理 3.6 应用于 (66)，可得在一个对数密度为 1 的集合上， $m(r, f(z)) = S(r, f(z))$。由此可推得

$$N(r, f(z)) = T(r, f(z)) + S(r, f(z)) \tag{67}$$

在一个对数密度为 1 的集合上。

我们已证明，只要 $\deg_f(P) - \deg_f(Q) = 2.$，则 $N(r, f(z)) = T(r, f) + S(r, f(z))$ 在一个对数密度为 1 的集合上成立。此外，由于 $a(z)$ 且 $R(z, f(z))$ 的所有系数均为有理数，因此 $f(z)$ 存在一个阶为 t 的一般极点，使得 $f(\hat{z}) = \infty^t$，且 $z = \hat{z}$ 既不是 $a(z)$ 的零点或极点，也不是 $R(z, f(z))$ 的任何系数的零点或极点。于是 $f'(\hat{z}) = \infty^{t+1}$，且 $f(q\hat{z}) = \infty^{2t}.$。现在假设 $t \geq 2.$。将 (7) 迭代一步，可得

$$f'(qz) = a(qz)f(q^2z) + \frac{P(qz, f(qz))}{Q(qz, f(qz))} \tag{68}$$

于是 $f'(q\hat{z}) = \infty^{2t+1}$，且 $f(q^2\hat{z}) = \infty^{4t}.$。将 (7) 继续迭代若干步，可得 $f(q^n\hat{z}) = \infty^{2^n t}.$。根据上述分析可知，若$|q| > 1$，则可得 $f(z)$ 的增长阶为正；而若$0 < |q| < 1$，则 $f(z)$ 不是亚纯函数。因此，我们总能得到矛盾。于是 $t = 1.$。也就是说,

$$\overline{N}(r, f(z)) = T(r, f(z)) + S(r, f(z)). \tag{69}$$

□

5. proof of Theorem 2.2

首先，我们给出以下命题，供证明使用。

命题 5.1。 *[9]* 若 $|q| > 1$，则原点附近的任意局部亚纯解

$$f(qz) = \frac{\sum_{j=0}^{p} a_j(z) f(z)^j}{\sum_{j=0}^{q} b_j(z) f(z)^j}, \tag{70}$$

其中 $a_j(z)$ 和 $b_j(z)$ 是亚纯函数，且有在整个复平面上的亚纯延拓。

按照 [9], 中命题 5.1 的证明，我们发现，将 (70) 替换为 (8) 后，命题 5.1 仍然成立。为方便读者，我们给出详细证明。此外，在 $0 < |q| < 1$, 的情况下，我们可以将 z 替换为 $\frac{1}{q}z$，从而得到以下结论：

命题 5.2。 如果 $|q| \neq 0,1$，那么方程 (8) 在原点附近的任意局部亚纯解都可以亚纯延拓到整个复平面。

证明。 假设 $|q| > 1.$。令 $f(z)$ 为方程 (8) 在 $|z| < R$ 中的一个亚纯解，其中 $0 < R < \infty.$。由 (8) 可知， $f(z)$ 可亚纯延拓到更大的圆盘 $|z| < |q| R.$。由归纳法可得， $f(z)$ 可以亚纯延拓到

$$\bigcup_{j=0}^{\infty} \left\{ |z| < |q|^j R \right\} = \mathbb{C}.$$

现在假设 $0 < |q| < 1.$，那么在 (8) 中用 z 替换 $\frac{z}{q}$，得到

$$f'\left(\frac{z}{q}\right) = Af(z) + Bf\left(\frac{z}{q}\right)^2 + Cf\left(\frac{z}{q}\right) + D. \tag{71}$$

由于 $f(z)$ 在 $|z| < R$ 中是亚纯的，且满足 $0 < R < \infty$，由 (71) 可知，$f(z)$ 可亚纯延拓到更大的圆盘 $|z| < \frac{1}{|q|} R.$。归纳地，$f(z)$ 可亚纯延拓到

$$\bigcup_{j=0}^{\infty} \left\{ |z| < \left|\frac{1}{q}\right|^j R \right\} = \mathbb{C}.$$

□

定理 *2.2* 的证明。令 $f(z) = g(z)$ 于是 (8) 变为

$$g'(z) = Ag(qz) + g(z)^2 + Cg(z) + BD. \tag{72}$$

为了证明（8）的整函数解和亚纯解的存在性，我们只需证明（72）具有整函数解和亚纯解。为此，首先考虑一个形式幂级数

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{73}$$

Then

$$g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}, g(qz) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n z^n, g(z)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i,j=0}^{i+j=n} a_i a_j \right) z^n. \tag{74}$$

将（73）和（74）代入（72），可得

$$
\begin{aligned}
(75)\qquad & a_1 = a_0^2 + (A+C)a_0 + BD,\\
& 2a_2 = Aa_1q + a_0a_1 + a_1a_0 + Ca_1,\\
& 3a_3 = Aa_2q^2 + a_0a_2 + a_1^2 + a_2a_0 + Ca_2,\\
& \cdots\\
& (n+1)a_{n+1} = Aa_nq^n + \sum_{i,j=0}^{i+j=n} a_ia_j + Ca_n,\ \ n \geq 1.
\end{aligned}
$$

接下来考虑 $D = 0$ 以及 $D \neq 0$这两种情形

(i). 情形 1：假设 $D = 0$. 结合（75）以及 A, C, 和q 为固定常数这一事实，可得 a_n 是关于 a_0 的多项式，对所有 $n \geq 0$. 均成立。注意，对于任意 $n \in \mathbb{N}$, a_n 构成由 a_0. 确定的单参数族。我们将证明，存在不可数多个 a_0，使得（73）收敛到一个超越整函数。也就是说，（72）具有不可数多个超越整函数解。

步骤 1：令 $g(z) \neq 0$.我们首先证明，存在不可数多个 a_0，使得每个这样的 a_0 满足：存在无穷多个指标 n，使得$a_n = P_n(a_0) \neq 0$. 令

$$A_n = \{a_0 \in \mathbb{C} : a_n = P_n(a_0) = 0\},$$

并令

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n.$$

定义 $M = \mathbb{C} \setminus A.$。注意，每个 A_n都是有限集，而 A是可数个有限集的并集，因此我们看到 A是一个可数集。于是 M 是一个不可数集。根据集合 M，的定义，我们有 $a_n = P_n(a_0) \neq 0$ 对每个 $a_0 \in M$ 以及每个$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.均成立

步骤 2：接下来，我们证明 (73) 是一个收敛幂级数，其中固定 $a_0 \in \mathbb{C}$，使得 $g(z)$ 有无穷多个非零系数 a_n，这类 a_0 的存在性已在步骤 1中得到证明。

步骤 2.1：令 $a_0 = \beta.$。由 (75)，我们得出 $\beta = a_0 \neq 0$；否则，对于所有 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_n \equiv 0$，这与步骤 1 矛盾。

现在我们针对 $|\beta|$ 考虑两种情况，其中 $0 < |\beta| = |a_0| \leq 1$ 且 $|\beta| = |a_0| > 1.$

步骤 2.2：现在我们将用归纳法证明关于 $|a_n|$ 的一个不等式。如果 $0 < |a_0| = |\beta| \leq 1$, 那么我们假设

$$(76)\qquad |a_n| \leq (|A| + |C| + 1)^n,\ \ \forall n \leq k,\ \ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

容易看出，对于 $n = 0.$，式 (76) 成立。因此，我们可以假设 $k \geq 1.$。现在证明，当 $n = k + 1.$ 时，式 (76) 仍然成立。由式 (75) 可得

$$(77)\qquad a_{k+1} = \frac{1}{k+1}\left[Aa_kq^k + \sum_{i,j=0}^{i+j=k} a_ia_j + Ca_k\right].$$

结合式 (76)、(77) 和 $0<|q|<1$，可得

(78)

$$\begin{aligned}
&|a_{k+1}|\\
\leq&\frac{1}{k+1}\left[|A|\,|q|^k\,(|A|+|C|+1)^k+(k+1)(|A|+|C|+1)^k+|C|\,(|A|+|C|+1)^k\right]\\
=&(|A|+|C|+1)^k\left[\frac{|A|\,|q|^k}{k+1}+1+\frac{|C|}{k+1}\right]\\
<&(|A|+|C|+1)^k(|A|+|C|+1)\\
=&(|A|+|C|+1)^{k+1}
\end{aligned}$$

因此，通过数学归纳法，我们得到

$$|a_n|\leq(|A|+|C|+1)^n \tag{79}$$

对所有 $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. 然后，收敛半径

$$R=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}\geq\frac{1}{|A|+|C|+1}>0$$

$g(z)$ 的收敛半径。结合命题 5.2，可知 $g(z)$ 是复平面上的整函数。注意到 $g(z)$ 不是多项式，因此 $g(z)$ 是方程 (72) 的超越整函数解。

步骤 2.3： 若 $|a_0|=|\beta|>1$. 假设

$$|a_n|\leq|\beta|^{n+1}\,(|A|+|C|+|\beta|)^n\,,\ \forall n\leq k. \tag{80}$$

那么当 $n=0.$ 时，该假设成立。接下来我们证明 (80) 对 $n=k+1.$ 也成立。结合 (77) 和 (80)，可知

$$\begin{aligned}
&|a_{k+1}|\\
\leq&\frac{1}{k+1}\,|\beta|^{k+1}\,(|A|+|C|+|\beta|)^k\,[|A|+(k+1)\,|\beta|+|C|]\\
<&(|A|+|C|+|\beta|)^k\,|\beta|^{k+1}\,(|A|+|\beta|+|C|)\\
\leq&(|A|+|C|+|\beta|)^{k+1}\,|\beta|^{k+2}
\end{aligned} \tag{81}$$

因此，根据数学归纳法，我们得到

$$|a_n|\leq|\beta|^{n+1}\,(|A|+|C|+|\beta|)^n\,,$$

对所有 $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. ，以与步骤 2.2 相同的方式，我们得到 $g(z)$ 是方程 (72) 的超越整函数解。

(ii). 情形 2：现在假设 $D\neq0.$

情形 2.1： 设 $a_0=0$ 为 (73) 中的.....，这等价于 $f(0)=0.$ 注意到 A, B,C, D 和 q 都是固定常数，由 (75) 可知，(73) 的所有系数 a_n 都是固定常数，并且 $a_1=BD\neq0.$ 换言之，(73) 是一个固定幂级数，且

$$g(z)=BDz+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n. \tag{82}$$

$|BD|$. 有两种情况： $|BD|>1$ 和 $0<|BD|\leq1.$

若 $0<|BD|\leq 1$，则 $|a_1|=|BD|\leq(|A|+|C|+1)$。现在假设

$$|a_n|\leq(|A|+|C|+1)^n,\forall n\leq k. \tag{83}$$

结合（77）、（83）和 $0<|q|<1$，我们有

$$\begin{aligned}
&|a_{k+1}|\\
\leq&\frac{1}{k+1}\left[|A|\,|a_k|+\sum_{i,j=0}^{i+j=k}|a_ia_j|+|C|\,|a_k|\right]\\
\leq&\frac{1}{k+1}\left[|A|\,(|A|+|C|+1)^k+(k+1)\,(|A|+|C|+1)^k+|C|\,(|A|+|C|+1)^k\right]\\
\leq&(|A|+|C|+1)^{k+1}.
\end{aligned}$$

若 $|BD|>1$，则 $|a_1|=|BD|\leq|BD|(|A|+|C|+1)$。假设

$$|a_n|\leq|BD|^n(|A|+|C|+1)^n,\forall n\leq k. \tag{84}$$

综合（77）、（84）和 $0<|q|<1$ 可得

$$\begin{aligned}
|a_{k+1}|\leq&\frac{1}{k+1}\left[|A|\,|a_k|+\sum_{i,j=0}^{i+j=k}|a_ia_j|+|C|\,|a_k|\right]\\
\leq&|BD|^k(|A|+|C|+1)^k\left[\frac{|A|}{k+1}+1+\frac{|C|}{k+1}\right]\\
\leq&|BD|^k(|A|+|C|+1)^{k+1}\\
\leq&|BD|^{k+1}(|A|+|C|+1)^{k+1}
\end{aligned}$$

由步骤 2。2，的证明可知，无论 $|BD|>1$ 还是 $0<|BD|\leq 1.$，（82）都是（72）的整函数解。现在证明（82）必定是（72）的超越整函数解。反过来假设（82）是 z 中的一个多项式，且 $\deg_z g(z)=G.$ 由（82）可知，$\deg_z g(z)=G\geq 1.$ 比较（72）两边的次数，便得到矛盾。断言得证。

情形 2.2：令 $a_0\neq 0$ 属于 (73)，这等价于 $f(0)\neq 0.$。由于 $A,\ B,\ C,\ D,$ 且 q 都是固定常数，由 (75) 可知，(73) 的所有系数 a_n 都是关于 $a_0.$ 的多项式。注意，$a_0\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 不是固定的。参照情形 1 的步骤 1，我们首先可以证明，存在不可数多个 a_0，使得每个这样的 a_0 都确保 (73) 有无穷多个非零系数 $a_n.$。然后固定 a_0 的这个值，我们用数学归纳法证明 $g(z)$ 是一个整函数解。这个过程与情形 1 中的情形完全相同，这里省略证明。在这种情况下，我们可以得到 $g(z)$ 是一个超越整函数解。

(iii) 假设指数多项式 (6) 是方程 (8) 的整函数解。

根据 (6) 的形式，我们可以很容易地得到以下结果:

$$f(z)^2 = \sum_{i,j=0}^{m} H_i(z)H_j(z)e^{(\omega_i+\omega_j)z^t}, \tag{85}$$
$$f(qz) = \sum_{l=0}^{m} H_l(qz)e^{k_l z^t},$$
$$f'(z) = \sum_{s=0}^{m} \eta_s(z)e^{\omega_s z^t},$$

其中 $\omega_0 = 0$, $k_l = \omega_l q^t$, $\eta_0(z) = H_0'(z)$ $\eta_s(z) = H_s'(z) + H_s(z)\omega_s t z^{t-1}$ 以及 $\omega_i(1 \le i \le m) \in \mathbb{C}$. 将 (6) 和 (85) 代入 (8)，得到

$$\sum_{s=0}^{m} \eta_s(z)e^{\omega_s z^t} \tag{86}$$
$$= A\sum_{l=0}^{m} H_l(qz)e^{k_l z^t} + B\sum_{i,j=0}^{m} H_i(z)H_j(z)e^{(\omega_i+\omega_j)z^t} + C\sum_{h=0}^{m} H_h(z)e^{\omega_h z^t} + D.$$

注意， ω_1，.....， ω_m 是两两不同的常数，且 $0 < |q| < 1$。令 $|\omega_1| < |\omega_2| < \ldots |\omega_m|$. 将推论 3.9 应用于 (86)，可得 $H_m(z) \equiv 0$. 这与以下事实矛盾： $H_j(z) \not\equiv 0$ 对所有 $1 \le j \le m$. 均成立。因此，断言得证。

(iv) (a) 令 $z = z_0$ 为 $f(z)$，的任意一个极点，并令 $f(z_0) = \infty^t$，其中 $t \ge 2$.。若 $z_0 = 0$，由 (8) 可得

$$f'(0) = Af(0) + Bf(0)^2 + Cf(0) + D.$$

这与 $f(0) = \infty^t$, $t \ge 2$. 矛盾。因此， $z_0 \ne 0$. 由 (8) 可知， $f(z)$ 必须在 $z = qz_0$. 处有一个阶为 $2t$ 的极点。继续这一过程，我们有 $f(z)$ 在 $z = q^2 z_0$ 处有一个阶为 $4t$ 的极点，并且归纳可得， $f(z)$ 在 $z = q^n z_0$. 处有一个阶为 $2^n t$ 的极点。注意到 $0 < |q| < 1$，那么 $q^n z_0 \longrightarrow 0$ 当 $n \longrightarrow \infty$，这意味着原点是 $f(z)$ 的极点的极限点。这与 $f(z)$ 是亚纯函数这一事实矛盾。因此， $t = 1$.

接下来，我们证明方程（72）同时具有全局亚纯解和局部亚纯解。根据命题 5.2，如果我们能够证明（72）在 $z = 0$, 附近具有局部亚纯解，那么我们就可以将该解延拓到整个复平面。我们将在 $z = 0$ 的邻域内考虑 $g(z)$ 的洛朗级数展开，并且 $z \ne 0$. 为此，考虑一个形式幂级数

$$g(z) = b_{-1}z^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = b_{-1}z^{-1} + l(z), \quad b_{-1} \ne 0, \tag{87}$$

其中 $l(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. 那么

$$
\begin{aligned}
g'(z) &= \frac{-b_{-1}}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n z^{n-1}, \\
g(qz) &= \frac{b_{-1}}{qz} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n q^n z^n, \\
g(z)^2 &= \frac{b_{-1}^2}{z^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i,j=0}^{i+j=n} b_i b_j \right) z^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2 b_{-1} b_n z^{n-1}
\end{aligned} \tag{88}
$$

将 (87)、(88) 代入 (72)，得到

$$
\begin{aligned}
& -b_{-1} = b_{-1}^2, \\
& A b_{-1} q^{-1} + 2 b_{-1} b_0 + C b_{-1} = 0, \\
& b_1 = A b_0 + b_0^2 + C b_0 + 2 b_{-1} b_1 + BD, \\
& \cdots \\
& (n+1) b_{n+1} = A b_n q^n + \sum_{i,j=0}^{i+j=n} b_i b_j + C b_n + 2 b_{-1} b_{n+1} \quad n \geq 1.
\end{aligned} \tag{89}
$$

由 (89) 经简单计算可得

$$
\begin{aligned}
& b_{-1} = -1, \\
& b_0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{A}{q} + C \right), \\
& \cdots \\
& (n+1) b_{n+1} = b_n (A q^n + C) + 2 b_{n+1} b_{-1} + \sum_{i,j=0}^{i+j=n} b_i b_j.
\end{aligned} \tag{90}
$$

由于 A， B， C， D 和 q 都是固定常数，因此我们得出，(87) 的所有系数都是具体常数，并且它们取决于 A， B， C， D 和 q. 。为了证明 (87) 是收敛幂级数，我们只需证明 $l(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$收敛。由 (90) 得

$$
b_{n+1} = \frac{1}{n+1} \left[A b_n q^n + \sum_{i,j=0}^{i+j=n} b_i b_j + C b_n + 2 b_{-1} b_{n+1} \right], n \geq 1. \tag{91}
$$

令 $b_0 \neq 0$. 。此时有两种情况，其中 $0 < |b_0| < 1$ 和 $|b_0| > 1$. 。这种情况与步骤 2。2 和步骤 2。3。 类似。也就是说，我们可以用数学归纳法证明 $l(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ 是整函数。因此，我们得出 (87) 是 (72) 的一个具体全局亚纯解。

若 $b_0 = 0$，这等价于 $C = -\frac{A}{q}$，则由 (89) 可得 $b_1 = \frac{1}{3} BD$. 若 $D \neq 0$，则 $b_1 \neq 0$. 也就是说， b_1 是系数$\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$. 中的首个非零项。令 $b_1 = \gamma \neq 0$. 我们可以证明，对于所有 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.，都有 $|b_n| \leq 2^n |\gamma|^{n+1}$。这一过程与 $b_0 \neq 0$（b_0 是系数 $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ 中的首个非零项）的情形类似。因此，此处省略证明细节。在这种情况下，我们进一步证明 (87) 必定是方程 (72) 的超越亚纯解。

反设 $g(z)$ 是有理函数。由 (87) 和 (90) 可知,

$$g(z) = \frac{-1}{z} + \frac{1}{3}BDz + \cdots \tag{92}$$

假设 $R(z)$是 z. 中的不可约有理函数。我们将$R(z)$的次数定义为

$$\deg_z R(z) = \max\left\{\deg_z m(z), \deg_z n(z)\right\}, \ R(z) = \frac{m(z)}{n(z)}.$$

令 $\deg_z g(z) = N\,(N \geq 2)$. 将 (92) 代入 (72)，然后比较 (72) 两边的次数，得到矛盾。因此， $g(z)$必定是超越亚纯函数。如果 $D = 0$, 那么 $b_0 = b_1 = 0$. 由 (89) 可知，对于所有 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. ，都有 $b_n = 0$ 。于是根据 (87) 和命题 5.2，我们有$g(z) = -\frac{1}{z}$ 是 (72) 的一个全局亚纯解。

(b) 现在我们考虑以下形式幂级数:

$$g(z) = b_{-1}(z - z_0)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n, \quad z_0 \neq 0. \tag{93}$$

Then

(94)

$$g'(z) = -b_{-1}(z - z_0)^{-2} + \sum_{n=1}^{\infty} nb_n(z - z_0)^{n-1},$$

$$g(z)^2 = b_{-1}^2(z - z_0)^{-2} + \sum_{n=0}^{\infty} 2b_{-1}b_n(z - z_0)^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i,j=0}^{i+j=n} b_ib_j\right)(z - z_0)^n,$$

$$g(qz) = b_{-1}(qz - z_0)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(qz - z_0)^n$$

将 (93) 和 (94) 代入 (72)，并利用二项式定理

$$(r + s)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k r^{n-k}s^k, \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

我们得到

$$b_{-1} = -1, (n + 3)b_{n+1} = Ab_nq^n + \sum_{i,j=0}^{i+j=n} b_ib_j + Cb_n, \quad n \geq 1. \tag{95}$$

我们可以看出， b_0 取决于 z_0. 。为了讨论 b_0，我们分三种情形:

情形 A： 假设对所有 $n \geq 0$. ，都有 $b_n \equiv 0$ 。那么，由 (93) 可得， $g(z) = \frac{-1}{z - z_0}$ 是在 $z = z_0$.的一个邻域内方程 (72) 的局部亚纯解。

情形 B: 如果 $b_0 \neq 0$，那么我们可以参照步骤 2。2 和步骤 2。3 来证明

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}} > 0.$$

也就是说， $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$， $z_0 \neq 0$，是局部解析函数。换言之，(93) 是 (72) 的局部亚纯函数。

情形 C：假设存在一个 m $(m \geq 1)$，使得 $b_m \neq 0$ 且所有 $b_n \equiv 0$，$n \leq m-1$. 那么 (93) 化简为

$$g(z) = \frac{-1}{z - z_0} + \sum_{n=m}^{\infty} b_n (z - z_0)^n, \quad z_0 \neq 0.$$

设 $b_m = \gamma$. 我们讨论 $|\gamma|$ 满足 $0 < |\gamma| < 1$ 和 $|\gamma| > 1$，的两种情形。

设 $|\gamma| > 1$. 则 $|b_m| = |\gamma| < |\gamma|^{m+1}(|A| + |C| + |\gamma|)^m$. 假设

$$|b_n| < |\gamma|^{n+1} (|A| + |C| + |\gamma|)^n, \quad \forall n \leq k, \ k > m. \tag{96}$$

结合 (95)、(96) 和 $0 < |q| < 1.$，我们得到

$$\begin{aligned} |b_{k+1}| &= \frac{1}{k+3} \left[A b_k q^k + \sum_{i,j=0}^{i+j=k} b_i b_j + C b_k \right] \\ &\leq \frac{1}{k+3} \left[|A| \, |b_k| + \sum_{i,j=0}^{i+j=k} |b_i b_j| + |C| \, |b_k| \right] \\ &\leq \frac{1}{k+3} |\gamma|^{k+1} (|A| + |C| + |\gamma|)^k \left[|A| + (k+1) |\gamma| + |C| \right] \\ &\leq |\gamma|^{k+1} (|A| + |C| + |\gamma|)^k \left[|A| + |C| + |\gamma| \right] \\ &< |\gamma|^{k+2} (|A| + |C| + |\gamma|)^{k+1}. \end{aligned} \tag{97}$$

因此，由数学归纳法可得

$$|b_n| < |\gamma|^{n+1} (|A| + |C| + |\gamma|)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

设 $0 < |\gamma| \leq 1$. 则 $|\gamma| = |b_m| \leq (|A| + |C| + 1)^m$. 假设

$$|b_n| \leq (|A| + |C| + 1)^n, \quad \forall n \leq k, \ k > m. \tag{98}$$

综合 (95)、(98) 和 $0 < |q| < 1$，可得

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= \frac{1}{k+3} \left[A b_k q^k + \sum_{i,j=0}^{i+j=k} b_i b_j + C b_k \right] \\ &\leq \frac{1}{k+3} \left[|A b_k| + \sum_{i,j=0}^{i+j=k} |b_i b_j| + |c b_k| \right] \\ &\leq (|A| + |C| + 1)^k \left[\frac{|A|}{k+3} + \frac{k+1}{k+3} + \frac{|C|}{k+3} \right] \\ &\leq (|A| + |C| + 1)^{k+1}. \end{aligned}$$

通过数学归纳法，我们得出

$$|b_n| \leq (|A| + |C| + 1)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

参照步骤 2.2 和 2.3，我们总能得到 $\sum_{n=m}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ $(z_0 \neq 0)$ 的收敛半径 $R > 0$。也就是说，$\sum_{n=m}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ 是一个局部解析函数。换言之，

$$g(z) = \frac{-1}{z - z_0} + \sum_{n=m}^{\infty} b_n (z - z_0)^n, \quad z_0 \neq 0,$$

无论 $0 < |\gamma| \leq 1$ 还是 $|\gamma| > 1$.(v)，它都是方程 (72) 的局部亚纯解。设 $f(z)$ 是方程 (8) 的一个亚纯解，并设 $f(z_0) = \infty^t$，其中 $t \geq 2$。根据 (iv) 的开头，我们看到 $f(q^n z_0) = \infty^{2^n t}$ $(z_0 \neq 0)$. 设 $r = |q^n z_0|$。于是，根据 $f(z)$ 的极点收敛指数定义, 我们看到

$$\lambda\left(\frac{1}{f}\right) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log n(r,f)}{\log r} \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(2^n t)}{\log|q^n z_0|} = \frac{\log 2}{\log q}.$$

这与 $f(z)$ 的阶为零这一事实矛盾。也就是说， $f(z)$ 的所有极点都是简单极点。由于 $f(z) = {}^{g_{(z)B}}$， $g(z)$ 的所有极点也都是筒单极点。令

$$g(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + m(z), \quad z_0 \in \mathbb{C}, \tag{99}$$

其中 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = m(z)$ $c_{-1} \neq 0$. 于是

(100)

$$g'(z) = -c_{-1}(z - z_0)^{-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1},$$

$$g(z)^2 = c_{-1}^2 (z - z_0)^{-2} + \sum_{n=0}^{\infty} 2c_{-1} c_n (z - z_0)^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i,j=0}^{i+j=n} c_i c_j \right) (z - z_0)^n,$$

$$g(qz) = c_{-1}(qz - z_0)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (qz - z_0)^n.$$

将 (99) 和 (100) 代入 (72)，按照与 (94) 类似的方法，可得

$$c_{-1} = -1, \tag{101}$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{n+3} \left[A c_n q^n + \sum_{i,j=0}^{i+j=n} c_i c_j + C c_n \right], \quad n \geq 1,$$

其中 c_0 取决于 z_0. 注意， c_0 和 c_1 均为实数。由 (101) 得， $c_2, c_3, \cdots$ 均为实数。假设存在一点 $z_0 \in \mathbb{R}$，使得 $c_0 = m(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z_0 - z_0)^n > 1$. 那么 $c_0 \geq c_0$. 现在假设对所有 $n \leq k.$，均有 $c_n \geq c_0$。由 (101) 得

$$\begin{aligned} c_{k+1} &= \frac{1}{k+3} \left[A c_k q^k + \sum_{i,j=0}^{i+j=k} c_i c_j + C c_k \right] \\ &\geq \frac{1}{k+3} \left[A c_0 q^k + c_0^2 (k+1) + C c_0 \right] \\ &= c_0 \left[\frac{A}{k+1} q^k + c_0 + \frac{C}{k+1} \right] \\ &> c_0^2 \\ &> c_0. \end{aligned} \tag{102}$$

因此，根据数学归纳法，对于所有 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$，我们有 $c_n \geq c_0 > 1$ 这意味着 $\lim_{n\to\infty} c_n \geq c_0 > 1 > 0$, 由此可知 $m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ 在 $z = z_0 + 1.$ 中发散。根据阿贝尔定理，对于所有 $|z - z_0| > 1.$， $m(z)$ 都发散。也就是说，(99) 不可能是 (72) 的全局亚纯解，这与

我们的假设矛盾。因此，对于所有 $z_0 \in \mathbb{C}$，我们有 $m(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0 - z_0) = c_0 \leq 1$。结合引理 3.2，可知 $m(z)$ 必须是常数。也就是说，$g(z)$ 是一个有理函数。

注 5.3。在 *(iv)* 的情况 A、B 和 C 下，我们可以证明 $g(z)$ 的收敛半径 $R > 0$。然而，$R = +\infty$. 也有可能。在这种情况下，方程 (72) 在 $z = z_0$ 的邻域内的局部亚纯解可以替换为方程 (72) 的全局亚纯解。

□

6. PROOF OF THEOREM 2.3

证明。(i) 在该假设下，(8) 化简为

$$f'(z) = Af(qz) + Cf(z) + D. \tag{103}$$

考虑一个形式级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{104}$$

将 (104) 代入 (103)，可得

$$\begin{aligned} a_1 &= Aa_0 + Ca_0 + D, \\ 2a_2 &= Aa_1 q + Ca_1, \\ 3a_3 &= Aa_2 q^2 + Ca_2, \\ &\cdots \\ (n+1)a_{n+1} &= Aa_n q^n + Ca_n, \ n \geq 1. \end{aligned} \tag{105}$$

因此，我们有如下结论：

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{Aq^n + C}{n+1} \right|, \tag{106}$$

其中，R 表示 $f(z)$ 的收敛半径。由此可知，若 $0 < |q| < 1$，则 $R = \infty$；也就是说，(104) 是 (103) 的整函数解。由 (105) 可知，a_n 构成一个由 a_0 决定的单参数族，对所有 $n \in \mathbb{N}$. 均成立。由定理 2.2 证明的步骤 1 可知，存在不可数多个 $a_0 \in \mathbb{C}$，使得 (104) 的所有系数均非零。因此，(103) 有不可数多个超越整函数解。然而，若 $|q| > 1$，$R = 0$；也就是说，(104) 仅在原点收敛。

(ii) 我们首先考虑 $0 < |q| < 1$. 的情形。反设，$f(z)$ 是方程（103）的一个亚纯解。令 $f(z_0) = \infty^t$.若 $z_0 = 0$，则

$$f'(0) = Af(0) + Cf(0) + D. \tag{107}$$

通过比较（107）两边的阶，我们可以得到矛盾。因此，$z_0 \neq 0$. 于是 $f(qz_0) = \infty^{t+1}$. 用 qz 替换（103）中的 z，可得

$$f'(qz) = Af(q^2 z) + Cf(qz) + D. \tag{108}$$

于是 $f(q^2 z_0) = \infty^{t+2}$.通过重复这些步骤，可得 $f(q^n z_0) = \infty^{t+n}$.注意，$0 < |q| < 1$. 于是 $q^n z_0 \longrightarrow 0$ 当 $n \longrightarrow \infty$，这意味着原点是

$f(z)$ 的极点的极限点。这与 $f(z)$ 是亚纯函数这一事实相矛盾。因此，我们的假设不成立。也就是说，当 $0 < |q| < 1$. □时，(103) 没有亚纯解

Declarations

利益冲突。作者声明，与本文内容相关的利益冲突不存在。

References

[1] D. Agirsevena, *On the stability of the schrödinger equation with time delay*, 《Filomat》32（2018年），第759–766页。[2] D. Barnett, R. Halburd, W. Morgan, and R. Korhonen, *Nevanlinna theory for the q -difference operator and meromorphic solutions of q-difference equations*, 《爱丁堡皇家学会会刊：A辑数学》137（2007年），第457–474页。[3] W. Bergweiler, K. Ishizaki, and N. Yanagihara, *Meromorphic solutions of some functional equations* 5 1998 248 258 , 《分析方法与应用》（），第–页。[4] T. Cao, Y. Chen, and R. Korhonen, *Meromorphic solutions of higher order delay differential equations* 182 2023 103227 , 《数学科学通报》（），第。页[5] T. Cao, R. Korhonen, and W. Liu, *Transcendental meromorphic solutions and the complex schr\"{o} dinger equation with delay* 2505 15310, 2025 , arXiv预印本，arXiv: 。（）。[6] Y. Chen and F. Cao, *Meromorphic solutions of a first order differential equations with delays* 360 2022 665 678 , 《数学报告》（），第–页。[7] W. Cherry and Z. Ye, *Nevanlinna's theory of value distribution: The second main theorem and its error terms* 2001 , Springer科学与商业媒体，。[8] Y. Chiang and S. Feng, *On the nevanlinna characteristic of $f\ z+\eta$ and difference equations in the complex plane* 16 2008 105 129 , 《拉马努金杂志》（），第–页。[9] G. Gundersen, J. Heittokangas, I. Laine, J. Rieppo, and D. Yang, *Meromorphic solutions of generalized schröder equations* 63 2002 110 135 , 《数学方程》（），第–页。[10] R. Halburd and R. Korhonen, *Difference analogue of the lemma on the logarithmic derivative with applications to difference equations*, 《数学分析与应用杂志》314（2006年），第477–487页。[11] R. Halburd and R. Korhonen, *Growth of meromorphic solutions of delay differential equations* 145 2017 2513 2526 , 《美国数学会会刊》（），第–页。[12] W. Hayman, *Meromorphic functions*, 第78卷，牛津克拉伦登出版社，1964年。[13] P. Hu and M. Liu, *A malmquist type theorem for a class of delay differential equations*, 《马来西亚数学科学学会通报》44（2021年），第131–145页。[14] K. Ishizaki, *Hypertranscendency of meromorphic solutions of a linear functional equations*, 《数学方程》56（1998年），第271–283页。[15] I. Laine, *Nevanlinna theory and complex differential equations*, 第15卷，Walter de Gruyter出版社，2011年。[16] I. Laine and Z. Latreuch, *Remarks on meromorphic solutions of some delay-differential equations* 48 2022 1081 1104 , 《数学分析》（），第–页。[17] I. Laine and C. Yang, *Clunie theorems for difference and q-difference polynomials*, 《伦敦数学学会杂志》76（2007年），第556–566页。[18] H. Li, *On existence of solutions of differential-difference equations*, 《应用科学中的数学方法》39（2016年），第144–151页。[19] K. Liu, I. Laine, and L. Yang, *Complex delay-differential equations*, 第78卷，Walter de Gruyter GmbH & Co KG，2021年。[20] K. Liu and C. Song, *Meromorphic solutions of complex differential–difference equations*, 《数学成果》72（2017年），第1759–1771页。[21] J. Ritt, *Transcendental transcendency of certain functions of poincaré*, 《数学年刊》95（1926年），第671–682页。[22] L. A. Rubel, *Some research problems about algebraic differential equations*, 《美国数学会汇刊》280（1983年），第43–52页。[23] G. Valiron, *Fonctions analytiques*, 法国大学出版社，巴黎，1952年。

[24] Q. Wang, Q. Han, and P. Hu, *Quantitative properties of meromorphic solutions to some differential-difference equations*, 《澳大利亚数学会通报》99（2019年），第250–261页。[25] Z. Wen, J. Heittokangas, and I. Laine, *Exponential polynomials as solutions of certain nonlinear difference equations* 28 2012 1295 ，《数学学报（英文版）》（），第–1306页。[26] H. Wittich, *Bemerkung zu einer funktionalgleichung von h. poincare*, 《数学档案》2（1949年），第90–95页。[27] J. Xu and T. Cao, *Meromorphic solutions of delay differential equations related to logistic type and generalizations* 172 2021 103040 ，《数学科学通报》（），第。页[28] J. Zhang and R. Korhonen, *On the nevanlinna characteristic of f (qz) and its applications*, 《数学分析与应用杂志》369（2010年），第537–544页。[29] J. Zhang and L. Liao, *On entire solutions of a certain type of nonlinear differential and difference equations* 15 2011 2145 2157 ，《台湾数学杂志》（），第–页。[30] R. Zhang and Z. Huang, *Entire solutions of delay differential equations of malmquist type*, 《应用分析与计算杂志》10（2020年），第1720–1740页。[31] M. Zhao and Z. Huang, *On meromorphic solutions of non-linear differential-difference equations* 30 2023 1444 1466 ，《非线性数学物理杂志》（），第–页。

Department of Physics and Mathematics, University of Eastern Finland, P.O.Box 111, FI–80101 JOENSUU FINLAND ,*Email address*: risto.korhonen@uef.fi

Department of Physics and Mathematics, University of Eastern Finland, P.O.Box 111, FI–80101 JOENSUU FINLAND ,
Email address: wenlong.liu@uef.fi