arXiv:2601.04934v1 [math.SG] 8 Jan 2026

承载吉布斯系综的余伴随轨道分类

Karl-Hermann Neeb

2026年1月9日

摘要

如果一个李群的余伴随轨道 $\mathcal{O}_\lambda \subseteq \mathfrak{g}^*$ 上，所有使函数 $\alpha \mapsto e^{-\alpha(x)}$ 在该轨道上关于刘维尔测度可积的 $x \in \mathfrak{g}$所组成的集合具有非空内部 Ω_λ，则称该余伴随轨道承载吉布斯系综。我们对具有这一性质的有限维李代数的所有余伴随轨道进行了分类。在 Souriau 李群热力学的背景下，子集 Ω_λ 即为几何温度，是余伴随轨道上一族吉布斯测度的参数空间。相应的芬切尔–勒让德变换将 $\Omega_\lambda/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$微分同胚地映射到余伴随轨道 $\mathcal{O}_\lambda$的凸包内部。这为理解其背后的信息几何提供了一个有趣的视角。

我们还证明，仅对一个 $x \in \mathfrak{g}$ 的 $e^{-\alpha(x)}$ 可积性就蕴含 $\Omega_\lambda \neq \emptyset$；并且对于一般的哈密顿作用，吉布斯测度的存在意味着动量映射的值域由如上所述的余伴随轨道 $\mathcal{O}_\lambda$ 组成。

关键词： 哈密顿作用、李群热力学、吉布斯测度、可容许李代数、温和余伴随轨道、刘维尔测度，

数学主题分类：主分类 37J37；次分类 22F30、53D20、58F05、70H33、82B05

目录

1 引言 **2**

2 凸集与函数 **7**

3 线性群的不变概率测度12

4 可容许李代数。 **15**

4 1 从不变凸函数到可容许李代数.164.2 根分解 .174.3 不变凸函数 .184.4 可容许李代数的结构 .194.5 从拉普拉斯变换的有限性到可容许性 .19

5 辛吉布斯系综 **22**

6 余伴随轨道。 **23**
6 1 概述 24 6 2 3 . 辛向量空间上的仿射作用 .. 容许余伴随轨道 .27 64 30. 从约化李代数到单李代数 .

7 约化程序。 **30**
7 1 W 中的轨道 .30 7 2 3 . 约化李代数中的幂零轨道 .. 单李代数中的混合轨道 .33 7 4 . 半直和中的余伴随轨道.35 7 5 . 一般情形 .37 76 38. 刘维尔测度的温和性 .

8 不变测度的测度分解 39

9 Non-强哈密顿作用 42

10 展望。 **43**
10 1 非交换相关对象.44 1044 102 3 45. 相干态轨道与迹类算子 .. 无限维 .1046 104 5 46. Weinstein 模自同构 .. 局部对称空间 .

1 引言

设 G 是一个连通的（有限维）李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。G 对自身的共轭作用在 $\mathfrak{g}$ 上诱导出 *adjoint action* $\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$，对偶化后，我们在对偶空间 $\mathfrak{g}^*$ 上得到 *coadjoint action*

$$\mathrm{Ad}^*\colon G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}^*) \quad \text{with} \quad \mathrm{Ad}^*(g)\lambda := \lambda \circ \mathrm{Ad}(g)^{-1}.$$

如果 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathrm{Ad}(G)$ 下不变，或者 $\mathfrak{g}^*$ *invariant* 在 $\mathrm{Ad}^*(G)$ 下不变，我们就称其为.....。设 σ: $G \times M \to M$ 是李群 G 在辛流形 (M,ω) 上的一个（强）哈密顿作用，并且

$$\Psi\colon M \to \mathfrak{g}^*$$

相应的等变动量映射。[1] 于是，$H_x(m) := \Psi(m)(x)$ 是 $x \in \mathfrak{g}$ 的哈密顿函数，即，对于导出作用 $\dot{\sigma}$: $\mathfrak{g} \to \mathcal{V}(M)$ 的向量场 $\dot{\sigma}(x)$，有 $\mathrm{d}H_x = -i_{\dot{\sigma}(x)}\omega$（参见 [GS84]）。我们将 λ_M 记为 M 上的刘维尔测度，它由体积形式 $\frac{\omega^n}{(2\pi)^n n!}$ 指定，其中 $\dim M = 2n$。开子集

$$\Omega := \left\{ x \in \mathfrak{g}\colon \int_M e^{-H_x(m)}\, d\lambda_M(m) < \infty \right\}^\circ$$

[1] 人们也研究这样一类哈密顿作用：所有向量场 $\dot{\sigma}(x)$ 都来自哈密顿函数，但不存在等变动量映射 $M \to \mathfrak{g}^*$。若 M 是连通的，则可以通过用适当的中心扩张替换李代数 $\mathfrak{g}$ 来解决这一问题 $\hat{\mathfrak{g}}$。考虑到这一点，假设存在等变动量映射，或者说作用是 *strongly Hamiltonian*，并不失一般性；本文始终采用这一假设。关于这一问题在本文背景下的讨论，参见第 9 节。

称为相应的 *geometric temperature*。这是 $\mathfrak{g}$的一个开子集，而推前测度 $\mu := \Psi_* \lambda_M$ 在 $\mathfrak{g}^*$ 上的拉普拉斯变换在 Ω 上定义了一个解析凸函数：

$$Z(x) := \mathcal{L}(\mu)(x) = \int_{\mathfrak{g}^*} e^{-\alpha(x)}\, d\mu(\alpha) = \int_M e^{-H_x(m)}\, d\lambda_M(m). \tag{1}$$

在统计力学中（1）对应于 *partition function*，因此采用记号 $Z(x)$。概率测度族 $\lambda_x = \frac{e^{-H_x}}{Z\ x}$ () *Gibbs ensemble of the dynamical group* 称为 G M 作用于 的。吉布斯测度的密度具有特定形式；在所有具有光滑密度且在 $\mathfrak{g}^*$ 中具有相同期望值的测度中，其特征可由熵的最大性刻画（参见备注5.3 和定理2.8）。因此，吉布斯测度是热力学系统中平衡态的自然模型。

李群哈密顿作用的广义温度由 J.-M. Souriau 于 [So66、So75]中提出，并在 [So97，第四章], 中进一步阐述 *Lie group thermodynamics*。其思想是，哈密顿作用的动量映射 Ψ： $M \to \mathfrak{g}^*$ 推广了 $\mathfrak{g}$ 为一维的情形，在这种情况下， Ψ 对应于孤立系统的能量函数。在统计力学中，状态的概率密度由能量 E 通过 *Boltzmann distribution*

$$P_\beta(E) = \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta E},$$

其中， $\beta > 0$ 对应于逆温度，而 *partition function* $Z(\beta)$是一个归一化因子。Souriau 现在用一个李代数元素 x替换“逆温度” $\beta = \frac{1}{kT}$，由此我们得到如上所述的吉布斯测度 λ_x 。

哈密顿作用的基本构件是传递作用（参见小节7.5）。于是，动量映射 Ψ 是一个覆盖映射，将 M 映到余伴随轨道 $\mathcal{O}_\lambda$ ： $= \mathrm{Ad}^*(G)\lambda \subseteq \mathfrak{g}^*$。我们的主要结果之一是对这样一些余伴随轨道进行分类：其对应的几何温度 Ω_λ 非空，也就是说，刘维尔测度 μ_λ 在 $\mathcal{O}_\lambda$ 上的拉普拉斯变换在 $\mathfrak{g}$的某个开子集上有限。[2]

为此，我们可以将理想 $\mathcal{O}_\lambda^\perp = \{x \in \mathfrak{g}$分解为：$(\forall \alpha \in \mathcal{O}_\lambda)\ \alpha(x) = 0\} \trianglelefteq \mathfrak{g}$，然后假设 $\mathcal{O}_\lambda$张成 $\mathfrak{g}^*$。特别地，这意味着维数 $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \leq 1$，因为中心元在 $\mathcal{O}_\lambda$上定义常值哈密顿函数。第一个关键观察是，如果 $\mathcal{O}_\lambda$张成 $\mathfrak{g}^*$并且

$$D_{\mu_\lambda} := \{x \in \mathfrak{g} \colon \mathcal{L}(\mu_\lambda)(x) < \infty\} \neq \emptyset, \tag{2}$$

那么李代数 $\mathfrak{g}$ 是 *admissible* （定理 4.7），即包含一个生成的闭凸 $\mathrm{Ad}(G)$-不变子集，且不含仿射直线。

可容许李代数具有完善的结构理论，专著 [Ne00]对此作了详细阐述。主要结论如下：

- 单李代数是可容许的，当且仅当它是紧的或厄米的，即非紧且具有非平凡的不变凸锥（参见 [Vi80]）。
- 约化李代数是可容许的，当且仅当其单理想是紧的或厄米的。
- 对于辛向量空间（V，Ω），关于泊松括号，次数为 $\mathfrak{hsp}$（V，Ω）的雅可比–李代数 $\cong \mathfrak{heis}$（V，Ω） $\rtimes \mathfrak{sp}$（V，Ω）的多项式代数在 ≤ 2 上是可容许的（参见 VNe00，附录 A.IV]）。

[2]在许多有趣的情形下， $\mathcal{O}_\lambda$ 是单连通的，且 Ψ 是一个微分同胚，但情况并非总是如此。 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})^*$ 中的幂零余伴随轨道就是例子，其中 $\pi_1(\mathcal{O}_\lambda) \cong \mathbb{Z}$。尽管在这种情况下 $\Omega_\lambda \neq \emptyset$，但对于 $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$在其单连通覆盖 $\widetilde{\mathcal{O}}_\lambda$上的作用，所有函数$e^{-H_x}$ 的积分都发散。

• 中心维数至多为一的非约化可容许李代数是半直和$\mathfrak{g} = \mathfrak{heis}(V, \Omega) \rtimes_\sigma \mathfrak{l}$，其中 $\mathfrak{l}$是可容许约化代数，且具有同态 $\sigma\colon \mathfrak{l} \to \mathfrak{sp}(V, \Omega)$，满足某些正性性质；详情见第 4.4 小节。

可容许李代数的一个重要结构特征是，它们包含一个紧嵌入的嘉当子代数 $\mathfrak{t}$ （参见 [HH89]），[3] 因此我们得到一个根分解

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha} \quad \text{with} \quad \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha} = \{z \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \colon (\forall x \in \mathfrak{t})\ [x, z] = \alpha(x) z\} \quad \text{and} \quad \Delta \subseteq i\mathfrak{t}^*$$

（[Ne00，定理 VII.2。2]）。此外，存在唯一的极大紧嵌入子代数 $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g}$ $\mathfrak{t}$ [00, 2 5] $\Delta_k = \{\alpha \in \Delta\ \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha} \subseteq \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}\}$ *compact*，它包含 *roots* $\mathcal{W}_{\mathfrak{k}}$ $\mathfrak{t}$ Δ（Ne命题 VII. .）。它确定了 的一个子集 : :，相应的反射生成一个 Weyl 群，作用于 和 上。若根的正系 $\Delta^+ \subseteq \Delta$ 满足 *adapted*，即集合 $\Delta_p^+ := \Delta^+ \setminus \Delta_k$ 中的正非紧根在 Weyl 群下不变 $\mathcal{W}_{\mathfrak{k}}$（[Ne00，定义 VII.2.6，命题 VII.2。12]）。对于 $z = x + iy \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，我们令 $z^* := -x + iy$ 并将两个 $\mathcal{W}_{\mathfrak{k}}$不变凸锥与任意此类系统关联起来 $\mathfrak{t}$:

$$C_{\min} := \overline{\operatorname{cone}}(\{i[x_\alpha, x_\alpha^*] \colon x_\alpha \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}, \alpha \in \Delta_p^+\}) \subseteq \mathfrak{t}, \tag{3}$$

and

$$C_{\max} := \{x \in \mathfrak{t} \colon (\forall \alpha \in \Delta_p^+)\ i\alpha(x) \geq 0\} \tag{4}$$

（[Ne00，定义 VII.3。6]）。在 $\mathfrak{g}$层面上，它们对应于锥

$$W_{\max} := \{y \in \mathfrak{g} \colon p_{\mathfrak{t}}(\operatorname{Ad}(G)y) \subseteq C_{\max}\} \quad \text{and} \quad W_{\min} := \{y \in \mathfrak{g} \colon p_{\mathfrak{t}}(\operatorname{Ad}(G)y) \subseteq C_{\min}\},$$

其中 $p_{\mathfrak{t}}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{t}$是核为 $[\mathfrak{t}, \mathfrak{g}]$ ([Ne00，命题 VIII.3。7]) 的投影。[4] 如果 $C_{\min} \subseteq C_{\max}$，那么 $W_{\min} \subseteq W_{\max}$根据定义（参见 [Ne00，定理 VIII.3。8]）。现在我们可以陈述第一个主要结果了。

定理 1. (分类定理) *Let $\mathcal{O}_\lambda \subseteq \mathfrak{g}$ be a coadjoint orbit spanning $\mathfrak{g}^*$. Then $\Omega_\lambda \neq \emptyset$ if and only if $\mathfrak{g}$ is admissible and there exists an adapted positive system Δ^+ with $C_{\min}$ pointed and contained in $C_{\max}$ such that $\lambda \in W_{\min}^\star = \{\beta \in \mathfrak{g}^*\ \beta\ W_{\min}\ \subseteq [0, \infty)\}$.* : : ( ))

这一结果包含在定理 7.13中。我们采用以下策略来得到这一分类：如果 $D_{\mu_\lambda} \neq \emptyset$ (参见 (2))，那么相当一般的论证表明， $\mathfrak{g}$ 是可容许的，并且 $\lambda \in W_{\min}^\star$ 对于上述某个适配正系 Δ^+ 成立（定理 4.7）。

反过来则更难。主要要素如下：

• 与（V,Ω）上的仿射辛作用相对应的 $\mathfrak{hsp}(V, \Omega)$ 的余伴随轨道 $\mathcal{O}_\lambda$ 满足 $\Omega_\lambda \neq \emptyset$。这一点可通过直接求值高斯积分看出。

• 若 $\lambda \in C^\star{}_{\min}$，则 $\mathcal{O}_\lambda$ 是所谓的 *admissible orbit*，即闭的，且其凸包不包含任何仿射直线（[Ne00，定义 VII.3.14]）。对于这些轨道，基于驻相方法（Duistermaat–Heckman公式）的拉普拉斯变换 $\mathcal{L}(\mu_\lambda)$ 存在显式公式，见 [Ne96a]。由此可得，在此情形下 $\Omega_\lambda \neq \emptyset$ （第 6.3小节）。

• 若 $\mathfrak{g}$ 不是约化的，则 $\mathcal{O}_\lambda$ 是一个辛向量空间上仿射作用所对应轨道与一个约化李代数的轨道的辛积。由于仿射情形已得到明确处理，我们的问题便可归结为约化情形，进而归结为单李代数（第 7.4 小节）。

• 若 $\mathfrak{g}$ 是紧单李代数，则 $W_{\text{最小}} = \{0\}$，且所有余伴随轨道都满足 $\Omega_\lambda = \mathfrak{g}$，因为 μ_λ 是有限测度。

[3]如果由 $e^{\operatorname{ad}\mathfrak{b}}$ 生成的 Aut($\mathfrak{g}$) 子群具有紧闭包，我们就称子代数 $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{g}$ *compactly embedded* 为紧的。[4]这一术语的由来是单厄米李代数的情形：其中 $W_{\min}$ 是最小生成不变锥，而 $W_{\max}$ 是极大的。

• 最困难的情形是可容许的单厄米李代数的轨道。此时我们有约当分解 $\lambda = \lambda_s + \lambda_n$，其中 λ_s, $\lambda_n \in W^\star$为最小， λ_n 为幂零， λ_s 为半单（参见 [NO22]）。[5]这里 $\mathcal{O}_{\lambda_s}$ 是可容许的，这是我们已经处理过的情形；幂零轨道 $\mathcal{O}_{\lambda_n}$ 上的刘维尔测度可以用 [Rao72], 的方法处理，这些方法表明该测度是温和的。由于它包含在一个尖锥中，由缓增分布的 Borcher 定理（参见命题 2.6）可得 $\Omega_{\lambda_n} \neq \emptyset$。刘维尔测度 μ_λ 是 μ_{λ_s} 与中心化子 $\mathfrak{l}$ 的一个幂零刘维尔测度的"纤维积"，其中该中心化子对应于 λ_s（[Rao72]）。为处理这种情形，我们证明投影 $p\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{l}$ 的一个凸性定理，以表明 $\Omega_\lambda \neq \emptyset$。

上述策略进一步表明，对于 $\lambda \in W^\star_{\min}$，几何温度 Ω_λ 是开凸锥 $W^\circ{}_{\max}$。这并未告诉我们该锥边界点处 $\mathcal{L}(\mu_\lambda)$ 是否有限，但我们还有：

定理 2。 (域定理) *Suppose that $\mathcal{O}_\lambda$ spans $\mathfrak{g}^*$. If $\mathfrak{g}$ is admissible with compactly embedded Cartan subalgebra $\mathfrak{t}$ and Δ^+ is adapted with $C_{\min}$ pointed and contained in $C_{\max}$ then $\lambda \in W^\star_{\min}$ implies, Ω, ( ) that $W^\circ = D_{\mu_\lambda} = \lambda$. In particular the domain D_{μ_λ} of the Laplace transform $\mathcal{L}\ \mu_\lambda$ is open.*

该定理的核心论证基于这样一个观察： $\mathcal{L}(\mu_\lambda)(x) < \infty$ 会在李子代数 $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(x) = \ker(\mathrm{ad}\ x)$ 的对偶上导出一个支集生成的概率测度。为证明这只可能在 $x \in W^\circ_{\max}$的情况下发生，我们使用以下相当一般的工具（定理 3.3）：

定理 3。 （紧性定理） *Let V be a finite dimensional real vector space.*

(a) *If μ is a finite positive Borel measure on V whose support spans V, then its stabilizer group*GL($V^{\mu} = \{g \in V \ g_*\mu = \mu\}$ *is closed and has the property that all its elements are*): GL( ): , , GL( ) *elliptic i.e. generate relatively compact subgroups of V .*

(b) *If $H \subseteq$*GL (V) *is a closed subgroup, such that all elements of H are elliptic, then H is compact .*

对于一个余伴随 $\mathcal{O}_\lambda$，其具有刘维尔测度 μ_λ 和 $Z_\lambda = \mathcal{L}(\mu_\lambda)$，根据定理 2，我们有解析函数

$$Q\colon \Omega_\lambda = W^\circ_{\max} \to \mathfrak{g}^*, \quad Q(x) := -\mathrm{d}\log Z_\lambda(x) = \frac{1}{Z_\lambda(x)} \int_{\mathfrak{g}^*} \alpha e^{-\alpha(x)}\, d\mu_\lambda(\alpha). \tag{5}$$

它将概率测度的期望值与 x 相关联

$$d\lambda_x(\alpha) = \frac{e^{-\alpha(x)}}{Z_\lambda(x)}\, d\mu_\lambda(\alpha)$$

在 $\mathcal{O}_\lambda$，因此 Q（x）包含于其闭凸包中，但实际上我们掌握的信息要精细得多。定义域定理表明，光滑凸函数 Z_λ 在 Ω 上$_\lambda$ 具有闭上图。由此可以根据芬切尔凸性定理（[Ne00，定理 V.3。31], [Ne19，定理 1。16]）推出 Q可经由一个微分同胚分解

$$\overline{Q}\colon \Omega_\lambda/\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = W^\circ_{\max}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{conv}(\mathcal{O}_\lambda)^\circ$$

映至 $\mathcal{O}_\lambda$ 的凸包的相对内部（定理 7.13）。这里的关键在于确定此映射的值域。该映射是映到某个开子集上的微分同胚，这一点可由拉普拉斯变换的一些相当一般的性质得出。

本文的结构如下。在第 2 节中，我们汇集了关于凸函数和测度的拉普拉斯变换的相关一般性材料。在第 3 节中，我们证明紧致性

[5]这里我们使用 我们此the Cartan –Killing 形式 κ 在 $\mathfrak{g}$ 上诱导出一个 G-等变线性同构 $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$, $x \mapsto \kappa($x 将约当分解从 $\mathfrak{g}$ 中的元素转化为 $\mathfrak{g}$*中的元素。

定理。第4节介绍可容许李代数的相关内容，并补充了关于 $\mathfrak{g}^*$ 上不变测度及其拉普拉斯变换的新结果。例如，定理 4.7 表明，若 μ 是 $\mathfrak{g}^*$ 上的不变测度，其支集张成 $\mathfrak{g}^*$，且 $D_\mu \neq \emptyset$，那么 $\mathfrak{g}$ 是可容许的，并且对于一个适配的正系，$\mathrm{supp}(\mu) \subseteq W^\star_{\min}$。第5节简要回顾与辛吉布斯系综相关的概念。第6节通过指出 $\mathfrak{g}$ 必须是可容许的，且对于 $\Omega_\lambda \neq \emptyset$，$\lambda \in W^\star_{\min}$ 是必要条件（这是定理 4.7 对余伴随轨道的刘维尔测度的推论），来着手证明分类定理。随后，我们考察辛向量空间上的作用以及可容许余伴随轨道。在第7节中，我们首先讨论单李代数中的幂零余伴随轨道，然后讨论混合轨道，最后将问题分解为 $\mathrm{Heis}(V,\Omega) \rtimes \mathrm{Sp}(V,\Omega)$ 在 (V,Ω) 上的仿射作用，以及约化李代数的情形。在第8节中，我们证明测度 μ 总能分解为余伴随轨道上的刘维尔测度（定理 8.2 ）。最后，我们在第 9 节讨论如何将结果推广到非强哈密顿作用的背景下；此时，动量映射相对于 $\mathfrak{g}^*$ 上 G 的一个适当仿射作用是协变的。

我们在第10节以简短讨论一些有趣的展望作结。特别是，值得进一步探究余伴随轨道上的吉布斯系综与 C^*-代数 $B(\mathcal{H})$ $\mathcal{H}$ 的吉布斯态之间更紧密的联系，其中 [Si23] 研究了酉最高权表示中的KMS态（U， $\mathcal{H}$）。于是，算子$e^{-i\partial U(x)}$, $x \in W^\circ_{\max}$是迹类，因此（$U(\exp tx)$）$_{t\in\mathbb{R}}$是一个酉单参数群，并且对于任意逆温度 $\beta > 0$，都有唯一的吉布斯态。在“经典一侧”，在 $\mathfrak{g}^*$ 中，我们通过定义域定理发现，吉布斯系综在 $\mathcal{O}_\lambda$ 上具有相同的参数空间 $W^\circ{}_{\max}$。这表明，对于有限维李代数， $\mathfrak{g}^*$ 上的吉布斯系综与酉表示中的吉布斯态共享相同的几何环境。

将这一切与信息几何联系起来也很有意思。在这一背景下，关键结构是 *Fisher–Rao metric* 定义在 Ω 上的（参见 [Fr91]）。 [6] 它由二阶微分给出

$$(\mathrm{d}^2 \log Z)(x)(v,w) = \mathbb{E}_{\lambda_x}[(H_v - \overline{H}_v)(H_w - \overline{H}_w)] \geq 0, \quad \text{where} \quad \overline{H}_v := \mathbb{E}_{\lambda_x}[H_v]. \tag{6}$$

如果 $\mu = \Phi_* \lambda_M$ 的支集的凸包包含内点，那么该度量就是正定的，因为此时没有非零函数 H_v 是常数（参见命题2.4(iii)）。Souriau 的这部分工作后来由 Barbaresco 在 [Ba16]，中加以发展；他指出，Souriau 在 [So75] 中定义的度量，与信息几何中统计流形上的费希尔–饶度量相一致（另见 [Neu22, §4.3] [Ko61]，以及 [Sh07]，其中讨论了向量空间定义域上的凸函数的海森矩阵所定义的度量）。Marle 将 Souriau的概念转化为现代术语并作了进一步探讨，见 [Ma20a, Ma20b, Ma21]；另见 [Bo19, §5] 中有趣的讨论。关于它与连续介质热力学的联系，请参阅 [dS16]。

Souriau 在 [So97] 讨论了伽利略群 $\mathbb{R}^4 \rtimes \mathrm{Mot}_3(\mathbb{R})$ 和庞加莱群 ´e 群 $\mathbb{R}^{1,3} \rtimes \mathrm{SO}_{1,3}(\mathbb{R})_e$。在这两种情况下（相对论和非相对论），他发现不存在具有非平凡几何温度的余伴随轨道，因此有必要将讨论限制在子群上。关于这一事实的物理解释，我们可参阅 Souriau 的著作，其中有一段有趣的讨论。例如，对于伽利略群，吉布斯态的不存在与宇宙正在膨胀而非处于静止状态有关。在这两种情况下，子群 $\mathbb{R}^4 \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ 都具有可容许的中心扩张，我们的结果适用于这些扩张。在 [So97, (17.136)]，中，讨论了庞加莱群的子群 $H = \mathbb{R} \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ 与相对论理想气体之间的联系。

在 [BDNP23] 中证明了，在厄米单李代数中，极小幂零轨道具有非空的几何温度；并且对于 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ 的幂零轨道，费希尔–饶度量将吉布斯锥 $Q(\Omega_\lambda) = \mathrm{conv}(\mathcal{O}_\lambda)^\circ$ 变为黎曼对称空间。

非传递作用： 在本文中，我们确定了所有余伴随轨道，使得刘维尔测度的拉普拉斯变换的定义域非空。一般而言，Souriau 李群

[6] 它被 Souriau 称为 *geometric capacity*，被 Barbaresco 称为 *heat capacity*。

热力学导出一个 Ad*(G)-不变测度 μ，其定义在 $\mathfrak{g}^*$ 上，支集张成 $\mathfrak{g}^*$，并且对于某个 $\mathfrak{g}$ 中的点，$\mathcal{L}(\mu)$ 是有限的。随后，定理 4.7 表明，对于一个相适配的正系 Δ^+，$\Psi(M) \subseteq W^\star_{\min}$，其中 $C_{\min}$ 是尖的且包含于 $C_{\max}$ 中。在定理 8.2 中，我们证明存在一个可测子集 $S \subseteq \Psi(M)$ 以及一个定义在 S 上的测度 ν，对于该测度，

$$\mu = \int_S \mu_\lambda \, d\nu(\lambda), \quad \text{and thus} \quad \mathcal{L}(\mu)(x) = \int_S \mathcal{L}(\mu_\lambda)(x) \, d\nu(\lambda). \tag{7}$$

根据定义域定理 2，对所有 $x \in W^\circ_{\max}$，$\mathcal{L}(\mu_\lambda)(x) < \infty$，因此 $\mathcal{L}(\mu)$ 的有限性性质只取决于截面上的测度 ν。我们在第 8 节证明，若 $\mathcal{C} \subseteq W^\star\text{min}$ 是开集且不含仿射直线，并且 G 含有一个格 Γ，即 Γ 是离散的且 $\text{vol}(G/\Gamma) < \infty$，那么勒贝格测度 $\lambda_{\mathfrak{g}^*}$ 在 $\mathcal{C}$ 上的限制可作为 $M \subseteq T^*(\Gamma\backslash G)$ 的 μ 出现，而 (7) 给出了 $\lambda_{\mathfrak{g}^*}|_{\mathcal{C}}$ 分解为余伴随轨道上的刘维尔测度的“普朗歇尔分解”。若 $\mathfrak{g}$ 是阿贝尔的，则所有余伴随轨道都是平凡的，刘维尔测度 μ_λ 因而是点测度，所以 $\mathcal{L}(\mu) = \mathcal{L}(\nu)$。

致谢：我们感谢 Tobias Simon 阅读本文初稿并提出诸多意见，帮助我们改进了文章的表达。我们也感谢 Toshiyuki Kobayashi 指出了 Rao 的论文 [Rao72]，我们借此处理了幂零轨道。感谢 Pierre Bieliavsky 就信息几何进行启发性的讨论，并指出了 [BDNP23] 和 [Neu22]。我们也感谢 Nicolo Drago 就几何 KMS 态和 Weinstein 的论文 [We97], 所作的讨论；正是这篇论文促成了整个项目。我们还要感谢 Yves Cornulier 与我们就线性挠群进行启发性的邮件交流，由此得以给出一个极为有效的紧性定理证明 3。感谢 F. Barbaresco 慷慨提供有关 Souriau 李群热力学、信息几何以及 Koszul 关于凸域上传递仿射作用的研究之间联系的参考文献。最后，感谢 Yoshiki Oshima 指出了 du Cloux 的论文 [dCl91]，它可用于证明约化李代数的余伴随轨道的刘维尔测度是温和的。最终，我们通过适当的凸性定理7.5来处理轨道投影，绕过了 du Cloux 关于半代数簇上施瓦茨函数的复杂理论。这足以得到所需的拉普拉斯变换有限性，甚至还证明了 μ_λ 在 Ω 下是温和的$_\lambda \neq \emptyset$ (定理7.14)。

2 凸集与函数

本节汇总一些关于凸集、凸函数以及正测度的拉普拉斯变换的基本事实。

设 V为有限维实向量空间，V^* 为其对偶空间。我们记 $\langle \alpha, v \rangle = \alpha(v)$ 表示自然配对 $V^* \times V \to \mathbb{R}$。对于子集 $C \subseteq V^*$，我们考虑 *dual cone*

$$C^\star := \{v \in V : (\forall \alpha \in C)\ \alpha(v) \geq 0\} \quad \text{and also} \quad B(C) := \{v \in V :\ \inf\langle C, v\rangle > -\infty\} \tag{8}$$

（参见 [Ne00，§V。1]）。二者都是凸锥，并且 $C^\star$ 是闭的。对于凸子集 $C \subseteq V$，我们定义其*recession cone*

$$\lim(C) := \{x \in V : C + x \subseteq C\} \quad \text{and} \quad H(C) := \lim(C) \cap -\lim(C) = \{x \in V : C + x = C\}. \tag{9}$$

那么 $\lim(C)$ 是一个凸锥，而 $H(C)$ 是一个线性子空间。我们将 C° 记作 C 在由 C生成的仿射子空间 $\text{aff}(C)$ 中的内部。注意，当 $C \neq \emptyset$时有 $C^\circ \neq \emptyset$。

引理 2.1。 （[Ne10，引理 2。9]，[Ne00，命题 V.1。6]） *If $\emptyset \neq C \subseteq V$ is an open or closed convexsubset, then the following assertions hold:*

(i) $\lim(C) = \lim(\overline{C})$ *is a closed convex cone.*

(ii) $v \in$极限(C) *if and only if* $t_j c_j \to v$ *for a net with* $t_j \geq 0$, $t_j \to 0$ *and* $c_j \in C$.
(iii) *If* $c \in C$ *and* $d \in V$ *satisfy* $c + \mathbb{R}_+ d \subseteq C$, *then* $d \in \lim(C)$。
(iv) $H(C) = \{0\}$ *if and only if* C *contains no affine lines.*(v) B
$(C)^\star = \lim(C)$ *and* $B(C)^\perp = H(C)$。

函数 $f\colon V \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 若其上图是 *convex*，则称其为

$$\operatorname{epi}(f) := \{(x,t) \in V \times \mathbb{R} \colon f(x) \leq t\}$$

凸的；若其上图是闭的，则称其为 *lower semicontinuous*（参见 [Ne00，引理 V.3.1]）。对于凸函数 $f\colon D \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$（$D \subseteq V$ 凸），存在唯一的凸函数 $\bar{f}$，其上图 epi($\bar{f}$) 是 epi(f) 的闭包（[Ne00，命题 V.3.7]）。反之，若 f 是闭的凸函数，且 $D_f := f^{-1}(\mathbb{R})$，则 $f|_{D_f^\circ}$ 连续，且其闭包与 f 重合（[Ne00，命题 V.3.2]）。

引理 2.2. *Suppose that* f *is a lower semicontinuous convex function. If* f *is bounded on a ray* $v + \mathbb{R}_+ h \subseteq D_f$, *then*

$$h \in \lim(D_f) \quad \text{and} \quad f(x+th) \leq f(x) \quad \text{for all} \quad x \in D_f, t \geq 0.$$

Proof. 我们的假设意味着存在 $c \in \mathbb{R}$ 使得 $(v+th,\ c) \in \operatorname{epi}(f)$ 对所有 $t \geq 0$都成立。这意味着 $(h,\ 0) \in \lim(\operatorname{epi}(f))$（引理 2.1(iii)）。因此，对于所有 $x \in D_f$，我们有

$$(x, f(x)) + \mathbb{R}_+(h,0) \subseteq \operatorname{epi}(f),$$

这意味着，对于所有 $t \geq 0$, $f(x+th) \leq f(x)$。 □

引理 2.3. *Let* V *be a finite-dimensional real vector space and* μ *a positive Borel measure on* V^* *whose support spans* V^*. *We consider its Laplace transform*

$$\mathcal{L}(\mu)\colon D_\mu := \left\{ v \in V \colon \int_{V^*} e^{-\alpha(v)}\, d\mu(\alpha) < \infty \right\} \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{L}(\mu)(v) := \int_{V^*} e^{-\alpha(v)}\, d\mu(\alpha).$$

Then the following assertions hold:

(a) *If* $x \in D_\mu$ *and* $y \in \mathbb{R}$ *are such that*

$$\mathcal{L}(\mu)(x+ty) \leq \mathcal{L}(\mu)(x) \quad \text{for all} \quad t \geq 0, \tag{10}$$

then $y \in$支撑集$(\mu)^\star$.

(b) *Let* $y \in V$. *If there exists some* $x \in D_\mu$ *with*

$$\mathcal{L}(\mu)(x+ty) = \mathcal{L}(\mu)(x) \quad \text{for all} \quad t \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

then $y = 0$.

Proof. （a）由于凸函数 $\mathcal{L}(\mu)$ 在 D_μ 上的闭上图，条件（a）意味着（y, 0） $\in \lim$（epi（$\mathcal{L}(\mu)$））（引理 2.1（c））。单调收敛定理推出，对于 $d \in \mathbb{R}$，有

$$\lim_{t\to\infty} e^{td}\mathcal{L}(\mu)(x+ty) = \lim_{t\to\infty} e^{td} \int_{V^*} e^{-\alpha(x+ty)}\, d\mu(\alpha) = \lim_{t\to\infty} \int_{V^*} e^{t(d-\alpha(y))}\, e^{-\alpha(x)}\, d\mu(\alpha)$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{for } d < \inf\langle \operatorname{supp}(\mu), y\rangle \\ \int_{\alpha(y)=d} e^{-\alpha(v)}\, d\mu(\alpha) & \text{for } d = \inf\langle \operatorname{supp}(\mu), y\rangle \\ \infty & \text{for } d > \inf\langle \operatorname{supp}(\mu), y\rangle \end{cases}$$

（[Ne00，注 V.4。12]）。鉴于（10），对于所有 $d<0$，此极限均为 0，因此必有

$$\inf\langle \operatorname{supp}(\mu), y\rangle \geq 0, \quad \text{i.e.,} \quad y \in \operatorname{supp}(\mu)^{\star}.$$

(b) 将 (a) 应用于 y 和 $-y$，可得 $y \in \operatorname{supp}(\mu)^{\star} \cap -\operatorname{supp}(\mu)^{\star} = \operatorname{supp}(\mu)^{\perp}$。由于 $\operatorname{supp}(\mu)$ 张成 V^*，我们得到 $y=0$。 □

我们继续采用引理 2.3 中的设定。对于 $x \in D_\mu$ 和 $x^*(\alpha)=\alpha(x)$，测度

$$\mu_x := e^{-\log \mathcal{L}(\mu)(x)-x^*}\cdot \mu = \frac{e^{-x^*}\mu}{\mathcal{L}(\mu)(x)} \tag{12}$$

是 V^* 上的概率测度。如果 D_μ 在 V 和 $x \in D_\mu^\circ$ 中具有内点，则拉普拉斯变换在开凸集 D_μ° 上的光滑性意味着该测度的期望值存在，并且为

$$Q(x) := \frac{1}{\mathcal{L}(\mu)(x)}\int_{V^*} \alpha e^{-\alpha(x)}\, d\mu(\alpha) = -\mathrm{d}(\log \mathcal{L}(\mu))(x) \tag{13}$$

（[Ne00，命题 V.4。6]）。它包含于

$$C_\mu := \overline{\operatorname{conv}}(\operatorname{supp}(\mu)) \subseteq V^*. \tag{14}$$

命题 2.4 *The functions $\mathcal{L}\mu$ and $\mathcal{L}\mu$ are convex and lower semicontinuous. If* (i) $\log(\,)$, $\log(\,)$ *C_μ has interior points in $\mathfrak{g}^*$ then $\mathcal{L}\mu$ and $\mathcal{L}\mu$ are strictly convex on D_μ.*

(ii) *The function $\mathcal{L}(\mu)$ is analytic on D_μ° and has a holomorphic extension to the tube domain $D_\mu^\circ + iV$.*

(iii) *Let $N_\mu = C_\mu - C_\mu{}^{\perp}$ be the linear subspace of all elements $x \in V$ for which x^* is constant* : ( ) *on μ. Then $N_\mu + D_\mu = D_\mu$ the function $Q = -\mathcal{L}\mu$ is constant on the N_μ-cosets* 支集(),d(log ()) *and factors through a function*

$$\overline{Q}\colon D_\mu/N_\mu \to C_\mu \subseteq V^*$$

Its restriction to the relative interior D_μ°/N_μ is a diffeomorphism onto a relatively open subset of C_μ in the affine subspace generated by C_μ. If C_μ has interior points in V^*, then the bilinear form $^2\,\mathcal{L}\mu\ x$ is positive definite for all $x \in D_\mu^\circ$. d(log ( ))( )

Proof. (i) 可由 [Ne00，命题 V.4.3，推论 V.4。4]，而 (ii) 可由 [Ne00，命题 V.4。6]。(iii) 对于 $z \in N_\mu$ 和 $x \in D_\mu$，我们有

$$\mathcal{L}(\mu)(x+z) = e^{-z^*}\mathcal{L}(\mu)(x) \quad \text{and} \quad \log \mathcal{L}(\mu)(x+z) = -z^* + \log \mathcal{L}(\mu)(x).$$

这意味着 $Q(x+z) = Q(x)$。对于 $x \in D_\mu^\circ$ 和 $y \in V$，证明 [Ne00，命题 V.4.6(iii)] 中的论证表明

$$\mathrm{d}^2(\log \mathcal{L}(\mu))(x)(y,y) \geq 0,$$

具有等 式当且仅当 $y \in N_\mu$，这等价于线性函数 v^* 为 μ-几乎处处 处常数 （参见（6））。因此，对于 $\overline{y} := y + N_\mu \in V/N_\mu$，我们得到

$$\langle \mathrm{d}\overline{Q}(\overline{x})(\overline{y}), y\rangle = \langle \mathrm{d}Q(x)(y), y\rangle = -\mathrm{d}^2(\log \mathcal{L}(\mu))(x)(y,y) < 0 \quad \text{if} \quad \overline{y} \neq 0.$$

这意味着 $\mathrm{d}Q(x)\colon V/N_\mu \to \operatorname{aff}(C_\mu)$ 是单射，因此是可逆的，因为

$$\dim(V/N_\mu) = \dim N_\mu^{\perp} = \dim(\operatorname{aff}(C_\mu)).$$

因此Q: $D_\mu^\circ/N_\mu \to C_\mu$ 在仿射包 $\operatorname{aff}(C_\mu)$ 中具有开范围，并且 Q 是一个局部微分同胚。为证明其为单射，我们按照 [Ne19引理 1 中的方法进行论证。3] 其中 $f\colon = \log \mathcal{L}(\mu)$。对于 x， $x+y \in D_\mu^\circ$ 我们有

$$\langle \overline{Q}(\overline{x}+\overline{y}) - \overline{Q}(\overline{x}), y\rangle = -\int_0^1 \mathrm{d}^2 f(x+ty)(y,y)\, dt.$$

如果 $y \neq 0$，那么 $y \notin N_\mu$，因此右侧非零。所以 Q 是单射。. □

如 N_μ 命题2.4(iii) 中所述，现在有：

定理 2.5.（拉普拉斯变换凸性定理） *If $D_\mu \neq \emptyset$ is open, hence equal to Ω_μ, then Q maps Ω_μ/N_μ diffeomorphically onto C_μ°.*

Proof. 这由 [Ne00，定理 V.4.9] 得出，因为闭凸函数 log D_μ 的定义域 $\mathcal{L}(\mu)$ 按假设没有边界点，因此根据 [Ne00，引理 V.3.18(v)]，满足所需的本质光滑条件。 □

下一个命题的 (a) 部分由 [Bo96，定理 II.17], 得出，该定理更一般地讨论了温和分布。我们给出针对温和测度这一特殊情形的直接证明，并补充一个非常有用的逆命题，可用于验证测度的温和性。

命题 2.6. *Let V be a finite-dimensional real vector space and μ a positive Borel measure on V^* for which C_μ contains no affine lines i.e. $B\ C_\mu$ has interior points [00, 1 16] . Then the following assertions hold:*（拉普拉斯变换与温和性）,,() (Ne命题 V..)

(a) *If μ is tempered, then $B(C_\mu)^\circ \subseteq D_\mu$ and there exists a $k \in \mathbb{N}$, such that, for every $z \in B(C_\mu)^\circ$*

$$\limsup_{t\to 0+} \mathcal{L}(\mu)(tz)t^k < \infty.$$

(b) *If there exists an $x \in B(C_\mu)^\circ$ and $k \in \mathbb{N}$, such that*

$$\limsup_{t\to 0+} \mathcal{L}(\mu)(tx)t^k < \infty,$$

then μ is tempered.

Proof。 我们将 V扩展到空间 $\widetilde{V} = V \times \mathbb{R}$，并将 μ 视为 $V^* \times \{1\} \subseteq \widetilde{V}^*$上的测度。Th en

$$\mathcal{L}(\mu)(x,t) = e^{-t}\mathcal{L}(\mu)(x)$$

并且 aff$(C_\mu) \subseteq V^* \times \{1\}$ 是一个不包含 0 的仿射超平面。这意味着

$$C := \operatorname{cone}(C_\mu) = \mathbb{R}_+ C_\mu \cup \big(\lim(C_\mu) \times \{0\}\big)$$

是一个尖凸锥（[Ne00，命题 V.1。15]）并且

$$B(C_\mu) = C_\mu^\star + \mathbb{R}(0,1) = C^\star + \mathbb{R}(0,1).$$

(a) 我们需要证明 $(C^\star)^\circ \subseteq D_\mu$。

设 $z = (x,c) \in (C^\star)^\circ$。那么 $C_1 := \{\alpha \in C\colon \alpha(z) = 1\}$ 是锥 C的一个紧基。我们在 $\widetilde{V}$上选取一个范数 $\|\cdot\|$，使其单位球 B 包含 C_1，从而

$$\alpha(z) \geq \|\alpha\| \quad \text{for all} \quad \alpha \in C \supseteq C_\mu. \tag{15}$$

由于 μ 是温和的，按照定义，存在一个 $k \in \mathbb{N}$，使得 $\int_{V^*} \frac{d\mu(\alpha)}{(1+\|\alpha\|^2)_k} < \infty$. 现在，我们得到 μ的拉普拉斯变换

$$\mathcal{L}(\mu)(z) = \int_{C_\mu} e^{-\alpha(z)}\, d\mu(\alpha) \leq \int_{V^*} e^{-\|\alpha\|}\, d\mu(\alpha) = \int_{V^*} \underbrace{e^{-\|\alpha\|}(1+\|\alpha\|^2)^k}_{\text{bounded}} \frac{d\mu(\alpha)}{(1+\|\alpha\|^2)^k} < \infty.$$

由于 $z \in (C^\star)^\circ$ 是任意的，这就证明了 $(C^\star)^\circ \subseteq D_\mu$。

对于 $t>0$，我们进一步得到

$$\mathcal{L}(\mu)(tz)=\int_{C_\mu} e^{-t\alpha(z)}\,d\mu(\alpha)\le\int_{V^*} e^{-t\|\alpha\|}\,d\mu(\alpha)=\int_{V^*}\underbrace{e^{-t\|\alpha\|}(1+\|t\alpha\|^2)^k}_{\text{bounded}}\frac{(1+\|\alpha\|^2)^k}{(1+\|t\alpha\|^2)^k}\frac{d\mu(\alpha)}{(1+\|\alpha\|^2)^k}.$$

As

$$t^{2k}\frac{(1+\|\alpha\|^2)^k}{(1+t^2\|\alpha\|^2)^k}=\frac{(t^{2k}+\|t\alpha\|^2)^k}{(1+\|t\alpha\|^2)^k}\le 1\quad\text{for}\quad 0<t\le 1,$$

由此可得 $\limsup_{t\to 0+}\mathcal{L}(\mu)(tz)t^{2k}<\infty$.

(b) 鉴于(a)的证明之前的构造，不妨设 $\operatorname{supp}(\mu)$包含于一个尖闭凸锥 C 中，并且 $x\in(C^\star)^\circ$。我们的假设意味着存在 $c>0$ 和 $\delta>0$ ，使得

$$\mathcal{L}(\mu)(tx)\le ct^{-k}\quad\text{for}\quad 0<t\le\delta.$$

对于测度 $\mu_x:=(x^*)_*\mu$ 在 $\mathbb{R}$上，我们有 $\mathcal{L}(\mu_x)(t)=\mathcal{L}(\mu)(tx)$，因此 [FN ´O25，命题 4] 表明测度 μ_x 在 $\mathbb{R}$ 上是温和的，从而存在一个 $m\in\mathbb{N}$ 满足

$$\int_C\frac{d\mu(\alpha)}{(1+\alpha(x)^2)^m}=\int_{\mathbb{R}}\frac{d\mu_x(\alpha)}{(1+\alpha^2)^m}<\infty.$$

We c选取 V^* 上的一个范数 $\|\cdot\|$ ，使得 $\|x^*\|\le 1$，从而对于 $\alpha\in V^*$有 $|\alpha(x)|\le\|\alpha\|$。于是我们有

$$\int_{V^*}\frac{d\mu(\alpha)}{(1+\|\alpha\|^2)^m}\le\int_C\frac{d\mu(\alpha)}{(1+\alpha(x)^2)^m}=\int_{\mathbb{R}}\frac{d\mu_x(\alpha)}{(1+\alpha^2)^m}<\infty.\qquad\square$$

熵与吉布斯测度

定义 2.7。设 λ_M 是流形 M 上的一个正博雷尔测度， V 是一个有限维实向量空间，且 $\Psi\colon M\to V^*$ 是一个光滑映射。我们将 V^* 上的推前测度记为 $\mu:=\Psi_*\lambda_M$。

(a) *related Gibbs measure* 是形如以下形式的测度

$$d\lambda_x(m)=e^{-z(x)-\Psi(m)(x)}\,d\lambda_M(m)\quad\text{with}\quad z(x)=\log\int_M e^{-\Psi(m)(x)}\,d\lambda_M(m).$$

我们将 V^* 上相应的概率测度记为 $\mu_x:=\Psi_*\lambda_x$。

(b) 概率测度 λ_x 关于密度函数的 *entropy*

$$p_x=e^{-z(x)-\langle\Psi(\cdot),x\rangle}$$

定义为

$$\begin{aligned}s(x):=-\int_M\log(p_x)\cdot p_x\,d\lambda_M&=-\int_M\log(p_x)\,d\lambda_x\\&=\int_{V^*}\alpha(x)+z(x)\,d\mu_x(\alpha)=Q(x)(x)+z(x).\end{aligned}\tag{16}$$

定理 2.8 [97, 16.200] *Let λ_x be a Gibbs measure on M related to the continuous* .. (因此定理(.)): *map $\Psi\ \ M\to V^*$ and the measure λ_M on M. Suppose that the expectation value*

$$Q(x)=\int_M\Psi\,d\lambda_x=\int_{V^*}\alpha\,d\mu_x(\alpha)\quad of\quad\mu_x=\Psi_*\lambda_x$$

exists. Then the λ_M-entropy $s(x)$ exists and equals

$$s(x)=z(x)+Q(x)(x).\tag{17}$$

All other probability measures which are completely continuous with respect to λ_M and with the same expectation value $Q\ x$ have an entropy strictly less than $s\ x$. ()()

3 线性群的不变概率测度

本节的出发点是庞加莱′复现定理3.1。我们将用它推导出：若连通李群 $G \subseteq \mathrm{GL}(V)$ 保持概率测度 μ 于 V，且其支集张成 V，那么 G 的闭包是紧的。因此，只有紧群才会产生刘维尔测度有限的余伴随轨道。不过，我们将在下文看到，关于不变（不一定有限）测度的拉普拉斯变换定义域的开性，还能得出更强的结论 $\mathfrak{g}^*$。特别是，在李代数中几何温度的语境下，我们将看到，只要测度$D_\mu \subseteq \mathrm{comp}(\mathfrak{g})^\circ$ 张成 μ $\mathfrak{g}^*$。

定理 3.1 ′ *Let X Σ μ be a finite measure space and f $X \to X$ ..* (庞加莱复现定理) (,,): ,, *be a measure preserving Borel automorphism. Then for any $E \in \Sigma$ the sets*

$$E_+(f) := \{x \in E \colon (\exists N \in \mathbb{N}_0)(\forall n > N)\ f^n(x) \notin E\} = E \setminus \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n>N} f^{-n}(E)$$

and $E_-(f) : = E_+(f^{-1})$ have measure zero.

这意味着，几乎每个点 $x \in E$ 都会返回到 E，也就是说，存在一个严格递增的自然数序列 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$，使得 $f^{n_k}(x) \in E$，并且对于 f^{-1}也同样成立。

Proof. 为完整起见，我们给出这一简单证明的概要（参见 [Na13, §1.29]）。由于 f^{-1} 也满足该假设，只需证明 $\mu(E_+(f)) = 0$即可。我们考虑可测子集

$$F := \{x \in E \colon (\forall k \geq 1)\, f^k(x) \notin E\} = E \setminus \bigcup_{k>0} f^{-k}(E).$$

然后很容易看出，序列 $(f^n(F))_{n\in\mathbb{Z}}$ 中的集合两两不交。因此，不变性和测度的有限性意味着 $\mu(F) = 0$, 从而 $\bigcup_{k\geq 0} f^k(F) \supseteq E_+(f)$ 也是一个 μ-零集。 □

在下述引理中，我们将使用有限维实向量空间 V 上的 $g \in \mathrm{GL}(V)$ 的乘法约尔当分解 $g = g_e g_h g_u$。这些分解由唯一确定且彼此交换的因子构成，其中 g_e 是椭圆的（可在 $\mathbb{C}$ 上对角化，且特征值的绝对值为 1），g_h 是双曲型的（可对角化且特征值为正），而 g_u 是幺幂的，即对于某个 $N \in \mathbb{N}$，有 $(g_u - \mathbf{1})^N = 0$。

引理 3.2 *Let V be a finite-dimensional real vector space and $g \in$ V . We write $g = g_e g_h g_u$ .. for its multiplicative Jordan decomposition into elliptic hyperbolic and unipotent factor. Then the* GL(),*following assertions hold:*

(a) *If $v \in V$ then one of the sequences $g^n v$ or $g^{-n} v$ eventually leaves every compact subset of V if , and only if v is not fixed by $g_h g_u$.*
(b) *If μ is a finite g-invariant Borel measure on V, then* $\mathrm{supp}(\mu) \subseteq \mathrm{Fix}(g_h g_u)$。

Proof. 由于 $g_e^{\mathbb{Z}}$在 $\mathrm{GL}(V)$ 中具有紧闭包，因此存在一个定义在 V 上的 g_e-不变范数。(a) 假设 $v \in V$不是 g的可三角化若尔当分量 $g_h g_u$的不动点。令

$$V_\lambda(g_h) = \ker(g_h - \lambda \mathbf{1})$$

为双曲因子 g_h 的特征子空间，并回忆所有特征值均为正 .
步骤 1： 我们考虑未被 g_u 固定的 $v \in V$ 以及线性子空间

$$W := \mathrm{span}\{g_u^n.v \colon n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq V,$$

根据我们的假设，其维数为 $W>1$。由于 $g_u-\mathbf{1}$ 在 W 上是非零幂零的，若尔当标准形意味着，对于 $k\leq$ 维数 W，有 $\dim(g_u-\mathbf{1})^kW=\dim\ W-k$，因此 $W:=W/(g_u-\mathbf{1})^2W$ 是二维的。在这个空间中，v 的像 v 满足

$$(\overline{g}_u-\mathbf{1})\overline{v}\neq 0 \quad \text{and} \quad (\overline{g}_u-\mathbf{1})^2\overline{v}=0,$$

以便

$$\overline{g}_u^n.\overline{v}=\overline{v}+n(\mathbf{1}-\overline{g}_u)\overline{v} \quad \text{for} \quad n\in\mathbb{Z}.$$

由于这个序列在 W 中正、负两个方向上都无界，因此序列 $\overline{g_u^n}.v$ 在 V 中也同样如此。**步骤 2：** 如果存在特征值 $\lambda>1$，那么 v 在这个特征子空间中有非零分量 v_λ，而这个特征子空间是 g_hg_u 的广义特征子空间。于是

$$\|g^n.v_\lambda\|=\lambda^n\|g_u^n.v_\lambda\|,$$

并且，如果 g_u 不固定 v_λ，那么由步骤 1 可知 $\|g_u^n.v_\lambda\|\to\infty$；否则，对所有 $n\in\mathbb{Z}$ 都有 $g_u^n.v_\lambda=v_\lambda$。在这两种情况下，$\lambda>1$ 都意味着 $\|g^n.v_\lambda\|\to\infty$。

如果 g_h 存在特征值 $\lambda<1$，那么同样的论证适用于 $g^{-1}=g_e^{-1}g_h^{-1}g_u^{-1}$，并表明 $\|g^{-n}.v_\lambda\|\to\infty$。

步骤 3： 鉴于步骤 1 和步骤 2，$g^n.v$ 和 $g^{-n}.v$ 均不趋于无穷大的必要条件是：在由 v 生成的循环子空间上，有 $g_h=\mathbf{1}$，即其所有特征值均为 1，并且 $g_u=\mathbf{1}$ 也成立。这意味着 $g_hg_u.v=v$。反过来，如果满足这一条件，那么序列 $g^n.v=g_e^n.v$ 有界。至此，(a) 的证明完成。

(b) 如果 $v\in V$ with $(g_hg_u).v\neq v$，那么根据 (a)，要么 $g^nv\to\infty$，要么 $g^{-n}v\to\infty$。由此可知，对于每个紧子集 $C\subseteq V\setminus\mathrm{Fix}(g_hg_u)$，没有点 $v\in C$ 对 g 和 g^{-1}是回归的。根据庞加莱回归定理（定理 3.1），所有满足 $g^n.v\to\infty$ 的 $v\in C$ 构成的集合测度为零，所有满足 $g^{-n}.v\to\infty$ 的 $v\in C$ 构成的集合也是如此。这表明 $\mu(C)=0$，因此 $\mu(V\setminus\mathrm{Fix}(g))=0$，因为开集 $V\setminus\mathrm{Fix}(g)$ 是可数个紧子集的并。由此可知 $\mathrm{supp}(\mu)\subseteq\mathrm{Fix}(g_hg_u)$。 □

定理 3.3。（紧性定理） *Let V be a finite dimensional real vector space.*

(a) *If μ is a finite positive Borel measure on V whose support spans V, then its stabilizer group* GL($V^{\mu}=\{g\in V\ g_*\mu=\mu\}$ *is closed and has the property that all its elements are*): GL( ): , , GL( ) (b) *I elliptic i.e. generate relatively compact subgroups of V.*

f $G\subseteq$ GL(V) is a closed subgroup, such that all elements of G are elliptic, then G is compa ct.

Proof. (a) 对于 $\xi\in C_c(V)$，函数

$$\mathrm{GL}(V)\to\mathbb{R},\quad g\mapsto\int_V\xi(v)\,d(g_*\mu)(v)\int_V\xi(gv)\,d\mu(v)$$

是连续的，因此稳定子 $\mathrm{GL}(V)^\mu$ 是 $\mathrm{GL}(V)$ 的闭子群。 [7] 根据引理 3.2(b)，所有元素 $g\in\mathrm{GL}(V)^\mu$ 都是椭圆的，即 $g=g_e$。

(b) 由于 [g,rad(g)] 由幂零元组成（[HN12, §5.4.2]），其指数像由幺幂元素组成，因此是平凡的。因此 rad(g) 是 g 中心的，这意味着 g 是约化的。嘉当分解表明，任何非紧实单李代数都包含非零的伴随可对角化元素，且它们的指数像是双曲型的。由于这不可能成立，g 的所有单理想都是紧的，由此可知 g 是紧李代数。现在我们有 $\mathfrak{g}=\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\oplus[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$，其中 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 是紧半单的。于是李群 $\langle\exp[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\rangle$ 是紧的（[HN12, Thm. 12.1.17]）。$\exp(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))$ 也有紧闭包，这可由以下事实得出：对于每个 $x\in\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$，$\exp(\mathbb{R}x)=\exp([0,1]x)\exp(\mathbb{Z}x)$ 有紧闭包，因为 $\exp(x)$ 是椭圆的。

[7] 根据 [Zi84，定理 3.2.4] 并且将 $\mathrm{GL}(V)$ 嵌入 $\mathrm{PGL}(V\oplus\mathbb{R})$，甚至可以证明这个群是代数的。

这意味着单位连通分支 G_e 是紧的。此外，对于每个 $g \in G$，闭子群 $g^{\mathbb{Z}} \subseteq G$ 都是紧的，因此至多有有限个连通分支。因此 $\pi_0(G) := G/G_e$ 是一个挠群。

由于 G_e 是紧的，因此也是扎里斯基闭的，所以它的正规化子 $N \subseteq \mathrm{GL}(V)$ 是一个包含 G的实代数群。在 N中，单位连通分支 G_e 是一个正规代数子群，因此 $H := N/G_e$ 是一个仿射代数群，因而可实现为某个 $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ 的代数子群。在 H的李群拓扑下，G 的像是离散的，并且同构于 $\pi_0(G)$，故为离散挠群。因此，[Wa74] 中的推论表明，$\pi_0(G)$ 是有限的。这证明了 G 是紧的。

除了 Wang 的论文之外，我们还可以使用 [Le76，引理 2]，，其断言连通李群的每个挠子群都包含在某个极大紧子群中。这意味着$G \cap N_e$ 的像在 H中的闭包是紧的；但由于它也是离散的，所以它是有限的。由于 N 是代数的，群 $\pi_0(N)$ 是有限的（[BHC62，命题 2.3]），因此 $G \cap N_e$ 在 G中具有有限指数，从而 G 是紧的。 □

我们感谢 YvesCornulier 在前一个证明中使用代数群进行约化论证，并指出了下面这个线性群的例子 Γ：它既不是闭的，也不是相对紧的，尽管它的所有元素都是椭圆元素。

例3.4。 我们考虑群

$$G := \mathbb{C}^2 \rtimes \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \subseteq \mathrm{Aff}(\mathbb{C}^2) \subseteq \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}).$$

于是，每个满足 $u \neq \mathbf{1}$ 的元素 $(v,\ u) \in G$ 都共轭于 $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ 中的一个元素，因为 u 没有非零不动点，因此任意满足 $uw - w = v$ 的 $w \in \mathbb{C}^2$ 都将 $(v,\ u)$ 共轭为 $(v + w - uw,\ u) = (\mathbf{0},\ u)$。因此，正规阿贝尔子群 $A := \mathbb{C}^2 \times \{\mathbf{1}\}$ 的补集 G 由椭圆元素组成。

接下来我们回顾，李代数 $\mathfrak{g} = \mathbb{C}^2 \rtimes \mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ 由两个元素 a, b ([Ku51，定理 6]) 生成。事实上，设 $x, y \in \mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ 是两个生成元，并考虑形如 $a = (\mathbf{0}, x)$ $b = (v, y) \in \mathfrak{g}$ 的元素。由于 $\mathrm{ad}\ x$ 在 $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ 上的特征值不同于在 $\mathbb{C}^2$ 上的特征值，很容易推出，a 和 b 生成完美李代数 $\mathfrak{g}$。Kuranishi 证明，可以选择这些元素，使得 $g := \exp(a)$ 和 $h := \exp(b)$ 到 $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ 的投影生成一个自由子群（[Ku51，定理 8]），并且由 g 和 h 生成的群 Γ 在 G 中稠密。投影到 $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ 的自由性随后意味着 $\Gamma \cap A = \{e\}$。因此，Γ 由椭圆元素组成，但其闭包 G 不是。

现在，我们介绍一种不同的论证方法，用于证明概率测度在 $\mathrm{GL}(V)$ 中的稳定子的紧致性。该方法采用 Shalom 对 Furstenberg 引理的变体（参见 [Sh98，第 171]，[Fu76，引理 3]），该引理处理射影空间上的测度。

引理 3.5。 (Furstenberg–Shalom 引理) *Let k be a locally compact, non-discrete field and $H \subseteq \mathrm{GL}_n(k)$ be an algebraic subgroup, μ a probability measure on the projective space $\mathbb{P}_{n-1}(k) = \mathbb{P}(k^n)$ and H^μ the stabilizer group of μ in H. Then there exist finitely many linear subspaces $V_1 \ldots V_\ell \subseteq k^n$, , such that*

$$\mu([V_1] \cup \cdots \cup [V_\ell]) = 1,$$

and an algebraic normal cocompact subgroup $H_S \subseteq H^\mu$ which fixes every point in

$$S := [V_1] \cup \cdots \cup [V_\ell].$$

Shalom 根据这个引理得出：如果 $H \subseteq \mathrm{GL}_n(k)$ 是半单代数的，且 $G \subseteq H$ 是可和的并在 H 中扎里斯基稠密，那么 G 具有紧闭包。在我们的语境中，这为紧性定理中 (a) 和 (b) 的组合提供了以下更直接但信息较少的证明：

Proof. 设 μ 是 V 上的一个概率测度，其支集张成 V。我们需要证明，在代数群 $H := \mathrm{GL}(V)$ 中， μ 的稳定子 H^μ 是紧的。为此，我们考虑扩张空间 $\widetilde{V} := V \times \mathbb{R}$，并将 V 嵌入为仿射子空间 $A := V \times \{1\}$。那么 $[A] \subseteq \mathbb{P}(\widetilde{V})$ 是一个稠密开子集，我们将 μ 视为 A 上的概率测度。此外，

$$H = \mathrm{GL}(V) \hookrightarrow \mathrm{PGL}(\widetilde{V}), \quad g \mapsto [g \oplus 1]$$

是到某个代数子群上的闭嵌入。设 $V_1, \ldots\ldots, V_\ell$ 如引理 3.5 所述。则 μ 的支集包含于 $V_j \cap A$ 中的仿射子空间 $A \cong V$之并。现在，我们的假设意味着仿射空间 $V_j \cap A$ 作为线性空间张成 V。因此，这个并集在 $\mathrm{GL}(V)$ 中的逐点稳定子是平凡的，故 Furstenberg 引理（如 ¨Sh98，第 171], 页所述）推出 H^μ 对 μ 的稳定子是紧的。 □

余伴随轨道的应用

推论 3.6 *Let G be a finite-dimensional Lie group with Lie algebra $\mathfrak{g}$ and μ an G-invariant Borel measure on $\mathfrak{g}^*$ whose support spans $\mathfrak{g}^*$. Then for every $x \in \mathfrak{g}$ with $\mathcal{L}\mu\ x < \infty$ we have* $\mathrm{Ad}()$, $()()$, $\ker(\mathrm{ad}\, x) \subseteq \mathrm{comp}(\mathfrak{g})$ *and $x \in \mathrm{comp}(\mathfrak{g})^\circ$* (参见定义 4.1(b))。

Proof. 若 $H_x(\alpha) = \alpha(x)$ 表示 $\mathfrak{g}^*$ 上的求值泛函，那么我们的假设意味着，$e^{-H_x}\mu$ 是 $\mathfrak{g}^*$ 上的有限正博雷尔测度，且在群 $\mathrm{Ad}(G^x)$ 的作用下不变。因此，定理 3.3 意味着 $\mathrm{Ad}(G^x)$ 相对紧，从而 $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(x) = \ker(\mathrm{ad}\, x) = \mathrm{L}(G^x)$ 紧嵌入，故包含于 $\mathrm{comp}(\mathfrak{g})$ 中。由 [Ne00, Lemma VII.1.7(c)] 可知，这等价于 $x \in \mathrm{comp}(\mathfrak{g})^\circ$ 。 □

C推论 3.7。 *Let $\mathcal{O}_\lambda \subseteq \mathfrak{g}^*$ be a coadjoint orbit spanning $\mathfrak{g}^*$. Then the following are equivalen t:*

(a) *The Liouville measure μ_λ is finite.*

(b) *$\mathfrak{g}$ is a compact Lie algebra.*(c)

$\mathcal{O}_\lambda$ is compact.

Proof. (b) $\Rightarrow$ (c)：对于紧李代数 $\mathfrak{g}$，伴随群是紧的，因此所有余伴随轨道都是紧的。

(c) $\Rightarrow$ (a) 源于刘维尔测度在紧子集上的测度有限。(a) $\Rightarrow$ (b)：这是非平凡的部分。它由推论 3.6 得出。 □

推论 3.8 *If $\mathcal{O}_\lambda \subseteq \mathfrak{g}^*$ is a coadjoint orbit of finite Liouville measure then the quotient $\mathfrak{g}/\mathcal{O}_\lambda^\perp$ is . . . a compact Lie algebra.*

Proof. 如果 μ_λ 是有限的，那么推论 3.7 适用于商李代数 $\mathfrak{g}/\mathcal{O}_\lambda^\perp$，其对偶由 $\mathcal{O}_\lambda$.张成

□

4 可容许李代数

设 G 是一个连通李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。第4.1小节介绍可容许李代数。描述可容许李代数精细结构的关键工具，是相对于紧嵌入的嘉当子代数的根分解（第4.2小节）。在第4.3 小节中，我们简要回顾 [Ne96b] 和 [Ne00] 中关于不变凸函数与根分解之间关系的内容。第4.4小节描述可容许李代数的结构。本节最后在第4.7 小节证明定理4.5。证明利用了 $D_\mu \neq \emptyset$ ： 对于 μ 上的不变测度 $\mathfrak{g}^*$，若其支集张成 $\mathfrak{g}^*$，则可得出 $\mathfrak{g}$ 是可容许的，并且 $\mathrm{supp}(\mu) \subseteq W^\star_{\min}$ 适用于某个正系。

4.1 从不变凸函数到可容许李代数

定义 4.1。(a) 若李代数 $\mathfrak{g}$ 包含一个非空开不变凸子集，且该子集不含仿射直线，则称其为 *admissible* 。

(b) 若元素 $x \in \mathfrak{g}$ 所生成的单参数子群 $e^{\mathbb{R}\operatorname{ad} x} \subseteq \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ 的闭包是紧的，也就是说，若 $\operatorname{ad} x$ 是半单且具有纯虚谱，则称元素 $x \in \mathfrak{g}$ 为 *elliptic* 或 *compact*。我们用 $\mathrm{comp}(\mathfrak{g})$ 表示 $\mathfrak{g}$ 中所有紧元构成的集合。

(c) 若由 $e^{\operatorname{ad}\mathfrak{s}} \subseteq \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ 生成的子群的闭包是紧的，则称子代数 $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{g}$ 为 *compactly embedded* 。

注 4.2。(a) 单李代数 $\mathfrak{g}$ 可容许，当且仅当它是紧的或厄米的，也就是说，极大紧嵌入子代数 $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g}$ 具有非平凡中心（参见 [Ne00，命题 VII.2。14]）。对于紧李代数，可容许性源于不变范数的存在，因此范数球是不变的，且不包含仿射直线。对于厄米李代数，可容许性源于尖生成不变锥的存在。这是表示中存在不变锥的 Kostant–Vinberg 定理的推论（参见 [Vi80]）。关于一种相当直接的论证，参见 [HN93，定理 VII。25] 以下列出单厄米李代数：

$$\mathfrak{su}_{p,q}(\mathbb{C}), \qquad \mathfrak{so}_{2,d}(\mathbb{R}),\ d>2, \qquad \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R}), \qquad \mathfrak{so}^*(2n), \qquad \mathfrak{e}_{6(-14)}, \quad \mathfrak{e}_{7(-25)}.$$

(b) 一个约化李代数 $\mathfrak{g}$ 是可容许的，当且仅当它的所有单理想都是可容许的（[Ne00，引理 VII.3。3]）。

设 $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathfrak{g}$ 是一个 $\mathrm{Ad}(G)$-不变凸子集，$f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ 是一个在伴随作用下不变的凸函数，也就是说，它在伴随轨道上为常数。那么子集

$$\mathfrak{n}_f := \{x \in \mathfrak{g}\colon x + \Omega = \Omega,\ (\forall y \in \Omega)\, f(x+y) = f(y)\} \tag{18}$$

是 $\mathfrak{g}$ 的理想，因为 f 是 $\mathrm{Ad}(G)$-不变且 $\mathrm{Ad}(G)$-不变的线性子空间，而 $\mathfrak{g}$ 的线性子空间都是理想。函数 f 在陪集 $x + \mathfrak{n}_f$ 上为常数。因此，f 可通过商李代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}_f$ 中凸子集 $\Omega/\mathfrak{n}_f$ 上的一个凸函数来表示。若 $\mathfrak{n}_f = \{0\}$，我们称 f *reduced* 。因此，下面的命题断言，约化的凸函数的存在意味着 $\mathfrak{g}$ 是可容许的。

命题 4.3。 *Suppose that* $\mathfrak{n}_f = \{0\}$.

(a) *If* Ω *is open, then the following assertions hold:*

- $\mathfrak{g}$ *is admissible,*
- *For* $c \in \mathbb{R}$, *the open subset* $\Omega_c := \{x \in \Omega\colon f(x) < c\}$ *contains no affine lines.*
- $\Omega \subseteq \mathrm{comp}(\mathfrak{g})$ (cf. Definition 4.1).

(b) *Suppose that* f *is closed* f *for each* $c \in \mathbb{R}$ *the subset* , $D_c = \{f \le c\}$ *is closed and convex not containing affine lines.*
i.e., epi() *is closed in* $\mathfrak{g} \oplus \mathbb{R}$. *Then,*,:,(c) *If* f *is closed and* $\mathfrak{g} =$ span D_f, *then* $\mathfrak{g}$ *is admissible.*

Proof. 设 $c \in \mathbb{R}$ 满足开子集 $\Omega_c := \{x \in \Omega\colon f(x) < c\}$ 非空。由于 f 连续且不变，并且 Ω 也是不变的，因此子集 Ω_c 是 $\mathfrak{g}$的开凸不变子集。若$x + \mathbb{R}y \subseteq \Omega_c$是一条仿射直线，则 f在这条直线上有上界，因此作为有界凸函数，它必为常数。由引理 2.1 可知，$\Omega_c + \mathbb{R}y = \Omega_c$，因此根据引理 2.1(iii)，$y \in H(\Omega)$。进一步可得 $(y, 0) \in H(\mathrm{epi}(f))$（见 (9)），因此 f在所有仿射直线 $z + \mathbb{R}y$, $z \in \Omega$ 上有界，故为常数。因此 $y \in \mathfrak{n}_f = \{0\}$，由此得出 Ω_c 不含仿射直线。因此 $\mathfrak{g}$ 是可容许的。

$\mathfrak{g}$ =
对于 $c \in \mathbb{R}$，包含关系 $\Omega_c \subseteq \mathrm{comp}(\bigcup_{c\in\mathbb{R}} {}_c \subseteq$ $\mathfrak{g}$.)
现在由 [Ne00，命题 VII.3.4(e)], 从而 Ω Ω comp( )

(b) 假设 $D_c \neq \emptyset$。注意，该子集是闭的且在 Ad(G) 下不变。任意仿射直线$x + \mathbb{R}y \subseteq D_c$ 都可通过与 (a) 中相同的论证得出 f 在所有直线 $z + \mathbb{R}y$、$z \in D_c$ $y = 0$ 上为常数，我们如上所述得出结论。

(c) 假设 D_f张成 $\mathfrak{g}$，这意味着 D_f在 $\mathfrak{g}$中有内点，或者位于一个真仿射超平面 aff(D_f中。将 f限制在相对内部$D_f^\circ \subseteq$aff(D_f上，我们得到一个连续函数。因此，对于任意$x_0 \in D_f^\circ$和 $c > f(x_0)$，下水平集 D_c在 aff(x_0中包含D_f的一个邻域，因而也张成 $\mathfrak{g}$。由于不变闭凸子集 D_c不包含仿射直线，[Ne00，引理 VII.3。1] 以及可容许性的定义表明 $\mathfrak{g}$是可容许的。 □

4.2 根分解

若李代数$\mathfrak{g}$中的紧元子集 comp($\mathfrak{g}$ 具有内点，例如命题 4 3, [00, 1 8] *compactly embedded* 的情形。那么Ne定理 VII. . 蕴含存在一个 *Cartan subalgebra* $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{g}$ $\mathfrak{t}$，即该李代数是阿贝尔的、紧嵌入的，并且与其自身的中心化子重合：

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) := \{x \in \mathfrak{g} \colon [x, \mathfrak{t}] = \{0\}\}.$$

于是我们得到根分解

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}, \quad \text{where} \quad \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha} := \{x \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \colon (\forall h \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})\, [h, x] = \alpha(h)x\}$$

and

$$\alpha(\mathfrak{t}) \subseteq i\mathbb{R} \quad \text{for every root} \quad \alpha \in \Delta := \{\alpha \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^* \setminus \{0\} \colon \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha} \neq \{0\}\}.$$

对于 $x + iy \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，我们设 $(x + iy)^* := -x + iy$，使得

$$\mathfrak{g} = \{x \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \colon x^* = -x\}.$$

于是，对于 $x_\alpha \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}$，我们有 $x_\alpha^* \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{-\alpha}$。我们称根 $\alpha \in \Delta$

- *compact*，如果存在一个 $x_\alpha \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}$，使得 $\alpha([x_\alpha, x_\alpha^*]) > 0$，并且
- *non-compact*，如果存在一个非零的 $x_\alpha \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}$，使得 $\alpha([x_\alpha, x_\alpha^*]) \leq 0$。
- *solvable*，如果它出现在 $\mathfrak{r}_{\mathbb{C}}$ 的根空间分解中，其中 $\mathfrak{r} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的极大可解理想。
- *semisimple*，如果它出现在 $(\mathfrak{g}/\mathfrak{r})_{\mathbb{C}}$ 的根空间分解中。

我们分别用 Δ_k、Δ_p、Δ_r，$\Delta_s \subseteq \Delta$ 表示紧根、非紧根、可解根和半单根的子集（参见 [Ne00，定理 VII.2.2]）。于是 $\Delta_k \subseteq \Delta_s$，并且我们还用 $\Delta_{p,\ s} := \Delta_p \setminus \Delta_s$ 表示半单非紧根。

如果 α 是紧的，那么 dim $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha} = 1$，并且存在唯一的元素 $\alpha^\vee \in i\mathfrak{t} \cap [\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{-\alpha}]$，满足 $\alpha(\alpha^\vee) = 2$。线性自同态

$$r_\alpha \colon \mathfrak{t} \to \mathfrak{t}, \quad r_\alpha(x) := x - \alpha(x)\alpha^\vee = x + (i\alpha)(x)i\alpha^\vee$$

称为相应的反射，而

$$\mathcal{W}_{\mathfrak{k}} := \mathcal{W}(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) := \langle r_\alpha \colon \alpha \in \Delta_k \rangle \subseteq \mathrm{GL}(\mathfrak{t})$$

称为 *Weyl group*。

子集 $\Delta^+ \subseteq \Delta$ 称为 *positive system*，如果存在一个 $x_0 \in \mathfrak{t}$，使得对于每个 $\alpha \in \Delta$ 和

$$\Delta^+ = \{\alpha \in \Delta \colon i\alpha(x_0) > 0\}.$$

若正系满足 *adapted* 当 $\Delta_p^+ := \Delta^+ \cap \Delta_p$ 在 $\mathcal{W}_{\mathfrak{k}}$ 下保持不变（参见 [Ne00，命题 VII.2。12]）。任何这样的系统都会确定两个 $\mathcal{W}_{\mathfrak{k}}$-不变凸锥，位于 $\mathfrak{t}$ 中；它们与不变凸集和函数有关（[Ne00，定义 VII.3。6]）：

$$C_{\min} := C_{\min}(\Delta_p^+) := \overline{\operatorname{cone}}(\{i[x_\alpha, x_\alpha^*] : x_\alpha \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^\alpha, \alpha \in \Delta_p^+\}) \subseteq \mathfrak{t} \tag{19}$$

and

$$C_{\max} := C_{\max}(\Delta_p^+) := \{x \in \mathfrak{t} : (\forall \alpha \in \Delta_p^+)\ i\alpha(x) \geq 0\}. \tag{20}$$

我们在下列定理中汇总有关不变锥的主要结果：

定理 **4.4** *Let $\mathfrak{g}$ be admissible* 4.1 *and $\Delta^+ \subseteq \Delta$ be an adapted positive system* .. (定义 .(a)) *with $C_{\min} \subseteq C_{\max}$. Then the following assertions hold:*

(a) $W_{\max} = \overline{\operatorname{Ad}(G)C_{\max}}$ *is a closed convex invariant cone with* $W_{\max}^\circ = \operatorname{Ad}(G)C_{\max}^\circ \subseteq$ 复合$(\mathfrak{g})$。

(b) *For $x \in C_{\max}^\circ$, we have*

$$\overline{\operatorname{conv}(\operatorname{Ad}(G)x)} = \{y \in \mathfrak{g} : p_{\mathfrak{t}}(\operatorname{Ad}(G)y) \subseteq \operatorname{conv}(\mathcal{W}_{\mathfrak{k}}x) + C_{\min}\} \subseteq W_{\max}^\circ,$$

where $p_{\mathfrak{t}}: \mathfrak{g} \to \mathfrak{t}$ is the projection with kernel $[\mathfrak{t}, \mathfrak{g}]$.

(c) *For $x \in W_{\max}^\circ$, we have*

$$W_{\min} := \{y \in \mathfrak{g} : p_{\mathfrak{t}}(\operatorname{Ad}(G)y) \subseteq C_{\min}\} = \lim\left(\overline{\operatorname{conv}(\operatorname{Ad}(G)x)}\right) \subseteq W_{\max}.$$

In particular, this cone does not depend on x.

(d) $W_{\max} \cap \mathfrak{t} = C_{\max}$ *and* $W_{\min} \cap \mathfrak{t} = C_{\min}$.

Proof. (a) 由 [Ne00]中的命题 VIII.3.7 和引理 VIII.3.9 得出。
(b) [Ne00，定理 . VIII.3.18]; (c) [Ne00，引理 VIII .3.27]; (d) [Ne00，引理 VIII .3.22, 27]; □

4.3 不变凸函数

现在，我们利用锥 $W_{\min}$，进一步完善命题 4.3 的结论，并利用 $W_{\max}$。我们证明，约化不变凸函数定义在 $W_{\max}^\circ$ 中的某些定义域上（对应某个适配正系），并且这些函数沿相应锥的方向单调递减 $W_{\min}$。

命题 **4.5** *Let $\subseteq \mathfrak{g}$ be an open convex subset and $f \to \mathbb{R}$ an invariant convex function .. with $\mathfrak{n}_f = \{0\}$. Then $\mathfrak{g}$ is admissible and contains a compactly embedded Cartan subalgebra $\mathfrak{t}$ and $\Omega : \Omega$, there exists an adapted positive system Δ^+ with $C_{\min} \subseteq C_{\max}$, such that*

(a) $\Omega \subseteq W_{\max}^\circ$, *and*(b) $f(x+y) \leq f(x)$
for $x \in \Omega$ and $y \in W_{\min}$.

The set Δ_p^+ of positive non-compact roots is uniquely determined by f.

Proof. 首先，由命题 $\subseteq$ 4.3可得 comp$(\mathfrak{g})$。comp$(\mathfrak{g})$ 中存在内点，这意味着存在一个紧嵌入的嘉当子代数（[Ne00，定理 VII.1.8]）。接下来，我们由 [Ne00，定理 VII.3.8]推得存在唯一确定的适配正系 Δ^+，使得对于每个 $c \in \mathbb{R}$ 和 $\Omega_c = \{x \in \Omega : f(x) < c\}$，都有

$$W_{\min} \subseteq \lim(\Omega_c) \quad \text{and} \quad \Omega_c \subseteq W_{\max}. \tag{21}$$

事实上，夹逼定理 [Ne00，定理 VII.38] 表明

$$\Omega_c \cap \mathfrak{t} \subseteq C_{\max} \quad \text{and} \quad C_{\min} \subseteq \lim(\Omega_c \cap \mathfrak{t}).$$

接着，我们使用定理 4.4 以及 $W_{\min/\max}$ 的定义，得到（21）。由 $W_{\min} \subseteq \lim(\Omega_c)$ 的结果，我们得到 $x + \mathbb{R}^+ y \subseteq \Omega_c$ 对于 $x \in \Omega_c$ 以及 $y \in W_{\min}$。因此，结合引理 2.2 我们得到

$$\Omega = \bigcup_{c \in \mathbb{R}} \Omega_c \subseteq W_{\max}^\circ \quad \text{and} \quad f(x+y) \leq f(x) \quad \text{for} \quad x \in \Omega,\ y \in W_{\min} \tag{22}$$

([Ne00，定理 VII.3。8]）。Δ_p^+的唯一性源于这样一个事实：开凸锥 $W_{\max}$ 与 $W_{\max} \cap \mathfrak{t} = C_{\max}$ 共同决定了 Δ_p^+作为子集 $\{\alpha \in \Delta_p\colon\ i\alpha(C_{\max}) \subseteq [0,\infty)\}$。 □

4.4 可容许李代数的结构

可容许李代数的结构可以通过一种可追溯至 K. Spindler 的分解得到特别清晰的理解（参见 [Sp88] 以及 §VII.2 的注释，见 [Ne00]）。以下定理由 [Ne00，定理 VIII.2.7、VIII.2.26，命题 VIII.2.9]推出：

定理 4.6。 *A Lie algebra $\mathfrak{g}$ with compactly embedded Cartan subalgebra $\mathfrak{t}$ is admissible if and only if it has a $\mathfrak{t}$-invariant semidirect decomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \rtimes \mathfrak{l}$, where $\mathfrak{u} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus V$ is 2-step nilpotent with*
(S¹) *$V = [\mathfrak{l}, \mathfrak{u}] = [\mathfrak{t}, \mathfrak{u}]$ and $[V, V] \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$。* **(S²)**
$\mathfrak{l}$ is reductive admissible with $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{l} = \{0\}$. **(S3)**

There exists an adapted positive system Δ^+ with $C_{\min} \subseteq C_{\max}$ and a linear functional $\lambda_{\mathfrak{z}} \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^*$ such that, for every non-zero $x_\alpha \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^\alpha = \mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^\alpha$, $\alpha \in \Delta_r^+$, we have $\lambda_{\mathfrak{z}}(i[x_\alpha, x_\alpha^*]) > 0$.
我们将前述定理中的分解称为 $\mathfrak{g}$的 *Spindler decomposition*。于是

$$\Omega(v,w) := \lambda_{\mathfrak{z}}([v,w]) \tag{23}$$

在 V 上定义了一个辛形式；鉴于 **(S3)**，它满足

$$\Omega([x,v],v) > 0 \quad \text{for} \quad x \in C_{\max}^\circ, 0 \neq v \in V.$$

注意，$H_x(v) := \frac{1}{2}\Omega([x,v],v)$ 上由 $\operatorname{ad} x$ ([Ne00，命题 A.IV.15]生成的哈密顿流所对应的哈密顿函数。详情请参阅 [Ne00]，中的第 VIII.2 节，尤其是 [Ne00，定理 VIII.2。7]；另见 [NO22]。

4.5 从拉普拉斯变换的有限性到可容许性

以下定理特别说明，只要我们有一个哈密顿作用的动量映射，其像张成 $\mathfrak{g}^*$，且相应测度 $\Psi_* \lambda_M$ 的拉普拉斯变换在某一点有限，那么 $\mathfrak{g}$ 就是可容许的。

定理 **4.7** *Let $\mathfrak{g}$ be a finite-dimensional Lie algebra and μ a positive G-invariant Borel measure on $\mathfrak{g}^*$ whose support spans $\mathfrak{g}^*$. If there exists an $x \in \mathfrak{g}$ with $\mathcal{L}\mu(x) < \infty$ then*

(a) $\mathcal{L}(\mu)$ is reduced in the sense of 第 4.1 节*, (b) $\mathfrak{g}$ is admissible, (c) There exists a compactly embedded Cartan subalgebra $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{g}$ and an adapted positive system Δ^+ for which $C_{\min}$ is pointed and contained in $C_{\max}$* (参见 (), ())

$$D_\mu \subseteq W_{\max}^\circ, \quad \text{and} \quad \operatorname{supp}(\mu) \subseteq W_{\min}^\star.$$

Proof. (a) 引理 2.3(b) 推出 $\mathcal{L}(\mu)$ 是约化的。
(b)、(c)：**步骤 1：** 推论 3.6表明

$$D_\mu = \{x \in \mathfrak{g} \colon \mathcal{L}(\mu)(x) < \infty\} \subseteq \operatorname{comp}(\mathfrak{g})^\circ,$$

因此 $\operatorname{comp}(\mathfrak{g})$ 有内点，从而 $\mathfrak{g}$ 拥有紧嵌入的嘉当子代数 $\mathfrak{t}$。于是

$$\operatorname{comp}(\mathfrak{g})^\circ = \operatorname{Ad}(G).(\mathfrak{t} \cap \operatorname{comp}(\mathfrak{g})^\circ)$$

([Ne00，定理 VII.1.8(i)])。特别地，我们有 $D_\mu \cap \mathfrak{t} \neq \emptyset$。
步骤 2： 接下来我们证明 $\mathfrak{g}$ 具有 *cone potential*，即对于满足 $\alpha \in \Delta_p$ 的 $0 \neq x_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha_{\mathbb{C}}$，有 $[x_\alpha, x_\alpha^*] \neq 0$。我们假设情况并非如此。取 $h \in \mathfrak{t} \cap D_\mu$，并考虑三维子空间

$$\mathfrak{b} := \mathbb{R}h + \mathbb{R}(x_\alpha - x_\alpha^*) + \mathbb{R}i(x_\alpha + x_\alpha^*) \subseteq \mathfrak{g}.$$

由于 $[h, x_\alpha] = \alpha(h)x_\alpha \in i\mathbb{R}x_\alpha$，可知 $\mathfrak{b}$ 是一个李子代数。此外，根据步骤 1，$h \in \operatorname{comp}(\mathfrak{g})^\circ$，因此李代数 $\ker(\operatorname{ad} h)$ 是紧的，故不可能包含非紧李代数 $\mathfrak{t} + \mathfrak{b}$。所以 $\alpha(h) \neq 0$，从而 $\mathfrak{b}$ 同构于欧几里得平面运动群的李代数 $\mathfrak{motion}_2(\mathbb{R})$。我们将其记作 $\mathfrak{b} = \mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}h$，其中 $h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，且 $\mathfrak{b}^*$ 由对偶基 $\mathbf{e}_1^*$、$\mathbf{e}_2^*$ 和 h^* 张成。令 $\mu_\mathfrak{b}$ 表示测度 μ 在限制映射 $\mathfrak{g}^* \to \mathfrak{b}^*$ 下的投影。其支集张成 $\mathfrak{b}^*$。$\mathfrak{b}^*$ 中非平凡的余伴随轨道是圆柱面

$$\mathcal{O}_r := \{a\mathbf{e}_1^* + b\mathbf{e}_2^* + ch^* \colon a^2 + b^2 = r^2\}, \quad r > 0,$$

以轴 $\mathbb{R}h^*$为界，而 $\mathbb{R}h^*$ 由不动点组成，因为 $h^*([\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]) = \{0\}$。在任何非平凡轨道$\mathcal{O}_r$上，$r > 0$不变测度 μ_r 满足 $\mathcal{L}(\mu_r)(h) = \infty$，因为它在轴 $\mathbb{R}h^*$ 上的投影是平移不变的。

We d将 $\mu_\mathfrak{b}$ 分解为和 $\mu_\mathfrak{b}^0 + \mu_\mathfrak{b}^1$，其中 $\mu_\mathfrak{b}^0$ 支集于 $\mathfrak{t}_\mathfrak{b}^*$，而 $\mu_\mathfrak{b}^1$ 支集于其补集。该测度 $\mu_\mathfrak{b}^1$ 有一个典范的解积分

$$\mu_\mathfrak{b}^1 = \int_{(0,\infty)} \mu_r \, d\nu(r)$$

对于 $(0, \infty)$ 上的某个正测度 ν，因此有限性

$$\mathcal{L}(\mu_\mathfrak{b}^1)(h) = \int_{(0,\infty)} \mathcal{L}(\mu_r)(h) \, d\nu(r) = \infty \cdot \nu((0,\infty))$$

意味着 $\nu = 0$。因此 $\mu_\mathfrak{b}$ 支集于 $\mathfrak{t}_\mathfrak{b}^*$，这与其支集张成 $\mathfrak{b}^*$相矛盾。由此可知 $[x_\alpha, x_\alpha^*] \neq 0$。

步骤 3： 我们刚刚看到，$\mathfrak{g}$ 具有锥势，这意味着它是根约化的，也就是说，子空间 $[\mathfrak{t}, \mathfrak{g}]$ 不包含非零理想（[Ne00，命题 VII.2。25]）。现在我们来考察这个由步骤 1 得出的非空凸子集

$$D_\mu \cap \mathfrak{t} \subseteq \operatorname{comp}(\mathfrak{g})^\circ.$$

由于 D_μ 在 $\operatorname{Ad}(G)$ 下不变，该集合在有限魏尔群 $\mathcal{W}_\mathfrak{t}$作用下也不变，因此包含一个不动点 z_0，即 $\mathfrak{z}(\mathfrak{k})$ 中的一个元素 ([Ne00，引理 VII.2.11(i)])。因此 $z_0 \in D_\mu \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{k})$。由于 z_0 的中心化子是紧的，没有非紧根在 z_0上取零值，并且

$$\Delta_p^+ := \{\alpha \in \Delta_p \colon i\alpha(z_0) > 0\}$$

是一个 $\mathcal{W}_{\mathfrak{k}}$-不变的非紧根正系。选取一个正则元素 $x_0 \in \mathfrak{t}$，使其足够接近z_0，从而对于 $\alpha \in \Delta_k$ 和 $\beta \in \Delta_p$，有 $|\alpha(x_0)| < |\beta(x_0)|$，该子集

$$\Delta^+ := \{\alpha \in \Delta \colon i\alpha(x_0) > 0\}$$

是一个适配正系，其中 $\Delta^+ \cap \Delta = \Delta_p^+$（参见 [Ne00，命题 VII.2.12]）。现在 $z_0 \in C_{\max}^\circ$，由于 $C_{\max}^\circ$ 是 $\mathrm{comp}(\mathfrak{g})^\circ \cap \mathfrak{t}$的一个连通分支， D_μ 的凸性蕴含

$$D_\mu \cap \mathfrak{t} \subseteq C_{\max}^\circ, \quad \text{hence that} \quad D_\mu = \mathrm{Ad}(G)(D_\mu \cap \mathfrak{t}) \subseteq W_{\max}^\circ. \tag{24}$$

步骤 4： 令 $\mathfrak{g}_1 := $ 张成 D_μ。由于 $\mathrm{Ad}(G)D_\mu = D_\mu$，这是 $\mathfrak{g}$的一个理想。命题 4.3（c）表明 $\mathfrak{g}_1$ 是可容许的。它包含元素 $z_0 \in D_\mu \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{k})$，并且 $\mathfrak{t}_1 := \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_1$ 是 $\mathfrak{g}_1$的一个紧嵌入阿贝尔子代数。由于没有非紧根 α 在 z_0上消失，我们得到

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^\alpha = [z_0, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^\alpha] \subseteq \mathfrak{g}_{1,\mathbb{C}},$$

以及这个 这意味着，包含 $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{t}$ （[Ne00，的唯一极大紧嵌入子代数
命题 VI I.2.5]) 满足

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{k}.$$

由于 $\mathfrak{k}$ 是约化的，且 $\mathfrak{k}_1 := \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_1$ 是 $\mathfrak{k}$的理想，因此我们可以将 $\mathfrak{k}$ 写成直和 $\mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{k}_2$，相应地， $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2$ 也可写为 $\mathfrak{t}_j := \mathfrak{k}_j \cap \mathfrak{t}$。

由于 $z_0 \in \mathfrak{t}_1$，我们有

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}_1}(\mathfrak{t}_1) \subseteq \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(z_0) = \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{k} = \mathfrak{k}_1,$$

又由于 $\mathfrak{t}_1$ 是 $\mathfrak{k}_1$的嘉当子代数，可得 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}_1}(\mathfrak{t}_1) = \mathfrak{t}_1$。因此， $\mathfrak{t}_1$ 是 $\mathfrak{g}_1$的紧嵌入的嘉当子代数。

步骤 5： 我们断言 $C_{\min}$ 是尖的，且包含于 $C_{\max}$中。设 $\alpha \in \Delta_p^+ \subseteq \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$。那么$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^\alpha = [\mathfrak{t}_1, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^\alpha] \subseteq \mathfrak{g}_{1,\mathbb{C}}$，且对于 $\alpha_1 := \alpha|_{\mathfrak{t}_1}$，我们有

$$\mathfrak{g}_{1,\mathbb{C}}^{\alpha_1} = \sum_{\alpha \in \Delta, \alpha|_{\mathfrak{t}_1} = \alpha_1} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^\alpha.$$

这意味着

$$C_{\min} = \overline{\mathrm{cone}}(\{i[x_\alpha, x_\alpha^*] \colon x_\alpha \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^\alpha, \alpha \in \Delta_p^+\}) \subseteq C_{\min,\mathfrak{g}_1} \subseteq \mathfrak{t}_1.$$

由于 $\Delta_p^+|_{\mathfrak{t}_1}$ 是 $\mathfrak{g}_1$的正非紧根，我们还有

$$C_{\max} \cap \mathfrak{t}_1 = C_{\max,\mathfrak{g}_1}.$$

因此，只需证明 $C_{\min,\mathfrak{g}_1}$ 是尖的，且包含于 $C_{\max,\mathfrak{g}_1}$中。

对于任意 $x \in D_\mu \cap \mathfrak{t} \subseteq C_{\max,\mathfrak{g}_1}$ (参见（24）)，根据伴随轨道凸性定理（[Ne00，定理 VIII.1.36]），可得

$$x + C_{\min,\mathfrak{g}_1} \subseteq \mathrm{conv}(\mathrm{Ad}(G)x) \subseteq D_\mu, \tag{25}$$

因此

$$\mathcal{L}(\mu)(x+y) \leq \sup \mathcal{L}(\mu)(\mathrm{Ad}(G)x) = \mathcal{L}(\mu)(x) \quad \text{for} \quad y \in C_{\min,\mathfrak{g}_1}.$$

由于函数 $\mathcal{L}(\mu)$ 根据 (a) 是约化的，我们必有 $-y \notin C_{\min、\ \mathfrak{g}_1}$，即 $C_{\min、\ \mathfrak{g}_1}$ 是尖的。此外，(25) 和 $D_\mu \cap \mathfrak{t}_1 \subseteq C_{\max、\ \mathfrak{g}_1}$ 蕴含 $C_{\min、\ \mathfrak{g}_1} \subseteq C_{\max、\ \mathfrak{g}_1}$。因此我们得到 $C_{\min}$ 是尖的，并且包含于 $C_{\max}$ 中。最后， [Ne00，定理 VII.1.19] 意味着 $\mathfrak{g}$ 是可容许的，因为它包含一个紧嵌入的嘉当子代数，是根约化的，并且存在一个适配正系 Δ^+，使得 $C_{\min}$ 是尖的且包含于 $C_{\max}$ 中。

步骤 6： 我们已经在（24）中看到，$D_\mu \subseteq W_{\max}^\circ$. Ad($G$)-不变函数$\mathcal{L}$（$\mu$）在 D_μ上的凸性，结合关系式

$$W_{\min} = \lim(\overline{\operatorname{conv}}(\mathcal{O}_x)) \quad \text{for} \quad x \in W_{\max}^\circ$$

(定理4.4(b)) 表明

$$\mathcal{L}(\mu)(x+y) \leq \mathcal{L}(\mu)(x) \quad \text{for} \quad x \in D_\mu, y \in W_{\min},$$

而由引理 2.3(a)，可得 supp(μ) $\subseteq W_{\min\circ}^\star$。 □

5 辛吉布斯系综

本节将介绍与李群的哈密顿作用相关的吉布斯系综的一些关键概念（参见 [Ba16]）：几何温度、吉布斯系综、热力学势和几何热。

- 设 $\sigma\colon G \times M \to M$是李群 G在辛流形 (M,ω) 上的一个（强）哈密顿作用，且 $\Psi\colon M \to \mathfrak{g}^*$ 是相应的等变动量映射。对于导出作用

$$\dot{\sigma}\colon \mathfrak{g} \to \mathcal{V}(M), \quad \dot{\sigma}(x)(m) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(-tx).m,$$

  这意味着

$$i_{\dot{\sigma}(x)}\omega = -\mathrm{d}H_x \quad \text{for} \quad H_x(m) := \Psi(m)(x).$$

- 我们将 λ_M 记作 M上的刘维尔测度，其由体积形式定义

$$\frac{\omega^n}{(2\pi)^n n!}, \quad \text{where} \quad 2n = \dim M.$$

  于是，相应的推前测度记为 $\mathfrak{g}^*$ $\mu := \Psi_*\lambda_M$。

例 5.1. 在本文中，我们主要关注这样的情形：$M = \mathcal{O}_\lambda = \mathrm{Ad}^*(G)\lambda \subseteq \mathfrak{g}^*$ 是 $\mathfrak{g}^*$中的一个余伴随轨道，并赋有 Kostant–Kirillov–Souriau 辛形式，其定义为

$$\omega_\alpha(\alpha \circ \operatorname{ad} x, \alpha \circ \operatorname{ad} y) := \alpha([x,y]) \quad \text{for} \quad x, y \in \mathfrak{g}. \tag{26}$$

Here

$$\dot{\sigma}(x)(\alpha) = \alpha \circ \operatorname{ad} x, \quad H_x(\alpha) = \alpha(x),$$

且动量映射是包含映射 $\Psi\colon \mathcal{O}_\lambda \to \mathfrak{g}^*$.

定义 5.2.（哈密顿作用的几何温度） *geometric temperature* 是由所有满足以下性质的元素 $x \in \mathfrak{g}$ 构成的集合 Ω：哈密顿函数 H_y，$y \in \mathfrak{g}$，满足

$$\int_M e^{-H_y(m)}\, d\lambda_M(m) < \infty$$

对于 x的某个邻域中的所有 y 均成立。这意味着拉普拉斯变换

$$Z(x) := \mathcal{L}(\mu)(x) = \int_{\mathfrak{g}^*} e^{-\alpha(x)}\, d\mu(\alpha) = \int_M e^{-H_x(m)}\, d\lambda_M(m)$$

在某个邻域内有限 $x \in \mathfrak{g}_\circ$ 它在其定义域 $= \Omega^\mu$ 的内部 Ω 上光滑$D_\mu := \mathcal{L}(\mu)^{-1}(\mathbb{R})$ 中 $\mathfrak{g}$（参见引理 2.3）。元素 $x \in \Omega$ 称为 *generalized temperatures*。对于$x \in \Omega$，测度

$$\lambda_x := \frac{e^{-H_x}}{Z(x)}\lambda_M \tag{27}$$

是 M 上的概率测度，且 $\mu_x := \Psi_* \lambda_x$ 是 $\mathfrak{g}^*$ 上的概率测度。我们记作

$$Q\colon \Omega \to \mathfrak{g}^*, \quad Q(x) := \int_{\mathfrak{g}^*} \alpha \, d\mu_x(\alpha) = \int_M \Psi(m)\, d\lambda_x(m) \in \overline{\mathrm{conv}}(\Psi(M)) \subseteq \mathfrak{g}^* \tag{28}$$

概率测度的期望值 μ_x （见（13））。以下术语源自 [So97]和 [Ba16]。

- 族（λ_x）$_{x\in\Omega}$称为 *Gibbs ensemble of the dynamical group* G，作用于 M，
- 映射 $-\log Z$ 称为 *thermodynamic potential*，并且
- $Q\colon \Omega \to \mathfrak{g}^*$ 称为 *geometric heat*。

注 5.3。在关系式

$$s(x) = Q(x)(x) + \log Z(x)$$

定义2.7中的（16），Q（x）（x）是哈密顿函数 H_x 关于概率测度 λ_x的平均值，因此在热力学语境中被解释为“热”。在 M上所有其他相对于刘维尔测度完全连续λ_M 且 Ψ 具有相同期望值 Q（x）的概率测度，根据定理2.8，其熵都严格小于 s（x）。因此，λ_x 在这类测度中使熵最大。这与热力学第二定律相符，该定律指出，平衡态中的熵应达到最大值。

注记 5.4。(a) $\mathfrak{g}^*$ 上的测度 $\mu = \Psi_* \lambda_M$ 是 G-不变的，因为 Ψ 是等变的，而 λ_M 是 G-不变的。因此，$\mathcal{L}(\mu)$ 是 Ω 上的不变凸函数。
(b) 如果 $\Omega \neq \emptyset$，那么 μ 在 $\mathfrak{g}^*$ 上定义了一个拉东测度，即紧子集具有有限测度。事实上，测度 $e^{-H_x}\lambda_M$ 是有限的，并且在每个紧子集上，密度都与 0 保持有界距离。(c) 对于 $M = \mathbb{R}^{2n}$ 和 $\omega = \sum_{j=1}^n \mathrm{d}p_j \wedge \mathrm{d}q_j$，有 $\frac{\omega^n}{n!} = \mathrm{d}p_1 \wedge \mathrm{d}q_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}p_n \wedge \mathrm{d}q_n$，这就是坐标 $(p_1,\ q_1,\ \ldots\ldots,\ p_n,\ q_n)$ 下的勒贝格体积形式。

注记 5.5。 Following Souriau [因此97], 在 [Ma20a], C.-M. Marle 称 $x \in \mathfrak{g}$为广义温度，如果存在一个可积函数 $f\colon\ M \to \mathbb{R}^+$ 以及一个 U 的邻域 x 使得

$$(\forall y \in U)(\forall m \in M)\ e^{-\Psi(m)(y)} \leq f(m).$$

这明确意味着 $\mathcal{L}(\mu)(y) < \infty$，因此 $x \in \Omega$ 符合定义 5.2 的含义。如果反过来，$x \in \Omega$，那么存在仿射独立的元素 $x_0,\ \ldots\ldots,\ x_n \in \Omega$，使得

$$x = \frac{1}{n}(x_0 + \cdots + x_n),$$

并且，对于所有 $y \in \mathrm{conv}(\{x_0, \ldots, x_n\})$ 和 $m \in M$，都有

$$e^{-\Psi(m)(y)} \leq f(m) := \max_{j=0,\ldots,n} e^{-\Psi(m)(x_j)} \leq \sum_{j=0}^n e^{-\Psi(m)(x_j)},$$

从而 f 是可积的。这表明，我们对几何温度 Ω 的更简单定义 μ 为 D_μ 的内部，与 [因此97] 以及 [Ma20a] 一致。

6 余伴随轨道

本节将第 5 节中辛吉布斯系综的一般设定，专门应用于 $M = \mathcal{O}_\lambda := \mathrm{Ad}^*(G)\lambda$ 为余伴随轨道的情形，并赋予其 Kostant–Kirillov–Souriau 辛形式（26）。

设 G是一个连通李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。对于余伴随轨道 $\mathcal{O}_\lambda$，记 μ_λ 为 $\mathcal{O}_\lambda$ 上的刘维尔测度，并考虑其几何温度

$$\Omega_\lambda := \{x \in \mathfrak{g} \colon \mathcal{L}(\mu_\lambda)(x) < \infty\}^\circ \tag{29}$$

（参见定义5.2）。记

$$C_\lambda := \overline{\operatorname{conv}}(\mathcal{O}_\lambda)$$

为 $\mathcal{O}_\lambda$ 的闭凸包，并将由 $\mathcal{O}_\lambda$ 生成的仿射子空间记为 $\operatorname{aff}(\mathcal{O}_\lambda)$。

6.1 一般性

根据定理 4.7，所关注的情形出现在可容许李代数 $\mathfrak{g}$中。更确切地说，我们有以下定理 4.7的推论：

推论 6.1。 *Suppose that the coadjoint orbit $\mathcal{O}_\lambda$ spans $\mathfrak{g}^*$ and that $D_{\mu_\lambda} \neq \emptyset$. Then the followingassertions hold:*

- *the convex functions* 对数 $\mathcal{L}(\mu_\lambda)$ *and* $\mathcal{L}(\mu_\lambda)$ *are reduced,*
- *the Lie algebra $\mathfrak{g}$ is admissible, and*
- *there exists a compactly embedded Cartan subalgebra $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{g}$ and an adapted positive system Δ^+ with $C_{\text{最小值}}$ pointed and contained in $C_{\text{最大值}}$ such that*

$$\lambda \in W^\star_{\min}, \quad \text{and} \quad \Omega_\lambda \subseteq W^\circ_{\max}.$$

Here Δ_p^+ is uniquely determined by λ.

注 6.2. （化归到张成轨道）我们总可以假设 $\mathcal{O}_\lambda$ 张成 $\mathfrak{g}^*$。否则$\mathfrak{n} := \mathcal{O}_\lambda^\perp \trianglelefteq \mathfrak{g}$是一个理想，因此我们可以将 G 的哈密顿作用分解为一个李代数为 $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$的群的作用。于是有李代数的包含关系 $\mathfrak{g} \hookrightarrow (C^\infty(\mathcal{O}_\lambda)\ \{\cdot,\cdot\})\ x \mapsto H_x$。特别地，元素 $z \in \mathfrak{g}$ 是中心的，当且仅当它在 $\mathcal{O}_\lambda$上定义了一个常函数，这可由下式得出

$$H_z(\operatorname{Ad}^*(g)\alpha) = \alpha(\operatorname{Ad}(g)^{-1}z) \quad \text{for} \quad g \in G, \alpha \in \mathcal{O}_\lambda. \tag{30}$$

因此 $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \leq 1$，并且 $\mathcal{O}_\lambda$ 包含于 $\mathfrak{g}^*$ 的一个真超平面中，当且仅当 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$。在后一种情况下，$\mathcal{O}_\lambda \subseteq \lambda + \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^\perp$。

命题 6.3. *If $\mathcal{O}_\lambda$ spans $\mathfrak{g}^*$ and $\Omega_\lambda \neq \emptyset$, then the geometric heat*

$$Q \colon \Omega_\lambda = \left\{x \in \mathfrak{g} \colon \int_{\mathcal{O}_\lambda} e^{-\alpha(x)}\, d\mu_\lambda(\alpha) < \infty\right\}^\circ \to \mathfrak{g}^*, \quad Q(x) = \frac{1}{\mathcal{L}(\mu_\lambda)(x)} \int_{\mathcal{O}_\lambda} \alpha \cdot e^{-\alpha(x)}\, d\mu_\lambda(\alpha)$$

has the following properties:

(a) $\Omega_\lambda + \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \Omega_\lambda$ *and* $Q(x+z) = Q(x)$ *for* $z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ *and* $x \in \Omega_\lambda$.(b)
Q factors through a function Q $\lambda/\mathfrak{z}\mathfrak{g} \to C_\lambda$ which is a diffeomorphism onto an open subset : Ω ( ) aff( ) *of the affine space $\mathcal{O}_\lambda$ generated by $\mathcal{O}_\lambda$.*

Proof. (a) 由以下事实立即得出：函数 $H_z(\alpha) = \alpha(z)$，$z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, 在 $\mathcal{O}_\lambda$ 上为常数（参见备注（30）中的 6.2）。

(b) 因子化函数的存在性 Q 由 (a) 得出。由于 $\overline{Q}(x)$ 是 $\mathcal{O}_\lambda$上的概率测度的质心，因此它属于 C_λ。其余断言由命题2.4(iii) 得出。

□

例 6.4。（一个带有温和李维尔测度的非闭合余伴随轨道）对于 $\mathfrak{g} = \mathfrak{s}\mathfrak{l}_2(\mathbb{R})$ 余伴随作用等价于群 $SO_{1,2}(\mathbb{R})_e$ 在三维闵可夫斯基空间上的作用，因为嘉当–基林形式的符号为 (1，2)。然后

$$\mathcal{O} := \{(x_0, x_1, x_2) \colon x_0 := (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, (x_1, x_2) \neq (0, 0)\} = \{(x_0, x_1, x_2) \colon x_0 > 0, x_0^2 = x_1^2 + x_2^2\}$$

是幂零轨道（幂零元的轨道），相应的刘维尔测度为比例对于由以下内容定义的测度

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x_0, x_1, x_2)\, d\mu(x_0, x_1, x_2) := \int_{\mathbb{R}^2} f\big((x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, x_1, x_2\big)\, \frac{dx_1\, dx_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}},$$

因为二者在旋转和洛伦兹变换下均保持不变。在极坐标中，很明显该测度是温和的。由此我们得出，存在其刘维尔测度为温和的非闭合余伴随轨道。

对于该测度的拉普拉斯变换，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\mu)(z, s\cos\theta, s\sin\theta) &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-z(x_1^2+x_2^2)^{1/2}} e^{-s\langle(\cos\theta,\sin\theta),(x_1,x_2)\rangle}\, \frac{dx_1\, dx_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\
&= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-zr} e^{-sr(\cos(\theta)\cos(\varphi)+\sin(\theta)\sin(\varphi))}\, d\varphi\, dr \\
&= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-zr} e^{-sr\cos(\theta-\varphi)}\, d\varphi\, dr = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-r(z+s\cos(\varphi))}\, d\varphi\, dr \\
&= \int_0^\infty e^{-rz} \Big(\int_0^{2\pi} e^{-rs\cos(\varphi)}\, d\varphi \Big)\, dr.
\end{aligned}$$

该积分的倒数第二个表达式表明，对于 $0 \leq s < z$，该积分存在。对于$s = 0 < z$，特别地，我们得到

$$\mathcal{L}(\mu)(z, 0, 0) = 2\pi \int_0^\infty e^{-rz}\, dr = \frac{2\pi}{z}.$$

由 $\mathcal{L}(\mu)$ 的不变性可得

$$\mathcal{L}(\mu)(z, s\cos\theta, s\sin\theta) = \frac{2\pi}{\sqrt{z^2 - s^2}} \quad \text{for} \quad z > s \geq 0.$$

注意

$$\mathcal{L}(\mu)(rx) = r^{-1}\mathcal{L}(\mu)(x) \quad \text{for} \quad r > 0, x \in \mathfrak{g}.$$

此例也在 [BDNP23、§4 3], 中有明确讨论，从而纠正了 [Ma21、§3.3] 和 [Ma20b、§3.5], 中关于该轨道没有非平凡几何温度的错误说法。

注 6.5. 某点处 $\mathcal{L}(\mu_\lambda)$的有限性 $x \in \mathfrak{g}$ 意味着 μ_λ 是拉东测度，即在 $\mathfrak{g}^*$的紧子集上有限。根据 [Ch90，定理 1，8], 连通李群的任意闭余伴随轨道上的刘维尔测度都是温和的，但例6.4 表明， μ_λ 的温和性并不意味着 $\mathcal{O}_\lambda$ 是闭的。我们将在下文的定理7.14 中看到，若 μ_λ ，则它总是温和的 $D_\mu \neq \emptyset$。

6.2 辛向量空间上的仿射作用

设 (V,Ω) 是一个辛向量空间。本小节讨论群 $G = \mathrm{Heis}(V,\Omega) \rtimes \mathrm{Sp}(V,\Omega)$ 在 V 上的仿射作用。我们考虑由所有函数构成的李代数 $\mathfrak{g}$

$$H_{c,w,x} \colon V \to \mathbb{R}, \quad H_{c,w,x}(v) = c + \Omega(w, v) + \frac{1}{2}\Omega(xv, v), \tag{31}$$

该李代数带有定义在 (V,Ω) 上的泊松括号。设 $2n=$维数V。那么

$$\mathfrak{g}\cong\mathfrak{heis}(V,\Omega)\rtimes\mathfrak{sp}(V,\Omega),$$

其中 $\mathfrak{heis}(V,\Omega)$ 是（$2n+1$）维海森堡代数，对应于函数 $H_{c,w,0},\quad w\in V, c\in\mathbb{R}$。

在 0 处由点求值给出的线性泛函 $\lambda=\mathrm{ev}_0\in\mathfrak{g}^*$ 具有如下形式

$$\lambda(c,w,x)=c=H_{c,w,x}(0).$$

李代数 $\mathfrak{g}$ 在 V 上的作用可积分为相应群 G 的哈密顿作用，动量映射为

$$\Psi\colon V\to\mathfrak{g}^*,\quad \Psi(v)(f)=f(v) \tag{32}$$

([Ne00，命题 A.IV.15])。特别地可知 $\Psi(V)=\mathcal{O}_\lambda\subseteq\mathfrak{g}^*$ 是一个余伴随轨道。**引理 6.6**。

For $A\in$对称$_n(\mathbb{R})$ and $\xi\in\mathbb{R}^n$, we have

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{1}{2}\langle Ax,x\rangle-\langle\xi,x\rangle}\,dx=\begin{cases}\det(A)^{-1/2}\cdot e^{\frac{1}{2}\langle A^{-1}\xi,\xi\rangle} & \text{for } A \text{ positive definite}\\ \infty & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{33}$$

Proof. 我们可以在与特征向量正交基相适配的坐标中计算该积分 of A, wh在此，问题归结为一维情形。 □

现在我们将其置于辛几何背景中 . 我们称复结构 $I\in\mathrm{Sp}(V,\Omega)$ *positive* i f

$$\langle v,w\rangle:=\Omega(v,Iw) \tag{34}$$

是正定的。任意正复结构都确定一个极大紧嵌入子代数 $\mathfrak{k}_I\subseteq\mathfrak{g}$，其定义为

$$\mathfrak{k}_I=\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(I)=\mathbb{R}\times\{0\}\times\mathfrak{k}_{I,\mathfrak{s}},\quad \mathfrak{k}_{I,\mathfrak{s}}:=\{x\in\mathfrak{sp}(V,\omega)\colon[x,I]=0\}.$$

现在，任何使 $H_x(v)=H_{0,\,0,\,x}(v)$ 正定的 $x\in\mathfrak{sp}(V,\Omega)$，都是一个紧元，因此包含在某个 $\mathfrak{k}_I$ 的共轭中，这意味着存在一个满足 $x\in\mathfrak{k}_I$ 的复结构 I。

引理 6.7. *Let (V,Ω) be a $2n$-dimensional symplectic vector space and $(c,w,x)\in\mathfrak{hsp}(V,\Omega)$. If $H_{0,\,0,\,x}$ is positive definite and $I\in\mathrm{Sp}(V,\Omega)$ with $x\in\mathfrak{k}_I$, then there exists a constant c_V such that*

$$\int_V e^{-H_{c,w,x}(v)}\,d\lambda_V(v)=\begin{cases}c_V\exp(-H_{c,w,x}(-x^{-1}w))\det(Ix)^{-\frac{1}{2}} & \text{for } H_{0,0,x} \text{ positive definite,}\\ \infty & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{35}$$

注意，$-x^{-1}w$ 是 $H_{c,\,w,\,x}$ 在 V 上的唯一极小值。

Proof. 这可由引理6.6推出。如果 $H_{0,0,x}$ 不是正定的，那么积分便不存在。因此，我们可以假设这个二次函数是正定的。于是存在一个正复结构 $I\in\mathrm{Sp}(V,\Omega)$，它与 x 对易（参见（34））。于是，刘维尔测度 λ_V 由体积形式 $\frac{\Omega^n}{(2\pi)^n n!}$ 给出；该体积形式相对于标量积而言是勒贝格测度的某个倍数。因此，对于某个适当的常数 $c_V>0$，我们得到：

$$\begin{aligned}\int_V e^{-H_{c,w,x}(v)}\,d\lambda_V(v)&=e^{-c}\int_V e^{-\Omega(w,v)-\frac{1}{2}\Omega(xv,v)}\,d\lambda_V(v)=e^{-c}\int_V e^{-\langle Iw,v\rangle-\frac{1}{2}\langle Ixv,v\rangle}\,d\lambda_V(v)\\&=c_V e^{-c}\det(Ix)^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}\langle(Ix)^{-1}Iw,Iw\rangle}=c_V e^{-c}\det(Ix)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\langle x^{-1}w,Iw\rangle}\\&=c_V e^{-c}\det(Ix)^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}\Omega(x^{-1}w,w)}.\end{aligned}$$

□

6.3 容许余伴随轨道

余伴随轨道中有一类特别好的轨道，$\mathcal{O}_\lambda \subseteq \mathfrak{g}^*$ 称为可容许轨道；它们是闭的，且其凸包不包含任何仿射直线。本节将介绍拉普拉斯变换的显式公式 $\mathcal{L}(\mu_\lambda)$，λ 可容许情形下的公式，这些公式已由 [Ne96a] 利用针对适当动量映射的驻相方法推导得出。

定义 6.8。我们称余伴随轨道 $\mathcal{O}_\lambda$ 和元素 $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ *admissible*为可容许的，若 $\mathcal{O}_\lambda$ 是闭的，且其闭凸包 $\operatorname{conv}(\mathcal{O}_\lambda)$ 不包含任何仿射直线 ([Ne00，定义 VII.3。14])。

例 6.9。我们考虑线性泛函 $\lambda(z,v,x) = z$，定义在 $\mathfrak{hsp}(V,\Omega)$ 上，它对应于在 0 处求值。令 $x \in \mathfrak{sp}(V,\Omega) \subseteq \mathfrak{hsp}(V,\Omega)$，使得 $v \mapsto \Omega(xv,v)$ 正定。那么

$$H_{(0,0,x)}\colon V \to \mathbb{R}, \quad H_{0,0,x}(v) = \frac{1}{2}\Omega(xv,v)$$

在 (V,Ω) 上是适当的且有下界。因此 $\mathcal{O}_\lambda$ 在 $\mathfrak{hsp}(V,\Omega)^*$中是闭的。其凸包不含仿射直线，因为锥 $B(\mathcal{O}_\lambda)$ 包含所有满足 $H_{c,w,x}$ 且 $H_{0,0,x}$ 正定的函数，并且有内点 ([Ne00，命题 V.1。15])。因此 $\mathcal{O}_\lambda$ 是可容许的。

命题 6.10。*Let $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{g}$ a compactly embedded Cartan subalgebra, and $\lambda \in \mathfrak{g}^*$. Then the followingassertions hold:*

(a) *If $\mathcal{O}_\lambda$ is admissible and spans $\mathfrak{g}^*$ then $\mathfrak{g}$ is admissible $B\ \mathcal{O}_\lambda{}^\circ \subseteq$ $\mathfrak{g}$ 8 and, , ( ) $\mathcal{O}_\lambda \cap \mathfrak{t}^* \neq \emptyset$ where $\mathfrak{t}^* \cong [\mathfrak{t},\mathfrak{g}]^\perp$. Moreover $B\ \mathcal{O}_\lambda$* comp( ) (参见 ())， ， () *$\subseteq W_{\max}$ for an adapted positive system $\Delta^+ \subseteq \Delta\ \mathfrak{g}\ \mathfrak{t}$ with $C_{\min}$ pointed and contained in $C_{\max}$.* (，) (b)

If Δ^+ is adapted with $C_{\min} \subseteq C_{\max}$ then $\lambda \in C^\star_{\min} \subseteq \mathfrak{t}^*$ implies that $\mathcal{O}_\lambda$ is admissible and that , () *$W^\circ_{\max} = B\ \mathcal{O}_\lambda{}^\circ$.*

Proof. (a) 这是可容许的 $\mathfrak{g}$，这是因为 $\mathfrak{g}^*$ 由一个可容许轨道张成（[Ne00，引理 VII.3。17]），且锥 $B(\mathcal{O}_\lambda)$ 的椭圆性 [Ne00，命题 VIII.1.17(iii)]。对于每个紧嵌入的嘉当子代数，$\mathcal{O}_\lambda$ 与 $\mathfrak{t}^*$ 相交 $\mathfrak{t}$，这一点由 [Ne00，命题 VIII.1.4] 得出。现在，第二个断言由 [Ne00，定理 VIII.3.10] 得出。

(b)由(a)推出，并且由 [Ne00，定理 VIII.1。19], 得出，该定理断言 $C_{\max} \subseteq B(\mathcal{O}_\lambda)$，而这又意味着 $W^\circ_{\max} = \operatorname{Ad}(G)C^\circ_{\max} \subseteq B(\mathcal{O}_\lambda)$。 □

[Ne96a] 包含关于可容许余伴随轨道的刘维尔测度的拉普拉斯变换的信息 μ_λ $\mathcal{O}_\lambda$。为了解释 [Ne96a，定理 II.10] 中推导出的 μ_λ的拉普拉斯变换公式，我们将切空间

$$T_\lambda(\mathcal{O}_\lambda) \cong \lambda \circ \operatorname{ad}\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\lambda, \quad \text{where} \quad \mathfrak{g}_\lambda = \{y \in \mathfrak{g}\colon \lambda \circ \operatorname{ad} y = 0\}$$

是 λ的稳定子李代数。接下来我们写作

$$\Delta_\lambda := \{\alpha \in \Delta^+\colon \mathfrak{g}^\alpha_{\mathbb{C}} \not\subseteq (\mathfrak{g}_\lambda)_{\mathbb{C}}\}$$

表示对 $(\mathfrak{g},\ \mathfrak{t})$ 而言，在复化切空间 $T_\lambda(\mathcal{O}_\lambda)_{\mathbb{C}}$ 上的 $\mathfrak{t}$-表示中出现的那些正根。对于 $\alpha \in \Delta^+$，我们写作

$$m^\lambda_\alpha := \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}^\alpha_{\mathbb{C}}/(\mathfrak{g}_{\lambda,\mathbb{C}} \cap \mathfrak{g}^\alpha_{\mathbb{C}})$$

表示 α 在该表示中的重数，因此，当且仅当 $\alpha \in \Delta_\lambda$时，$m^\lambda_\alpha > 0$。

定义 6.11。我们称元素 $x \in \mathfrak{t}$ 是 $\mathcal{O}_\lambda$*-regular*，如果对于任意 $w \in \mathcal{W}_\mathfrak{t}$和 $\alpha \in \Delta_\lambda$，都有 $\alpha(wx) \neq 0$。将 $\mathfrak{t}^*$ 视为 $[\mathfrak{t},\mathfrak{g}]^\perp \subseteq \mathfrak{g}^*$的子空间，这意味着集合 $\mathcal{W}_\mathfrak{t}\lambda = \mathcal{O}^T_\lambda$中的 T-不动点 $\mathcal{O}_\lambda$ ([Ne00，引理 VIII.1。1]) 由单参数群 $\exp(\mathbb{R}x)$ 的孤立不动点组成。

定理 6.12 *Let $\mathfrak{g}$ be admissible $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{g}$ be a compactly embedded Cartan subalgebra Δ^+ an adapted .. , , positive system with $C_{\min} \subseteq C_{\max}$ and $\lambda \in C_{\min}^\star$. Then λ is admissible and*

$$\mathcal{L}(\mu_\lambda)(x) = \sum_{w \in \mathcal{W}} \frac{e^{-\lambda(wx)}}{\prod_{\alpha \in \Delta_\lambda} (i\alpha(wx))^{m_\alpha^\lambda}} = \sum_{w \in \mathcal{W}} \frac{e^{-\lambda(wx)}}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} (i\alpha(wx))^{m_\alpha^\lambda}} \tag{36}$$

for every $x \in C_{\max}^\circ$ which is $\mathcal{O}_\lambda$-regular. In particular,

$$W_{\max}^\circ \subseteq \Omega_\lambda. \tag{37}$$

Proof. 可容许性 λ 由命题6.10(b) 以及 [Ne96a，定理 II 中的拉普拉斯变换公式10]得出。

为验证（37），注意，任何 $x \in C_{\max}^\circ$ 没有根在其上消失的 $\mathcal{O}_\lambda$都是 $\mathcal{O}_\lambda$-正则的，因此由（36）可知 $x \in \Omega_{\lambda\circ}$ 由于 Ω_λ 是凸的，而 $\mathcal{O}_\lambda$-奇异元素是 $\mathcal{O}_\lambda$-正则元素的凸组合，因此可得 $C_{\max}^\circ \subseteq \Omega_{\lambda\circ}$ 由此可得 $W_{\max}^\circ = \mathrm{Ad}(G) C_{\max}^\circ \subseteq \Omega_{\lambda\circ}$ □

若 λ包含于 $C_{\min}^\star$的内部，则 $\Delta_p^+ \subseteq \Delta_{\lambda\circ}$ 事实上，对于 $0 \neq x_\alpha \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^\alpha$和 $\alpha \in \Delta_p^+$，有 $[x_\alpha, x_\alpha^*] \neq 0$，因为 $\mathfrak{g}$是可容许的（[Ne00，定理 VII.3.10(iv)]）。由于 $i[x_\alpha, x_\alpha^*] \in C_{\min}$，可得 $\lambda(i[x_\alpha, x_\alpha^*]) > 0$，这意味着 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^\alpha \not\subseteq (\mathfrak{g}_\lambda)_{\mathbb{C}}$，即 $\alpha \in \Delta_{\lambda\circ}$ 注意，子集 $\Delta_p^+ \subseteq \Delta_\lambda$是不变的，因此我们得到（36）右端的如下分解。

推论 6.13. *Let $\mathcal{O}_\lambda$ be an admissible coadjoint orbit spanning $\mathfrak{g}^*$ with $\lambda \in (C_{\min}^\star)^\circ$. For $K := \exp \mathfrak{k}$, we write μ_λ^K for the Liouville measure of the coadjoint K-orbit $\mathcal{O}_\lambda^K = \mathrm{Ad}^*(K)\lambda \subseteq \mathfrak{k}^*$. Then*

$$\mathcal{L}(\mu_\lambda)(x) = \frac{\mathcal{L}(\mu_\lambda^K)(x)}{\prod_{\alpha \in \Delta_p^+} (i\alpha(x))^{\dim \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^\alpha}} \quad \text{for} \quad x \in C_{\max}^\circ. \tag{38}$$

For $N := \sum_{\alpha \in \Delta_p^+}$维数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^\alpha$, we have

$$\lim_{t \to 0+} \mathcal{L}(\mu_\lambda)(tx) t^N = \frac{\mathrm{vol}(\mathcal{O}_\lambda^K)}{\prod_{\alpha \in \Delta_p^+} (i\alpha(x))^{\dim \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^\alpha}} < \infty, \tag{39}$$

and μ_λ is tempered.

Proof. 首先，我们应用定理6.12 得到

$$\mathcal{L}(\mu_\lambda)(x) = \frac{1}{\prod_{\alpha \in \Delta_p^+} (i\alpha(x))^{\dim \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^\alpha}} \cdot \Big(\sum_{w \in \mathcal{W}} \frac{e^{-\lambda(wx)}}{\prod_{\alpha \in \Delta_{k,\lambda}} i\alpha(wx)} \Big) \overset{(*)}{=} \frac{\mathcal{L}(\mu_\lambda^K)(x)}{\prod_{\alpha \in \Delta_p^+} (i\alpha(x))^{\dim \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^\alpha}}$$

对于那些 $x \in C_{\max}^\circ$ 是 $\mathcal{O}_\lambda$-正则的情况。这里，(∗)可通过将定理6.12 应用于紧李代数 $\mathfrak{k}$得到。由于 $\mathcal{L}(\mu_\lambda)$是定义在 $C_{\max}^\circ$ ([Ne00，命题 V.3。2])上的连续函数，并且 $\mathcal{L}(\mu_\lambda^K)$在整个 $\mathfrak{t}$上连续，因此，由等式两边在38上的连续性可得($C_{\max\circ}^\circ$

关于温和性的断言现在可由命题 2.6(b) 得出，其中估计式 (39) 可由 $\lim_{t \to 0+} \mathcal{L}(\mu_\lambda^K)(tx) = \mathrm{vol}(\mathcal{O}_\lambda^K)$ 得出。 □

例 6.14。以下二维例子也见于 [Ma21，§3。3]以及 [Neu22]。（a）对于 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$，我们有 $\mathfrak{t} = \mathfrak{k}$ 并且可以固定一个基元素

$$z_0 := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{t}. \tag{40}$$

那么，我们可以选择正系，使得 $\Delta^+ = \Delta_p^+ = \{\alpha\}$ 与 $i\alpha(z_0) = 1$。那么，$\lambda \in (C_{\min}^\star)^\circ \subseteq \mathfrak{t}^*$ 当且仅当 $\lambda(z_0) > 0$；在这种情况下， $\mathcal{O}_\lambda$ 是一个与.....同构的 K¨ahler 流形

复单位圆盘/上半平面，其形式按 $\lambda(z_0)$缩放。由于 $\mathfrak{k}$ 是阿贝尔的，其余伴随轨道都是平凡的，因此推论 6.13 给出

$$\mathcal{L}(\mu_\lambda)(tz_0) = \frac{e^{-\lambda(tz_0)}}{i\alpha(tz_0)} = \frac{e^{-t\lambda(z_0)}}{t}.$$

注意，对于 $\lambda(z_0) \to 0$，我们得到

$$\lim_{\lambda(z_0)\to 0} \mathcal{L}(\mu_\lambda)(tz_0) = \frac{1}{t}, \tag{41}$$

它是幂零轨道的拉普拉斯变换的一个倍数；在 $\mathfrak{g}^*$的子集层面上，轨道 $\mathcal{O}_\lambda$ “收敛”于该幂零轨道（例6.4）。

(b) 对于 $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$，我们也可以取 $\mathfrak{t} = \mathbb{R}z_0$，其中 z_0 如（40）中所示。我们选择正系，使得 $\Delta^+ = \Delta_k^+ = \{\alpha\}$，其中 $-i\alpha(z_0) = 1$（参见第 4.2 小节中紧根的定义），并注意 $\mathcal{W}_\mathfrak{t} = \{\pm \mathrm{id}_\mathfrak{t}\}$。于是，对于 $\lambda \neq 0$，有 $C_{\min} = \{0\}$、$C_{\min}^\star = \mathfrak{t}^*$ 和 $m_\alpha^\lambda = 1$。这里，$\mathcal{O}_\lambda$ 是一个紧致 K¨ahler 流形，同构于 $\mathbb{S}^2$，其辛形式按 $\lambda(z_0)$ 缩放；不失一般性，我们假设它为 ≥ 0。

由此我们得到

$$\mathcal{L}(\mu_\lambda)(tz_0) = \frac{e^{-\lambda(tz_0)}}{i\alpha(tz_0)} + \frac{e^{\lambda(tz_0)}}{i\alpha(-tz_0)} = \frac{e^{-\lambda(tz_0)} - e^{\lambda(tz_0)}}{-t} = 2\frac{\sinh(t\lambda(z_0))}{t}.$$

(c) 这个 第三个二维例子，其中 $\mathcal{O}_\lambda \cong \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ 带有平坦的 K¨ahler 结构，是由以下情况得到的 $\mathfrak{g} = \mathfrak{heis}(\mathbb{R}^2, \Omega) \rtimes \mathbb{R}z_0$, z_0 如上所述，且 $\mathfrak{t} = \mathbb{R}\mathbf{c} \oplus \mathbb{R}z_0$。

由于 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{heis}(\mathbb{R}^2, \Omega)$ 是 $\mathfrak{g}$ 中的一个超平面，因此存在在 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 上消失的非零线性泛函 ζ，而这些都是余伴随作用的不动点。由此我们有

$$\mathcal{O}_{\lambda+\zeta} = \zeta + \mathcal{O}_\lambda, \tag{42}$$

其中，平移 ζ 是一个 G-等变辛同构，从 $\mathcal{O}_\lambda$ 到 $\mathcal{O}_{\lambda+\zeta}$。于是我们可以选取正系，使得 $\Delta^+ = \Delta_r^+ = \{\alpha\}$ 且 $i\alpha(z_0) = \frac{1}{2}$。这里 $\lambda \in (C_{\min}^\star)^\circ$ 当且仅当 $\lambda(\mathbf{c}) > 0$。于是 $\mathcal{O}_\lambda$ 是一个 K¨ahler 流形，与复平面同构，其形式按 $\lambda(\mathbf{c})$ 缩放。结合 (a) 与 (42)，我们得到

$$\mathcal{L}(\mu_\lambda)(s\mathbf{c} + tz_0) = e^{-s\lambda(\mathbf{c})}\frac{e^{-\lambda(tz_0)}}{i\alpha(tz_0)} = \frac{2e^{-s\lambda(\mathbf{c})-t\lambda(tz_0)}}{t}.$$

这可由小节中的讨论得出 6.2.

注记 6.15。 (a) 对于 $\mathcal{W}_\mathfrak{t}$-不变泛函 $\lambda_0 \in \mathfrak{t}^*$ 满足 λ 且 $\lambda + \lambda_0 \in (C_{\min}^\star)^\circ$，特别地，由推论 6.13 可得

$$\mathcal{L}(\mu_{\lambda+\lambda_0})(x) = e^{-\lambda_0(x)}\mathcal{L}(\mu_\lambda)(x).$$

(b) 若 $\mathcal{O}_\lambda$ 可容许且张成 $\mathfrak{g}^*$，则对于 $x \in \partial C_{\max}$ 和 $y \in C_{\max}^\circ$，我们有

$$\lim_{t\to 0+} \mathcal{L}(\mu_\lambda)(x + ty) = \infty.$$

由于 $\mathcal{L}(\mu)$ 在闭射线（[Ne00，推论 V.3。3]）上的连续性，这意味着 $x \notin D_{\mu_\lambda}$。这也可由推论3.6得到。

6.4 从约化李代数到单李代数

假设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$ 是李代数的直和，其中 $\mathfrak{g}_0$ 是阿贝尔的，那么带有 $\lambda_j \in \mathfrak{g}_j^*$ 的 $\lambda = \sum_{j=0}^n \lambda_j$ 的余伴随轨道是哈密顿 G-空间的乘积

$$\mathcal{O}_\lambda = \{\lambda_0\} \times \prod_{j=1}^n \mathcal{O}_{\lambda_j}.$$

由于刘维尔测度与该乘积分解相适配（参见 [So97，定理 16。98]），

$$\mathcal{L}(\mu) = e^{-\lambda_0} \cdot \prod_{j=1}^n \mathcal{L}(\mu_j), \quad D_{\mu_\lambda} = \mathfrak{g}_0 \times \prod_{j=1}^n D_{\mu_{\lambda_j}}, \quad \text{and} \quad \Omega_\lambda = \mathfrak{g}_0 \times \prod_{j=1}^n \Omega_{\lambda_j}.$$

这一观察将约化情形中的所有问题都归结为单李代数。若 $\mathfrak{g}_j$ 是紧的，则 $\mathcal{O}_{\lambda_j}$ 是紧的，且 $\Omega^{\lambda_j} = \mathfrak{g}_j$。

7 约化程序

本节讨论一般有限维李代数中具有非平凡 $\mathcal{O}_\lambda$ 的余伴随轨道分类问题 D_{μ_λ}。迄今我们看到的是可容许轨道（第 6.3 小节），由于我们有拉普拉斯变换的显式公式 $\mathcal{L}(\mu_\lambda)$，因此它们相当容易处理。非约化李代数 $\mathcal{O}_\lambda \cong (V, \Omega)$ 的仿射余伴随轨道 $\mathfrak{g} = \mathfrak{hsp}(V, \Omega)$ 是一个非常特殊的情形（第 6.2 小节）。

我们的分类策略是采用半直积分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \rtimes \mathfrak{l}$，如第 4.4 小节所述，从而将 $W_{\min}^\star$ 中的任意轨道写成一个和

$$\mathcal{O}_\lambda = \mathcal{O}_{\lambda_\mathfrak{z}} + \mathcal{O}_{\lambda_\mathfrak{l}},$$

这实际上是一个辛积，[8] 其中 $\mathcal{O}_{\lambda_\mathfrak{z}}$ 同构于辛向量空间 (V, Ω)，其中 $V = [\mathfrak{l}, \mathfrak{u}]$，而 $\mathcal{O}_{\lambda_\mathfrak{l}}$ 是约化李代数 $\mathfrak{l}$ 的一个余伴随轨道。

$W_{\min}^\star$ 中的轨道

本小节旨在探讨：一个可容许的线性泛函 $\lambda = \lambda_\mathfrak{z} + \lambda_\mathfrak{l} \in \mathfrak{g}^*$ 定义在半直和 $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \rtimes \mathfrak{l}$上时，何时属于 $W_{\min}^\star$（参见定理 4.6）。

引理 7.1。 *For the projection* $p_\mathfrak{l}$: $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \rtimes \mathfrak{l} \to \mathfrak{l}$, *we have* $p_\mathfrak{l}(W_{\min}) = W_{\min,\,\mathfrak{l}} \subseteq W_{\min}$.

这里我们利用 $\mathfrak{l}$ 也是可容许的这一点，因此 $W_{\min,\,\mathfrak{l}}$ 由 $\Delta_p^+ \cap \Delta_s$ 按定理 4.4中的方式定义。

Proof. 设 $x \in C_{\max}^\circ$。那么

$$W_{\min} = \lim(\mathrm{co}(x)) \quad \text{for} \quad \mathrm{co}(x) := \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{Ad}(G)x)}$$

根据定理 4.4(b)。对于 $\mathfrak{t}_\mathfrak{l} := \mathfrak{t} \cap \mathfrak{l}$ 分解

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{t}_\mathfrak{l} \quad \text{with} \quad C_{\max} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus (C_{\max} \cap \mathfrak{t}_\mathfrak{l}).$$

因此，我们在下文中假设 $x = x_\mathfrak{l} \in \mathfrak{t}_\mathfrak{l}$。

[8] 辛积 $(M, \omega) = (M_1, \omega_1) \times (M_2, \omega_2)$ 由关系式 $\omega = p_{M_1}^* \omega_1 + p_{M_2}^* \omega$ 定义

我们用 $G = U \rtimes L$ 表示李代数为 $\mathfrak{g}$ 的单连通李群。投影$p_{\mathfrak{l}}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{l}$ 是李代数同态，因此与伴随作用相容，并且 U 在 $\mathfrak{l}$ 上的作用是平凡的。由此可得

$$p_{\mathfrak{l}}(\mathrm{Ad}(G)x) = \mathrm{Ad}(L)x = \mathcal{O}_x^L.$$

这意味着 $p_{\mathfrak{l}}(\mathsf{co}(x)) \subseteq \mathsf{co}_{\mathfrak{l}}(x)$，因此

$$p_{\mathfrak{l}}(W_{\min}) = p_{\mathfrak{l}}(\lim(\mathrm{co}(x))) \subseteq \lim \mathrm{co}_{\mathfrak{l}}(x) = W_{\min,\mathfrak{l}},$$

其中最后一个等号由$x \in C^{\circ}_{\max} \cap \mathfrak{t}_{\mathfrak{l}} \subseteq C^{\circ}_{\max,\ \mathfrak{l}}$得出，这里我们利用了$C_{\max,\ \mathfrak{l}} = \mathfrak{t}_{\mathfrak{l}} \cap (i\Delta^+_{p,\ s})^\star$ (参见小节 4.2 和式（20）)。由于 $\mathsf{co}_{\mathfrak{l}}(x) \subseteq \mathrm{co}(x)$ 显然成立，我们也有

$$W_{\min,\mathfrak{l}} = \lim(\mathrm{co}_{\mathfrak{l}}(x)) \subseteq \lim(\mathrm{co}(x)) = W_{\min}$$

(参见定理 4.4(c))。这就证明了所述等式。 □

下面我们将使用以下记号

$$C_{\mathrm{mim},\mathfrak{z}} := C_{\min} \cap \mathfrak{z} = \overline{\mathrm{cone}}(\{i[x_\alpha, x_\alpha^*]\colon x_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha_{\mathbb{C}}, \alpha \in \Delta_r^+\}) \subseteq \mathfrak{z},$$

并且$C_{\min/\max,\ \mathfrak{l}}$ 以及$W_{\min/\max,\ \mathfrak{l}}$ 是由 $\Delta_p^+ \cap \Delta_s$ 在可容许李代数 $\mathfrak{l}$ 中指定的锥（参见式（3））和定理4.4。

引理 **7.2.** *Suppose that $\mathfrak{g}$ is admissible and non-reductive. For $\lambda = \lambda_{\mathfrak{z}} + \lambda_{\mathfrak{l}}$ with $\lambda_{\mathfrak{l}} \in \mathfrak{l}^* \cong \mathfrak{t}^\perp$, and $0 \neq \lambda_{\mathfrak{z}} \in \mathfrak{z}^* = (V + \mathfrak{l})^\perp$, the following are equivalent:*

（a） $\lambda \in W^\star_{\min}$.（b） $\lambda_{\mathfrak{l}} \in W^\star_{\min,\ \mathfrak{l}}$ *and* $\lambda_{\mathfrak{z}} \in C^\star_{\min,\ \mathfrak{z}}$.

若 $\mathcal{O}_\lambda$ 是生成的，则维数$\mathfrak{z}$（$\mathfrak{g}$） ≤ 1，因此$C_{\min,\ \mathfrak{z}} = \mathbb{R}_+\mathbf{c}$，且（b）中的第二个条件化简为 λ（$\mathbf{c}$） ≥ 0。

Proof. （a） $\Rightarrow$ （b）：由于 $\lambda = \lambda_{\mathfrak{z}} + \lambda_{\mathfrak{l}}$ 和$C_{\min,\ \mathfrak{z}} + W_{\min,\ \mathfrak{l}} \subseteq W_{\min}$ （引理7.1），且$C_{\min,\ \mathfrak{z}} \subseteq \mathfrak{z} \subseteq \mathfrak{u}$ 和$W_{\min,\ \mathfrak{l}} \subseteq \mathfrak{l}$，我们立即由（a）得到（b）。

（b） $\Rightarrow$（a）：引理7.1 表明对偶锥满足

$$W^\star_{\min,\mathfrak{l}} = p_{\mathfrak{l}}(W_{\min})^\star = (\mathfrak{u} + W_{\min})^\star = W^\star_{\min} \cap \mathfrak{u}^\perp = W^\star_{\min} \cap \mathfrak{l}^*.$$

根据定义，我们还可以得到 $p_{\mathfrak{l}}(W_{\min}) = C_{\min} = C_{\min,\ \mathfrak{z}} + C_{\min,\ \mathfrak{l}}$，由此可知

$$C^\star_{\min,\mathfrak{z}} = \mathfrak{z}^* \cap C^\star_{\min} \subseteq W^\star_{\min}.$$

因此 $\lambda = \lambda_{\mathfrak{z}} + \lambda_{\mathfrak{l}} \in W^\star_{\min}$。 □

7.2 约化李代数中的幂零轨道

在本小节中，我们使用 Rao 定理 [Rao72，定理 1] 关于约化李代数中幂零元的伴随轨道。特别地，它说明刘维尔测度 μ_λ 是温和的，当且仅当 $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ 是幂零的。

定理 7 3 *Let x be a nilpotent element in the reductive。 。* (Rao 幂零轨道定理) (, *Lie algebra $\mathfrak{g}$ and let h x y be a corresponding $\mathfrak{sl}_2$-triple i.e.* ,) , ,

$$[h,x]=2x,\quad [h,y]=-2y\quad \textit{and}\quad [x,y]=h.$$[9]

We write $\mathfrak{g}_\mu := \mathfrak{g}_\mu(h)$ for the h-eigenspaces, [10]

$$\mathfrak{m}:=\mathfrak{g}_0(h),\quad \mathfrak{n}:=\sum_{\mu>0}\mathfrak{g}_\mu(h),\quad \mathfrak{p}:=\sum_{\mu\geq 0}\mathfrak{g}_\mu(h)=\mathfrak{n}\rtimes\mathfrak{m},\quad \mathfrak{n}_2:=\sum_{\mu>2}\mathfrak{g}_\mu(h).$$

Then $V := \mathrm{Ad}(M)x$ is an open subset of $\mathfrak{g}_2$ and, for every $f\in C_c(\mathcal{O}_x)$ we have

$$\int_{\mathcal{O}_x} f(z)\,dz = c_1\int_{V+\mathfrak{n}_2} f^K(z_1+z_2)\varphi(z_1)\,dz_1\,dz_2, \tag{43}$$

where

- *dz_1 and dz_2, resp., are Lebesgue measures on $\mathfrak{g}_2$ and $\mathfrak{n}_2$, respectively,*
- *$\varphi(z) = |\det(c(z))|^{1/2}$ for $c(x) := \operatorname{ad} x|_{\mathfrak{g}_{-1}}\colon \mathfrak{g}_{-1}\to\mathfrak{g}_1$, and*
- *$f^K = \int_K f\circ\mathrm{Ad}(k)\,dk$, where dk is a normalized Haar measure on the compact group $K = e_{\mathrm{ad}^{\mathfrak{k}}}$, for a maximal compactly embedded subalgebra $\mathfrak{k}\subseteq\mathfrak{g}$.*

定理 7 4 *The invariant measure $\mu_{\mathcal{O}_x}$ on a nilpotent adjoint orbit $\mathcal{O}_x$ in a reductive Lie algebra . . is tempered.*

Proof. 首先注意，定理 7.3 中的函数 φ 具有次数为 1 2 $\dim\mathfrak{g}_1$ 的多项式增长，即: –

$$|\varphi(x)|\leq c_2\|x\|^{\frac{\dim\mathfrak{g}_1}{2}}$$

存在 $c_2>0$。我们假设嘉当对合 θ 满足 $\mathfrak{k}=\mathrm{Fix}(\theta)$ $y=\theta(x$。这是可以做到的，因为由 $(,x,y)$ 张成的 $\mathfrak{sl}_2$-子代数上的每个嘉当对合都可以扩张为 $\mathfrak{g}$上的嘉当对合，即 $\mathfrak{k}$可以选取为包含 $\mathrm{span}\{h,x,y\}$ (参见 [HNO94，引理 I.2])。

若 $\kappa(x,y)=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\ x\,\mathrm{ad}\ y)$ 是 $\mathfrak{g}$ 上非退化的嘉当–基林形式，则 $\langle x,y\rangle := -\kappa(x,\theta(y))$ 是 $\mathfrak{g}$ 上 $\mathrm{Ad}(K)$-不变的标量积，并定义欧几里得范数 $\|\cdot\|$。相对于此标量积，ad h 是对称端omorphism，因此其特征子空间两两正交。特别地，$\mathfrak{g}_1$ 与 $\mathfrak{g}_2$ 正交。

对于 K 不变函数 $f(x) := (1+\|x\|^2)^{-k}$, $k\in\mathbb{N}$，于是有 $f^K=f$，因此

$$\int_{\mathcal{O}_z} f(z)\,dz = c_1\int_{V+\mathfrak{n}_2} f(z_1+z_2)\varphi(z_1)\,dz_1\,dz_2 = c_1\int_{V+\mathfrak{n}_2}\frac{\varphi(z_1)}{(1+\|z_1+z_2\|^2)^k}\,dz_1\,dz_2$$
$$\leq c_1c_2\int_{V+\mathfrak{n}_2}\frac{\|z_1\|^{\frac{\dim\mathfrak{g}_1}{2}}}{(1+\|z_1\|^2+\|z_2\|^2)^k}\,dz_1\,dz_2,$$

而这个积 分在 k 足够大时是有限的。这里我们利用了 $V\subseteq\mathfrak{g}_2$ 是开集且 dz_1 是勒贝格测度 关于 $\mathfrak{g}_2$。 □

[9]这类元素的存在性由雅各布森–莫罗佐夫定理给出（[Wa72，命题 13.5。3]）。[10]请注意，Rao 的论文在幂零李代数的定义中有一处印刷错误 $\mathfrak{n}$和 $\mathfrak{n}_2$。

7.3 单李代数中的混合轨道

现在考虑子代数 $\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{g}$，其中 $\mathfrak{g}$ 是一个可容许李代数，它是元素 $x_{\mathfrak{l}} \in \mathfrak{t}$ 的中心化子。于是 $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{g}$ 表明，$\mathfrak{l}$ 包含 $\mathfrak{g}$ 的一个嘉当子代数；并且 $\mathfrak{l}$ 是一个可容许李代数，因为它包含 $\mathfrak{t}$，因而与 $W_{\max}$ 的内部相交。我们将相应的伴随群记为 $G := \mathrm{Inn}(\mathfrak{g}) \supseteq L := \mathrm{Inn}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{l})$。单位连通分支 $Z_L = e^{\mathrm{ad}\,\mathfrak{z}(\mathfrak{l})}$ 是一个~~环面~~，对于它

$$p_{\mathfrak{l}} \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{l}, \quad p_{\mathfrak{l}}(x) = \int_{Z_L} gx\, dg \tag{44}$$

是不动点投影，其中 dg 表示 Z_L上的归一化哈尔测度。这里我们利用积分公式显然是不动点投影 $\mathfrak{g} \to \mathrm{Fix}(Z_L)$，且不动点空间为 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{z}(\mathfrak{l})) = \mathfrak{l}$，因为 $\mathfrak{z}(\mathfrak{l})$包含元素 $x_{\mathfrak{l}}$，其中心化子为 $\mathfrak{l}$。投影的积分公式意味着，对于任意 Z_L-不变闭凸子集 $C \subseteq \mathfrak{g}$，我们有

$$p_{\mathfrak{l}}(C) = C \cap \mathfrak{l}. \tag{45}$$

定理 7.5 *$p_{\mathfrak{l}}$ Let $\mathfrak{g}$ be an admissible Lie algebra and $\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{g}$ the centralizer .*.（凸性定理），*of some element of $\mathfrak{t}$. For $x \in C^{\circ}_{\max}$ we have*

$$p_{\mathfrak{l}}(\mathrm{Ad}(G)x) \subseteq \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{Ad}(L)\mathcal{W}_{\mathfrak{k}}x)} + W_{\min} \cap \mathfrak{l}.$$

Proof. 由 $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{l}$可知，我们注意到

$$p_{\mathfrak{t}}(p_{\mathfrak{l}}(\mathrm{co}(x))) = p_{\mathfrak{t}}(\mathrm{co}(x)) \subseteq \mathrm{conv}(\mathcal{W}_{\mathfrak{k}}x) + C_{\min} \quad \text{for} \quad x \in C_{\max} \tag{46}$$

由伴随轨道凸性定理得出（[Ne00，定理 VIII.1。36]）。令 $p_{\mathfrak{t}}^{\mathfrak{l}} \colon = p_{\mathfrak{t}}|_{\mathfrak{l}} \colon \mathfrak{l} \to \mathfrak{t}$ 且 $L \colon = \langle \exp \mathfrak{l} \rangle \subseteq G$。我们考虑闭凸的 $\mathrm{Ad}(L)$-不变子集

$$C_x^L := \{y \in \mathfrak{l} \colon p_{\mathfrak{t}}(\mathrm{Ad}(L)y) \subseteq \mathrm{conv}(\mathcal{W}_{\mathfrak{k}}x) + C_{\min}\} = \bigcap_{g \in L} \mathrm{Ad}(g)(p_{\mathfrak{t}}^{\mathfrak{l}})^{-1}\big(\mathrm{conv}(\mathcal{W}_{\mathfrak{k}}x) + C_{\min}\big).$$

由于闭凸子集 $\mathrm{conv}(\mathcal{W}_{\mathfrak{k}}x) + C_{\min}$ of $\mathfrak{t}$ 在 $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{l}$ 的 Weyl 群作用下不变，且在加上 $C_{\min}$ 中的元素后保持不变，，$\mathfrak{l}$，将伴随轨道凸性定理应用于李代数 $\mathfrak{l}$，可得 $\mathrm{conv}(\mathcal{W}_{\mathfrak{k}}x) + C_{\min} \subseteq C_x^L$。因此

$$C_x^T := C_x^L \cap \mathfrak{t} \overset{(46)}{=} \mathrm{conv}(\mathcal{W}_{\mathfrak{k}}x) + C_{\min}.$$

由（4 6）可推得，$\mathrm{Ad}(L)$-不变凸子集 $p_{\mathfrak{l}}(\mathrm{co}(x))$ 包含于 C_x^L. 因此
只需 s 以表明 that

$$C_x^L \subseteq \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{Ad}(L)\mathcal{W}_{\mathfrak{k}}x)} + W_{\min} \cap \mathfrak{l}.$$

接下来我们注意到 $x \in C^{\circ}_{\max}$ $\mathcal{W}_{\mathfrak{k}}x + C_{\min} \subseteq C^{\circ}_{\max} \subseteq C^{\circ}_{\max \mathfrak{l}}$ $C_x^L \subseteq$ 蕴含 conv( ) . ，因此 . 由定理。(d)。因此我们有 $W^{\circ}_{\max \mathfrak{l}}$ 4 4

$$C_x^L = \mathrm{Ad}(L)C_x^T \overset{(a)}{=} \mathrm{Ad}(L)(\mathrm{conv}(\mathcal{W}_{\mathfrak{k}}x) + C_{\min}) \subseteq \mathrm{conv}(\mathrm{Ad}(L)\mathcal{W}_{\mathfrak{k}}x) + W_{\min} \cap \mathfrak{l}.$$

这里，(a) 是由以下事实得出的：闭的 L-不变凸子集 $C_x^L \subseteq \mathfrak{l}$ 具有稠密内部，且其内部中的所有元素都与 $\mathfrak{t}$ 中的元素共轭。 □

以下定理是适用于约化李代数的定义域定理2 （见引言）。

定理 7.6. *Let $\mathfrak{g}$ be reductive admissible and $\lambda \in W^\star_{\min}$. Then*

$$W^\circ_{\max} \subseteq \Omega_\lambda = \{x \in \mathfrak{g} \colon \mathcal{L}(\mu_\lambda)(x) < \infty\}^\circ,$$

and equality holds if $\mathcal{O}_\lambda$ spans $\mathfrak{g}^*$.

Proof. 令 $\lambda = \lambda_s + \lambda_n \in W^\star_{\min}$ (λ 的约当分解，其中我们将中心分量计入 λ_s (参见 [Wa72，命题 1.3.5。1])，并记 $\mathfrak{l} := \mathfrak{g}^{\lambda_s}$ 为半单元 λ_s $\mathfrak{g}$ [72, 1 3 5 3] $L =$ $_{\mathfrak{g}}$ $\mathfrak{l}$ $\subseteq$ G 的稳定子李代数。这是一个约化李子代数（Wa命题.....）。我们用 Inn ( ) Inn($\mathfrak{g}$) 表示对应于 的整数子群。

步骤 1：令 $\beta \in W^\star$min $\cap\, \mathfrak{l}^*$ 为幂零元， $\mathcal{O}^L_\beta = \mathrm{Ad}^*(L)\beta$，并令 μ^L_β为该轨道上的 L-不变刘维尔测度。根据将 $\mathfrak{g}$与 $\mathfrak{g}^*$相对应的识别，锥 $W^\star$min 对应于 $W_{\max}$，因此 $\mathcal{O}^L_\beta \subseteq \mathcal{O}_\beta$的闭凸包不含仿射直线。此外，根据定理 7.4， μ^L_β是温和的，因此命题 2.6 表明，其拉普拉斯变换定义在开锥 $B(\mathcal{O}^L_\beta)^\circ \supseteq W^\circ$ max 上。这里我们利用了 $\beta \in W^\star_{\max}$， $_{\mathfrak{l}}$可由 HNO94 定理 III.9], 应用于半单李代数 [$\mathfrak{l}, \mathfrak{l}$] 得出。于是我们有

$$\mathcal{L}(\mu^L_\beta)(x) = \int_{\mathcal{O}^L_\beta} e^{-\alpha(x)}\, d\mu^L_\beta(\alpha) \quad \text{for} \quad x \in W^\circ_{\max,\mathfrak{l}}. \tag{47}$$

由于 $C_{\max,\ \mathfrak{l}} \supseteq C_{\max}$ 是 $\Delta_{p,\ \mathfrak{l}} \subseteq \Delta_p$的推论，因此由（$W_{\max} \cap \mathfrak{l}$） $\cap\, \mathfrak{t} = C_{\max}$ 可得

$$W_{\max,\mathfrak{l}} = \overline{\mathrm{Ad}(L) C_{\max,\mathfrak{l}}} \supseteq \overline{\mathrm{Ad}(L) C_{\max}} = W_{\max} \cap \mathfrak{l}. \tag{48}$$

步骤 2： 函数（47）在 W°max$\cap\mathfrak{l}$上沿 $W_{\min}\cap\mathfrak{l}$的方向递减。事实上，对于 $x \in W^\circ_{\max}\cap\mathfrak{l}$和 $y \in W_{\min} \cap \mathfrak{l}$，对任意 $\alpha \in \mathcal{O}^L_\beta \subseteq \mathcal{O}_\beta \subseteq W^\star_{\min}$ 都有 $\alpha(x+y) \geq \alpha(x)$，因此

$$\mathcal{L}(\mu^L_\beta)(x+y) = \int_{\mathcal{O}^L_\beta} e^{-\alpha(x+y)}\, d\mu^L_\beta(\alpha) \leq \int_{\mathcal{O}^L_\beta} e^{-\alpha(x)}\, d\mu^L_\beta(\alpha) = \mathcal{L}(\mu^L_\beta)(x).$$

步骤 3： 对于 $x \in C^\circ_{\max}$，利用凸性定理 7.5可得

$$p_{\mathfrak{l}}(\mathrm{Ad}(G)x) \subseteq \mathrm{conv}(\mathrm{Ad}(L)\mathcal{W}_{\mathfrak{k}}x) + W_{\min} \cap \mathfrak{l},$$

因此，将 $\mathfrak{l}^*$ 与子空间 $[\mathfrak{z}(\mathfrak{l})\ \mathfrak{g}]^\perp \subseteq \mathfrak{g}^*$认同，

$$\mathcal{L}(\mu^L_\beta)(\mathrm{Ad}(g)x) = \mathcal{L}(\mu^L_\beta)(p_{\mathfrak{l}}(\mathrm{Ad}(g)x)) \leq \sup \mathcal{L}(\mu^L_\beta)(\mathrm{Ad}(L)\mathcal{W}_{\mathfrak{k}}x) = \max \mathcal{L}(\mu^L_\beta)(\mathcal{W}_{\mathfrak{k}}x). \tag{49}$$

步骤 4： 现在我们将上述讨论应用于幂零若尔当分量 $\beta = \lambda_n$，根据 [NO22，推论 B，2]它也包含于 $W^\star_{\min}$ 中。不变测度 μ_λ 在 $\mathcal{O}_\lambda$ 上根据 [Rao72，第 510]页，具有如下形式

$$\mu_\lambda = \int_{G/L} g_* \mu^L_\lambda\, d\mu(gL).$$

对于其拉普拉斯变换，我们得到 $x \in C^\circ_{\max}$ 由（49）可得估计

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\mu_\lambda)(x) &= \int_{G/L} e^{-\alpha(x)}\ d(g_*\mu^L_\lambda)(\alpha)\, d\mu(gL) \\
&= \int_{G/L} e^{-\lambda_s(g^{-1}x)} \mathcal{L}(\mu^L_{\lambda_n})(g^{-1}x)\, d\mu(gL) \\
&\overset{(49)}{\leq} \int_{G/L} e^{-\lambda_s(g^{-1}x)} \cdot \Big(\max \mathcal{L}(\mu^L_{\lambda_n})(\mathcal{W}_{\mathfrak{k}}x)\Big)\, d\mu(gL) \\
&= \max \mathcal{L}(\mu^L_{\lambda_n})(\mathcal{W}_{\mathfrak{k}}x) \cdot \int_{G/L} e^{-\lambda_s(g^{-1}x)}\, d\mu(gL) = \max \mathcal{L}(\mu^L_{\lambda_n})(\mathcal{W}_{\mathfrak{k}}x) \cdot \mathcal{L}(\mu_{\lambda_s})(x).
\end{aligned} \tag{50}$$

由于 $\lambda_s \in W^\star\min$（参见 [NO22，推论 B.2]）在对偶性 $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ 下对应于一个椭圆元素，因此它与 $C^\star_{\min} \subseteq \mathfrak{t}^*$中的一个元素共轭，因而是可容许的（命题 6.10）。由定理 6.12 可知， $\mathcal{L}(\mu_{\lambda_s})(x) < \infty$，因为 $x \in C^\circ_{\max}$。此外， $\mathcal{W}_{\mathfrak{k}}$-不变性意味着 $C_{\max}$，$\mathcal{W}_{\mathfrak{k}} x \subseteq C^\circ_{\max} \subseteq C^\circ_{\max}$、ı，且 $\mathcal{L}(\mu_{\lambda_n})$ 在 $W^\circ\max$ ı上由（47）可知是有限的。结合（50）与定理 4.4(a)可得， $W^\circ_{\max} = \mathrm{Ad}(G)C^\circ_{\max} \subseteq \Omega_\lambda$。这里最后一个包含关系由 Ω_λ的 G-不变性推出。

为验证最后一个陈述，我们写作 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$，其中$\mathfrak{g}_0 = \mathcal{O}_\lambda^\perp$，使得 $\mathcal{O}_\lambda$张成 $\mathfrak{g}_{1^0}^*$。由于$W^{\mathfrak{g}}_{\max} = W^{\mathfrak{g}_0}{}_{\text{最大}} \oplus W^{\mathfrak{g}_1}{}_{\text{最大}}$且 $\mathfrak{g}_0 \subseteq H(\Omega_\lambda)$，我们可以假设 $\mathcal{O}_\lambda$张成 $\mathfrak{g}^*$。上文已证明$W^\circ_{\max} \subseteq \Omega_\lambda$，反向结论则由推论6.1得出。 □

命题 **7 7** *Suppose that* $\mathfrak{g}$ *is reductive admissible and that* $\lambda \in W^\star_{\min}$ *is such that* $\mathcal{O}_\lambda$ *spans* $\mathfrak{g}^*$. . . ,,Ω *Then* D_{μ_λ} *is open hence equal to* $_\lambda$.

Proof. 鉴于推论 Δ_p^+中的唯一性6.1，由定理7.6 可得 $\Omega\lambda = W^\circ{}_{\text{最大}}$。另一方面，定理4.7(c) 表明 $D_{\mu_\lambda} \subseteq W^\circ_{\max}$，因此 $D_{\mu_\lambda} = \Omega_\lambda$。 □

7.4 半直和中的余伴随轨道

考虑半直和 $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \rtimes \mathfrak{l}$ 以及相应的单连通李群 $G = U \rtimes L$。我们将 $\mathfrak{g}$上的线性泛函写作

$$\lambda = \lambda_{\mathfrak{u}} + \lambda_{\mathfrak{l}} \quad \text{with} \quad \lambda_{\mathfrak{u}} \in \mathfrak{u}^* \cong \mathfrak{l}^\perp \quad \text{and} \quad \lambda_{\mathfrak{l}} \in \mathfrak{l}^* \cong \mathfrak{u}^\perp. \tag{51}$$

于是， U 在 $\mathfrak{l}^* \cong \mathfrak{u}^\perp \cong (\mathfrak{g}/\mathfrak{u})^*$ 上的作用是平凡的，因为 $\mathfrak{u} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ 是一个理想。

引理 7.8. *Suppose that* $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \rtimes \mathfrak{l}$ *and that* $\lambda = \lambda_{\mathfrak{u}} + \lambda_{\mathfrak{l}} \in \mathfrak{g}^*$ *is decomposed accordingly. We assumethat*

- $\lambda_{\mathfrak{u}}$ *is fixed by* L*, and that*
- *the stabilizer group* $U^{\lambda_{\mathfrak{u}}} = \{u \in U \colon \mathrm{Ad}^*(u)\lambda_{\mathfrak{u}} = \lambda_{\mathfrak{u}}\}$ *is connected.*

Then the following assertions hold:

(a) $\mathcal{O}_\lambda = \mathcal{O}_{\lambda_{\mathfrak{u}}} + \mathcal{O}_{\lambda_{\mathfrak{l}}} = \mathrm{Ad}^*(U)\lambda_{\mathfrak{u}} + \mathrm{Ad}^*(L)\lambda_{\mathfrak{l}}$, *where* U *acts trivially on* $\mathfrak{l}^* \cong (\mathfrak{g}/\mathfrak{u})^*$.(b) *The addition map defines a* G*-equivariant symplectic diffeomorphism* 加法： $\mathcal{O}_{\lambda_{\mathfrak{u}}} \times \mathcal{O}_{\lambda_{\mathfrak{l}}} \to \mathcal{O}_\lambda$.

(c) $p_{\mathfrak{u}}$： $\mathcal{O}_{\lambda_{\mathfrak{u}}} \to \mathfrak{u}^*$ *is a diffeomorphism onto a coadjoint orbit of* U *in* $\mathfrak{u}^*$.

Proof. 根据 [Ne00，命题 VIII.1。2]（a）至（c）成立，但（b）中的微分同胚除外

$$\Psi \colon \mathcal{O}_{\lambda_{\mathfrak{u}}} \times \mathcal{O}_{\lambda_{\mathfrak{l}}} \to \mathcal{O}_\lambda \subseteq \mathfrak{g}^*, \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta \tag{52}$$

是辛的。为证明 Ψ 是辛的，我们首先注意到辛乘积结构是 G-不变的，且乘积空间是齐性的。 $\mathcal{O}_\lambda$ 在 λ 中的切空间为

$$\lambda \circ \mathrm{ad}\,\mathfrak{g} = \lambda \circ (\mathrm{ad}\,\mathfrak{u} + \mathrm{ad}\,\mathfrak{l}) = \lambda_{\mathfrak{u}} \circ \mathrm{ad}\,\mathfrak{u} + \lambda_{\mathfrak{l}} \circ \mathrm{ad}\,\mathfrak{l},$$

这两个子空间之和是直和。对于 x_u， $y_u \in \mathfrak{u}$ 和 x_l， $y_l \in \mathfrak{l}$，我们有

$$\lambda([x_u + x_l, y_u + y_l]) = \lambda_{\mathfrak{u}}([x_u + x_l, y_u + y_l]) + \lambda_{\mathfrak{l}}([x_u + x_l, y_u + y_l]) = \lambda_{\mathfrak{u}}([x_u, y_u]) + \lambda_{\mathfrak{l}}([x_l, y_l])$$

（参见（26））， 这表明

$$T_\lambda(\mathcal{O}_\lambda) \cong T_{\lambda_{\mathfrak{u}}}(\mathcal{O}^U_{\lambda_{\mathfrak{u}}}) \oplus T_{\lambda_{\mathfrak{l}}}(\mathcal{O}^L_{\lambda_{\mathfrak{l}}})$$

作为辛向量空间。这就完成了 (b) 的证明。特别地， $\mathcal{O}_{\lambda_{\mathfrak{u}}} \times \mathcal{O}_{\lambda_{\mathfrak{l}}}$ 是一个齐性哈密顿 G-空间，其动量映射由 Ψ 给出。 □

引理 **7 9** *If* $\mathfrak{g}=\mathfrak{u}\rtimes\mathfrak{l}=\mathfrak{z}+V\rtimes\mathfrak{l}$ *is admissible and decomposed as in* 4 6 *and* $\mathcal{O}_\lambda$ .. ( ) 定理 .,,,, *spans* $\mathfrak{g}^*$ *then* $\mathcal{O}_\lambda$ *contains a functional* α *vanishing on* V *i.e.* $\alpha_V=0$.

Proof. 若 $V=\{0\}$，则无须证明。因此我们假设 $V\neq\{0\}$。$\mathcal{O}_\lambda$ 张成 $\mathfrak{g}^*$，这尤其意味着 $\mathcal{O}_\lambda|_\mathfrak{z}=\{\lambda_\mathfrak{z}=\lambda|_\mathfrak{z}\}$（中心元在 $\mathcal{O}_\lambda$ 上定义常值哈密顿函数）能够分离 $\mathfrak{z}$ 上的点，因此 $\dim\mathfrak{z}=1$，且 $\lambda_\mathfrak{z}\neq0$。根据 $\mathfrak{g}$ 的可容许性，

$$\Omega(v,w):=\lambda_\mathfrak{z}([v,w]) \tag{53}$$

是 V 上的辛形式（参见小节 23中的（4.4））， 因此

$$\lambda_\mathfrak{u}(e^{\operatorname{ad}v}w)=\lambda_V(w)+\frac{1}{2}\lambda_\mathfrak{z}([v,w])=\lambda_V(w)+\frac{1}{2}\Omega(v,w) \tag{54}$$

这表明，若我们以这样的方式选择 v，使得 $\lambda_V=-\frac{1}{2}\Omega(v,\ \cdot)$，那么就得到一个在 $\mathcal{O}_\lambda$ 中、在 V 上取值为零的泛函。 □

鉴于前述引理，我们可以假设 $\lambda_V=0$。于是 $\lambda=\lambda_\mathfrak{z}+\lambda_\mathfrak{l}$，其中 $\lambda_\mathfrak{z}=\lambda|_\mathfrak{z}$ 且 $\lambda_\mathfrak{l}=\lambda|_\mathfrak{l}$，并且 L 固定 $\lambda_\mathfrak{z}$。由（54）可推出，若 $u=(z,\ v)\in U$ 固定 $\lambda_\mathfrak{z}$，则 $v=0$，因为 Ω 非退化，因此

$$U^{\lambda_\mathfrak{z}}=\{u\in U\colon\ \mathrm{Ad}^*(u)\lambda_\mathfrak{z}=\lambda_\mathfrak{z}\}=Z(G)_e$$

是连通的。因此，引理7.8 适用。

命题 7.10。 *For* $\lambda=\lambda_\mathfrak{z}+\lambda_\mathfrak{l}\in W^\star_{\min}$, *we have*

(a) $\mu_\lambda=\mu_{\lambda_\mathfrak{z}}*\mu_{\lambda_\mathfrak{l}}$ *is a convolution product.*

(b) $\mathcal{L}(\mu_\lambda)=\mathcal{L}(\mu_{\lambda_\mathfrak{z}})\mathcal{L}(\mu_{\lambda_\mathfrak{l}})$.(c)

$D_{\mu_\lambda}=D_{\mu_{\lambda_\mathfrak{z}}}\cap D_{\mu_{\lambda_\mathfrak{l}}}=\Omega_{\mu_{\lambda_\mathfrak{z}}}\cap D_{\mu_{\lambda_\mathfrak{l}}}$.

Proof. (a) 由以下事实可得：加法映射 Ψ 来自引理52证明中的（7.8），它是 G-作用在辛积 $\mathcal{O}_{\lambda_\mathfrak{z}}\times\mathcal{O}_{\lambda_\mathfrak{l}}$ 上的动量映射。(b) f
ollows from (a).
(c) 可由 自 (b) 以及以下事实得出： $D_{\mu_{\lambda_\mathfrak{z}}}$ 是开集，因为正定对称锥
矩阵 在所有对称矩阵构成的空间中是开集（引理 6.7）。 □

引理 7.11。 *Let* $\mathfrak{g}=\mathfrak{u}\rtimes\mathfrak{l}=(\mathfrak{z}\times V)\rtimes\mathfrak{l}$ *be admissible, non-reductive,* $\lambda\in W^\star_{\min}$, *and*维数 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})=1$. *We write* $\mathfrak{l}=\mathfrak{l}_0\oplus\mathfrak{l}_1$ *with* $\mathfrak{l}_1=\mathfrak{z}_\mathfrak{l}(V)$ *and, accordingly,*

$$\lambda=\lambda_\mathfrak{z}+\lambda_V+\lambda^0_\mathfrak{l}+\lambda^1_\mathfrak{l}\in\mathfrak{z}^*\oplus V^*\oplus\mathfrak{l}_0^*\oplus\mathfrak{l}_1^*.$$

Then $\mathcal{O}_\lambda$ *spans* $\mathfrak{g}^*$ *if and only if*

$$\lambda_\mathfrak{z}\neq0\quad\text{and}\quad\mathcal{O}_{\lambda^1_\mathfrak{l}}\ \text{spans}\ \mathfrak{l}_1^*. \tag{55}$$

Proof. 首先假设 $\mathcal{O}_\lambda$ 张成 $\mathfrak{g}^*$。由于 $\mathfrak{g}=(\mathfrak{u}\rtimes\mathfrak{l}_0)\oplus\mathfrak{l}_1$ 是李代数直和， $\mathcal{O}_{\lambda^1_\mathfrak{l}}$ 张成 $\mathfrak{l}_1^*$。此外，中心元在 $\mathcal{O}_\lambda$上定义常函数，而且由于 $\mathfrak{z}\neq\{0\}$，我们必有 $\lambda_\mathfrak{z}\neq\{0\}$。反过来，假设这两个条件均成立。我们需要证明任意

$$(z,w,y_0+y_1)\in\mathcal{O}_\lambda^\perp$$

消失。这里 $y=y_0+y_1\in\mathfrak{l}$ 是分解为 $\mathfrak{l}_0$ 和 $\mathfrak{l}_1$-分量。由于 $\lambda_\mathfrak{z}\neq0$， $\lambda\circ e^{\operatorname{ad}V}$含有一个元素，其具有 $\lambda_V=\{0\}$ 且具有相同的 $\mathfrak{z}$-分量（引理 7.9）。因此我们可以假设 $\lambda_V=0$，从而 $\lambda_\mathfrak{u}=\lambda_\mathfrak{z}$。现在

$$0=\langle\mathrm{Ad}^*(u)\lambda_\mathfrak{u}+\mathrm{Ad}^*(\ell)\lambda_\mathfrak{l},(z,w,y)\rangle=\langle\mathrm{Ad}^*(u)\lambda_\mathfrak{u},(z,w,y)\rangle+\langle\mathrm{Ad}^*(\ell)\lambda_\mathfrak{l},y\rangle \tag{56}$$

对所有的 $u \in U$ 和 $\ell \in L$ 均成立。特别地，可得 $u \mapsto \langle \mathrm{Ad}^*(u)\lambda_{\mathfrak{u}}, (z, w, y)\rangle$ 为常数。取

$$\Omega(v, w) := \lambda_{\mathfrak{z}}([v, w]),$$

这意味着下列表达式不依赖于 v:

$$\lambda_{\mathfrak{z}}(e^{\mathrm{ad}\, v}(z, w, y)) = \lambda_{\mathfrak{z}}(z) + \lambda_{\mathfrak{z}}([v, w]) + \lambda_V([v, y]) + \frac{1}{2}\lambda_{\mathfrak{z}}([v, [v, y]]) = \lambda_{\mathfrak{z}}(z) + \lambda_{\mathfrak{z}}([v, w]) + \frac{1}{2}\Omega(v, [v, y]).$$

这里我们用到

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{ad}\, v}(z, w, y) &= (z, w, y) + [v, (z, w, y)] + \frac{1}{2}[v, [v, (z, w, y)]] \\ &= (z, w, y) + ([v, w], [v, y], 0) + \frac{1}{2}([[v, [v, y]], 0, 0) \\ &= \Big(z + [v, w], \frac{1}{2}[[v, [v, y]], w + [v, y], y\Big). \end{aligned} \tag{57}$$

这是一个关于 v 的多项式，其中 (57) 中的各项分别为 0、1 和 2 次。由于它是常数，1 次和 2 次齐次项均为零，即

$$\Omega(V, w) = \{0\} \quad \text{and} \quad \Omega(v, [v, y]) = 0 \quad \text{for} \quad v \in V.$$

我们得出 $w = 0$，因为 Ω 是非退化的；又由极化可知，对所有 $w, v \in V$，都有 $\Omega(w, [v, y]) = 0$，因此 $[y, V] = \{0\}$，即 $y \in \mathfrak{l}_1$。

关系式 (56) 现在化简为

$$0 = \lambda_{\mathfrak{z}}(z) + \langle \mathrm{Ad}^*(\ell)\lambda^1_{\mathfrak{l}}, y\rangle \quad \text{for} \quad \ell \in L.$$

由于 $\mathrm{Ad}^*(L)\lambda^1_{\mathfrak{l}}$ 张成 $\mathfrak{l}_1$，哈密顿函数 H_y 在该轨道上为常数这一事实意味着 $y \in \mathfrak{z}(\mathfrak{l}_1) \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{u}$，因此 $y = 0$。最后，$\lambda_{\mathfrak{z}}(z) = 0$ 意味着 $z = 0$，因为 $\mathfrak{z}$ 是一维的，并且 $\lambda_{\mathfrak{z}} \neq 0$。

□

例 7.12。对于非约化可容许李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{hsp}(V, \Omega)$，有 $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_0$。对于泛函 $\lambda = \lambda_{\mathfrak{z}} = \mathrm{ev}_0$, ，轨道 $\mathcal{O}_\lambda$ 张成 $\mathfrak{g}^*$，但 $\lambda_{\mathfrak{l}} = 0$。

7.5 一般情形

对于以下定理，回顾一下，将 $\mathfrak{g}$ 替换为 $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$，其中 $\mathfrak{n} := \mathcal{O}_\lambda^\perp$，我们总可以归结到 $\mathcal{O}_\lambda$ 张成 $\mathfrak{g}^*$的情形。

定理 7.13。 *Let $\mathcal{O}_\lambda \subseteq \mathfrak{g}$ be a coadjoint orbit spanning $\mathfrak{g}^*$. Then the following assertions hold:*

(a) *If $D_{\mu_\lambda} \neq \emptyset$ then $\mathfrak{g}$ is admissible and there exists an adapted positive system Δ^+ with $C_{\min}$ pointed , and contained in $C_{\max}$ for which $\lambda \in W^\star_{\min}$.*

(b) *Suppose that $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{g}$ is a compactly embedded Cartan subalgebra and Δ^+ an adapted positive system with $C_{\min}$ pointed and contained in $C_{\max}$. Then for $\lambda \in W^\star_{\min}$, ,*

(1) $D_{\mu_\lambda} = \Omega_\lambda = W^\circ_{\max}$.(2) $Q \quad {}_\lambda \to C_\lambda \; Q \; x \; = \; {}_{Z_\lambda}{}^{1}{}_{x} \int_{\mathfrak{g}^*} \alpha e^{-\alpha(x)}\, d\mu_\lambda \; \alpha$ *defines a diffeomorphism from* ${}_\lambda/\mathfrak{z}\;\mathfrak{g}$ *onto*: $C^\circ_\lambda =$ _____ $\mathcal{O}_\lambda{}^\circ$.

Ω, ( ) $_{()}$ ( ) Ω ( ) 凸包 ( )

Proof. (a) 由推论 6.1得出。 （b.1）与引
理7.11中一样，我们记

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{u} \rtimes \mathfrak{l}_0) \oplus \mathfrak{l}_1 \quad \text{with} \quad \mathfrak{l}_1 = \mathfrak{z}_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{u}).$$

若 $V = [\mathfrak{t}, \mathfrak{u}] \neq \{0\}$，则 $\mathfrak{z} = [V, V] \neq \{0\}$，因为括号 $V \times V \to \mathfrak{z}$是一个非退化的向量值交替形式（定理 4.6）。由于 $\mathcal{O}_\lambda$张成 $\mathfrak{g}^*$，并且在 $\mathfrak{z}$上的限制为单元素集，因此可知维数$\mathfrak{z} = 1$且 $\lambda_{\mathfrak{z}} = \lambda|_{\mathfrak{z}} \neq 0$。根据引理 7.9，不妨设 $\lambda_V = 0$，从而

$$\lambda = \lambda_{\mathfrak{z}} + \lambda_{\mathfrak{l}_0} + \lambda_{\mathfrak{l}_1}.$$

命题 7.10 表明

$$D_{\mu_\lambda} = \Omega_{\lambda_{\mathfrak{z}}} \cap D_{\mu_{\lambda_{\mathfrak{l}}}}, \tag{58}$$

且 $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_0 \oplus \mathfrak{l}_1$ 意味着

$$D_{\mu_{\lambda_{\mathfrak{l}}}} = D_{\mu_{\lambda_{\mathfrak{l}_0}}} \cap D_{\mu_{\lambda_{\mathfrak{l}_1}}}.$$

引理 7.11进一步推出， $\mathcal{O}_{\lambda_{\mathfrak{l}}^*}$张成 $\mathfrak{l}_1^*$。取理想$\mathfrak{l}_{0,\,0} := \mathcal{O}_{\lambda_{\mathfrak{l}_0}}^{\perp} \cap \mathfrak{l}_0 = \mathcal{O}_{\lambda_{\mathfrak{l}}}^{\perp} \cap \mathfrak{l} \trianglelefteq \mathfrak{l}$以及互补理想$\mathfrak{l}_{0,\,1}$，现在有$\mathfrak{l}_0 = \mathfrak{l}_{0,\,0} \oplus \mathfrak{l}_{0,\,1}$。于是得到直和分解$\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_{0,\,0} \oplus \mathfrak{l}_{0,\,1} \oplus \mathfrak{l}_1$.然后， $\mathfrak{t}_{\mathfrak{l}} = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{t}$，极小锥和极大锥与该分解相适配，并且 $\mathcal{O}_{\lambda_{\mathfrak{l}}}$张成理想$\mathfrak{l}_{0,\,1} \oplus \mathfrak{l}_1$的对偶；该理想属于可容许李代数 $\mathfrak{l}$，后者同样是可容许的。由引理 7.2可得 $\lambda_{\mathfrak{l}} \in W^\star{}_{\min\,\mathfrak{l}}$，因此定理 7.6给出$W^\circ_{\max,\,\mathfrak{l}} \subseteq \Omega_{\lambda_{\mathfrak{l}}}$，因为锥 $W_{\max,\,\mathfrak{l}}$与 $\mathfrak{l}$的分解相适配。因此

$$\Omega_{\lambda_{\mathfrak{l}}} \supseteq \mathfrak{l}_{0,0} \oplus W^\circ_{\max,\mathfrak{l}_{0,1}} \oplus W^\circ_{\max,\mathfrak{l}_1},$$

并结合命题 7.7，将其应用于理想$\mathfrak{l}_{0,\,1} \oplus \mathfrak{l}_1$，进一步可得 $D_{\mu_{\lambda_{\mathfrak{l}}}} = \Omega_{\lambda_{\mathfrak{l}_0}}$根据（58），可知 D_{μ_λ}是开集。 （

b.2) Sin
u 平凡地作 由于 $\lambda_{\mathfrak{z}} \in C^\star$（引理 7.2）是可容许的，定理 6.12推出 $W^\circ_{\max} \subseteq \Omega_{\lambda_{\mathfrak{z}}}$。此外，
用 在 $\mathfrak{l}^*$ 上，而投影 $\mathfrak{g} \to \mathfrak{l}$ 将 $W_{\max}$ 映入 $W_{\max,\,\mathfrak{l}}$，因此

$$\Omega_{\lambda_{\mathfrak{l}}} \supseteq \mathfrak{u} + W^\circ_{\max,\mathfrak{l}} \supseteq W^\circ_{\max}.$$

因此，由（58）可得 $W^\circ_{\max} \subseteq \Omega_{\lambda_0}$。由于 $\mathcal{O}_\lambda$张成 $\mathfrak{g}^*$，定理 4.7推出$D_{\mu_\lambda} \subseteq W^\circ{}_{\max}$，因此实际上有等式 $D_{\mu_\lambda} = \Omega_\lambda = W^\circ{}_{\max}$。特别地， D_{μ_λ}是开集，因此（ b ）由定理 2.5 得证。

□

前面的定理使余伴随轨道的分类兜了一圈 $\mathcal{O}_\lambda$对于$D_{\mu_\lambda} \neq \emptyset$，而且我们实际上已经看到（经过一些约化后），这 $D_{\mu_\lambda} \neq \emptyset$。我们之前已经看到，将理想 $\mathcal{O}_\lambda^\perp$分解后，总可以假设轨道张成 $\mathfrak{g}^*$。那么定理 7.13(a) 告诉我们这些泛函 λ可以在哪里找到，即在某个 $W^\star_{\min}$中；而 (b) 部分表明，所有这些泛函实际上都满足 $\Omega_\lambda \neq \emptyset$。

此处应注意，正系 Δ_p^+由 λ唯一确定；并且给定 $\mathfrak{g}$后，这样的正系只有有限多个。

7.6 刘维尔测度的温和性

本小节证明，只要 $D_{\mu_\lambda} \neq \emptyset$， $\mathcal{O}_\lambda$ 上的刘维尔测度就是温和的，也就是说，它在 $\mathfrak{g}^*$上定义了一个缓增分布。

定理 7 14 *Let $\mathcal{O}_\lambda \subseteq \mathfrak{g}^*$ be a coadjoint orbit for which $D_{\mu_\lambda} \neq \emptyset$. Then the Liouville measure on $\mathcal{O}_\lambda$ is tempered.*

Proof. 我们首先注意到，可以假设 $\mathcal{O}_\lambda$ 张成 $\mathfrak{g}^*$，因此定理4.7 推出 $\mathfrak{g}$是可容许的，并且 $\lambda \in W^\star_{\min}$ 对于某个适配正系 $C_{\min}$ 是尖的且包含于 $C_{\max}$。

鉴于引理 7.9，命题 7.10 给出了一个分解 $\lambda = \lambda_{\mathfrak{z}} + \lambda_{\mathfrak{l}}$ 使得

$$\mathcal{L}(\mu_\lambda) = \mathcal{L}(\mu_{\lambda_{\mathfrak{z}}})\mathcal{L}(\mu_{\lambda_{\mathfrak{l}}}).$$

由于 $\mathcal{O}_{\lambda_{\mathfrak{z}}}$ 是可容许的，存在一个 $N \in \mathbb{N}$，使得对于 $x \in C^\circ_{\max}$，我们有

$$c := \lim_{t\to 0+} \mathcal{L}(\mu_{\lambda_{\mathfrak{z}}})(tx)t^{-N}$$

存在。

根据定理 7.6证明中的步骤 4，我们还可得到一个约当分解 $\lambda_{\mathfrak{l}} = \lambda_s + \lambda_n$使得

$$\mathcal{L}(\mu_\lambda)(x) = \max \mathcal{L}(\mu^L_{\lambda_n})(\mathcal{W}_{\mathfrak{k}}x) \cdot \mathcal{L}(\mu_{\lambda_s})(x).$$

由于 $\mathcal{O}_{\lambda_s}$ 是可容许的， μ_{λ_s} 根据推论 6.13是温和的。此外， μ_{λ_n} 根据定理 7.4是温和的。因此，命题 2.6 给出了一个 $k \in \mathbb{N}$ 使得

$$\limsup_{t\to 0+} \mathcal{L}(\mu_{\lambda_{\mathfrak{l}}})(tx)t^k < \infty.$$

因此

$$\limsup_{t\to 0+} \mathcal{L}(\mu_\lambda)(tx)t^{k+N} < \infty,$$

因此，命题2.6 表明 μ_λ 是温和的。 □

注 7.15。 在 [Ch90中，Ch96], Charbonnel 证明，对于任意连通李群 G，闭余伴随轨道上的刘维尔测度是温和的。这一结论已在 [Ch90，定理 1 中提出。8], 但是 [Ch90] 中的论证仅在李代数 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ 在约当分解下稳定这一假设下才成立。这个漏洞在 [Ch96]中得以弥补。关于闭余伴随轨道的傅里叶变换与酉表示的特征之间的联系，请参见 [BV83] 和 [Ne96a]。

很可能，对于约化李代数，所有刘维尔测度都是温和的。对于幂零轨道，我们已在定理 7.4中看到这一点；对于具有非平凡几何温度的轨道，这可由定理 7.14推出。我们预计，正如 Yoshiki Oshima 在一封邮件中所指出的， [dCl91] 中发展的方法可用于证明这一点。

8 不变测度的测度分解

在本节中，我们将更加仔细地研究由一般的哈密顿*（G）-不变测度 μ 在 $\mathfrak{g}^*$ 上诱导出的测度，这些测度源自具有非平凡几何温度的 G-作用。根据定理 4.7，我们已经知道，可以假设 $\mathfrak{g}$ 是可容许的，并且 Ψ（M） $\subseteq W^\star_{\min}$ 对于关于紧嵌入的嘉当子代数 Δ^+ 的根的一个适配正系成立 $\mathfrak{t}$，其中 $C_{\min}$ 是尖的，并且包含于 $C_{\max}$中。

O我们的策略是利用有关代数群的结果，这一策略基于以下观察。

引理 **8 1** *We consider the action of the closure G_c = G on the corresponding invariant cone .. : Ad( ) $W^\star_{\min} \subseteq \mathfrak{g}^*$. Then the following assertions hold:*

(a) *Write $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \rtimes \mathfrak{l}$ with $\mathfrak{t} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{t}_{\mathfrak{l}}$, so that $\mathfrak{z}(\mathfrak{l}) \subseteq \mathfrak{t}$. The group $Z_L := \overline{e^{\mathrm{ad}\,\mathfrak{z}(\mathfrak{l})}}$ is a torus and $G_c =$ G Z_L is the identity component with respect to the Lie group topology of an algebraic* Ad()、 、 *group namely the Zariski closure of* G .
、 Ad() (b) *For $\lambda \in W^\star_{\min}$, the coadjoint orbit $\mathcal{O}_\lambda$ is also invariant under G_c.*

Proof. (a) 由于 $\mathfrak{t}$ 是紧嵌入的， Z_L 是紧群，因而特别是代数的。令 a（$\operatorname{ad}\mathfrak{g}$）表示 $\operatorname{Ad}(G)$ 的扎里斯基闭包的李代数，即 $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ 的代数包。根据 [Ne94，命题 I.6(iii)], $\operatorname{ad}([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = [\operatorname{ad}\mathfrak{g},\ \operatorname{ad}\mathfrak{g}]$ 是代数的，并且我们在上文已经看到 $\mathbf{L}(Z_L)$ 也是代数的。我们还有

$$\mathfrak{g} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] + \mathfrak{t} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] + \mathfrak{z}(\mathfrak{l})$$

因为

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) + \mathfrak{z}(\mathfrak{l}) + \mathfrak{t}\cap[\mathfrak{l},\mathfrak{l}] \subseteq [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] + \mathfrak{z}(\mathfrak{l}).$$

因此，$\operatorname{ad}([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) + \mathbf{L}(Z_L)$ 是某个代数群的李代数（[Ne94，命题 I.6(ii)]），并且由于这是 $\operatorname{Ad}(G)Z_L = \operatorname{Ad}(G)e^{\operatorname{ad}\mathfrak{t}} = \operatorname{Ad}(G)$ 的李代数（参见 [HN12，定理 14.5.3(ii)]），结论得证。

(b) 利用 $\mathcal{O}_\lambda \subseteq (\mathfrak{g}/\mathfrak{n})^*$ 对 $\mathfrak{n} = \mathcal{O}_\lambda^\perp$ 成立这一点，我们可以假设 $\mathcal{O}_\lambda$ 张成 $\mathfrak{g}^*$。于是 $\dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \leq 1$，结合命题 7.10 的引理 7.9 给出一个分解 $\lambda = \lambda_\mathfrak{z} + \lambda_\mathfrak{l}$，依据 $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \rtimes \mathfrak{l}$。这里 $\lambda_\mathfrak{z} \in \mathfrak{t}^*$ 被 L 固定，且 $\lambda_\mathfrak{l} \in \mathfrak{l}^*$，其中 $\mathfrak{l}$ 是约化的。因此 Z_L 固定了 $\lambda_\mathfrak{l}$。这表明 $G_c = \operatorname{Ad}(G)Z_L$ 保持 $\mathcal{O}_\lambda = \mathcal{O}_{\lambda_\mathfrak{z}} + \mathcal{O}_{\lambda_\mathfrak{l}}$ 不变。 □

定理 8.2 *Let μ be an G-invariant measure on the closed convex cone C of $\operatorname{Ad}(G)$-semi-invariant integrability structures $\mathcal{L}$ on $\mathfrak{g}^*$. (测度分解定理) Assume that $C = W^\star_{\min}$ associated to an adapted positive system with $C_{\min}$ pointed and contained in $C_{\max}$. (*) We assume that there exists an $x \in \mathfrak{g}$ with $\mathcal{L}(\mu)(x) < \infty$. Then there exists a measure ν on the Borel quotient C/G for which*

$$\mu = \int_{C/G} \mu_\lambda \, d\nu([\lambda]).$$

Proof. **步骤 1：** 由于 $\mathcal{L}(\mu)(x) < \infty$，测度 $\widetilde{\mu} := e^{-H_x}\mu$ 是有限的，因此 μ 是拉东测度，即在紧集上有限。因此，与定理 3.3(a) 的证明相同的论证表明， μ 在 $\operatorname{GL}(\mathfrak{g}^*)$ 中的稳定子是闭的，因而由引理 G_c 8.1.

步骤 2： (Chevalley 定理) 设 H 是一个仿射代数群，它在仿射代数簇 X 上正则作用，并用 H_e 表示李群拓扑下的单位连通分支。则博雷尔空间 X/H_e 是可数分离的，即 σ-代数 H_e的不变博雷尔集可数生成。Chevalley 本人从未发表这一结果，但证明概要及相关参考文献见 [Dix66]第 183 页；另见 [Dix57] 和 [Fa00，定理 VI。10].

应用普坎斯基定理 [Pu72, p. 50] 于扎里斯基闭包 H $\operatorname{Ad}^*(G)$ 在 $\mathfrak{g}^*$上的作用，其中将其视为加法群（$\mathfrak{g},+$）的酉对偶，由此可知轨道空间 $\mathfrak{g}^*/H_e = \mathfrak{g}^*/G_c$ 是可数分离的，因此 $S := C/G = C/G_c$ (引理 8.1) 也可数分离。因此 [Fa00, 定理 VI.11] 推出博雷尔截面的存在性。因此，我们可以将 S 视为 C 的子集，并且与每个 G-轨道恰好相交一次。我们记

$$q\colon C \to S \quad \text{with} \quad q(\mathcal{O}_\lambda) = \{\lambda\}, \quad \lambda \in S,$$

为相应的商映射。

步骤 3： 测度 μ 在 C 上是 Radon 测度，因此尤其是 σ-有限的，并且与上文的有限测度 $\widetilde{\mu}$ 等价。我们还注意到， $\widetilde{\mu}$ 在 $\operatorname{Ad}^*(G)$ 作用下是准不变的。

现在 $\widetilde{\nu} := q_*\widetilde{\mu}$ 是定义在 S 上的有限正博雷尔测度，而测度分解定理 [Fa00，定理 I27] 蕴含存在一个有限测度族 $(\widetilde{\mu}_\lambda)_{\lambda\in S}$ 使得

(1) 对于每个博雷尔集 $E \subseteq C$，映射 $S \to [0,\infty]$， $\lambda \mapsto \widetilde{\mu}_\lambda(E)$ 是可测的，并且

$$\widetilde{\mu}(E) = \int_S \widetilde{\mu}_\lambda(E)\, d\widetilde{\nu}(\lambda). \tag{59}$$

(2) 函数 $\lambda \mapsto \widetilde{\mu}_\lambda$ 几乎处处唯一。

(3) $\widetilde{\mu}_\lambda(C \setminus \mathcal{O}_\lambda)$ 对几乎所有 $\lambda \in S$ 都满足 $= 0$ $\widetilde{\nu}$。

步骤 4： 对于 $g \in G$，关系 $g_*\mu = \mu$ 意味着

$$g_*\widetilde{\mu} = c_g\widetilde{\mu} \quad \text{for} \quad c_g = e^{H_x - H_x \circ \mathrm{Ad}^*(g)^{-1}},$$

分别，$\widetilde{\mu} = c_g^{-1} g_*\mu$。将 (59) 写成

$$\widetilde{\mu} = \int_S \widetilde{\mu}_\lambda \, d\widetilde{\nu}(\lambda),$$

由此我们得到

$$\int_S c_g \cdot \widetilde{\mu}_\lambda \, d\widetilde{\nu}(\lambda) = c_g\widetilde{\mu} = g_*\widetilde{\mu} = \int_S g_*\widetilde{\mu}_\lambda \, d\widetilde{\nu}(\lambda).$$

性质（3）意味着，对于几乎所有 $\lambda \in S$，测度 $\widetilde{\mu}_\lambda$ 是余伴随轨道 $\mathcal{O}_\lambda$ 上的博雷尔测度。令 $\Gamma \subseteq G$ 为一个稠密的可数子群。那么，唯一性性质（2）意味着，对于几乎所有 $\lambda \in S$，有

$$g_*\widetilde{\mu}_\lambda = c_g \cdot \widetilde{\mu}_\lambda \quad \text{for} \quad g \in \Gamma. \tag{60}$$

因此，我们不妨假设对每个 $\lambda \in S$ 都成立。

根据 [Fa00，定理 VI.10]，，自然映射 $G/G^\lambda \hookrightarrow C, gG^\lambda \mapsto \mathrm{Ad}^*(g)\lambda$ 是一个拓扑嵌入。由此可知，测度 $\widetilde{\mu}_\lambda$ 在 $\mathcal{O}_\lambda$ 上的正则性成立，因此根据 [Ru86，定理 2.18]，，它是 $\mathcal{O}_\lambda$ 上的拉东测度。现在，(60) 意味着这一关系对每个 $g \in G$ 都成立。因此，$\mathcal{O}_\lambda$ 上的测度 $e^{H_x}\widetilde{\mu}_\lambda$ 是 G-不变的，故其形式为 $c_\lambda\mu_\lambda$，其中 μ_λ 是 $\mathcal{O}_\lambda$ 上的 G-不变刘维尔测度。

步骤 5： 由此得到

$$\mu = e^{H_x}\widetilde{\mu} = \int_S e^{H_x}\widetilde{\mu}_\lambda \, d\widetilde{\nu}(\lambda) = \int_S c_\lambda\mu_\lambda \, d\widetilde{\nu}(\lambda),$$

这就是 $d\nu(\lambda) = c_\lambda d\widetilde{\nu}(\lambda)$ 所需的测度分解。 □

此时，人们或许会想知道，对于哈密顿 G-作用和 $\mu = \Psi_*\lambda_M$，哪些 μ 在 $\mathfrak{g}^*$ 上自然出现，其中 λ_M 是 M上的刘维尔测度。以下构造出一类特别有趣的例子。

$T^*(\Gamma\backslash G)$ 中的开定义域

设 $\Omega \subseteq \mathfrak{g}$ 是一个开凸集，其上有一个光滑凸函数 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$，该函数严格凸且具有闭上图。那么 $\mathrm{d}f\colon \Omega \to \mathfrak{g}^*$ 将 Ω 微分同胚地映射到一个开且在 $\mathrm{Ad}^*(G)$作用下不变的子集 $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{g}^*$。由此得到一个开子集

$$\mathcal{C}_G := G \times \mathcal{C} \subseteq G \times \mathfrak{g}^* \cong T^*(G)$$

它属于辛流形 $T^*(G)$，在该流形上，G 通过右平移以哈密顿方式作用，其动量映射为

$$\mathcal{C}_G \to \mathfrak{g}^*, \quad (g, \alpha) \mapsto \alpha$$

（参见 [Ne00b，§III]）。设 $\Gamma \subseteq G$ 是一个格，即一个满足 $\Gamma\backslash G$ 具有有限体积的离散子群。那么

$$M := \Gamma\backslash\mathcal{C}_G \subseteq T^*(\Gamma\backslash G)$$

是一个开放的 G 右不变子集，G 的右作用是哈密顿作用，且动量集具有如下形式

$$\Psi\colon M \to \mathfrak{g}^*, \quad (\Gamma g, \alpha) \mapsto \alpha.$$

由于 $\mathrm{vol}(\Gamma\backslash G) < \infty$，刘维尔测度 λ_M 投影为勒贝格测度的一个倍数 $\lambda_{\mathfrak{g}^*}$，限制在 $\mathcal{C}$上。由于 G 根据 [Ne00，定理 VII.1，8], 在 $\mathfrak{g}^*$ 上的余伴随作用保持任意勒贝格测度不变。

我们得出，形如 $\mu := \lambda_{\mathfrak{g}^*}|_{\mathcal{C}}$ 的测度可作为哈密顿 G-作用下刘维尔测度的像出现。如果 $\mathcal{C}$ 不含仿射直线，则勒贝格测度的温和性意味着

$$f(x) := \log \mathcal{L}(\mu)(x) = \log \int_{\mathcal{C}} e^{-\alpha(x)}\, d\lambda_{\mathfrak{g}^*}(\alpha)$$

在开锥 $B(\mathcal{C})^\circ$ （命题 26）若 $\mathcal{C}$ 是一个锥，则这是该锥 C的 Koecher–Vinberg 特征函数的对数。

如果 $x \in \partial B(\mathcal{C})$，那么存在 $\alpha \in \lim(\mathcal{C})$，使得 $\alpha(x) = 0$。对于任意开子集 $O \subseteq \mathcal{C}$，我们都有 $O + \mathbb{R}_+\alpha \subseteq \mathcal{C}$，且该集合的勒贝格测度是无限的。这意味着 $\mathcal{L}(\mu)(x) = \infty$。因此 $D_\mu = B(\mathcal{C})^\circ$，并且

$$\mathrm{d}f\colon B(\mathcal{C})^\circ \to C_\mu^\circ = \mathcal{C}$$

根据定理 2.5，是一个微分同胚。

例 8.3。 (a) 如果 $G = (\mathfrak{g}, +)$ 是阿贝尔的，那么 $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^n$，且 $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ 是 G中的一个格。

(b) Borel–Harish-Chandra 定理 [Zi84，第2] 页（另见 [BHC62，定理 7。8], [Ra72，定理 14。1]），结合 Chevalley 关于简单实李代数中存在 $\mathbb{Z}$-基的定理，可知每个连通半单李群 G 都包含一个格 Γ。若 G 是定义在实数集 $\mathbb{Q}$上的代数群的单位连通分支，则该群的 $\mathbb{Z}$-点 G 构成这样的一个格。因此，我们特别得到格 $\Gamma = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}) \subseteq G = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$。

(c) 在 Jacobi 群中

$$G = \mathrm{Heis}(\mathbb{R}^{2n}, \omega) \rtimes \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \rtimes \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$$

我们有格

$$\Gamma = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{2n} \rtimes \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$$

（参见 [BHC62，定理 9。4]）。

(d) 若 G 包含一个格 Γ，则 $\mathrm{Ad}(G)$ 由 [GG66，定理 2]. 对于可容许李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \rtimes \mathfrak{l}$ 和 $\mathfrak{t} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{t}_\mathfrak{l}$，[Ne00，命题 VII.1。4] 推出 $\mathrm{Ad}(G)$ 是闭的，当且仅当 $e^{\mathrm{ad}\,\mathfrak{z}(\mathfrak{l})}$ 是闭的。很容易构造出一些例子，其中 $\mathfrak{l} = \mathfrak{z}(\mathfrak{l})$ 是阿贝尔的，但这一结论不成立。最简单的例子具有如下形式

$$\mathfrak{g} = \mathrm{Heis}(\mathbb{R}^4, \Omega) \rtimes \mathbb{R}D,$$

其中 $D \in \mathfrak{sp}_4(\mathbb{R})$ 的形式为

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

在这种情况下，$\exp(\mathbb{R}D)$ 的闭包是一个二维环面。

9 非强哈密顿作用

如引言中所述，也可以考虑连通李群 G 在连通辛流形 M 上的辛作用 $\sigma\colon G \times M \to M$。从以下意义上说，这些作用是哈密顿的： M 上的所有向量场 $\dot{\sigma}(x)$ 都是哈密顿的，但同态 $\dot{\sigma}\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{Ham}(M, \omega)$ 未必能提升为到 $(C^\infty(M)\ \{\cdot,\cdot\})$ 的同态。这些作用并非强哈密顿作用。由于

$$\mathbb{R}1 \hookrightarrow C^\infty(M) \twoheadrightarrow \mathrm{Ham}(M, \omega)$$

这是李代数的中心扩张，因此总能通过将 $\mathfrak{g}$ 替换为一个中心扩张来消除这一障碍

$$\mathfrak{g}^\sharp = \mathbb{R} \oplus_\beta \mathfrak{g} \quad \text{with} \quad [(t,x),(t',x')] = (\beta(x,x'),[x,x']).$$

那么，相应的单连通李群 $G^\sharp$ 是 G 的中心扩张，它作用于 M，并带有一个等变动量映射

$$\Psi^\sharp \colon M \to \{1\} \times \mathfrak{g}^* \subseteq (\mathfrak{g}^\sharp)^* \cong \mathbb{R} \times \mathfrak{g}^*.$$

$G^\sharp$ 对 $\mathfrak{g}^\sharp$ 的余伴随作用可分解为 G 的一个作用，该作用保持仿射超平面 $\{1\} \times \mathfrak{g}^*$ 不变。因此， $\Psi^\sharp$ 可视为一个映射 $M \to \mathfrak{g}^*$，它相对于 G 通过仿射映射作用于 $\mathfrak{g}^*$ 的作用是等变的。

鉴于此，我们总可以在以下两者之间转换：带有相对于仿射作用等变的动量映射的 G 的哈密顿作用，以及中心扩张 $G^\sharp$的强哈密顿作用。由于我们始终采用后者的视角，因此在热力学背景下简要讨论这种转换。

与前面一样，我们假设 M 是连通的，且 $\Psi(M)^\perp = \{0\}$，即李代数 $\mathfrak{g}$ 有效地作用于 M。那么， $\Psi(M)$张成 $\mathfrak{g}^*$，并且以下两种情况之一成立：

（A）仿射型：那么 $\Psi(M)$ 包含于 $\mathfrak{g}^*$ 的一个真仿射超平面中。于是 $\mathfrak{g}$ 含有哈密顿函数为非零常数的中心元，因此 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$ 是一维的。因此，$\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}^\flat$ 的一个中心扩张：$= \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$，相应的商群 $G^\flat$：$= G/Z(G)_e$ 在 M 上作用，并带有一个对仿射作用等变的动量映射。

（L）线性型：那么 $\Psi(M)$ 不包含于 $\mathfrak{g}^*$ 的任何真仿射超平面中。由于 $\mathfrak{g}$ 的中心元在 $\Psi(M)$ 上为常数，因此可得 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$。

回顾定理 4.6 可容许李代数总可以写成

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{z} \oplus V) \rtimes \mathfrak{l} \quad \text{with} \quad [V,V] \subseteq \mathfrak{z}$$

且 $\mathfrak{l}$ 为约化的。因此，如果 $\mathfrak{g}$ 不是约化的，那么 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$ 总成立，此时

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cong V \rtimes \mathfrak{l}.$$

但 $\mathfrak{g}$ 也可能是约化的，即 $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}$，且具有非平凡中心。那么 $\mathfrak{g}$ 是半单李代数 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 的平凡中心扩张，因此在这种情况下， $G^\flat$ 的仿射作用总有一个不动点，从而可以线性化。

本讨论表明，可能具有（非强）哈密顿作用且具有非平凡几何温度的非约化李群 $G^\flat$，其李代数具有如下形式

$$\mathfrak{g}^\flat \cong V \rtimes_\delta \mathfrak{l},$$

其中 V是一个带有辛形式 Ω 的阿贝尔理想，且满足 $\delta(\mathfrak{l}) \subseteq \mathfrak{sp}(V,\Omega)$ 中包含具有正定哈密顿函数的元素（参见定理4.6）。

10 展望

在本篇　在最后一节中，我们汇集了一些参考文献，并探讨了与其他领域可能存在的有趣联系。

10.1 非交换相关对象

在 [St96、St99、NS99], 中，Nencka 和 Streater 考察了由酉李群表示得到的非交换统计流形 $U\colon\ G\to \mathrm{U}(\mathcal{H})$。设 $\partial U(x$为酉单参数群（$U(\exp tx))_{t\in\mathbb{R}}$，$x\in\mathfrak{g}$。我们称

$$\Omega_U := \{x\in\mathfrak{g}\colon\ \mathrm{tr}(e^{-i\partial U(x)})<\infty\}$$

相应的 *trace class domain*。在 [Si23，定理 2.3。1], T. Simon 证明了以下结果，这是我们定义域定理的一个“非交换”类比 2：

定理 10 1 *If $U\ \mathcal{H}$ is irreducible and U discrete then $\mathfrak{g}$ is admissible and there exists an .. (,) 核 ,Ω adapted positive system Δ^+ with $C_{\min}\subseteq C_{\max}$ such that $_U = W^\circ_{\max}$..*

可约表示的情形更为复杂，但条件 $\Omega_U^\circ\neq\emptyset$ 意味着该表示可分解为不可约表示的可数直和（[Ne00，命题 III.3。18]）。

函数

$$Z\colon \Omega_U^\circ\to\mathbb{R},\quad Z(x):=\mathrm{tr}(e^{-i\partial U(x)})$$

是热力学中配分函数的非交换／量子类比。它也是解析的、G-不变且凸的；若 U 具有离散核，则甚至是严格凸的（参见 [Ne96a]）。

在此背景下，Ω 上的自然黎曼度量$_U$由 $\log Z$的二阶导数指定，被称为 *Bogoliubov–Kubo–Mori metric*（另见 [Ta06]）。在此背景下，Balian 的论文 [Ba05] 尤其令人感兴趣，其中对于有限个自伴算子 H_1，……，H_n，吉布斯系综由以下对象参数化：

$$\Omega := \Big\{x\in\mathbb{R}^n\colon\ \mathrm{tr}\exp\Big(-\sum_{j=1}^n x_jH_j\Big)<\infty\Big\},$$

相应的吉布斯态具有如下形式

$$\exp\Big(-z(x)\mathbf{1}-\sum_{j=1}^n x_jH_j\Big)$$

并且其特征在于使适当的熵最大化，因此这些情形与定理2.8的几何非常相似。

理解与余伴随轨道$_\lambda = W^\circ_{\max}$ 相关的几何温度 Ω $\mathcal{O}_\lambda$与酉最高权表示的对应迹类域之间的确切关系将非常有意义；根据 Simon 的定理，前者与后者重合。然而，“可交换的”和“非交换的”配分函数一般并不重合。关于例子的详细讨论，请参阅 [Ne96a] 。这留下了一个问题：从概念层面看，它们之间有何关系？一个自然的关键可能是：根据 [Ne96a]中所述，用可容许余伴随轨道表示全纯特征标的 Duistermaat–Heckman公式。

10.2 相干态轨道与迹类算子

设 $(U,\mathcal{H})$ 是可容许李群 G 的酉最低权表示，且 $[v_\lambda]\in\mathbb{P}(\mathcal{H})$ 是最低权射线，其中 v_λ 是最低权为 λ ([Ne96a], [Ne00]) 的单位向量。于是动量映射

$$\Psi\colon \mathbb{P}(\mathcal{H}^\infty)\to\mathfrak{g}^*,\quad \Psi([v])(x):=-i\frac{\langle v,\mathrm{d}U(x)v\rangle}{\langle v,v\rangle}$$

是 G-等变的，并将复流形 $M\colon = G\,[v_\lambda]$ 微分同胚地映射到可容许余伴随轨道 $\mathcal{O}_\lambda$ （参见 [Ne00，第 XV 章] 关于相干态表示的内容）。

由于 $\Omega_\lambda = W^\circ{}_{\max}$ 非平凡，我们在 M 上得到一族由 $x \in W^\circ_{\max}$ 参数化的概率测度 μ_x。利用 G-等变嵌入

$$\mathbb{P}(\mathcal{H}) \hookrightarrow B_1(\mathcal{H}), \quad [v] \mapsto P_v, \quad P_v(w) := \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|^2} v$$

我们得到一个 G-等变的单射

$$\Psi\colon \mathcal{O}_\lambda \to B_1(\mathcal{H}), \quad \Psi(\mathrm{Ad}^*(g)\lambda) = U(g) P_{v_\lambda} U(g)^{-1}.$$

Then

$$A_x := \int_{\mathcal{O}_\lambda} \Psi(\alpha)\, d\mu_x(\alpha)$$

定义一个正迹类算子，满足 $\mathrm{tr}(A_x) = 1$ 映射 Ψ 是连续的，因为 G 在 $B_1(\mathcal{H})$ 上连续作用。因此，符号映射

$$\Psi^\vee\colon B(\mathcal{H}) \to C(\mathcal{O}_\lambda), \quad \Psi^\vee(A)(\alpha) = \mathrm{tr}(A\Psi(\alpha))$$

是一个线性的 G-等变映射，满足

$$\begin{aligned}\Psi^\vee(A)(\mathrm{Ad}^*(g)\lambda) &= \mathrm{tr}(AU(g)P_{v_\lambda}U(g)^{-1}) = \mathrm{tr}(U(g)^{-1}AU(g)P_{v_\lambda}) \\ &= \langle v_\lambda, U(g)^{-1}AU(g)v_\lambda\rangle = \langle U(g)v_\lambda, AU(g)v_\lambda\rangle.\end{aligned}$$

因此，映射 $\Psi^\vee$ 可以视为去量子化或符号映射，将算子转化为函数。这种对应对于模中心平方可积的表示尤其有意义；或者说，对于可实现为线丛全纯 L^2截面的表示尤其有意义；特别参见 [Ne96c、Ne97、Ne00]。

10.3 无限维

无限维辛流形同样有意义，但刘维尔测度则不然。不过，无限维空间上的测度是有意义的。例如，若 μ 是实向量空间 V的对偶 V^* 上的博雷尔测度，并赋予其使所有求值均可测的最小 σ-代数，则

$$\mathcal{L}(\mu)\colon V \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad \mathcal{L}(\mu)(v) = \int_{V^*} e^{-\alpha(v)}\, d\mu(\alpha)$$

是有限的，并且可以研究在某个非空开子集上取值有限的测度。一个有趣的例子见 [NO02]，它讨论了希尔伯特–施密特算子空间上的定义域。这里的主要来源是高斯测度及其在非线性映射下的像。

例 10.2. 为了了解更贴近物理学应用的无限维例子，还可以考虑如下形式的李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}_2(\mathbb{C})^{(\mathbb{N})}$（可数直和），其对偶空间是完整的序列空间 $\mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{su}_2(\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$。这个空间承载着许多不变概率测度。关于无限维希尔伯特–李群可能相关的酉表示的讨论，请参阅 [NR24]。

关于微分同胚群这一无限维背景下的信息几何，请参阅近期综述 [KMM24]。关于无限维凸函数的结果可见于 [Mi08], [Bou07] 和 [Ro74, §3]。

在 [Fr91] Friedrich 关于概率测度空间上的费希尔–饶度量的论述，从思想上说是无限维的。对于概率空间（X，$\mathfrak{S}$，μ），他考虑所有形如 $\mathcal{A}$ 的概率测度构成的集合 $f\mu$，其在 μ 中的切空间为

$$T_\mu(\mathcal{A}) = \Big\{ f \in L^2(X,\mu)\colon \int_X f\, d\mu = 0 \Big\},$$

赋予从 L^2（X，μ）继承而来的黎曼度量。对于 μ 来自流形 n上的 λ -形式 M的情形，Friedrich 甚至为每个保持 λ 的向量场，在相应的、具有光滑密度的概率测度流形 $\mathcal{A}$ 上赋予一种泊松结构。对于 $M = \mathbb{S}^1$，这导出了相应的辛结构；其对应于将 $\mathcal{A}$ 识别为无限维群 $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)_+$ （[Fr91，Bem. 2]）的一个余伴随轨道。

10.4 Weinstein 模自同构

设 $(M,\ \omega)$ 是一个辛流形，μ 是其刘维尔测度，$H\colon M \to \mathbb{R}$ 是一个光滑函数，且 $e^{-H}\mu$ 是有限测度。对于满足 $X_F G = \{G, F\}$ （M）的哈密顿向量场 X_F，我们有

$$\mathcal{L}_{X_F}(e^{-H}\mu) = -X_F(H)(e^{-H}\mu) = \{F, H\}(e^{-H}\mu).$$

因此

$$\mathrm{div}_{e^{-H}\mu}(X_F) = \{F, H\} = X_H(F).$$

这表明，与“ $e^{-H}\mu$ ”相对应的模流，按 [We97] 的意义而言，与哈密顿向量场 X_H 在 M 上生成的流重合。关于泊松流形和辛流形背景下的 KMS态讨论，参见 [We97] 。这一背景下较新的结果见 [DW23]。对于连通辛流形，该论文还将形如 M 的测度刻画为与哈密顿函数 $e^{-H}\lambda_M$ 生成的流相对应的 KMS泛函 H。关于这些测度的有限性，[DW23] 仅讨论了 M 为紧的平凡情形。关于变形量子化背景下的相应结果，见 [BRW98，定理 4。1], 该定理将 KMS态刻画为吉布斯态。

示例 10.3。 由于 Weinstein 的论文以泊松流形为背景，也可以考虑开定义域 $M \subseteq \mathfrak{g}^*$，其中 $\mathfrak{g}$ 是有限维李代数。这里，M 是锥 $W^\star_{\min}$的内部，或是具有 $\Omega_\lambda \neq \emptyset$ 的轨道 $\mathcal{O}_\lambda$ 的凸包的内部，这两种情形都提供了有趣的例子，并与信息几何相关。

10.5 局部对称空间

设 G 是线性半单李群，$K \subseteq G$ 是极大紧子群，G/K 是相应的非紧黎曼对称空间。若 $\Gamma \subseteq G$ 是无挠格，则 $X\colon \Gamma\backslash G/K$ *locally symmetric space* $X < \infty$ λ_M 称为一个 。

那么，vol( ) 和辛流形 $M := T^*(X)$ 上的刘维尔测度具有很强的有限性性质。例如，能量函数

$$H\colon T^*(X) \to \mathbb{R}, \quad H(\alpha) = \frac{1}{2}\|\alpha\|^2$$

是 $T^*(X) \cong T(X)$ 上测地流的哈密顿函数。由于 X 具有有限体积，因此

$$Z(\beta) := \int_M e^{-\beta H}\, d\lambda_M = \int_X \Big(\int_{T^*_p(X)} e^{-\frac{\beta}{2}\|\alpha\|^2}\, d\alpha \Big)\, d\mu_X(p) < \infty$$

对于每个 $\beta > 0$。

例10.4。 对于 $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ 和 $K = \mathrm{PSO}_2(\mathbb{R})$，$G/K$ 分别是实数集中的双曲平面和开单位圆盘，而群 G 在 $T^*(G/K)$ 的能量函数等值集上具有传递作用。对格 Γ 进行分解，得到有限体积的子流形。

在这种情况下，X 上的测地流可以通过子群 $A \cong \mathrm{PSO}^{1,1}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$来实现。因此，我们在 $T^*(X)$上得到一个吉布斯测度，该测度对应于一个双曲单参数群的作用；该群在 H 的水平集上遍历地作用（另见 [We97，第 386]页）。

对于秩群 $r > 1$，有希尔格特遍历阿诺德–刘维尔定理（[Hi05，定理 8.3(v)]，该定理指定了一个泊松对易集 $C_1, \ldots, C_r$，它们是定义在 $T^*(X$上的光滑函数，由 G 上的不变函数通过分解得到。由这些函数生成的代数 $T^*(G/K$的任一有限维线性子空间 $\mathfrak{h}$，若其导出完备哈密顿向量场，便定义了一个从 $H = \mathbb{R}^r$ 到 $T^*(X$上的哈密顿作用；可以预期，恰当的选择甚至会产生非平凡的几何温度，例如测地流和 $r = 1$。

参考文献

[Ba05] Balian, R., *Information in statistical physics*, 《现代物理学史与哲学研究》36:2 (2005), 323–353 44[Ba16] Barbaresco, F., *Geometric theory of heat from Souriau Lie groups thermodynamics and Koszul Hessian Geoemetry:Applications in information geometry for exponential families*, 《熵》18 (2016), 386; doi:10.3390/e18110386 6, 22, 23[BV83] Berline, N. 和 M. Vergne, *Fourier transforms of orbits of the coadjoint representation*, 载于《约化群表示论（帕克城，犹他州，1982）》, 53–67, 数学进展丛书第40卷, Birkh¨auser Boston, 马萨诸塞州波士顿, 1983 39[BDNP23] Bieliavsky, P.、V. Dendoncker、G. Neuttiens 和 J. Pierard de Maujouy, *Riemannian geometry of Gibbs cones associated to nilpotent orbits of simple Lie groups*, 载于《信息几何科学·第二部分》, 144–151, 计算机科学讲义第14072卷, Springer, 2023 6, 7, 25[Bo96] Borchers, H.-J., 《量子场论中的平移群与粒子表示》, 物理学讲义, Springer-Verlag, 柏林、海德堡, 1996 10[BRW98] Bordemann, M.、H. R¨omer 和 S. Waldmann, , 《数学物理学通讯》 ( ), –[BHC62] Borel, A. 和 Harish-Chandra, *Arithmetic subgroups of algebraic groups*, 《数学年刊》75:3(1962), 485–535 14, 42[Bo19] Bost, J.-B., *Chapter IV: Euclidean lattices, theta invariants, and thermodynamic formalism*, 载于《阿拉克洛夫几何与丢番图应用》, 105–211, 数学讲义第227卷, Springer, Cham, 2021; arXiv:1909.04992v1 6[Bou07] Bourbaki, N., 《拓扑向量空间。第1 `a 5章》, Springer-Verlag, 柏林, 2007 45[Ch90] Charbonnel, J.-Y., *Orbites fermées et orbit tempérées*, 《高等师范学校科学年刊》 ´Ecole Norm. Sup. (4) 23:1 (1990), 123–149 25, 39[Ch96] Charbonnel, J.-Y., *Orbites fermées et orbit tempérées. II*, 《泛函分析杂志》138:1 (1996), 213–222 39[dCl91] du Cloux, F., *Sur les représentations différentiables des groupes de Lie algébriques*, 《高等师范学校科学年刊》l' ´E.N.S., 4e s´erie, 24:3 (1991), 257–318 7, 39[Dix57] Dixmier, J., *Sur les représentations unitaires des groups de Lie algébriques*, 《傅里叶研究所年刊》7:1957, 315–328 40[Dix66] Dixmier, J., *Représentations induites holomorphes des groupes résolubles algébriques*, 《法国数学学会通报》94 (1966), 181–206 40[DW23] Drago, N. 和 S. Waldmann, *Classical KMS functionals and phase transitions in Poisson geometry* **21 5** 2023 939 995 46 , 《辛几何杂志》: ( ), –

[Fa00] Fabec, R.C., 《无限维表示论基础》, Chapman & Hall/CRC, 纯粹与应用数学专著与综述第114卷, 2000 40, 41[FN´O25] Frahm, J., K.-H. Neeb 和 G. ´Olafsson, *Nets of standard subspaces on non-compactly causal symmetric spaces* **2** , 载于《几何与分析中的对称性》第¨卷。纪念 Toshiyuki Kobayashi 的论文集, 115–195, 数学进展丛书第358卷, Birkh¨auser/Springer, 新加坡, 2025; arXiv:2303.10065 11[Fr91] Friedrich, Th., *Die Fisher–Information und symplektische Strukturen*, 《数学新闻》153 (1991), 273–296 6, 45, 46[Fu76] Furstenberg, H., *A note on Borel's density theorem*, 《美国数学学会会刊》55:1 (1976), 209–212 14[GG66] Garland, H. 和 M. Goto, *Lattices and the adjoint group of a Lie group*, 《美国数学学会汇刊》124 (1966), 450–460 42[GS84] Guillemim, V. 和 S. Sternbeg, 《物理学中的辛技术》, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1984 2[Hi05] Hilgert, J., *An ergodic Arnold–Liouville Theorem for locally symmetric spaces*, 载于《Bialowieza 二十年: 数学文集》, 163–184, 世界科学数学专著丛书第8卷, World Sci. Publ., 新泽西州哈肯萨克, 2005 47[HH89] Hilgert, J. 和 K.H. Hofmann, *Compactly embedded Cartan algebras and invariant cones in Lie algebras* **75** 1989 168 201 4 , 《数学进展》 ( ), –[HN93] Hilgert, J. 和 K.-H. Neeb, 《李半群及其应用》, 数学讲义第1552卷, 施普林格出版社, 柏林、海德堡、纽约, 1993 16[HN12] Hilgert, J. 和 K.-H. Neeb, 《李群的结构与几何》, Springer, 2012 13, 40[HNO94] Hilgert J., K.-H. Neeb 和 B. Ørsted, *The geometry of nilpotent coadjoint orbits of convex type in hermitian Lie algebras* **4 2** 1994 47 97 32, 34 , 《李理论杂志》: ( ), –[KMM24] Khesin, B.、G. Misiolek 和 K. Modin, *Information geometry of diffeomorphism groups*, 预印本, arXiv:2411.03265 45[Ko61] Koszul, J.L., *Domaines bornés homogènes et orbites de groupes de transformations affines*, 《法国数学学会通报》89 (1961), 515–533 6[Ku51] Kuranishi, M., *On everywhere dense imbedding of free groups in Lie groups*, 《名古屋数学杂志》2 (1951), 63–71 14[Le76] Lee, D. H., *On torsion subgroups of Lie groups*, 《美国数学学会会刊》55:2 (1976), 424–426 14[Ma20a] Marle, Ch.-M., *On Gibbs states of mechanical systems with symmetries*, 《几何、对称性与物理学杂志》57 (2020), 45–85 6, 23[Ma20b] Marle, Ch.-M., *Examples of Gibbs states of mechanical systems with symmetries*, 《几何、对称性与物理学杂志》58 (2020), 55–79 6, 25[Ma21] Marle, Ch.-M., *Gibbs states on symplectic manifolds with symmetries* 载于《信息几何科学》, 237–244; 计算机科学讲义第12829卷, Springer, Cham, 2021 6, 25, 28[Mi08] Mitter, S. K., *Convex optimization in infinite dimensional spaces*, 载于《学习与控制最新进展》, V. D. Blondel 等编, LNCIS 371 (2008), 161–179 45[Na13] Nadkarni, M.G., 《遍历理论基础》, 第3版, 数学教材与读物第6卷, Hindustan Book Agency, 2013 12

[Ne94] Neeb, K.-H., *On closedness and simple connectedness of adjoint and coadjoint orbits*, 《Manuscripta Math.》82（1994），51–65 40[Ne96a] Neeb, K.-H., *A Duistermaat–Heckman formula for admissible coadjoint orbits*, 载于《Lie Theory and its Applications in Physics》，H.-D. Doebner 等编，世界科技出版公司，1996；15–35 4, 27, 28, 39, 44[Ne96b] Neeb, K.-H., *Invariant Convex Sets and Functions in Lie Algebras*, 《半群论坛》53（1996），230–261 15[Ne96c] Neeb, K.-H., *Coherent states, holomorphic extensions, and highest weight representations*, 《Pac. J. Math.》174:2（1996），497–542 45[Ne97] Neeb, K.-H., *On square integrable highest weight representations*, 《Glasgow Math. J.》39（1997），295–321 45[Ne00] Neeb, K.-H., 《李理论中的全纯性与凸性》，《数学讲论》28，de Gruyter Verlag，柏林，2000 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 26, 27, 28, 29, 33, 35, 42, 44, 45[Ne00b] Neeb, K.-H., *Representation theory and convexity*, 《变换群》5:4（2000），325– 350 41[Ne10] Neeb, K.-H., *Semibounded representations and invariant cones in infinite dimensional Lie algebras* **2 1** 2010 37 134 7 ，《Confluentes Math.》：（），–[Ne19] Neeb, K.-H., *Kähler geometry, momentum maps and convex sets*, 《高等数学讲座》（ALM）45（2019），361–391；中国高等教育出版社和 International Press，马萨诸塞州萨默维尔，2019；arXiv:math.SG.1510.03289 5, 9[NO22] Neeb, K.-H., Oeh, D., *Elements in pointed invariant cones in Lie algebras and corresponding affine pairs* **48 1** 2022 295 330 5, 19, 34, 35 ，《Bull. of the Iranian Math. Soc.》：（），–[NO02] Neeb, K.-H. 和 B. Ørsted, *Representations in L^2-spaces on infinite-dimensional symmetric cones* **190** 2002 133 178 45 ，《J. Funct. Anal.》（），–[NR24] Neeb, K.-H., 和 F. Russo, *Covariant projective representations of Hilbert-Lie groups*, 《J. reine angew. Math.》，即将发表 45[NS99] Nencka, H., 和 R.F. Streater, *Information geometry for some Lie algebras*, 载于《Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics》第2卷第3期（1999），441–460 44[Neu22] Neuttiens, G., 《´哈密顿作用的吉布斯态》，硕士论文，列日大学理学院，2022 6, 7, 28`Pu[Pukanszky L., 72] 《法国高等师范学院科学年刊》，第（）， *Action of algebrait groups of automorphisms on the dual of a class of type groups* 4, **5 3** 1972 379 395 40 Ra[Ragunathan, M.S., 《李群的离散子群》，施普林格出版社，1972 4272] Rao[Ranga Rao, R., 72]，《数学年刊》（第2辑）96（1972），505–510 5, 7, 31, 34 *Orbital integrals in reductive groups*Ro[Rockafellar, R. T., 74]，载于CBMS丛书16，SIAM出版社，1974，1–74 45 *Conjugate duality and optimization*Ru[Rudin, W., 《实分析与复分析》，McGraw Hill，1986 41 86] dS[de Saxc16] e, G., ´, 《熵》18:7（2016），论文编号254，共15页 6 *Link between Lie group statistical mechanics and thermodynamics of continua*Sh[Shalom, Y., 98]，《代数学杂志》199（1998），169–171 14, 15

[Sh07] Shima，H.，《Hessian结构的几何》，世界科技出版公司，新泽西州哈肯萨克，2007 6[Si23] Simon，T.，*KMS states of locally compact groups*，《京都数学杂志》，即将发表；arXiv:2301.03444 6, 44[So66] Souriau，J.-M.，*Définition coariante des équilibres thermodynamiques*，《Suppl. al Nuovo cimento》IV:1（1966），203–216 3[So75] Souriau，J.-M.，*Mécanique statistique groupes de Lie et cosmologie. With questions by*，法国国*S. Sternberg and K. Bleuler and replies by the author* 237，家科学研究中心国际学术讨论会，编号“´辛几何与数理物理´”，普罗旺斯地区艾克斯，1974年，第59–113页’´法国国家科学研究中心出版社，巴黎，1975 3, 6´So[Souriau，J.-M.，《动力系统的结构：物理学的辛几何视角》，《数学进展》149，Birkhäuser Boston, Inc.，马萨诸塞州波士顿，1997 3, 6, 11, 23, 3097] Sp¨Spindler，K.，《李代数中的不变锥》，《吉森数学研讨班通讯》188，1988 19[St88] Streater，R.F.，[，《数学物理报告》38（1996），419–436 4496] St *Information geometry and reduced quantum description*Streater，R.F.，[，预印本，arXiv:math-ph:9910036v2 4499] Ta *The analytic quantum information manifold*Tanaka，F.，[，《物理学杂志A辑：数学与一般》（），–06] Vi *Kubo–Mori–Bogoliubov information on the quantum Gaussian model and vio-* Vinberg，*lation of the scale invariance* **39** 2006 14165 14173 44 E. B.，[，《泛函分析及其应用》14（1980），1–13 3, 1680] Wa *Invariant cones and orderings in Lie groups*Wang，S. P.，[，《代数学杂志》31（1974），514–516 1474] Wa *On Jordan's Theorem for torsion groups*Warner，G.，《半单李群上的调和分析（一）》，施普林格出版社，柏林、海德堡、纽约，1972 32, 34[We72] Weinstein，A.，[，《几何与物理学杂志》23（1997），379–394 7, 4697] Zi *The modular automorphism group of a Poisson manifold*Zi mmer，R.J.，《遍历理论与半单群》，《数学专著》，施普林格出版社，1984 13, 42