arXiv:2601.04972v1 [math.NT] 8 Jan 2026

利用全局赋值域研究半阿贝尔簇的新间隙原理

Nuno Hultberg

摘要。Hrushovski 指出，Gao-Ge-Kühne 的新间隙原理本质上等价于任意特征零全局赋值域上的 Bogomolov 猜想。基于这一观察，我们通过将半阿贝尔簇的 Bogomolov 猜想归约为任意几何赋值域上阿贝尔簇的 Bogomolov 猜想，证明了半阿贝尔簇的新间隙原理。这一归约在正特征下仍然成立；然而，在这种情况下，相应的阿贝尔簇 Bogomolov 猜想尚未得到证明。我们无条件地证明了正特征下阿贝尔商为椭圆曲线的半阿贝尔簇的新间隙原理。

目录

1. 引言 2 1.1. 论文结构 6 2. 全局赋值域预备知识 6 2.1. 全局赋值域的定义 7 2.2. GVF 上的交数 9 2.3. 极化 GVF 结构 12 2.4. GVF 的超积 14 2.5. GVF 解析化与存在闭性 15 2.6. 子簇族与张不等式 17 3. Bogomolov 猜想 21 3.1. 半阿贝尔簇预备知识 21 3.2. 陈述与等价表述 23 4. 新间隙原理 26 4.1. 半阿贝尔簇的模空间 26 4.2. 归结为 Bogomolov 猜想 27 5. 半阿贝尔簇 Bogomolov 猜想的证明 29 5.1. 上野轨迹与无群性 31 5.2. 阿基米德 GVF 31 5.3. 无迹阿贝尔簇的几何 Bogomolov 猜想 32 5.4. 拟分裂半阿贝尔簇的 Bogomolov 猜想 33 5.5. 归结为准分裂情形 36 5.6. 主要结果的证明 39 参考文献 40

2020 数学主题分类。主要分类 14G40 次要分类 14K12、11G10、03C66。关键词和短语。Bogomolov 猜想、半阿贝尔簇、新间隙原理、阿拉克洛夫几何、全局赋值域、阿代尔曲线。

1. 引言

证明几何版本和相对版本 Bogomolov 猜想的方法，与 Bogomolov 猜想的统一版本密切相关，例如新间隙原理，参见 [DGH22],[Can+21] 和 [MS25]。全局赋值域理论及其超积使这种关系得以精确表述。Hrushovski 在 2024 年 7 月举行的会议“《莫德尔猜想一百年后》”上发表演讲时提出了这一想法。总而言之，关于 $\mathbb{Q}$ 上阿贝尔簇的新间隙原理，本质上等价于所有特征零全局赋值域（GVF）上的 Bogomolov 猜想。

阿贝尔簇的新间隙原理由 [GGK21]证明，并被用于推出特征零下的一致莫德尔–朗猜想。本文的主要结果是将新间隙原理推广到半阿贝尔簇。其他作者也在进行中的工作中独立获得了这一结果，他们采用不同的方法，并用其推出特征零下半阿贝尔簇的一致 Mordell-Lang 猜想。我们的方法优点在于将阿贝尔簇上的结果视为黑箱。这使我们能够在正特征下获得部分结果。

Ben Yaacov 和 Hrushovski 定义的全局赋值域，是附带有能够在其上建立高度理论所需数据的域。因此，它们与 Chen 和 Moriwaki 引入的适当阿代尔曲线密切相关；适当阿代尔曲线是带有绝对值测度空间并满足乘积公式的域。通过等分布方法， [CM22]证明了对于阿基米德绝对值具有正测度的阿代尔曲线，Bogomolov 猜想成立。我们的第一个结果是将这一结论推广到所有特征零的全局赋值域。

设 K 是一个全局赋值域，其底层域代数闭，且$\backsim A$ 是定义在 K 上的阿贝尔簇。记 h 为 A上的典范高度。若 K 是非阿基米德的，则记 k 为高度为 0 的元素所构成的子域。令 $(A^{K/k}$，tr) 表示 A的 K/k-Chow 迹。该迹是在 k上定义的泛阿贝尔簇，并配有一个态射 $A^{K/k} \otimes K \to A$。

A 的闭整子簇称为特殊的，如果它具有如下形式

$$\mathrm{tr}(X \otimes K) + V + a,$$

其中， X 是 $A^{K/k}$的子簇， V是 A 的阿贝尔子簇，而 $a \in A(K)$ 是满足 $h(a) = 0$ 的一个$\widehat{}$点。

阿贝尔簇的 Bogomolov 猜想 (BC)。任意子簇 $X \subset A\widehat{}$，若对每个 $\epsilon > 0$，集合 $\{x \in X(K) \mid h(x) < \epsilon\}$ 都是扎里斯基稠密的，则它是特殊的。$\widehat{}$此外，这等价于 $h(X) = 0$。

$\widehat{}$此处 $h(X) = 0$ 表示簇 X.的标准化 Néron–Tate 高度

定理 1. (BC)对特征0的几何赋值域上的每个阿贝尔簇都成立。

这一结果部分回答了 [CM22, 注 5.3] ，因为任意阿代尔曲线都会导出一个全局赋值域，而该陈述仅取决于由此得到的 GVF 结构。我们利用这一点重新证明 Gao-Ge-Kühne 的新间隙原理，以及特征零下新间隙原理的一个几何版本。这并非独立的证明，因为我们对非阿基米德 GVF 上几何 Bogomolov 猜想的证明用到了他们关于潜在非退化性的结果。

从全局赋值域的角度开展研究，有助于我们对半阿贝尔簇的工作。受 Luo 和 Yu 对半阿贝尔簇的几何 Bogomolov 猜想的证明启发， [LY25], 我们将全局赋值域情形下半阿贝尔簇的 Bogomolov 猜想归结为阿贝尔簇的 Bogomolov 猜想。

下面简要介绍半阿贝尔簇上的典范高度。详情请参见 §3。设 G 是定义在 K 上的半阿贝尔簇，其阿贝尔商为 $\pi : G \to A$。固定 A 上一个典范度量化的充足对称线丛 $\mathcal{M}$，其底层线丛为 M；再固定一个整多面体 $\Delta \subset \mathbb{R}^n$，使其包含原点，且原点位于其内部。我们将 G 上的典范高度 $h = h_{\pi^*\mathcal{M}} + h_{\widehat{\rho}(\Delta)}$ 定义为阿贝尔贡献与环面贡献之和。这里， $\widehat{\rho}(\Delta)$ 表示定义在 G的某个紧化上的阿代尔 Cartier 除子。其底层 Cartier 除子记为 $\rho(\Delta)$。它是通过将环面部分某个紧化上的典范度量化的环面除子作等变延拓而得到的，并且存在等距同构 $[n]^*\widehat{\rho}(\Delta) \cong \widehat{\rho}(\Delta)^{\otimes n}$。具体而言，我们可以取 $\Delta = [-1,1]^t$。于是，Cartier 除子 $\rho(\Delta)$ 定义在紧化 $G = (G \times (\mathbb{P}^1)^t)/(\mathbb{G}_m^t)$上，其中 $x \in \mathbb{G}_m^t$ 的作用为 (x, x^{-1})，并且有 $\sum_{i=0}^{t-1} (G \times (\mathbb{P}^1)^i \times ([0] + [\infty]) \times (\mathbb{P}^1)^{t-i-1})/(\mathbb{G}_m^t)$。 $\widehat{\rho}(\Delta)$ 是延拓 $\rho(\Delta)$ 的唯一阿代尔 Cartier 除子，使得同一化 $[n]^*\widehat{\rho}(\Delta) \cong \widehat{\rho}(\Delta)^{\otimes n}$ 是等距同构。

令 $(G^{K/k}, \mathrm{tr})$ 表示 G 的 K/k-Chow 迹。该迹是定义在 k 上的泛半阿贝尔簇，并带有映射 $G^{K/k} \otimes K \to G$。其存在性最近在 [Liu24, Corollary 2.4.4 (2)] 中得到确立。[1] 若一个闭整子簇$X \subset G$ 满足

$$\widetilde{X} := X/\mathrm{Stab}(X) = \mathrm{tr}(X_0 \otimes K) + g,$$

其中 X_0 是 $\widetilde{G}^{K/k}$ 的子簇，且 $g \in \widetilde{G}(F)$ 满足 $\widehat{h}(g) = 0$，其中 $\widetilde{G} := G/\mathrm{Stab}(X)$，而 F 是 K 的 GVF 扩张。令 $\pi : G \to A$ 表示到其阿贝尔商的投影。

半阿贝尔簇的 Bogomolov 猜想（BCSA）。假设存在一个 *GVF* 扩张 F，使得对于每个 $\epsilon > 0$，集合 $\{x \in X(F) \mid h(x) < \epsilon\}$ 都是扎里斯基稠密的。那么， X 是特殊的。

我们的主要结果是将问题约化到阿贝尔簇的情形。

定理 2. 设 G 是一个阿贝尔商为 A的半阿贝尔簇。若(BC)对 A成立，则(BCSA) 对 G成立。

特别地，(BCSA) 在所有特征为0的全局赋值域上成立。此外，对于阿贝尔商为椭圆曲线的半阿贝尔簇 G，(BCSA) 在任意特征的全局赋值域上均成立。

因此，我们推导出半阿贝尔簇的新间隙原理。设G 是定义在几何赋值域 K 上的半阿贝尔簇，并配有其环面部分 $\mathbb{T} \cong \mathbb{G}_m^t$ 的同一化，以及其阿贝尔商A上的充足对称线丛 M。根据 Barsotti-Weil 公式，半阿贝尔簇 G 产生点Q_1，……，$Q_n \in A^\vee(K)$。我们赋予 G 高度 $h = h_{\mathrm{Fal}} + \widehat{h}_{\mathrm{NT}}(Q_1) + \cdots + h_{\mathrm{NT}}(Q_t)$，其中 h_{NT} 表示 $A^\vee$上的 Néron-Tate 高度。固定一个内部包含原点的整多面体$\Delta \subset \mathbb{R}^n$。上述数据确定了 G上的一个典范高度 $h = h_{\pi^*\mathcal{M}+\widehat{\rho}(\Delta)}$。

[1]也可以采用不依赖 Chow 迹存在性的处理方式，参见 [LY25, §3.2]，不过，Chow 迹的存在使表述更加简洁。

半阿贝尔簇的新间隙原理。存在正常数$c_1 = c_1$（维数 G，次数$\pi^* M+\rho(\Delta) X$）以及 $c_2 = c_2$（维数 G，次数$\pi^* M+\rho(\Delta) X$）使得

$$\left\{P \in X(K) \mid \widehat{h}(P) < c_1 \max\{\mathrm{ht}(2), h(G)\}\right\}$$

包含于一个真扎里斯基闭子集 $X' \subsetneq X$ 中，该子集满足 次数$\pi^* M+\rho\,(\Delta)$ (X') $< c_2$，对于所有在几何赋值域 K 上的半阿贝尔簇 G 以及具有有限稳定子的闭子簇 $X \subset G$，且满足 $X - X$ 生成 G。

Hrushovski 关于阿贝尔簇的观察同样适用于半阿贝尔簇。

命题 1。 关于所有全局赋值域上半阿贝尔簇的*Bogomolov* 猜想蕴含新间隙原理。

我们关于 Bogomolov 猜想的部分结果使我们能够得出若干结论。

定理 3（在 $\mathbb{Q}$ 上的新间隙原理）。 存在正常数 $c_1 = c_1$（维数 G，次数$\pi^* M+\rho$ (Δ) X） 和 $c_2 = c_2$（维数 G，次数$\pi^* M+\rho$ (Δ) X），具有如下性质

$$\left\{P \in X(\overline{\mathbb{Q}}) \mid \widehat{h}(P) \leq c_1 \max\{1, h(G)\}\right\}$$

包含于某个扎里斯基闭 $X' \subsetneq X$ 中，该集合满足 次数$\pi^* M+\rho\,(\Delta)$ (X') $< c_2$，对于所有在 $\mathbb{Q}$ 上的半阿贝尔簇 $\overline{G}$ 以及具有有限稳定子的闭子簇 $X \subset G$，且满足 $X - X$ 生成 G。

对于非阿基米德 GVF，我们也可以表述一个新间隙原理。

定理 4 (大特征下的新间隙原理**)**。 设 n 和 d 为自然数。那么存在正数常量 c_1、c_2 和 c_3，它们仅依赖于 n 和d，并具有如下性质

$$\left\{P \in X(K) \mid \widehat{h}(P) \leq c_1 h(G)\right\}$$

包含于某个扎里斯基闭 $X' \subsetneq X$ 中，其中 $\deg_{\pi^* M+\rho(\Delta)}(X')$ $< c_2$ 对所有维数为 n、定义在特征为0 或正特征 $> c_3$ 的 ***GVF*** K 上的半阿贝尔簇 G，以及满足以下条件的次数为 $\deg_{\pi^* M+\rho(\Delta)} X = d$且具有有限稳定子的闭子簇 $X \subset G$ 均成立： $X - X$ 生成 G。

特别地，半阿贝尔簇的新间隙原理在特征 0 下成立。如果能够证明相应的 Bogomolov 猜想，也可以得到正特征下的结果。

定理 5。 对于阿贝尔商为椭圆曲线的半阿贝尔簇，新间隙原理在所有特征下均成立，且常量与特征无关。

BCSA 的证明受到 [LY25] 中半阿贝尔簇几何 Bogomolov 猜想证明的启发。与他们的论文一样，我们首先证明拟分裂半阿贝尔簇（阿贝尔簇与等变簇的乘积）的 Bogomolov 猜想，然后将问题归约到这一情形。然而，各个步骤都带来了若干额外困难，其中最突出的是存在非挠元的高度为零的点。我们通过假设阿贝尔商满足 Bogomolov

猜想，将问题归约到阿贝尔商为椭圆曲线的情形，然后利用阿贝尔商上等分布测度的性质，克服这些困难。

将新间隙原理约化为 Bogomolov 猜想，依赖于沿超滤子进行退化，或等价地依赖于连续模型论中的紧性。这一策略由 Hrushovski 在整体情形下提出。Yusheng Luo 在局部情形下采用了类似的沿超滤子退化的方法，参见 [Luo22] 和 [Luo21]。随后，Favre-Gong 在 Berkovich 空间的框架下将其形式化，参见 [FG24]。在 Yap 的近期工作中， [Yap25], 利用这一方法证明了算术动力系统中的一个一致性结果。

特征零阿贝尔簇上的非阿基米德新间隙原理已由 Mavraki 和 Yap 在 [MY25] 中独立证明。利用连续模型论中的紧性论证，可以从 $\mathbb{Q}$ 中的 [GGK21] 上的新间隙原理形式化地推出这一结果。我们的两项工作都只使用了 [GGK21] 中关于潜在非退化性的结果。潜在非退化性可以改述为以下表述：特征零的几何 GVF 上的无迹阿贝尔簇的一个子簇 X 是特殊的，当且仅当 $h(X) = 0$，参见引理 5.3.1。在本文中，非阿基米德新间隙原理的推导依赖于如下证明：这一性质还等价于存在一个扎里斯基稠密的小点集。在 [MY25], 中，该推导依赖于动力系统的一致张不等式。

这两种方法密切相关。我们的结果依赖于全局赋值域上的张不等式。为此，我们引入了一种性质更好的连续极小值概念。这既纠正了 [GY25] 中观察到的张不等式失效问题，也为这种失效提供了概念上的解释。对于我们对连续极小值的替代定义，张不等式成立。簇 X 的高度归一化为 $h_{\mathcal{L}}(X) = (\mathcal{L})^{\dim X+1}$(维数 $X+1)(\mathcal{L})^{\dim X}$。

命题2 (命题 2.6.8 和 2.6.10)。 设 $\mathcal{L}$ 是全局赋值域 K上的射影簇 X 上的几何上充足的半正阿代尔线丛。那么，

$$\frac{d}{d+1}\zeta_{abs}(\mathcal{L}) + \frac{1}{d+1}\zeta_{ess}(\mathcal{L}) \leq h_{\mathcal{L}}(X) \leq \zeta_{ess}(X).$$

我们可以从全局赋值域上的张氏不等式推出一个统一版本的张氏不等式，该版本与 [MY25,定理 1.1]有很大不同。

定理 6 (推论 2.6.11)。 设 $\mathcal{X} \to S$ 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的射影簇族，且设 $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{X}$ 上的阿代尔线丛，在纤维上半正。此外，假设几何德利涅配对 $\langle \mathcal{L}, \ldots, \mathcal{L} \rangle$ 在 S上是大。那么，对于任意 $\epsilon > 0$，存在常数 N 和 C，使得集合

$$\{x \in \mathcal{X}(s)(\overline{\mathbb{Q}}) \mid h_{\mathcal{L}}(x) < (1-\epsilon)h_{\mathcal{L}}(\mathcal{X}(s))\}$$

包含在次数为 $\leq N$、高度为 $< C$ 的真子簇中，对所有位于 S 的某个真闭子集之外的 $s \in S(\mathbb{Q})$ 均成立。

它缺少 [MY25，定理 11], 中的定量控制，因为其证明依赖于紧性论证，而且我们要求某个 Deligne 配对是大线丛。我们指出，这种大性不会影响其在一致 Bogomolov 猜想中的应用，因为它在该应用中是作为输入使用的。另一方面，我们的结论也适用于动力学背景之外的任意充分正的线丛。此外，我们的方法允许任意选择 ϵ。Deligne 配对的大性这一事实

在 [MY25] 中并非必需，这表明张氏不等式的一个版本也适用于全局赋值域的高秩类比。

除本文的直接结果外，我们认为这些证明为阿拉克洛夫几何以及阿代尔曲线和几何赋值域理论中的一致性论断提供了新的视角。事实上，特征零阿代尔曲线的大多数结果都以数域上的一致性论断为推论，反之亦然。这不仅是理论上的观察。Chen 和 Moriwaki 的阿代尔曲线理论发展得相当完善，足以在实践中应用这一观察。这进而推动了对阿代尔曲线和几何赋值域的进一步研究。另一方面，对几何赋值域不同视角的比较，使人们能够通过扩张到一个族，并利用 Yuan-Zhang 的阿代尔线丛，证明关于阿代尔曲线的结果。此外，$\mathbb{Q}$和 $k(t)$的存在闭性使得将经典阿拉克洛夫几何中的某些结果推广到任意阿代尔曲线/几何赋值域成为可能。

我们强调，在本文的应用中，仅证明极化阿代尔曲线的结果是不够的。Bogomolov 猜想需要针对任意阿代尔曲线结构来证明。在其他应用中，可能有必要针对一类受限的阿代尔曲线证明结果。例如，[Yap25]的方法可以证明：对于阿代尔曲线上的所有动力系统，只要该曲线存在一个具有正测度的坏约化位，就满足 Bogomolov 性质；相应界限取决于该坏约化位对最小结式高度的贡献程度。采用与本文类似的方法，可以利用这一结论推导出同处所引文献中的一致性论断。

1.1. **论文结构**。第 2 节介绍全局赋值域。这部分内容部分基于 [DHS24] 和 [Ben+24]，但也包含新结果，例如 §2.6 节中的张不等式。第 3 节陈述全局赋值域上半阿贝尔簇的 Bogomolov 猜想，并讨论使用交数的陈述与使用本质极小值的陈述之间的等价性。第 4 节将其与新间隙原理联系起来，并通过证明命题 1，从全局赋值域上的 Bogomolov 猜想推出新间隙原理。我们将结果专门化，从稍后将要证明的 Bogomolov 猜想的情形推出定理 3 、 4 和 5。第 5 节是本文的核心。我们首先从已有结果轻易推出几何赋值域上关于阿贝尔簇和环面的 Bogomolov 猜想的一些实例。最后，我们着手证明半阿贝尔簇的 Bogomolov 猜想可归约到阿贝尔簇的情形（定理 2），并证明特征零下阿贝尔簇的 Bogomolov 猜想（定理 1）。

致谢。感谢 Long Liu 提供有关 Chow 迹的参考资料。感谢 Wenbin Luo、Michal Szachniewicz、Jit Wu Yap、Huayi Chen 和 Paolo Dolce 与我讨论本文相关内容。

2. 全局赋值域预备知识

函数域与数域之间的类比，以乘积公式为例，在数论中取得了丰硕成果。全局赋值域是由 Ben Yaacov 和 Hrushovski 引入的一种代数结构，用于编码高度理论所需的数据。它们与 Gubler 的 M域概念密切相关，参见 [Gub97], , 也与 Chen 和 Moriwaki 的阿代尔曲线密切相关，参见 [CM20]。其代数性质使几何赋值域特别适用于分类，并且

适用于连续逻辑方法。 本节中的许多结果可见于 [Ben+24]。

2.1. **全局赋值域的定义**。 全局赋值域有几种等价的定义。根据上下文，采用不同的视角会更为方便。例如，使用全局赋值域泛函或高度的方法有利于构造超积，而将全局赋值域视为阿代尔曲线的等价类，则便于进行局部计算。我们回顾全局赋值域的几种等价定义。关于这些定义等价性的证明，参见 [Ben+24]。

可以说，全局赋值域最简单的定义，是将对数魏尔高度的基本性质公理化。特别地，由此立即可知， $\mathbb{Q}$ 具有全局赋值域的结构。

定义 2.1.1。 一个全局赋值域 （简称 GVF）是一个域 K ，并配备高度函数 h : $\coprod_{n\geq 1} K^n \to \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$，满足以下公理，其中阿基米德误差 $e\geq 0$为某个固定值。

零点的高度：$\forall x\in K^n$, $h(x)=-\infty \Leftrightarrow x=0$1 的高度：$h(1,1)=0$乘积公式：$\forall x\in K^\times$, $h(x)=0$不变性：$\forall x\in K^n$, $\forall\sigma\in \mathrm{Sym}_n$, $h(\sigma x)=h(x)$ 可加性：$\forall x\in K^n, \forall y\in K^m$, $h(x\otimes y)=h(x)+h(y)$ 单调性：$\forall x\in K^n, \forall y\in K^m$, $h(x)\leq h(x,y)$ 三角不等式： $\forall x,y\in K^n$, $h(x+y)\leq h(x,y)+e$

这里 $\otimes$ 表示塞格雷积，定义为 $(x_1,\dots,x_n)\otimes(y_1,\dots,y_m)=(x_i\cdot y_j : 1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m)$。这样的高度函数可通过 h 分解： $\mathbb{P}^n(K)\to\mathbb{R}_{\geq 0}$对每个 n都成立。我们定义 $\mathrm{ht}(x):=h[x:1]$ ，其中 $x\in K$。

可加性意味着，可以转而考虑带有塞格雷积的 $\coprod_{n\geq 0} K^n\backslash\{0\}$ 的格罗滕迪克群，并将 GVF 结构视为满足适当公理的线性泛函。具体而言，可以为域 K 关联空间 $\mathrm{LDiv}_{\mathbb{Q}}(K)$，其元素为格 $\mathbb{Q}$-除子，并具有定义良好的主因子和有效锥概念，参见 [Ben+24，定义 5.1]。此外，它还具有格群结构，即具有并运算 $\vee$ ，对应于取两个元素的最大值，并且与群结构相容。

于是，GVF 泛函是一个线性映射 $\phi\colon \mathrm{LDiv}(K)\to\mathbb{R}$ ，它在有效锥上非负，并且在主因子上取值为 0。由正性可知，该泛函唯一地延拓到关于有效锥的完备化；为体现其极大性，我们将其记为 $\mathrm{MDiv}(K)$，参见 [Sza23，命题 3.1.16]。它继承了格群结构。

若 U 是定义在 $\mathbb{Z}$ 上、函数域为 $L\subset K$ 的准射影簇，则可以 $\widehat{\ }$ 将阿代尔除子空间 $\mathrm{Div}_{\mathbb{R}}(U)$（定义见 [YZ24] ，另见 §2.2）视为 $\mathrm{MDiv}(K)$ 的子集。反过来，对于每个 $D\in\mathrm{LDiv}_{\mathbb{Q}}(K)$，都存在一个准射影簇 $\frown U$ ，其函数域为 $L\subset K$ ，使得 D 由 $\mathrm{Div}_{\mathbb{R}}(U)$ 中的一个元素定义。设 L 是 F 的子域。那么，可以在 K 上定义 GVF 结构；这些结构与正泛函一一对应

$$\widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbb{R}}(K/L):=\varinjlim \widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbb{R}}(\mathcal{X})\to\mathbb{R},$$

其中余极限遍历所有准射影簇之间的射影态射$\mathcal{X}\to\mathcal{S}$，并附带相容嵌入 $\mathrm{Frac}(\mathcal{X})\subseteq K$ 和 $\mathrm{Frac}(\mathcal{S})\subseteq K$。

通过将 [Sza23, §3.1] 中的论证应用于当前情形，空间 $\mathrm{Div}_{\mathbb{R}}(K/L)$ 在 $\mathrm{MDiv}(K)$ 上的格运算下封闭。

引理 2.1.2。设 K 是平凡 *GVF* k 或具有任意 *GVF* 结构的 $\mathbb{Q}$ 的有限型 *GVF* 扩张。记其关联的 *GVF* 泛函为 ϕ。设 $\mathcal{L}$ 是拟射影簇 U 上的一个（算术）大线丛，其函数域为 K，并假设 $\phi(\mathcal{L}) = 0$。则 K 上的 *GVF* 结构是平凡的。

证明。设 $\mathcal{L}'$ 是函数域为 K 的簇 U' 上的任意阿代尔线丛。则当 N 充分大时，不等式 $\mathcal{L}' \leq N\mathcal{L}$ 成立，即定义在支配 U 和 U' 的簇 U'' 上的线丛 $\mathcal{L}'^{-1} \otimes \mathcal{L}^{\otimes N}$ 具有一个（小）截面。因此，$\phi(\mathcal{L}') \leq N\phi(\mathcal{L}) = 0$。对于 $-\mathcal{L}'$ 的类似不等式意味着 $\phi(\mathcal{L}') = 0$。□

如果 K 是可数的，则 GVF 结构也可以描述为 K 上适当阿代尔曲线结构的等价类（最初定义于 [CM20] 中）。

定义 2.1.3。适当阿代尔曲线 是一个域 K，连同一个测度空间 $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$，以及一个映射 $(\omega \mapsto |\cdot|_\omega)\colon \Omega \to M_K$ 到K上的绝对值空间，使得对所有 $a \in K^\times$，函数

$$\omega \mapsto \omega(a) := -\log |a|_\omega$$

属于 $L^1(\nu)$，且积分为零。

若在 K 上赋予适当阿代尔曲线结构，则可通过如下设定在其上定义一个 GVF 结构

$$h(x_1, \ldots, x_n) := \int_\Omega -\min_i(\omega(x_i))d\nu(\omega).$$

反过来，若 K 是可数的，则其上的任意 GVF 结构都可按此方式由某个适当阿代尔曲线结构表示（[Ben+24，推论 1.3]）。若 K 不可数，则该 GVF 可能无法由阿代尔曲线表示，但仍可由拓扑阿代尔曲线表示（定义见 [Séd25]）。

任何域都可通过将每个非零向量的高度设为 0，赋予一个平凡 GVF 结构。对数魏尔高度为任意数域提供一个 GVF 结构，因此也为 $\mathbb{Q}$ 提供该结构。根据 [Ben+24，引理 10.2]，，这种结构在本质上是唯一的：对任意 $\lambda \geq 0$，存在唯一的 GVF 结构 $\mathbb{Q}[\lambda]$，使得 $\mathrm{ht}(2) = \lambda \log 2$。类似地，对任意域 k，在 $k(t)$上存在唯一的 GVF 结构，记作 $k(t)[\lambda]$，其在 k 上的限制是平凡的，并满足 $\mathrm{ht}(t) = \lambda$。给定一个 GVF K，我们将所有高度按 λ缩放后得到的 GVF 结构记作 $K[\lambda]$。

给定一个 GVF K 及其 E 代数扩张 K，存在一种赋予 E GVF 结构的规范方式，称为对称 扩张，记作E^{sym}，参见 [Ben+24，命题 10.5]。对于伽罗瓦扩张，我们得到唯一的伽罗瓦不变高度函数。

如果一个 GVF 满足强三角不等式 $h(x+y) \leq h(x, y)$，则称其为非阿基米德或几何的 。否则称其为阿基米德。对于任意非阿基米德 GVF K，集合 $K_{\mathrm{const}} = \{x \in K \mid \mathrm{ht}(x) = 0\}$ 构成一个域，称为 K的常数域 。

当且仅当某个表示它的（拓扑）阿代尔曲线上存在正测度的阿基米德（伪）绝对值时，几何赋值域才是阿基米德的。

引理 2.1.4。设 K 是一个常数域为 k 的非阿基米德 *GVF*。则其代数闭包 K 赋予对称扩张后，其常数域为 k。

证明。只需对有限子扩张 $L \subset K$ 证明该命题；此外，我们还可以进一步将情形限制为 L是伽罗瓦扩张或次数为 p的不可分扩张。

若 L 是一个有限伽罗瓦扩张，且 $x \in L$ 属于常数域，则所有伽罗瓦共轭 σx 也都属于常数域。这些共轭元的对称多项式也属于常数域，因而属于 k。由此可知，x 在 k 上是代数的。若 L 是一个不可分扩张，且 $L^p = K$，而 $x \in L$ 属于常数域，则 x^p 属于常数域，且 x 在 k 上是代数的。

反之，L 中任何在 k 上代数的元素都必须属于常数域。设 $\alpha \in L$ 在 k 上有限。于是，该有限扩张作为一个 k-向量空间可表示为 $k[\alpha] = \bigoplus_{i=0}^{d-1} k\alpha^i$。由强三角不等式可知，$k[\alpha]$ 中元素的高度是有界的。然而，如果 α 的高度为 > 0，则 α^n 的高度是无界的。□

2.2. **GVF 上的交数**。关于全局赋值域上线丛交的基本定义和结果见 [DHS24]。这些定义既与阿代尔曲线上的交数兼容（见 [CM21], ），也与 [YZ24]中定义的 Deligne 配对兼容。我们将以 Yuan 和 Zhang 的理论为基础展开讨论，这里仅作简要回顾。详情请参阅 [YZ24]。

算术 $\mathbb{Q}$-除子 $\mathcal{D}$ 在 $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ 上的整射影概形 X 上由 $\mathbb{Q}$-Cartier 除子 D 以及（当 X 在 $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ 上平坦时） D 在 $X(\mathbb{C})$ 上的连续格林函数 $g_{\mathcal{D}}$ 组成。记 X 上的算术 $\mathbb{Q}$-除子空间为$\widehat{\operatorname{Div}}_{\mathbb{Q}}(X)$。设 U 是 $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$上的拟射影概形。那么，$U$ 上的模型除子空间定义为如下余滤子的极限

$$\widehat{\operatorname{Div}}_{\mathbb{Q}}(U)_{\mathrm{mod}} = \varinjlim \widehat{\operatorname{Div}}_{\mathbb{Q}}(\overline{U}),$$

其中 $\overline{U}$遍历 U的所有紧化。给定一个紧化 $\overline{U}$，边界除子 $\mathcal{E}$ 是一个模型除子，其支撑为$\overline{U} \setminus U$，并满足$g_{\mathcal{E}} > 0$ 处处成立。由此我们可以定义边界范数

$$\|-\|_{\mathcal{E}} : \widehat{\operatorname{Div}}_{\mathbb{Q}}(U)_{\mathrm{mod}} \to [0, \infty]$$

by

$$\mathcal{D} \mapsto \inf\{\lambda \in \mathbb{Q}_{>0} \mid \lambda\mathcal{E} - \mathcal{D} \text{ and } \lambda\mathcal{E} + \mathcal{D} \text{ are effective}\}.$$

U 上的阿代尔除子空间定义为$\widehat{\ }$模型除子空间关于边界范数的完备化。记作 $\operatorname{Div}_{\mathbb{Q}}(U)$。

若阿代尔除子可由数值有效模型除子逼近，则称其为强数值有效。若阿代尔除子属于强数值有效锥的闭包，则称其为数值有效。若阿代尔除子是两个强数值有效除子之差，则称其为可积。我们可以用下标 snef/nef/int 来标记强数值有效/数值有效/可积除子的锥。阿代尔除子的等价类导出一种$\widehat{\ }$阿代尔线丛的概念，我们用带适当标记的 Pic 表示。现在我们可以定义几何赋值域K上的拟射影簇上的阿代尔线丛。设 K 为一个几何赋值域，X 为其上的一个拟射影簇。我们将 X 的一个模型定义为：一个 $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ 上的有限型正规准射影概形 $\mathcal{Y}$、一个平坦射影态射 $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$、一个映至一般点的态射 $\operatorname{Spec} K \to \mathcal{Y}$，以及一个同一化 $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$。

$\mathcal{Y}$ 上的一般点以及一个同一化 $X \cong \mathcal{X}_K$。 X 的任意两个模型都被第三个模型支配。 X 上的一个阿代尔线丛由模型 $\mathcal{X}$上的一个阿代尔线丛构成。若两个阿代尔线丛在支配相关两个模型的某个模型上拉回后相同，则将它们视为相同。若 X 上的阿代尔线丛所对应的模型上的线丛具有相应性质，则称该阿代尔线丛为强数值有效/可积。若对于一个模型（$\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$， $\mathcal{L}$）以及任意 $y \in \mathcal{Y}^{\mathrm{an}}_{\mathrm{Berk}}$ ，$\mathcal{L}$ 在任意纤维 $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}_y$上的限制都是半正的，则称 X 上的阿代尔线丛为半正。

为定义几何赋值域上的算术交数，我们回顾 Yuan 和 Zhang 理论中的阿代尔线丛 Deligne 配对。设 $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$是定义在 Spec$\mathbb{Z}$ 上的准射影概形之间的平坦射影态射，并假设 $\mathcal{X}$ 是积分的，且 $\mathcal{Y}$ 是正规的。YZ24 的定理 4.1.3] 中引入了 Deligne 配对，作为一种配对

$$\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{X})^{n+1}_{\mathrm{int}} \to \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{Y})_{\mathrm{int}}.$$

对于可积阿代尔线丛 $\overline{\mathcal{L}}_1$，……， $\overline{\mathcal{L}}_{n+1}$，Deligne 配对记作

$$\langle \overline{\mathcal{L}}_1, \dots, \overline{\mathcal{L}}_{n+1} \rangle_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}.$$

我们通过在适当的模型上计算 Deligne 配对，并取所得线丛的高度，来定义几何赋值域上可积阿代尔线丛的交数。

定义 2.2.1. 设 $\overline{\mathcal{L}}_1$，……， $\overline{\mathcal{L}}_{n+1}$是几何赋值域 K上的射影簇 X 上的可积阿代尔线丛。设 $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 是 X 的一个模型，所有这些线丛都定义在其上。令 ϕ 表示 K 的 GVF 泛函在 Frac($\mathcal{Y}$) 上的限制。于是我们将交数定义为

$$\overline{\mathcal{L}}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{\mathcal{L}}_{n+1} = \phi(\langle \overline{\mathcal{L}}_1, \dots, \overline{\mathcal{L}}_{n+1} \rangle_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}).$$

根据 [YZ24 定理 4.1.3] 中 Deligne 配对与基变换的相容性，该结果不依赖于模型的选择。

域 K 上准射影簇 $\overline{U}$ 上的阿代尔线丛 $\overline{\mathcal{L}}$ 有一个几何部分 $\mathcal{L}$ ，它是 K 上 U 的紧化上的线丛的极限。我们将 $\overline{\mathcal{L}}$ 称为几何阿代尔线丛。在 [YZ24] 中，它们与算术情形一视同仁地处理。

若 X 是几何赋值域 K 上的射影簇，且 $\overline{\mathcal{L}}$ 是 X 上底层线丛为丰沛的阿代尔线丛，则 Z 的归一化高度定义为

$$h_{\overline{\mathcal{L}}}(Z) = \frac{(\overline{\mathcal{L}}|_Z)^{\dim Z+1}}{(\dim Z+1)(\mathcal{L}|_Z)^{\dim Z}}.$$

采用此定义是为了使交数能够与簇上点的高度相比较。特别是，它与本质极小值和绝对极小值相比较。若 $\overline{\mathcal{L}}$ 是阿贝尔簇 $\widehat{\ }$ 上典范度量化的充足对称线丛，我们将用记号 $h(Z)$ 表示 $h_{\overline{\mathcal{L}}}(Z)$。

射影簇 X 上定义于几何赋值域 K 上的阿代尔线丛，会在表示 K 的阿代尔曲线上诱导出一个阿代尔线丛，这符合 Chen-Moriwaki 的定义。我们将 Chen 和 Moriwaki 定义的阿代尔线丛称为*C-M* 线丛，并将“阿代尔线丛”一词专用于上述讨论的线丛。具体而言，Yuan 和 Zhang 的解析化函子（参见 [YZ24, §3],）将定义于 Spec$\mathbb{Z}$ 上的拟射影簇 $\mathcal{X}$ 上的阿代尔线丛 $\overline{\mathcal{L}}$ 关联到 Berkovich 解析化 $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$上的连续赋度线丛 $\overline{\mathcal{L}}^{\mathrm{an}}$ 。如果 $\overline{\mathcal{L}}$

是射影簇 X 上定义于几何赋值域 K上的阿代尔线丛，则可通过选取一个模型（$\pi\colon \mathcal{X}\to\mathcal{Y},\ \mathcal{L}$），并根据 $\pi^{\mathrm{an}}\colon \mathcal{X}^{\mathrm{an}}\to\mathcal{Y}^{\mathrm{an}}$ 的纤维上的度量确定局部度量，从而得到 Chen 和 Moriwaki 意义下的阿代尔线丛。我们将诱导出的 C-M 线丛记为 $\mathcal{L}^{\mathrm{C\text{-}M}}$。

论文 [CM21] 给出了 C-M 线丛的算术交数定义。设 $\mathcal{L}_1,\dots,\mathcal{L}_{n+1}$ 是定义在 GVF K上的维数为 n 的射影簇 X 上的可积阿代尔线丛。根据命题 2.5.5，我们可以选取一个表示阿代尔曲线，该曲线来自一个定义了这些数据的可数广义赋值域，并据此计算它们的交数 $\mathcal{L}_1^{\mathrm{C\text{-}M}}\cdot\ldots\cdot\mathcal{L}_{n+1}^{\mathrm{C\text{-}M}}$。这使我们能够在两种方法之间自由转换视角。

注 2.2.2. 当前交数定义的一个缺点是，适用的线丛范围较小。该定义要求线丛在 $\mathcal{X}$ 上满足正性条件，而实际上只需要其正性满足相对条件，正如 [DHS24]中所述。此外，我们对阿代尔线丛的定义不依赖于 K上的 GVF 结构。固定 GVF 结构后，进一步完备线丛空间是很自然的做法。对于我们预期的应用以及许多其他应用，这一点并不重要。C-M 线丛解决了上述两个问题。

为验证半阿贝尔簇上所有我们关注的线丛都是可积的，我们研究所引入的正锥与线丛空间上的格结构之间的相互作用。

引理 2.2.3. 设 $\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2$ 是准射影算术簇 U 上的数值有效/半正/可积阿代尔除子。那么，除子 $\mathcal{D}_1\vee\mathcal{D}_2$ 也具有数值有效/半正/可积性。

证明。 可积情形可由数值有效情形推出。若 $\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2$ 可积，则可找到一个数值有效除子 $\mathcal{E}$，使得 $\mathcal{D}_1+\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{D}_2+\mathcal{E}$ 都是数值有效的。于是，$(\mathcal{D}_1+\mathcal{E})\vee(\mathcal{D}_2+\mathcal{E})=(\mathcal{D}_1\vee\mathcal{D}_2)+\mathcal{E}$ 是数值有效的。对于半正情形，可以假设 $\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2$ 是半丰沛的。

由 [CM18, §3.3] 中对半丰线丛上半正度量的刻画可知，$\mathcal{D}_i$ 在某个赋值处半正，当且仅当作为带度量除子，它们可以一致逼近形如 $\frac{1}{N}(\bigvee\widehat{\ }\,\mathrm{div}(x_i)+(0,C))$ 的除子，其中 $(0,C)$ 是带有常值格林函数的平凡除子，且对应某个 $C\in\mathbb{R}$。两个这样的除子的最大值仍然是半正的。数值有效模型除子恰好是可由形如 $\frac{1}{N}\bigvee\widehat{\ }\,\mathrm{div}(x_i)$ 的除子逼近的除子；例如可由 [DHS24, 定理 3.24] 得出这一点。该断言可仿照半正情形证明。□

在我们的应用中，重要的线丛是半阿贝尔簇族上的典范度量线丛。所有出现的线丛，均由阿贝尔簇上的典范度量丰沛对称线丛和数值平凡线丛经拉回和极大化得到。因此，只需证明这些线丛可积，即可证明所有出现的线丛都可积。

阿贝尔簇上的典范度量化的充足对称线丛是数值有效的，因此根据 [YZ24, 定理 6.1.1]，它是可积的。阿贝尔簇族上的典范度量数值平凡线丛也是可积的。

引理 2.2.4. 设 $\pi: \mathcal{A} \to S$ 是一个阿贝尔簇族，且 $\mathcal{Q}$ 是 $\mathcal{A}$上的数值平凡典范度量线丛。那么，阿代尔线丛 $\mathcal{Q}$ 是可积的。

证明。设 $\overline{\mathcal{M}}$ 是 $\mathcal{A}$ 上的充足对称线丛。由于它定义了 $\mathcal{A}$ 的极化，因此得到一个截面 $\sigma: S \to \mathcal{A}$ 以及 $\mathcal{A}$ 上线丛的一个同构 $\mathrm{tr}_\sigma^* \mathcal{M} - \mathcal{M} \cong \mathcal{Q}$。我们断言，作为阿代尔线丛，$\mathcal{Q} =$ 与 $\mathrm{tr}_\sigma^* \mathcal{M} - \mathcal{M} - \pi^*\sigma^* \mathcal{M}$ 相同。这是 [CM2] 中 Cha00，推论 2 的族版本，利用相同的论证即可得到，只需将域上的立方定理替换为相对版本。由此可知，$\overline{\mathcal{Q}}$ 是可积的，因为 $\overline{\mathcal{M}}$ 是数值有效的。□

2.3. **极化 GVF 结构**。极化 GVF 结构构成了 GVF 结构中的一个重要类别。它们是 [CM20] 中例 3.2.4 和例 3.2.6 的共同推广。

定义 2.3.1。设 K 是一个几何赋值域，F 是一个超越次数为 d 的有限型域扩张。F 的极化由一个正规射影簇 X（其函数域为 F）以及 X 上的数值有效阿代尔线丛 $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_d$ 组成。极化 $(X, \mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_d)$ 通过以下泛函在 F 上诱导出一个 GVF 结构：

$$\varinjlim_{\substack{\pi: X' \to X \\ \text{birational}}} \widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbb{R}}(X) \to \mathbb{R},$$

由 $l(D) = \pi^*\overline{\mathcal{H}}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{\pi}^*\mathcal{H}_d \cdot D$ 定义。我们将其记为 $K(X, \mathcal{H}_1, \overline{\ldots\ldots}, \mathcal{H}_d)$。

这种 GVF 结构可以用阿代尔曲线明确描述。设 $(K, (\Omega, \mathcal{A}, \nu), \phi)$ 是一条可数阿代尔曲线。设 X 是一个维数为 d 的整射影簇，其定义在 K 上。

定义 2.3.2（定义 3.1 [CM22]）。设 $\Omega' \subset \Omega$ 是一个可测子集。X 在 Ω' 上的全局阿代尔空间定义为 $X_{\Omega'}^{\mathrm{an}} = \coprod_{\omega \in \Omega'} X_\omega^{\mathrm{an}}$。记 $\pi: X_{\Omega'}^{\mathrm{an}} \to \Omega'$ 为将 X_ω^{an} 中的元素映射到 ω 的映射。

该空间赋予使得下述条件成立的最小 σ-代数 $\mathcal{B}_{X,\,\Omega'}$
(1) 映射 $\pi: X_{\Omega'}^{\mathrm{an}} \to \Omega'$ 可测；(2) 对任意扎里斯基开子集 $U \subseteq X$，集合 $U_{\Omega'}^{\mathrm{an}}$ 属于 $\mathcal{B}_{X,\,\Omega'}$；(3) 对任意扎里斯基开子集 $U \subseteq X$ 以及 U 上连续函数的任意可测族[2] f，所诱导的函数 $f_{\Omega'}: U_{\Omega'}^{\mathrm{an}} \to \mathbb{R}$ 是 $\mathcal{B}_{X,\,\Omega'}|_{U^{\mathrm{an}}\,\Omega'}$-可测的。

特别地，阿代尔除子的格林函数是 $\mathcal{B}_{X,\Omega}$-可测的。

设 $\overline{\mathcal{H}}_1, \ldots, \overline{\mathcal{H}}_d$ 是算术 nef 的 C-M 线丛。这些线丛导出一个博雷尔测度族 $\omega \mapsto c_1(\mathcal{H}_1, \omega) \ldots c_1(\mathcal{H}_d, \omega)$，参见 [CM22，定义 2.17 和例 2.20]。根据 [CM22，定义 3.6]，这定义了 μ_Ω 上的一个测度 X_Ω^{an}。具体而言，它由如下性质确定：若 $f: X_\Omega^{\mathrm{an}} \to [-\infty, \infty]$ 是某个 C-M 除子的格林函数的集合，则 f 可积，且其积分满足

$$\int_{X_\Omega^{\mathrm{an}}} f(x)\mu_\Omega(dx) = \int_\Omega \left(\int_{X_\omega^{\mathrm{an}}} f_\omega(x) c_1(\overline{\mathcal{H}}_1, \omega) \ldots c_1(\overline{\mathcal{H}}_d, \omega) \right) \nu(d\omega).$$

可以看出，对于任意闭子簇 $Z \subset X$，都有 $\mu_\Omega(Z_\Omega^{\mathrm{an}}) = 0$。由于假设 K 是可数的，因此有 $\mu_\Omega(\bigcup_{Z \subset X\,\mathrm{cld}} Z_\Omega^{\mathrm{an}}) = 0$。令 $S = X_\Omega^{\mathrm{an}} \setminus \bigcup_{Z \subset X\,\mathrm{cld}} Z_\Omega^{\mathrm{an}}$。

[2]这在 [CM22，定义 2.2] 中定义。

令 PDiv(X) 表示素除子的集合

$$\{V \subset X \mid \text{closed, irreducible, } \operatorname{codim}(V) = 1\}.$$

令 $\mathcal{B}_{\mathrm{PDiv}}$ 为 PDiv(X) 上的离散 σ-代数。我们在 PDiv(X) 上定义测度 μ_0，使得 $\mu_0(\{D\}) = \deg(\mathcal{H}_1 \cdot \ldots \cdot \mathcal{H}_d | D)$。我们定义测度空间 $(\Omega_F, \mathcal{A}_F, \mu) = (S \sqcup \mathrm{PDiv}(X), \mathcal{B}_X, \Omega|_S \sqcup \mathcal{B}_{\mathrm{PDiv}}, \mu_\Omega|_S \sqcup \mu_0)$。$S$ 中的点自然地给出 F 上的绝对值。$D \in \mathrm{PDiv}(X)$ 处的消失阶数定义了一个赋值。这使我们能够定义映射 $\psi : \Omega_F \to M_F$ 到 F 的绝对值。数据 $(F, (\Omega_F, \mathcal{A}_F, \mu), \psi)$ 定义了一个适当阿代尔曲线。由 [CM21, 定理 4.2.11] 可知，只要 $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_d$ 是阿代尔线丛，它便诱导出定义 2.3.1 中的极化 GVF 结构。

注记 2.3.3. F 上的极化 GVF 结构在 K 上的限制恰为 $K[\mathcal{H}_1 \cdot \ldots \cdot \mathcal{H}_d]$，其中 $\mathcal{H}_1 \cdot \ldots \cdot \mathcal{H}_d$ 表示底层线丛的几何交数。若 X 是零维的，则该极化 GVF 结构为 $F^{\mathrm{sym}}[[F : K]]$。

例 2.3.4. 设 k 为代数闭域，X 为 k 上的一个簇，其维数为 d，且 $L_1, \ldots, L_{d-1}$ 为大且数值有效线丛。于是，这定义了 $k(X)$ 上的一个 GVF 结构，其常数域为 k。不同的大且数值有效线丛选择在如下意义下可比较：对于某个 $C > 1$，高度函数 h 和 h' 满足 $\frac{1}{C} h \le h' \le Ch$。我们将 $k(X)$ 上的这种 GVF 结构称为**丰 *GVF* 结构**。

命题与定义 2.3.5. 设 (X, L, f) 是代数闭 GVF K 上的一个极化阿贝尔簇，其中 X 是正规的。于是，我们将 $K(X)$ 上的典范 GVF 结构定义为 $K(X, L, \ldots, L)[((d+1) L^d)^{-1}]$，其中 L 赋予典范度量。它是 K 的一个 GVF 扩张。我们也将此 GVF 结构在 $K(X)$ 上的对称扩张称为典范 GVF 结构。它与极化的选择无关。

证明。存在一个扎里斯基稠密的预周期点集合，其中的点对于任意选择的极化，其高度均为 0。令 $(x_i)_{i \in I} \in X(K)$ 为一个由预周期点构成的一般网，对于任意极化 L 都有

$$\lim_i h_{\overline{M}}(x_i) = \frac{\overline{L}^d \cdot \overline{M}}{(d+1) \deg_L(X)}$$

根据定理 2.3.6。特别地，GVF 泛函在每个可在 X 上定义的 M 上都必须一致。假设 l 是一个极化的 GVF 泛函，且 l' 是任意一个在 X 上的线丛 M 上与之相同的 GVF 泛函。那么，我们注意到 $l' - l$ 是一个在 K 上限制为平凡 GVF 结构的 GVF。此外，给定 X 上的一个阿代尔线丛 M，其底层线丛是丰沛的，则有 $(l' - l)(M) = 0$，因此根据引理 2.1.2 有 $l' = l$。□

定理 2.3.6 (命题 5.5 [Séd23])。设 X 是定义在阿代尔曲线 $(K、(\Omega\ \mathcal{A}、\nu)、(|-|_\omega)$ 上的射影簇。设 L 是一个半正 *C-M* 线丛，其底层线丛是丰沛的，并满足 $h_L(X) = 0$。设 $(x_i)_{i \in I} \in X(K)$ 是一个满足以下条件的点网

$$\lim_{i \in I} h_{\overline{L}}(x_i) = 0.$$

那么，对于 X 上的任意 C-M 线丛 M，有

$$\lim_i h_{\overline{M}}(x_i) = \frac{\overline{L}^d \cdot \overline{M}}{(d+1)\deg_L(X)}.$$

2.4. **全局赋值域的超积**。我们介绍全局赋值域的超积，并基于 [Ben+24]讨论其基本性质。这一构造自然地契合（连续）模型论的框架，参见 [Ben+24，第 11] 节。

定义 2.4.1。集合 I 上的滤子 是满足以下条件的族 $\mathcal{U} \subseteq 2^I$ 。

(1) 非退化性： $\emptyset \notin \mathcal{U}$。(2) 向上封闭性：若 $A \in \mathcal{U}$ 且 $A \subseteq B \subseteq I$，则 $B \in \mathcal{U}$。(3) 交封闭性：若 A，$B \in \mathcal{U}$，则 $A \cap B \in \mathcal{U}$。

若 $\mathcal{U}$ 在如下意义下是极大的：对于任意 $A \subseteq I$， $A \in \mathcal{U}$ 或 $I \setminus A \in \mathcal{U}$，则称 $\mathcal{U}$ 为超滤子。等价地，超滤子也可定义为有限可加测度 $\mu\colon 2^I \to \{0,1\}$，满足 $\mu(I) = 1$。若子集 $J \subseteq I$ 满足 $J \in \mathcal{U}$，或者等价地 $\mu(J) = 1$，则称其为大集合。

引理 2.4.2（超滤子引理）。假设选择公理成立，则I 上的每个滤子都包含于 I上的某个超滤子中。

我们将自由使用超滤子引理来构造超滤子。需要指出的是，超滤子引理严格弱于选择公理。

令 βI 表示 I上的超滤子集合。我们赋予它由所有 $E \subseteq I$对应的集合 $U_E = \{\mathcal{U} \mid E \in \mathcal{U}\}$ 生成的拓扑。由此得到的拓扑空间是紧致且豪斯多夫的。它满足如下泛性质：对于任意底集为 $|K|$ 的紧豪斯多夫空间 K，有

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(\beta I, K) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(I, |K|).$$

在此对应下，一个映射 $f\colon I \to |K|$ 对应于映射 $\beta f\colon \beta I \to K$，该映射满足： $\beta f(\mathcal{U})$由唯一的点 x 给出，使得对于 x的每个开邻域U，其原像 $f^{-1}(U)$都属于 $\mathcal{U}$。将函数 f写作$(x_i)_{i\in I}$，我们用 $\lim_{\mathcal{U}} x_i$ 表示点 x，并称其为$(x_i)_{i\in I}$ 沿 $\mathcal{U}$的极限。

定义 2.4.3. 设 I 为一个集合， $\mathcal{U}$ 是 I 上的一个超滤子，且 $(M_i)_{i\in I}$ 为全局赋值域。我们将超积 $M = \prod M_i$ 定义为 $M_0/\sim$，其中$\mathcal{U}$

$$M_0 = \{(x_i) \in \prod_I M_i \mid \mathrm{ht}(x_i) \text{ is bounded}\}$$

若 $\mu(\{i \in I \mid x_i = x_i'\}) = 1$，则称 M_0 中的两个元素 (x_i) 和 (x_i') 等价。 M 赋有几何赋值域的结构。代数运算在 M_0 上按因子逐一进行，并下降为 M 上的运算。高度定义为沿超滤子取因子高度的极限。

设 X 是 K 上的有限型概形，并用有限个仿射开集覆盖 X，我们将这些仿射开集分别视为 $\mathbb{A}^n$的闭子簇。若一族几何赋值域值点在每个仿射开集上的坐标的高度都有界，则称该族几何赋值域值点具有有界高度。一个具有有界高度的几何赋值域值点族 $x_i \in X(M_i)$定义了一个取值于 $M = \prod_{\mathcal{U}} M_i$中 M_i的超积的点 $x \in X(M)$。如果将 X 嵌入射影空间，则 x 的Weil 高度与

x_i的Weil 高度的极限$\lim_{\mathcal{U}} h(x_i)$相一致。若 X 是准射影的，且 $\mathcal{L}$是 X 上的几何充足的阿代尔线丛，则一族几何赋值域值点$x_i \in X(M_i)$具有有界高度，当且仅当 $h_{\overline{\mathcal{L}}}(x_i)$有界。

设 $\mathcal{X}$ 是 Spec $\mathbb{Z}$ 上的有限型拟射影概形，且 $\mathcal{L}$ 是按 [YZ24, §2.5] 意义定义的阿代尔线丛。我们将 GVF 值点的高度定义为逼近模型线丛的高度的极限；由于射影元组的 Weil 高度在任意几何赋值域上都有定义，这些高度是良定义的。设 $x_i \in \mathcal{X}(F_i)$ 是一列高度有界的 GVF 值点。令 $F = \prod_{\mathcal{U}} F_i$ 为 F_i 的超积，令 $x \in \mathcal{X}(F)$ 为其极限点。

引理 2.4.4. 高度函数在如下意义下连续：

$$\lim_{\mathcal{U}} h_{\overline{\mathcal{L}}}(x_i) = h_{\overline{\mathcal{L}}}(x).$$

证明。当 $\mathcal{L}$ 是射影紧化上的模型线丛时，结论由射影空间中点的 Weil 高度的连续性得出。根据定义，对于紧化上的边界除子 $\mathcal{E}$ 和 $\epsilon > 0$，存在模型线丛 $\mathcal{L}_\epsilon$，使得 $|h_{\mathcal{L}} - h_{\mathcal{L}_\epsilon}| < \epsilon h_{\mathcal{E}}$。由于 x_i 的高度有界，$h_{\mathcal{E}}$ 在 x_i 的集合上有界。因此，令其取极限即可得到结论。□

2.5. **GVF 解析化与存在闭性**。有限型概形在 GVF K 上的 GVF 解析化由 [DHS24, 定义 2.6] 引入，作为 Berkovich 解析化的全局类比。与 Berkovich 情形一样，它可以解释为连续逻辑中无量词类型的空间。这一观点构成了 [Ben+24, 构造 11.15] 中等价定义的基础。本节末尾，我们将以一种直观的方式处理全局赋值域的存在闭性。关于连续逻辑背景下的处理，请参见 [Ben+24, §12]。

定义 2.5.1。设 K 为一个 GVF，设 X 为一个在 K上的有限型概形。我们将 X 在 K上的*GVF* 解析化记为$X_{\mathrm{GVF},\,K}$（或者在底 GVF 已明确时记为 X_{GVF}），定义为形如 $x = (\pi(x),\ h_x)$ 的有序对的集合，其中 $\pi(x)$ 是 X的一个点，而 h_x 是定义在 $\kappa(\pi(x))$ 上并延拓 K上给定高度的高度函数。如果$x \in X_{\mathrm{GVF},\,K}$ 且 $U \subset X$ 是一个包含 $\pi(x)$的开集，我们也将诱导映射记为 h_x

$$h_x : \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U)^n & \to & \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ (f_1, \ldots, f_n) & \mapsto & h_x(f_1(\pi(x)), \ldots, f_n(\pi(x))) \end{array}.$$

我们赋予$X_{\mathrm{GVF},\,K}$ 最弱拓扑，使得

(1) 映射 $\pi : X_{\mathrm{GVF},\,K} \to X$ 是连续的，其中 X 赋予可构造拓扑。(2) 对每个 Zariski 开集 $U \subset X$，以及每个元组 $(f_1, \ldots, f_n) \in \mathcal{O}_X(U)^n$，映射 $x \mapsto h_x(f_1, \ldots, f_n)$ 是连续的。

由此得到的拓扑空间是局部紧的。若 X 是拟射影的，则可通过对紧化上的丰线丛所对应的高度施加界，得到一个紧子集。给定一个 GVF 扩张 F/K，通过将 GVF 结构限制到概形论像的剩余域上，可得到一个解析化映射 $X(F) \to X_{\mathrm{GVF}}$。

给定一组点（$x_i \in X(F_i)$）$_{i \in I}$ 取值于 GVF 扩张 F_i 的 K，且每个点都具有有界高度，每个超滤子 $\mathcal{U}$ 在 I 上诱导出一个点 $x_{\mathcal{U}} \in X(\prod_{\mathcal{U}} F_i)$。所诱导的

映射 $\beta I \to X_{\mathrm{GVF}}$ 是映射 $I \to X_{\mathrm{GVF}}$的唯一连续延拓。阿代尔线丛 $\mathcal{L}$ 在 X 上诱导出一个连续函数 $h_{\mathcal{L}}\colon \overline{X_{\mathrm{GVF}}} \to \mathbb{R}$。

定义 2.5.2. 若一个 GVF K 满足对每个在 K 上的有限型概形 X，解析化映射 $X(K) \to X_{\mathrm{GVF}}$ 的像稠密，则称其为存在闭的。

定理 2.5.3 ([Sza23],[BH22])**.** 全局赋值域 $\mathbb{Q}[1]$ 和 $k(t)[1]$ 是存在闭的。

这些结果使我们能够通过调用关于 $\mathbb{Q}[1]$ 或 $k(t)[1]$的相应结果，来化简一般 GVF 的命题。为说明这一策略，我们证明以下引理，它是 [Ben+24 引理 12.2] 的一个特殊情形。

引理 2.5.4. 任意存在闭域 K 的 *GVF* 扩张 F/K 都可以嵌入到一个超幂 $\prod_{\mathcal{U}} K$中。

证明. 我们先假设 F 是 K上的有限型。令 X 为 F 在K上的一个模型。那么， F 上的 GVF 结构确定了一个点 $\eta \in X_{\mathrm{GVF}}$。由解析化中 K-点的稠密性，我们可以找到一个收敛到 η的 K-点网。我们将此网扩张为一个超滤子 $\mathcal{U}$。于是， K-点在 $X(\prod_{\mathcal{U}} K)$中定义了一个极限点，经解析化映射后对应于 η。

如果 F 不是有限型的，则可以将其嵌入其有限型子域的超积中。因此， F 可以嵌入 K 的超幂中。□

由于每个非平凡全局赋值域都包含 $k(t)[\lambda]$ 或 $\mathbb{Q}[\lambda]$ 的一个副本（其中某个 $\lambda > 0$），我们可以将每个全局赋值域嵌入这些基本全局赋值域的超幂中。此外，$\mathbb{Q}(t)[\lambda]$ 可以嵌入具有不同缩放的 $\mathbb{Q}[\lambda_i]$ 的超积中。由此可知，任何特征零的全局赋值域都可以嵌入 $\mathbb{Q}[\lambda]$ 的超积中。类似地，任何特征为 p 的全局赋值域都可以嵌入 $k(t)[1]$ 的超积中，其中 k 的特征为 p。

现在我们可以证明，分别沿用 Yuan-Zhang 和 Chen-Moriwaki 定义的两种替代算术交数彼此相等。我们将这一结论从 $\mathbb{Q}$ 和 $k(t)$ 的情形推广出去。直接证明这一点更为自然，但鉴于文献中已有的结果，这种方法最为高效。

命题 2.5.5。设 $\mathcal{L}_1, \ldots, \overline{\mathcal{L}}_{n+1}$ 是投射簇 X 上的可积阿代尔线丛，其中 X 是定义在几何赋值域 K 上、维数为 n 的簇。设 $K' \subset K$ 是定义这些数据的可数子域。则，定义 *2.2.1* 中所定义的算术交数 $\mathcal{L}_1 \cdot \ldots \cdot \mathcal{L}_{n+1}$，与在表示 K' 的阿代尔曲线上定义的交数 $\mathcal{L}_1^{\text{C-M}} \cdot \ldots \cdot \mathcal{L}_{n+1}^{\text{C-M}}$ 一致。

证明。 由于交数不受基域扩张的影响，两个交数都可以在 K' 上计算；这里假设 K' 是其素域上的有限型扩张。经过适当的重新缩放后，不妨设几何赋值域 K' 作为子几何赋值域包含 $k(t)$ 或 $\mathbb{Q}$。

令 $\mathcal{X} \to \mathcal{S}$为一个模型，在该模型上 $\overline{\mathcal{L}}_1, \ldots, \overline{\mathcal{L}}_{n+1}$ 有定义，且满足 $\mathrm{Frac}(\mathcal{S}) = K'$。接下来，我们考虑定义在 $\mathcal{S}_{\mathrm{GVF}} \to \mathbb{R}$上的两个函数。第一个是$h_{\mathrm{YZ}} = h_{\langle \mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{n+1} \rangle_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}}$，它是一个连续函数，因为它是相对于一个阿代尔线丛定义的高度。另一方面，对于任意点 $s \in \mathcal{S}_{\mathrm{GVF}}$，可以考虑纤维 $\mathcal{X}_s$ 上的 C-M 线丛 $\mathcal{L}_i(s)^{\mathrm{C\text{-}M}}$，并定义一个映射

$$h_{\mathrm{C\text{-}M}} : s \mapsto \widehat{\deg}(\overline{\mathcal{L}}_1(s)^{\mathrm{C\text{-}M}} \cdot \ldots \cdot \overline{\mathcal{L}}_{n+1}(s)^{\mathrm{C\text{-}M}} \mid \mathcal{X}_s).$$

根据 [DHS24，定理 1.4], ，该映射与表示阿代尔曲线的选择无关，而且也是一个连续函数。

由 [CM21, §4.5] 可知，YZ 交数与 C-M 交数在 $\mathbb{Q}$ 和 $k(t)$ 上一致。由于 $\mathbb{Q}$-或 $k(t)$-点在 GVF 解析化中稠密，因此这两个函数一致。结果得证。□

一个重要问题是如何公理化某个逻辑理论的存在闭模型；这类问题往往会带来深远的模型论后果。这样的公理化称为（归纳）理论的模型伴侣。 [Ben14]证明了赋值域作为连续逻辑理论存在模型伴侣。人们也猜想全局赋值域理论存在模型伴侣。

猜想 2.5.6 (猜想 12.7 [Ben+24]). 几何赋值域的理论存在模型伴侣。具体而言，存在闭几何赋值域的超积是存在闭的。

我们举例说明模型伴侣存在性的一项具体应用，以简化引理 3.2.8 的证明。可以将 K 嵌入某个存在闭域的超幂 F 中。在模型伴侣存在的前提下，几何赋值域 F 本身是存在闭的。极化 $\pi^*\mathcal{M}^{\dim \pi(X)} \cdot \hat{\rho}(\Delta)^{\dim X - \dim \pi(X)}$在函数域 $F(X)$上诱导出一个几何赋值域结构。由 F的存在闭性可知，该点可由 F-点逼近，从而得到所述结论。

2.6. **子簇族与张不等式**。 我们首先回顾 [Gro61] 关于相对希尔伯特概形的一些基础结果。这将有助于研究本质极小值及其在族中的变化。

定理 2.6.1。 设 $\mathcal{X} \to S$ 是定义在诺特概形 S 上的射影簇平坦族。设 $\mathcal{X}$ 上有一个相对非常丰沛线丛 $\mathcal{L}$ 。那么存在一个由有限个多项式组成的集合 Ξ ，使得对于 $\mathcal{X}$ 的某个几何纤维中的任意纯维数为 d、次数为 r 的约化闭子簇 $Y \subset \mathcal{X}_s$，其希尔伯特多项式 Y 都属于 Ξ。

证明。 设 $E_{d,\ r}$ 是几何纤维 $\mathcal{X}_s$ 上相干层的集合，这些相干层由纯维数为 d 、次数为 r 的约化闭子簇 $Y \subset \mathcal{X}_s$ 的结构层 $\mathcal{O}_Y$ 给出。根据 [Gro61] 中的引理 2.4, 它们构成一个有限族。根据同上文献中的定理 2.1 b), 与有限族相关联的希尔伯特多项式只有有限多个。□

给定一个多项式 P，相对希尔伯特概形 $\mathbf{Hilb}_P(\mathcal{X}/S)$ 是一个射影S-概形，表示函子

$$\begin{aligned} \{\text{schemes over } S\} &\longrightarrow \mathbf{Set} \\ T &\longmapsto \left\{ \begin{array}{c} \text{closed subschemes} \\ W \subset \mathcal{X} \times_S T, \text{ flat over } T, \\ \text{with Hilbert polynomial } P \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

根据定义，存在一个泛族 $\mathfrak{S} \subset \mathcal{X} \times_S \mathbf{Hilb}_P(\mathcal{X}/S) \to \mathbf{Hilb}_P(\mathcal{X}/S)$。受限希尔伯特概形 $\mathbf{Hilb}_P^\circ(\mathcal{X}/S)$ 定义为 $\mathfrak{S} \to \mathbf{Hilb}_P(\mathcal{X}/S)$ 中纤维几何整的轨迹。根据 [DG61, IV-Thm 12.2.4(vii)]，平坦适当映射中纤维几何整的轨迹是开集。特别地, $\mathbf{Hilb}_P^\circ(\mathcal{X}/S) \subset \mathbf{Hilb}_P(\mathcal{X}/S)$ 是一个开子概形。

定义 2.6.2. 设 $\mathcal{L}$ 是定义在几何赋值域 K 上的射影几何整积分簇 X 上的阿代尔线丛。我们将 X 的绝对极小值定义为

$$\zeta_{\mathrm{abs}}(\overline{\mathcal{L}}) = \inf_{\substack{F/K \\ \text{GVF extension}}} \inf_{x\in X(F)} h_{\overline{\mathcal{L}}}(x).$$

我们将本质极小值定义为

$$\zeta_{\mathrm{ess}}(\overline{\mathcal{L}}) = \inf_{\substack{F/K \\ \text{GVF extension}}} \sup_{\substack{Z\subset X_F \\ \text{proper closed subset}}} \inf_{x\in X(F)\setminus Z(F)} h_{\overline{\mathcal{L}}}(x).$$

注释 2.6.3. 如果 K 是存在闭的，那么无需经过 GVF 扩张即可计算绝对极小值和本质极小值。

总存在一个 GVF 扩张 F/K 使下确界得以达到。设 F_i 是 K 的域扩张，并且对于 $i\to\infty$，量 $\inf_{x\in X(F)} h_{\overline{\mathcal{L}}}(x)$ 和

$$\sup_{\substack{Z\subset X_{F_i} \\ \text{proper closed subset}}} \inf_{x\in X(F_i)\setminus Z(F_i)} h_{\overline{\mathcal{L}}}(x).$$

分别趋近于绝对极小值和本质极小值。则对于一个非主超滤子 $\mathcal{U}$，超积 $\prod_{\mathcal{U}} F_i$ 达到下确界。事实上，通过取超积，可以找到一个 GVF 扩张 F，使得 $\{x\in X(F) \mid h_{\overline{\mathcal{L}}}(x) = \zeta_{\mathrm{ess}}(\mathcal{L})\}$是扎里斯基稠密的。

例 2.6.4. 在本质极小值的定义中，允许子簇 Z 定义在 F 上，而不只是定义在 K 上，这一点很重要。考虑定义在 $\mathbb{Q}(a)$上的簇 $Z=\{(x,x+a)\}\subset\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$。在 $\mathbb{Q}(a)\subset\mathbb{Q}(x,x+a)$ 上赋予一种 GVF 结构，使得 $\mathrm{ht}(x) = \mathrm{ht}(x+a) = 0$，并且该结构扩张了 $\mathbb{Q}(x,x+a)$上的自然 GVF 结构。例如，可以将 $\mathbb{Q}(x,x+a)$视为 $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ 的函数域，并赋予由 $\mathcal{O}(1,1)^{\mathrm{can}}$给出的极化 GVF 结构。令$\mathcal{L}=\mathcal{O}(1,1)^{\mathrm{can}}|_Z$。那么，由命题 5.2.2 中的环面博戈莫洛夫猜想可知，$\zeta_{\mathrm{ess}}(\mathcal{L})>0$。然而，$\mathbb{Q}(x,x+a)$上的 GVF 结构描述了一个相对于 $\mathcal{L}$ 高度为 0 的 GVF 值点，该点在 $\mathbb{Q}(a)$ 上是超越的。这意味着 $\mathbb{Q}(a)^{\mathrm{sym}}$ 不是存在闭的。

我们引入一些在族中表现更好的有用不变量。我们将以这样的方式定义它们：它们是连续逻辑中的公式，其中允许对有界高度的集合取上确界和下确界作为量词。根据连续逻辑中的 Łoś 定理，参见 [Ben+24]，超积对应的公式的取值等于各因子对应公式取值的极限。我们不诉诸连续逻辑，而是通过一种特设的方法证明这些不变量与取超积可交换。

设 $\mathcal{X}\to S$ 是一个射影簇族。我们将域值点 $s\in S(F)$ 处的纤维记为 $\mathcal{X}(s)$。$\mathcal{X}(s)$ 中次数不超过 N 的子簇由相对希尔伯特概形的有限并 $\mathbb{H}$ 参数化。固定 $\mathbb{H}$ 的一个紧化，并取其上的一个算术充足线丛 $\mathcal{M}$。设 $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{X}$ 上几何相对丰沛的阿代尔线丛。

定义 2.6.5. 令 $d,N,C>0$ 为常数。对于任意 GVF 值点 $s\in S(F)$，定义闭子簇的集合

$$I(s,\overline{\mathcal{L}},d,N,C) = \{Z\subset\mathcal{X} \mid \dim(Z)<d-1, \deg_{\mathcal{L}}(Z)\le N, h_{\mathcal{M}}([Z])\le C\}.$$

我们定义参数化极小值

$$\zeta(s,\overline{\mathcal{L}},d,N,C)=\sup_{Z\in I(s,\overline{\mathcal{L}},d,N,C)}\inf_{x\in\mathcal{X}(s)(F)\setminus Z(F)}h_{\overline{\mathcal{L}}}(x).$$

引理 2.6.6。设 $\mathcal{X}\to S$ 是一个簇族，$\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{X}$ 上的一个阿代尔线丛，且几何相对丰沛。设 $s_i\in S(F_i)$ 是有界高度的几何赋值域值点。设 $F=\prod_{\mathcal{U}}F_i$ 是一个超积，$s\in S(F)$ 是 s_i 的极限点。那么，$\mathcal{L}$ 在各纤维上的限制的参数化极小值满足

$$\lim_{\mathcal{U}}\zeta(\overline{\mathcal{L}}|_{\mathcal{X}(s_i)},d,N,C)=\zeta(\overline{\mathcal{L}}|_{\mathcal{X}(s)},d,N,C).$$

因此，本质极小值与绝对极小值满足

$$\lim_{\mathcal{U}}\zeta_{abs}(\overline{\mathcal{L}}|_{\mathcal{X}(s_i)})=\zeta_{abs}(\overline{\mathcal{L}}|_{\mathcal{X}(s)})$$

and

$$\lim_{\mathcal{U}}\zeta_{ess}(\overline{\mathcal{L}}|_{\mathcal{X}(s_i)})\geq\zeta_{ess}(\overline{\mathcal{L}}|_{\mathcal{X}(s)}).$$

证明。设 $r<\zeta(\overline{\mathcal{L}}|_{\mathcal{X}(s)},d,N,C)$ 是一个实数。那么，存在一个维数为 $<d-1$、次数为 $\leq N$、高度为 $<C$ 的子簇$Z\subset\mathcal{X}(s)$，其中包含 $\{x\in\mathcal{X}(s)(F)\mid h_{\mathcal{L}}(x)<r\}$。取代表元后，相对希尔伯特概形中的点 $P\in\mathbb{H}(F)$ 由Z 给出，并定义点 $P_i\in\mathbb{H}(F_i)$；对于 i 的一个大子集，这些点定义了高度为 $<C$ 的子簇$Z_i\subset\mathcal{X}(s_i)$。我们注意到

$$r\leq\inf_{x\in X(s)(F)\setminus Z(F)}h_{\overline{\mathcal{L}}}(x)=\lim_{\mathcal{U}}\inf_{x\in X(s_i)(F_i)\setminus Z(F_i)}h_{\overline{\mathcal{L}}}(x)$$

因为 $X(s)(F)\setminus Z(F)$ 中的一个点，恰好对应于 $x_i\in X(s_i)(F_i)\setminus Z(F_i)$ 中有界高度点的一个等价类。特别地，可得$\lim_{\mathcal{U}}\zeta(\mathcal{L}|_{\mathcal{X}(s_i)}d,\ N,\ C)\geq\zeta(\mathcal{L}|_{\mathcal{X}(s)},\ d,\ N,\ C)$。

反过来，设 $r<\lim_{\mathcal{U}}\zeta(\mathcal{L}|_{\mathcal{X}(s_i)}d,\ N,\ C)$ 是一个实数。那么，存在$r_i\in\mathbb{R}$，使得 $\lim_{\mathcal{U}}r_i<r$，且存在子簇 $Z_i\subset\mathcal{X}(s)$，其维数为$<d-1$，次数为 $\leq N$，高度为 $<C$，并且包含

$$\{x_i\in\mathcal{X}(s_i)(F_i)\mid h_{\overline{\mathcal{L}}}(x_i)<r_i\}.$$

每个 Z_i 都定义了一个点 $P_i\in\mathbb{H}(F_i)$。由于它们具有有界高度，因此定义了一个极限点 $P\in\mathbb{H}(F)$，该极限点定义了一个子簇 $Z\subset\mathcal{X}(s)$，并且

$$\inf_{x\in X(s)(F)\setminus Z(F)}h_{\overline{\mathcal{L}}}(x)=\lim_{\mathcal{U}}\inf_{x\in X(s_i)(F_i)\setminus Z(F_i)}h_{\overline{\mathcal{L}}}(x)>r.$$

这给出了反向不等式。 □

注 2.6.7。由命题 5.4.1（我们稍后将证明）可知，在 $\mathbb{H}$ 上，将 $[Z]\in\mathbb{H}(F)$ 映射到高度 $h_{\mathcal{L}}(Z)$ 所得到的高度对应于一个相对于 S 丰沛的线丛。特别地，通过定义可移除子簇的集合

$$I(\overline{\mathcal{L}},d,N,C)=\{Z\subset X\mid\dim(Z)<d-1,\deg_{\mathcal{L}}(Z)\leq N,h_{\overline{\mathcal{L}}}(Z)\leq C\}.$$

可以得到一个在族中表现相同、但其定义仅依赖于纤维的量。

命题 2.6.8. 设 $\mathcal{L}$是几何赋值域 K上的射影簇 X 上的几何上充足的半正阿代尔线丛。那么，

$$\frac{d}{d+1}\zeta_{abs}(\overline{\mathcal{L}})+\frac{1}{d+1}\zeta_{ess}(\overline{\mathcal{L}})\leq h_{\overline{\mathcal{L}}}(X).$$

证明。 将这些数据扩张到 $\mathbb{Q}$ 或 $k(t)$ 上的一个族 $\mathcal{X}\to S$，使得不失一般性， S 的函数域为 K。设 $s\in S(K)$ 满足 $X=\mathcal{X}(s)$。由存在闭性，可用 $\mathbb{Q}$-点或 $k(t)$-点逼近 s 。根据高度、绝对极小值和本质极小值在取超积时的性质，该不等式可由 $\mathbb{Q}$或 $k(t)$ 的情形推出；这一情形由 [Zha95, 定理 5.2] 已知。□

注 2.6.9。 这与 [GY25 中的反例（定理 1.2]）并不矛盾。这是因为在定义连续极小值时，我们允许转到 GVF 扩张。从我们的角度来看，朴素版本的张不等式至少对某些全局赋值域不成立，这是意料之中的。

令 K 为一条亏格为 $g>1$ 的曲线的雅可比簇的函数域，并赋予其由 θ-极化诱导的 GVF 结构；令 K 为其代数闭包，并赋予对称扩张全局赋值域结构。那么，由该反例可知， K 不是存在闭的 GVF。

命题 2.6.10 （参见 命题6.4.4 [CM20]）。 设 X 是 K 上的整射影概形，且 $\mathcal{L}$ 是 X上的几何上充足的半正阿代尔线丛。那么，以下张氏不等式成立

$$\zeta_{ess}(\overline{\mathcal{L}})\geq h_{\overline{\mathcal{L}}}(X).$$

证明。 不妨设 $F=K$ 是代数闭的。固定一个有限生成子域 L 上的阿代尔曲线结构，使得 X 和 $\mathcal{L}$ 都定义在其上。由阿代尔曲线上的算术希尔伯特–塞缪尔定理（参见 [CM24，定理 B],）可知，最大渐近斜率大于 $h_{\mathcal{L}}(X)$。这使我们处于 [CM20] 中命题 6.4.4 的情形。我们对证明作部分说明，以验证该结论可推广至全局赋值域的情形。

首先，只需证明对于 L 上的每个子空间 $V\subset H^0(X,\mathcal{L})$，都有 $\overline{\deg}(V)\leq\zeta_{\overline{\mathrm{ess}}}(\mathcal{L})+\epsilon$。令 $\Lambda=\{x\in X(F)\mid h_{\mathcal{L}}(x)\leq\zeta_{\overline{\mathrm{ess}}}(\mathcal{L})+\epsilon\}$。于是，可以选取点 $P_1,\ldots\ldots,P_{\dim V}$，使得求值映射 $f\colon V\otimes_L K\to\bigoplus_{i=1}^{\dim V}\kappa(P_i)$ 是双射。我们注意到，点 $P_1,\ldots\ldots,P_{\dim V}$可以定义在 K 的一个可数子域 $L'\supset L$ 上。因此，可以选取一个表示阿代尔曲线 L'，并逐字沿用 [CM20] 中的证明。□

这可用于证明一个与 [MY25, 定理 1.1] 有显著差异的一致张不等式。

推论 2.6.11。 设 $\mathcal{X}\to S$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的一个射影簇族，且 $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{X}$ 上的一个在纤维上半正的阿代尔线丛。进一步假设几何德利涅配对 $\langle\mathcal{L},\ldots,\mathcal{L}\rangle$ 在 S 上是大的。那么，对任意 $\epsilon>0$，存在常数 N 和 C，使得集合

$$\{x\in\mathcal{X}(s)(\overline{\mathbb{Q}})\mid h_{\mathcal{L}}(x)<(1-\epsilon)h_{\mathcal{L}}(\mathcal{X}(s))\}$$

包含于次数为 $\leq N$、高度为 $<C$ 的真子簇中，对所有位于 S 的真闭子集之外的 $s\in S(\mathbb{Q})$ 均成立。

证明。 反设存在一个序列 $s_i\in S(\mathbb{Q})$，使得结论不成立。根据关于几何德利涅配对的假设，点集 $s_i[h_{\mathcal{L}}(\mathcal{X}(s_i))^{-1}]\in S(\mathbb{Q}[h_{\mathcal{L}}(\mathcal{X}(s_i))^{-1}])$ 具有有界高度。对于一个非主超滤子，可以得到 F 的 GVF 扩张 $\prod_{\mathcal{U}}\mathbb{Q}[h_{\mathcal{L}}(\mathcal{X}(s_i))^{-1}]$，以及一个极限点 $s\in S(F)$，使得

$$\{x\in\mathcal{X}(s)(F)\mid h_{\mathcal{L}}(x)\leq(1-\epsilon)h_{\mathcal{L}}(\mathcal{X}(s))=(1-\epsilon)\cdot 1\}$$

根据引理 2.6.6，该集合是扎里斯基稠密的。这与命题 2.6.10 中所述的不等式矛盾。□

3. Bogomolov 猜想

高维子簇的 Bogomolov 猜想最初是在数域上由 [Zha98] 证明的。几何情形的难度要大得多，因为等分布方法在几何情形中无法轻易应用。几何 Bogomolov 猜想在特征零情形下由 [Can+21] 证明，在一般特征下则由 [XY22] 证明。随后， [LY25] 将半阿贝尔簇的几何 Bogomolov 猜想归约为阿贝尔簇的相应结果。 [CM22] 证明了阿贝尔簇上的 Bogomolov 猜想，其中底域为阿代尔曲线，且阿基米德绝对值具有正测度。

Bogomolov 猜想可以表述为适用于任意全局赋值域的形式，而上述所有结果都是这一推广的实例。为适应全局赋值域更一般的性质，其表述需要格外谨慎。

3.1. 半阿贝尔簇的预备知识。 本节定义半阿贝尔簇，并回顾其基本性质。我们将定义半阿贝尔簇的紧化和典范高度，最后引入 Chow 迹，以处理半阿贝尔簇的等平凡部分。

定义 3.1.1。域 K 上的半阿贝尔簇 G是K 上的群簇，它是由环面扩张阿贝尔簇得到的。也就是说，存在一个阿贝尔群的 fppf 层短正合序列

$$0 \longrightarrow \mathbb{T} \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0.$$

这个短正合序列在唯一同构意义下确定。我们将$\mathbb{T}$ 称为 G 的环面部分，将 A 称为阿贝尔商。将K 替换为有限域扩张后，存在一个同构 $\mathbb{T} \cong \mathbb{G}_m^t$，其中 t 称为 G的环面秩。Weil-Barsotti公式指出， A 由 $\mathbb{G}_m$ 扩张的集合可以与 $A^\vee(K)$同一化。这种同一化基于以下事实：任意半阿贝尔簇都定义了 A 上的一个 $\mathbb{T}$-主齐性空间，且该空间自动是数值平凡的。上述所有定义和结果都适用于基概形 S上的半阿贝尔概形。

我们将只考虑环面是分裂的情形，即在相对情形下存在同构 $\mathbb{T} \cong \mathbb{G}_m^t$ or $\mathbb{T}_S \cong \mathbb{G}_{m,\,S}^t$ 。注意，在代数闭域上，环面自动是分裂的。我们按照 [Hul24]的做法，介绍半阿贝尔簇的紧化及其典范高度。我们不介绍托里克簇的背景知识，更多细节请参见同上引文。读者也可以跳过这部分讨论，采用更为临时的方法。

设 $\mathbb{T}$ 是一个分裂环面， $\mathcal{T} \to B$ 是一个 $\mathbb{T}$-主齐性空间。于是，每个特征 $\mathcal{T} \to \mathbb{G}_m$都会在 B上诱导一个线丛。反过来，知道这些由此得到的线丛，就可以恢复这个 $\mathbb{T}$-主齐性空间。由于我们知道如何在算术情形下定义线丛，因此也可以在算术情形下定义 $\mathbb{T}$-主齐性空间。令 M 表示 $\mathbb{T}$ 的特征， N 表示 $\mathbb{T}$的余特征。

定义 3.1.2. A $\mathbb{T}$-丛可以同一化为一族线丛 $(\mathcal{T}(m))_{m\in M}$，这些线丛由 M 索引，定义在 B 上，并带有相容的同一化 $\mathcal{T}(m_1+m_2) \cong \mathcal{T}(m_1) \otimes \mathcal{T}(m_2)$。将线丛的概念改为赋范线丛

并要求这些同一化为等距映射，我们便可定义赋范 $\mathbb{T}$-丛。同理，也可定义阿代尔 $\mathbb{T}$-丛。

一个整多面体 $\Delta \subset M_{\mathbb{R}}$ 定义了 $\mathbb{T}$ 的一个紧化 X_Δ，将其视为射影环面簇，并配备一个充足的环面不变 Cartier 除子 $D(\Delta)$。Cartier 除子 $D(\Delta)$可用其整体截面来描述。注意，每个元素 $m \in M$ 都通过延拓特征 $m\colon \mathbb{T} \to \mathbb{G}_m$，在 X_Δ 上定义一个亚纯函数 m。设 $m_1, \ldots, m_n$ 为 Δ的顶点。那么， $D(\Delta) = \bigvee_{i=1}^n \mathrm{div}(m_i)$。我们通过 $\mathcal{X}_\Delta = (\mathcal{T} \times X_\Delta)/\mathbb{T}$紧化底空间 B 上的环面丛 $\mathcal{T}$，其中 $x \in \mathbb{T}$ 的作用为(x, x^{-1})。将到底空间的映射记为 $\pi\colon \mathcal{X}_\Delta \to B$。由于$D(\Delta)$是环面不变的，因此 $\rho(D(\Delta)) = (\mathcal{T} \times D(\Delta))/\mathbb{T}$ 是 $\mathcal{X}_\Delta$上的良定义的 Cartier 除子。该构造满足

$$\rho(D(\Delta)) = \bigvee_{i=1}^n \rho(\mathrm{div}(m_i)).$$

$\rho(\mathrm{div}(m_i))$ 所诱导的线丛恰好是 $\pi^*\mathcal{T}(m_i)$。

上述讨论可推广到带度量情形。设 K 为赋值域，并在 $D(\Delta)$ 上赋予典范度量，从而得到带度量的环面除子 $D(\Delta)\widehat{\ }$，再设 $\mathcal{T}$ 为带度量的环面丛。那么，构造 $\widehat{\rho}$ 存在一个度量类比 ρ。它满足

$$\widehat{\rho}(\overline{D}(\Delta)) = \bigvee_{i=1}^n \widehat{\rho}(\widehat{\mathrm{div}}(m_i)).$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\rho}(\mathrm{div}(m_i))$ 所诱导的带度量线丛恰好是 $\pi^*\mathcal{T}(m_i)$。由于当 $\mathcal{T}$ 为阿代尔环面丛时， $\widehat{\rho}(\mathrm{div}(m_i))$ 定义了一个阿代尔除子，且取最大值保持阿代尔线丛不变，因此该构造可以整体化。为简化记号，我们将上文在环面丛上构造的（阿代尔）除子分别记为 $\rho(\Delta)$ 或 $\widehat{\rho}(\Delta)$。如果 $0 \in \Delta$，则可得 $\widehat{\rho}(\Delta)$ 是有效的。其几何消失轨迹包含于环面丛的边界中。

例 3.1.3. 同一化 $M \cong \mathbb{Z}^n$ 诱导出一个同构 $\mathbb{T} \cong \mathbb{G}_m^n$。多面体 $[-1,1]^n$ 定义了紧化 $(\mathbb{P}^1)^n$。由这些数据定义的环面 Cartier 除子恰好是 $\sum_{i=1}^n (\mathbb{P}^1)^{i-1} \times [0] \times (\mathbb{P}^1)^{n-1} + (\mathbb{P}^1)^{i-1} \times [\infty] \times (\mathbb{P}^1)^{n-1}$。

我们通过将阿贝尔贡献与环面贡献相加，在半阿贝尔簇上定义典范高度。设 G 是定义在几何赋值域 K 上的半阿贝尔簇，其环面部分为 $\mathbb{T}$，阿贝尔商为 A。固定一个整多面体 $\Delta \subset M_{\mathbb{R}}$，即可确定 G的紧化 $G = G_\Delta$。自然数 n 的乘法延拓为态射 $[n]\colon G \to G$。我们可以在 $\rho(\Delta)$上赋予唯一的度量，使得$[n]^*\rho(\Delta) = n\rho(\Delta)$延拓为等式 $[n]^*\rho(\Delta) = n\rho(\Delta)$。

$\mathbb{T}$ 的自然线丛结构延拓为赋予 A 上数值平凡线丛典范度量后的阿代尔线丛结构。由此得到$\widehat{\rho}(\Delta) = \rho(\Delta)$，因为还有 $[n]^*\widehat{\rho}(\Delta) = n\widehat{\rho}(\Delta)$。若 $0 \in \Delta$，则在 G 上有 $h_{\widehat{\rho}(\Delta)} \geq 0$，但在 G 的边界上不一定有$\widehat{\ }$。根据引理 2.2.3，若对所有 m，$\mathcal{T}(m)\widehat{\ }$ 都可积，则 $\widehat{\rho}(\Delta)$ 可积；若对所有 m， $\mathcal{T}(m)$ 都平坦，则 $\widehat{\rho}(\Delta)$ 半正。因此， $\widehat{\rho}(\Delta)$ 可积且半正。

令 $\overline{\mathcal{M}}$ 为 A 上赋予典范度量的充足对称线丛，并令 Δ 为一个内部包含 0 的多面体。我们在 G 上通过 $h = h_{\pi^*\mathcal{M}} + h_{\widehat{\rho}(\Delta)}$定义典范高度

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$。h 对 $\mathcal{M}$ 和 Δ 的依赖很弱。对于两个

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$典范高度 h_1，h_2 按上述方式构造，存在常数 C 使得$C^{-1}\widehat{h}_1 \le \widehat{h}_2 \le C\widehat{h}_1$ 在 G上成立。对于阿贝尔贡献，该不等式是标准的。对于环面贡献，只需注意，对于任意多面体 Δ，都有$h_{\widehat{\rho}(N\Delta)} = Nh_{\widehat{\rho}(\Delta)}$；而对于多面体 $\Delta_1 \subset \Delta_2$，都有 $h_{\widehat{\rho}(\Delta_1)} \le h_{\widehat{\rho}(\Delta_2)}$。

为处理等变性问题，我们引入 Chow 迹。

定义 3.1.4. 设 K/k 是代数闭域扩张，且 G 是定义在 K 上的半阿贝尔簇。G 的 Chow 迹（$G^{K/k}$,tr）定义为范畴中由半阿贝尔簇 G_0（定义在 k 上）及映射 $G_0 \otimes_k K \to G$ 组成的对象对（G_0, h）的终对象。

根据 [Liu24, Corollary 2.4.4 (2)]，它是良定义的，并且 tr 的核是平凡的。关于阿贝尔情形的更多细节，请参阅 [Con06, §6]。

3.2. **陈述及等价表述**。设 A是代数闭 GVF K 上的阿贝尔簇。若 K 是非阿基米德的，令 k 为其常数域，并将其 K/k-Chow 迹记为（$A^{K/k}$,tr）。设 A 上有一个丰沛对称$\widehat{\ }$线丛 $\mathcal{M}$，并令 h 表示相应的 Néron-Tate 高度。

称闭整子簇 X 是 A 的特殊子簇，若其具有如下形式

$$\mathrm{tr}(Y \otimes K) + V + a,$$

其中，Y 是 $A^{K/k}$的子簇，V 是 A 的阿贝尔子簇，且 $a \in A(K)$是满足 $h(a) = 0$的$\widehat{\ }$点。

猜想 3.2.1 (Bogomolov 猜想)。任何子簇 $X \subset A$，若对于$\widehat{\ }$每个 $\epsilon > 0$，集合 $\{x \in X(K) \mid h(x) < \epsilon\}$ 扎里斯基稠密，则它是特殊的。此外，该条件$\widehat{\ }$等价于 $h(X) = 0$。

由命题 2.6.10 可知，任何具有扎里斯基稠密小点集合的子簇 X 都满足 $h(X) = 0$。反过来，由命题 2.6.8 和注释 2.6.3 可知，若 $h(X) = 0$，则存在某个 GVF 扩张 F/K，使其具有扎里斯基稠密的小点集合，甚至高度为 0 的点。利用庞加莱可约性，稍后将证明高度表述与小点表述的 Bogomolov 猜想等价。

需要考虑既非挠元、也不定义在常数域上的高度 0 点。

例 3.2.2. 设 A 是 K 上的阿贝尔簇。那么，$A \times A$ 中的对角线定义了 $A_{K(A)}$ 中的一个高度为 0 的点，其中 $K(A)$ 赋有典范高度。

例 3.2.3. 设 $\mathcal{E} \to C$ 是特征零几何赋值域 K 上的非等变椭圆曲面。设 $\mathcal{M}$ 是典范度量化的充足对称线丛。设 $P \in \mathcal{E}(K(C))$ 是一个非扭截面。那么，由 [Gao 20]，可知，底层几何阿代尔线丛 $\mathcal{M}|_P$ 是大的。根据 [DeM16，命题 1.5]，存在无穷多个 $t \in C(K)$，使得 P_t 是挠元。利用超积，可以在 $K(C)$ 上定义一个几何赋值域结构，使其扩展 K 上的几何赋值域结构，并且$\widehat{\ }$使得 $h(P) = 0$。

Bogomolov 猜想可以更一般地表述为关于半阿贝尔簇的猜想。设 G 是代数闭 GVF K 上的半阿贝尔簇，其阿贝尔商为 $\pi : G \to A$。若 K 是非阿基米德的，则令 k 为其常数域，并令 ($G^{K/k}$,tr) 为其 K/k-Chow 迹。

G 的闭整子簇 X 称为特殊，如果

$$\widetilde{X} := X/\mathrm{Stab}(X) = \mathrm{tr}(X_0 \otimes K) + g,$$

其中， X_0 是 $\widetilde{G}^{K/k}$ 的子簇，且 $g \in \widetilde{G}(F)$满足 $\widehat{h}(g) = 0$，其中 $\widetilde{G} := G/\mathrm{Stab}(X)$，并且 F 是 K的 GVF 扩张。

注 3.2.4. 据我们所知，目前尚无任何例子表明，在特殊子簇的定义中不可能找到高度为 0 的$\backsim g \in G(K)$。

在阿贝尔商 A 上固定一个典范度量化的充足对称线丛 $\overline{\mathcal{M}}$，其底层线丛为 M，并取一个内部包含原点的整多面体 $\Delta \subset \mathbb{R}^n$。对于限制在子簇 $X \subset G$ 上的线丛，其高度和连续极小值均指等变紧化 G中闭包 X 所对应的量，其中 G与 Δ相关联。

猜想 3.2.5 (Bogomolov 猜想)。 任何子簇 $X \subset G$ 满足

$$\widehat{\deg}(\overline{\mathcal{M}}^{\dim \pi(X)+1}|\pi(X)) = 0$$

and

$$\widehat{\deg}(\widehat{\rho}(\Delta)^{\dim X+1-\dim \pi(X)}\pi^*\overline{\mathcal{M}}^{\dim \pi(X)}|X) = 0$$

是特殊的。此外，这等价于存在一个 *GVF* 扩张 F，使得$\widehat{}$对每个 $\epsilon > 0$，集合 $\{x \in X(F) \mid h(x) < \epsilon\}$ 都是扎里斯基稠密的。

注 3.2.6。 在半阿贝尔簇上定义典范高度时，会遇到一个问题：半阿贝尔簇并不定义一个极化动力系统。因此，典范高度被定义为一个和 $h_{\pi^*\mathcal{M}} + h_{\widehat{\rho}(\Delta)}$。对于映射 $[n]$的拉回，线丛 $\pi^*\mathcal{M}$ 属于与 n^2 相关联的特征子空间，而 $\widehat{\rho}(\Delta)$ 属于与 n 相关联的特征子空间。因此，直观而言， $\widehat{\rho}(\Delta)$ 的贡献相较于 $\pi^*\mathcal{M}$ 应当小到无穷小。猜想中的两个交数是 $(\pi^*\mathcal{M} + \widehat{\rho}(\Delta))^{\dim X}$ 中的前两项。恰如其分的是，展开式中其余各项都小到无穷小，因此无关紧要。

引理 3.2.7。 任意子簇 $X \subset G$，若对每个 $\epsilon > 0$，集合 $\{g \in \backsim G(K) \mid h(x) < \epsilon\}$ 都是扎里斯基稠密的，则满足以下两个交数等式

$$\widehat{\deg}(\overline{\mathcal{M}}^{\dim \pi(X)+1}|\pi(X)) = 0$$

and

$$\widehat{\deg}(\widehat{\rho}(\Delta)^{\dim X+1-\dim \pi(X)}\pi^*\overline{\mathcal{M}}^{\dim \pi(X)}|X) = 0.$$

证明。 设 X 是一个子簇 $X \subset G$，使得对每个 $\epsilon > 0$，集合 $\{g \in \backsim G(K) \mid h(x) < \epsilon\}$ 都是扎里斯基稠密的。

我们首先注意到，在 X 中相对于 π 的小点扎里斯基稠密集映射到 $\pi(X)$ 中的小点扎里斯基稠密集。因此，第一个等式由 2.6.10 得出。由投影公式可得

$$(\widehat{\rho}(\Delta) + \pi^*\overline{\mathcal{M}})^{\dim X+1} = \sum_{i=0}^{\dim \pi(X)+1} \binom{\dim(X)+1}{i} \pi^*\overline{\mathcal{M}}^i \widehat{\rho}(\Delta)^{\dim X+1-i}.$$

求和项 $\pi^*\mathcal{M}^{\dim \pi(X)+1}\widehat{\rho}(\Delta)^{\dim X-\text{维数 } \pi(X)}$ 消失，因为它必定等于

$$\widehat{\deg}(\overline{\mathcal{M}}^{\dim \pi(X)+1}|\pi(X)) \cdot \deg((\rho(\Delta))^t) = 0$$

根据投影公式。具有扎里斯基稠密小点子集这一性质在对 $\widehat{\rho}(\Delta)$ 和 $\mathcal{M}$ 进行缩放时保持不变。我们利用这一点得到以下一系列不等式

$$\begin{aligned}
&\zeta_{\mathrm{ess}}(\widehat{\rho}(\Delta)+\pi^*\overline{\mathcal{M}}^{\otimes N})\\
&\geq(\widehat{\rho}(\Delta)+\pi^*\overline{\mathcal{M}}^{\otimes N})^{\dim X+1}\\
&=N^{\dim\pi(X)}\binom{\dim(X)+1}{\dim\pi(X)}\pi^*\overline{\mathcal{M}}^{\dim\pi(X)}\widehat{\rho}(\Delta)^{\dim X+1-\dim\pi(X)}+O(N^{\dim\pi(X)-1}).
\end{aligned}$$

由此可得

$$\widehat{\deg}(\widehat{\rho}(\Delta)^{\dim X+1-\dim\pi(X)}\pi^*\overline{\mathcal{M}}^{\dim\pi(X)}|X)\leq 0.$$

剩下的工作是证明反向不等式。为此，我们注意到 $\widehat{\rho}(\Delta)$ 和 $\pi^*\mathcal{M}$ 都是半正的，而 $\pi^*\mathcal{M}$ 是数值有效的。特别地，我们有 $\zeta_{\mathrm{abs}}(\widehat{\rho}(\Delta)+\pi^*\mathcal{M}^{\otimes N})\geq\zeta_{\mathrm{abs}}(\widehat{\rho}(\Delta)+\overline{\pi}^*\mathcal{M})$。由 GVF 的张下界（见命题 2.6.8），可得

$$\begin{aligned}
&(\widehat{\rho}(\Delta)+\pi^*\overline{\mathcal{M}}^{\otimes N})^{\dim X+1}\\
&=N^{\dim\pi(X)}\binom{\dim(X)+1}{\dim\pi(X)}\pi^*\overline{\mathcal{M}}^{\dim\pi(X)}\widehat{\rho}(\Delta)^{\dim X+1-\dim\pi(X)}+O(N^{\dim\pi(X)-1})\\
&\geq\zeta_{\mathrm{abs}}(\widehat{\rho}(\Delta)+\pi^*\overline{\mathcal{M}}^{\otimes N})\\
&\geq\zeta_{\mathrm{abs}}(\widehat{\rho}(\Delta)+\pi^*\overline{\mathcal{M}}).
\end{aligned}$$

这就完成了如下结论的证明

$$\widehat{\deg}(\widehat{\rho}(\Delta)^{\dim X+1-\dim\pi(X)}\pi^*\overline{\mathcal{M}}^{\dim\pi(X)}|X)=0.$$

□

引理 3.2.8. 设 X 是半阿贝尔簇 G 的一个子簇，满足

$$\widehat{\deg}(\overline{\mathcal{M}}^{\dim\pi(X)+1}|\pi(X))=0$$

and

$$\widehat{\deg}(\widehat{\rho}(\Delta)^{\dim X+1-\dim\pi(X)}\pi^*\overline{\mathcal{M}}^{\dim\pi(X)}|X)=0.$$

那么，存在一个 *GVF* 扩张 F，使得

$$\{x\in X(F)\mid\widehat{h}(x)<\epsilon\}$$

对每个 $\epsilon>0$ 都是扎里斯基稠密的。事实上，存在一个 *GVF* 扩张 F，使得

$$\{x\in X(F)\mid\widehat{h}(x)=0\}$$

是扎里斯基稠密的。

证明。令 $\overline{\mathcal{L}}=\overline{\mathcal{M}}+\widehat{\rho}(\Delta)$。我们来研究

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}h_{[n]^*\overline{\mathcal{L}}}(X)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2\overline{\mathcal{M}}+n\widehat{\rho}(\Delta))^{\dim X+1}}{n\cdot(\dim X+1)\cdot(n^2\mathcal{M}+n\rho(\Delta))^{\dim X}}.$$

根据交数的假设，分子属于 $O(n^{\dim\pi(X)+\text{维数 }X})$。另一方面，分子的增长阶为 $n^{\dim\pi(X)+\dim X+1}$。因此 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}h_{[n]^*\mathcal{L}}(X)=0$。

我们注意到 $\zeta_{\mathrm{ess}}([n]^*\mathcal{L}|_X) \geq n\zeta_{\mathrm{ess}}(\mathcal{L}|_X) \geq 0$，并且 $\zeta_{\mathrm{abs}}([n]^*\mathcal{L}|_X) \geq \zeta_{\mathrm{abs}}(\mathcal{L}|_G) > -\infty$。因此，$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\zeta_{\mathrm{abs}}([n]^*\mathcal{L}|_X) = 0$。由命题 2.6.8 中应用于 $[n]^*\mathcal{L}|_X$ 的 Zhang 下界不等式可得 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\zeta_{\mathrm{ess}}([n]^*\mathcal{L}|_X) = 0$，因此 $\zeta_{\mathrm{ess}}(\mathcal{L}|_X) = 0$。□

注 3.2.9. 上述证明以一种更简单的方法取代了对 [LY25 中定理 24] 所采用的基本不等式另一版本的依赖；代价是必须扩张至某个 GVF 扩张。该版本要求引入一个称为截面最小值的新不变量。我们认为，他们的论证也适用于一般的全局赋值域，因此无需扩张全局赋值域即可表述 Bogomolov 猜想。我们选择这种方法，是为了展示允许 GVF 扩张后可用的新方法。

4. 新间隙原理

在介绍阿贝尔簇和半阿贝尔簇的模空间之后，我们将证明如何从全局赋值域上的 Bogomolov 猜想推出阿贝尔情形和半阿贝尔情形下的新间隙原理。

4.1. 半阿贝尔簇的模空间。

为了对所有半阿贝尔簇的所有子簇得出一致的结果，必须将它们纳入有限多个族中。关于阿贝尔簇的情形， [GGK21]中也有类似论证。

我们介绍用于参数化阿贝尔簇以及后文中半阿贝尔簇的空间。

定理 4.1.1 (定理 7.9 [MFK94])。对于每个 g，d 以及充分大的 N，都存在一个阿贝尔簇精细模空间，其维数为 g，极化次数为 d，层结构为 N，定义在 $\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$ 上。记作 $\mathbb{A}_{g,\ d,\ N}$，它是定义在 $\overline{\mathrm{Spec}}\,\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$ 上的拟射影空间。[3]

将 $\mathfrak{A}_{g,\ d,\ N}$ 记为阿贝尔簇的泛族。将 $\mathbb{A}$记为随维数、极化次数和层结构变化的 $\mathbb{A}_{g,\ d,\ N}$ 的不交并，并将 $\mathfrak{A}$ 记为 $\mathbb{A}$上的泛阿贝尔簇。我们用 $\mathbb{A}_g$ 和 $\mathfrak{A}_g$ 表示维数为 g的阿贝尔簇轨迹。为了在正特征下开展研究，我们需要考虑非主极化。

根据 [MFK94, §6.2] ，可以在 $\mathfrak{A}$上定义一个对称相对丰沛线丛，它诱导出两倍的极化。利用 [YZ24, §6.1], ，我们将其提升为一个阿代尔线丛 $\mathfrak{L}$ ，它诱导出纤维上的 Néron-Tate 高度。

我们将参数化泛阿贝尔簇中维数为 k且次数为 l的子簇的相对受限希尔伯特空间记为 $\mathbb{H}_{k,\ l} = \coprod \mathbf{Hilb}^{\circ}_P(\mathfrak{A}/\mathbb{A})$，其中 P 遍历所有可能的希尔伯特多项式。

定义 4.1.2. 我们将环面维数为 t、阿贝尔维数为 g 、具有 N 层结构且极化次数为d 的半阿贝尔簇的模空间定义为泛阿贝尔簇对偶的 t 重纤维积

$$\mathbb{G}_{g,t,d,N} = (\mathfrak{A}^{\vee}_{g,d,N})^{\times t}.$$

这对带有环面部分同一化 $\mathbb{T} \cong \mathbb{G}_m^t$ 的（分裂）半阿贝尔簇进行参数化。这可由 Barsotti-Tate公式推出，该公式给出了阿贝尔概形 A 上的 $\mathrm{Ext}^1(A, \mathbb{G}_m) \cong A^{\vee}$ 的同一化。

[3]在上述文献中，声称这一结论在 $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ 上成立。

泛半阿贝尔簇 $\mathcal{G}_{g,t,d,N}$ 是 $\mathfrak{A}_{g,d,N}\times(\mathfrak{A}^{\vee}_{g,d,N})^{\times t}$ 上的泛 $\mathbb{G}_m^t$-丛。通过选择 $0\times(\mathfrak{A}^{\vee}_{g,d,N})^{\times t}$ 上的 $\mathbb{G}_m^t$- 丛 $\mathcal{G}_{g,t,d,N}$ 的平凡化，其中 0 表示 $\mathfrak{A}_{g,d,N}$ 的零截面，我们赋予 $\mathcal{G}_{g,t,d,N}$ 群结构。

固定一个内部包含原点的整多面体 $\Delta\subset\mathbb{R}^n$。于是，这定义了 $\mathcal{G}$ 在 $\mathfrak{A}$上的一个相对紧化。线丛 $\rho(\Delta)+\mathcal{M}$，其中$\mathcal{M}$ 是 $\mathfrak{A}$上的一个丰沛对称线丛，并诱导两倍极化，是 $\mathcal{G}\to\mathbb{G}$的相对丰线丛。

我们将参数化泛半阿贝尔簇中次数为 l 的子簇的相对受限希尔伯特空间记为 $\mathbb{H}_{g,\ t,\ l}=\coprod$**希尔伯特**$^{\circ}_P(\mathfrak{A}/\mathbb{A})$，其中 P遍历所有可能的希尔伯特多项式；该泛半阿贝尔簇的阿贝尔维数为 g，环面维数为 t。

4.2. **化归到 Bogomolov 猜想**。设 A是几何赋值域 K 上的一个极化阿贝尔簇，$X\subset A$ 是一个稳定子有限的闭子簇，且 $X-X$ 生成 A。阿贝尔簇A 的稳定法尔廷斯高度记为 $h_{\mathrm{Fal}}(A)$。本文中，法尔廷斯高度始终指稳定法尔廷斯高度。它由阿贝尔簇模空间上的霍奇线丛诱导。

定理 4.2.1（关于 $\mathbb{Q}$的新间隙原理，[GGK21]中的定理 1.2）。存在正常数 $c_1=c_1$（维数 A,次数$_L X$）和 $c_2=c_2$（维数 A,次数$_L X$），使得

$$\left\{P\in X(\overline{\mathbb{Q}})\mid \widehat{h}(P)\le c_1\max\{1,h_{Fal}(A)\}\right\}$$

包含于某个扎里斯基闭 $X'\subsetneq X$ 中，且次数$_L(X')<c_2$。

量 $\max\{1,h_{\mathrm{Fal}}(A)\}$ 与阿贝尔簇模空间上任意算术充足线丛所对应的高度相当。上述表述不能原封不动地用于 $k(t)$，因为 $\max\{1,h_{\mathrm{Fal}}(A)\}$ 大于丰线丛所对应的高度。

定理 4.2.2（[Mor85]IX 定理 3.2）。$\mathbb{A}_g$的紧化上的霍奇线丛，d，N 是丰沛的。

设 K 是常数域为 k的非阿基米德全局赋值域。那么，上述定理意味着，对于 K 上的阿贝尔簇 A，有 $h_{\mathrm{Fal}}(A)\ge 0$，且等号成立当且仅当 A 可定义在 k上。在此情形下，我们称 A 等变。

设 G是定义在几何赋值域 K 上的半阿贝尔簇，并配有其环面部分 $\mathbb{T}\cong\mathbb{G}_m^t$ 的同一化，以及其阿贝尔商 A上的充足对称线丛 M。由 Barsotti-Weil 公式，半阿贝尔簇 G 可导出点 $Q_1,\dots,Q_n\in A^{\vee}(K)\widehat{\ }$。我们为 G关联高度 $h=h_{\mathrm{Fal}}+h_{\mathrm{NT}}(Q_1)+\cdots+\widehat{h}_{\mathrm{NT}}(Q_t)$，其中 $\widehat{h}_{\mathrm{NT}}$表示 $A^{\vee}$上的 Néron-Tate 高度。我们注意到，当且仅当 $\max\{\mathrm{ht}(2)\ h(G)\}=0$时，$G$是等变的。固定一个内部包含原点的整多面体 $\Delta\subset\mathbb{R}^n$。上述数据确定了 G上的一个规范高度 $\widehat{\ }h=h_{\pi^*\mathcal{M}+\widehat{\rho}(\Delta)}$。新间隙原理最一般的形式如下。

猜想 4.2.3（半阿贝尔簇的新间隙原理）。存在正常数 $c_1=c_1$（维数 G，次数$_{\pi^*M+\rho(\Delta)}X$）和 $c_2=c_2$（维数 G，次数$_{\pi^*M+\rho(\Delta)}X$），使得

$$\left\{P\in X(K)\mid \widehat{h}(P)<c_1\max\{\mathrm{ht}(2),h(G)\}\right\}$$

包含于一个真扎里斯基闭子集 $X' \subsetneq X$，且 次数$_{\pi^* M+\rho\,(\Delta)}$ (X') $< c_2$，对于所有定义在几何赋值域 K 上的半阿贝尔簇 G，以及具有有限稳定子的闭子簇 $X \subset G$，只要 $X - X$ 生成 G，上述结论均成立。

本节的目标是证明以下命题。

命题 1. 半阿贝尔簇在所有全局赋值域上的 *Bogomolov* 猜想蕴含新间隙原理。

定理 3、4 和 5 将由定理 2 中证明的 Bogomolov 猜想的相应情形立即推出。更确切地说，定理 3 需要所有特征为 0 的几何赋值域上的 Bogomolov 猜想；定理 4 只需要所有非阿基米德特征为 0 的几何赋值域上的 Bogomolov 猜想；定理 5 则只需要商为椭圆曲线的半阿贝尔簇的 Bogomolov 猜想。

证明。 总体策略是首先对半阿贝尔簇的子簇进行参数化。接着，对于任意 c_1 和 c_2，我们取一个新间隙原理陈述的反例。通过取这些反例在其定义域的超积中的一个极限点，对于这个极限点，Bogomolov 猜想必然不成立。应用于定理 3 时，利用了形如 $\mathbb{Q}[\lambda]$ 的几何赋值域的超积具有特征零；应用于定理 4 时，利用了特征为 0 或趋于 ∞的几何赋值域的超积是一个特征为 0 的几何赋值域。定理 5 则通过使用以椭圆曲线为商的半阿贝尔簇的模空间，而非所有半阿贝尔簇的模空间得到。

任意一对 $X \subset G$ 数据——包括几何赋值域K 上的半阿贝尔簇中的一个子簇、其环面部分的同一化 $\mathbb{T} \cong \mathbb{G}_m^t$，以及定义在其阿贝尔商 A上的充足对称线丛 M ——在 K 的特征下，与阿贝尔商上的特征互素的某个层结构固定后，都定义了适当模空间$\mathbb{H}_{g,\ t,\ l}$ 中的一个 K值点。我们将具有上述附加数据的半阿贝尔簇称为装饰半阿贝尔簇。

为了将新间隙原理约化为有限多个族，阿贝尔商的极化次数，换言之，$\deg_M(A)$，需要用子簇 X的次数来界定。注意，由于涉及的线丛具有数值有效性，我们在X上有以下交数不等式，其中 η 表示 $\pi(X)$的一般点。

$$\begin{aligned}(\rho(\Delta)+M)_X^{\dim(X)} &\geq \rho(\Delta)^{\dim(X)-\dim\pi(X)} M^{\dim\pi(X)} \\ &= \deg_{\rho(\Delta)}(X_\eta)\cdot \deg_M(\pi(X)) \geq \deg_M(\pi(X))\end{aligned}$$

极化次数的界由 [GGK21，引理 2.5]推出。

我们用一个更正的高度替代法尔廷斯高度，以强化该结论，并为 $\overline{\mathbb{Q}}$ 及非阿基米德全局赋值域上的新间隙原理得到一个一致的表述。

设 $T \subset \mathbb{H}$ 是希尔伯特概形的一个闭不可约子簇。设 $\mathcal{L}$ 是 T 的某个紧化上的算术充足的阿代尔线丛。根据算术充足性，存在一个常数 C，使得

$$\max\{\mathrm{ht}(2), h(\mathcal{G}_t)\} \leq C h_{\overline{\mathcal{L}}}(t).$$

通过诺特归纳法，我们只需证明以下命题。

命题 4.2.4。 设 $\mathcal{X} \subset \mathcal{G}$ 是由闭不可约子簇 $T \subset \mathbb{H}$ 定义的装饰半阿贝尔概形中的水平子簇，且其一般纤维具有有限稳定子并生成 $\mathcal{G}_{\eta}$。则存在数 $\epsilon > 0$ 和 N，使得

$$\left\{x \in \mathcal{G}_t(F) \mid \widehat{h}(x) \leq \epsilon h_{\overline{\mathcal{L}}}(t)\right\}$$

对于扎里斯基稠密开子集中的所有几何赋值域值点 $t \in T(F)$，都包含于一个次数为 $\leq N$ 的真扎里斯基闭子集 Z_t 中。

现在假设 Bogomolov 猜想成立，证明该结论。反设，对于所有实数 ϵ，$N > 0$ 都存在一个扎里斯基稠密的几何赋值域值点集合 $t \in T(K)$，使得

$$\{x \in \mathcal{X}_t(K) \mid \widehat{h}(x) \leq \epsilon h_{\overline{\mathcal{L}}}(t)\}$$

不包含于任何次数和高度为 $\leq C$ 的真扎里斯基闭子集。对于固定的 ϵ 和 C，将所有此类 $t \in T(K)$ 构成的集合记为 $T_{\epsilon, C}$。令 $I = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} T_{\frac{1}{k}, k}$，并令 $\mathcal{U}$ 为一个超滤子，使得当一个子集 $J \subset I$ 不扎里斯基稠密，或 $J = \bigsqcup_{k=1}^{N} T_{\frac{1}{k}, k}$ 对某个 N 成立时，该子集为小集合。将超积记为 $F = \prod_{\mathcal{U}} K[h_{\mathcal{L}}(t_i)^{-1}]$。根据假设，$\mathcal{X}_F$ 具有有限稳定子。t_i 的极限定义了一个点 $t \in T(F)$，满足 $h_{\mathcal{L}}(t) = 1$。因此，我们得到 $\mathcal{X}_F \subset \mathcal{G}_F$ 不是等变的；由于 $\mathcal{X}_F$ 生成 $\mathcal{G}_F$，它也不是特殊的。由 Bogomolov 猜想可知，存在一个 ϵ 和一个闭子簇 $Z \subset \mathcal{X}_F$，使得所有满足 $h(x) \leq \epsilon$ 的 $x \in \mathcal{X}_F(F)$ 都包含于 Z 中。这与应用引理 2.6.6 所得到的结论矛盾。□

5. 半阿贝尔簇的 Bogomolov 猜想证明

本节旨在证明特征零全局赋值域上的 Bogomolov 猜想。对于极化函数域，[LY25] 提出了通过将半阿贝尔簇的 Bogomolov 猜想归约为其阿贝尔商的 Bogomolov 猜想来进行证明的基本策略。我们证明了这一归约步骤对任意特征的全局赋值域均成立。然而，正特征全局赋值域上阿贝尔簇的 Bogomolov 猜想仍未解决。这一归约面临的主要额外困难在于动力诺斯科特性质失效，即对于全局赋值域 K 上的无迹阿贝尔簇 A，可能存在高度 0 的非挠元点。

我们首先在第 5.4 节中，通过将拟分裂半阿贝尔簇的情形归约为（无迹）阿贝尔簇的情形，证明拟分裂半阿贝尔簇的 Bogomolov 猜想。

定义 5.0.1。 几何赋值域 K 上的半阿贝尔簇 G称为准分裂[4]，如果存在 k 上的半阿贝尔簇 G_0 和无迹阿贝尔簇 A，使得 $G = G_{0, K} \times A$。如果 K 是阿基米德的，我们则令其表示 $G = \mathbb{G}_m^t \times A$。

这依赖于关于（无迹）阿贝尔簇和环面的 Bogomolov 猜想，而这些猜想不难从文献中的结果推出。我们在第 5.1 节回顾上野轨迹后，于第 5.2 节讨论阿基米德 GVF 上阿贝尔簇和环面的 Bogomolov 猜想。在第 5.3 节中，我们处理几何赋值域的情形。最后，我们在第 5.5 节将任意半阿贝尔簇的 Bogomolov 猜想归约到准分裂情形。

我们首先证明一些标准的约化，这些约化很容易推广到全局赋值域的情形。

[4]这沿用了 [LY25] 的术语。这与准分裂约化群的概念无关，也与环面是否分裂无关。

引理 5.0.2. 小子簇 X 经高度0 的点 $g \in G(K)$ $g + X$ 平移后，仍然是小的。

证明。 半阿贝尔簇 G 上的线丛 $\mathcal{M}$和 $\widehat{\rho(\Delta)}$ 沿加法映射 $G \times G$ 的拉回由盒积 $\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{M}$ 和$\curlywedge\widehat{\rho}(\Delta) \boxtimes \widehat{\rho}(\Delta)$ 控制。因此，存在一个实数 C，使得 $h(\overline{x+y}) \leq$ $\curlywedge \quad \curlywedge C(h(x) + h(y))$。特别地，引理得证。□

引理 5.0.3 (命题 3.2 [LY25])。 子簇 $X \subset G$ 在同源 $G \to G'$ 下的像 $Y \subset G'$ 是特殊的，当且仅当 X 是特殊的。

证明。 分别对 X 和 Y 的稳定子取商，可将论断归结为相应稳定子有限的情形。同源保持高度为零的点和等常子簇，因此，若 X 是特殊的，则 Y 也是特殊的。另一方面，可以找到一个同源 $G' \to G$，使其与适当的 n 的复合等于乘法 n。现在只需证明，若 nX 是特殊的，则X 也是特殊的；这显然成立。□

引理 5.0.4 (引理3.3 [LY25])。 *</style}*同源下子簇 X 的像 Y 是小的，当且仅当 X 是小的。

证明。半阿贝尔簇的同态 $\phi\colon G \to G'$ 诱导出环面丛的态射。特别地，阿贝尔簇的同源数据由阿贝尔商的同源 $\phi_{ab}\colon A \to A'$ 和环面部分 $\phi_{tor}\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}'$ 组成。该同源 $\widehat{\ }$ 诱导出映射 $\phi\colon M' = \mathrm{Hom}(\mathbb{T}', \mathbb{G}_m) \to M = \mathrm{Hom}(\mathbb{T}, \mathbb{G}_m)$。设 $\Delta' \subset M'_{\mathbb{R}}$ 是一个多面体，Δ 是其在 $\phi \otimes \mathbb{R}$ 下的像。那么，Δ 和 Δ' 确定紧化 G 和 G'，并且 ϕ 延拓为态射 $\phi\colon G \to G'$。分别将到阿贝尔商的投影记为 π 和 π'。从 A' 上的充足对称典范赋范线丛 $\mathcal{M}'$ 可以得到 A 上的充足对称线丛 $\mathcal{M} = \phi_{ab}^* \mathcal{M}'$。于是，$\phi^*(\pi')^* \mathcal{M}' = \pi^* \overline{\mathcal{M}}$，且 $\phi^* \widehat{\rho}(\Delta') = \widehat{\rho}(\Delta)$。换言之，$G'$ 上的典范高度的拉回在 G 上定义了一个典范高度。由于小性与典范高度的选择无关，我们得出结论。□

引理 5.0.5。 当且仅当对具有有限稳定子的子簇成立时，*Bogomolov* 猜想才成立。

证明。 设 X 是半阿贝尔簇 G 的一个小子簇。令 $G(X)$ 为 X 的稳定子的连通分支。在态射 $\varpi : G \to G' = G/G(X)$ 下，$\varpi(X)$ 的像同样是小的。在半阿贝尔簇的 Bogomolov 猜想表述中，显然，如果 $\varpi(X)$ 是特殊的，那么 X 也是特殊的。关于阿贝尔簇的 Bogomolov 猜想标准表述的推论依赖于庞加莱可约性，详见 [Mor14, Theorem 9.20] 证明的最后一段。□

引理 5.0.6。 只需对生成半阿贝尔簇 G 的小子簇 X 证明 *Bogomolov* 猜想即可。

证明。 如果 X 是一个小子簇，那么经过扩张到某个 GVF 扩张 F 后，它包含一个点 $g \in X(F)$，其典范高度为 0。根据引理 5.0.2，$X - g$ 仍然是小的。它是由$X - g$ 生成的半阿贝尔子簇中的特殊子簇，当且仅当它是 G的特殊子簇。□

5.1. **上野轨迹与无群性**。 我们不再重写阿基米德 GVF 上阿贝尔簇的博戈莫洛夫猜想的证明，而是将其归约到 [CM22]中已证明的阿代尔曲线情形。这要求我们理解上野轨迹在代数闭域扩张下的行为。[5]

定义 5.1.1. 闭子簇 $X \subset G$在有限型连通群概形 G 中的上野轨迹或川又轨迹，是 G 的所有子群概形的平移的并集 $Z(X)$，换言之

$$Z(X) = \{x \in X \mid \exists B \subset G \text{ 子群概形，} \dim(B) > 0 \text{ 使得 } x + B \subset X\}.$$

其基本性质已在 [Abr94] 中得到研究。其主要结果可概述如下。

定理 5.1.2 ([Abr94])。 设 G 为半阿贝尔簇， $X \subset G$ 为闭子簇。则，上野轨迹 $Z(X)$ 是 X 的闭子簇。当且仅当$\dim(\mathrm{Stab}(X)) > 0$时，它满足 $Z(X) = X$ 。

我们遵循 [JX22 第 3] 节的做法，引入无群性这一概念；该概念已在代数闭域扩张下得到研究。

定义 5.1.3 （伪无群性）。 设 X 是代数闭域 K 上的一个簇，且 $\Delta \subset X$ 是一个闭子簇。若对于任意有限型连通群概形 G以及任意扎里斯基稠密开集$U \subset G$，只要 $\mathrm{codim}(G \setminus U) \geq 2$，每个态射 $U \to X$ 都经由 Δ分解，我们就称 X 模Δ无群。

命题 5.1.4 （命题 3.7 [JX22]）。 设 $K \subset F$ 是特征0 的代数闭域的一个扩张。那么， X_F 模 Δ_F 无群，当且仅当 X 模 Δ无群。

对于半阿贝尔簇，所得的无群例外轨迹与 Ueno 轨迹一致。

定理 5.1.5 （定理 5.2.5 [MV25]）。 设 G 是一个半阿贝尔簇，且$X \subset G$ 是一个闭子簇。那么， X 模 Z（X）无群。

推论 5.1.6. 设 G 是一个半阿贝尔簇， $X \subset G$ 是一个闭子簇。设 $K \subset F$ 是代数闭域扩张。那么，上野轨迹满足 $Z(X_F) = Z(X)_F$。

5.2. **阿基米德 GVF**。 Chen 和 Moriwaki 已在阿基米德阿代尔曲线上证明了阿贝尔簇的 Bogomolov 猜想，见 [Che11] 。原则上，阿代尔曲线只能表示可数广义赋值域。本节将问题归约到可数广义赋值域的情形，并证明阿基米德 GVF 上环面的环面博戈莫洛夫猜想。

引理 5.2.1. 可数阿基米德*GVF*上的阿贝尔簇的 *Bogomolov* 猜想蕴含所有阿基米德 *GVF* 上的 *Bogomolov* 猜想。

证明。 根据引理 5.0.5，我们只需考虑小子簇 X 具有有限稳定子的情形。特别地，上野轨迹 X° 非空。根据假设， $X^\circ(K)$ 中有无穷多个小点。取一个由不同点组成的可数小序列 $x_1, \cdots \in X^\circ(K)$。可以在一个

[5]本节中的结果是我从 Aryan Javanpeykar 在 https://mathoverflow.net/questions/356197/translates-of-abelian-subvarieties 上的回答中了解到的。

有限型域 M 上定义 $\mathbb{Q}$。由 $x_1, \cdots \in X^\circ(K)$ 在 M 上生成的域 L 仍然是可数的。$\{x_1, x_2, \dots\}$ 在 X 中的 Zariski 闭包包含一个小的正维不可约分支 Z。由于 Z 不包含于上野轨迹中，它具有有限稳定子且不是特殊的。因此，这与在 L 上的 Bogomolov 猜想矛盾。□

对于环面，我们以与 [Bil97]相同的方式，利用等分布证明 Bogomolov 猜想。

命题 5.2.2. 在阿基米德 *GVF* K上，$\mathbb{G}_m^t$ 满足 *Bogomolov* 猜想。

证明。由与上文相同的论证，我们只需考虑 K 可数且 $X \subset \mathbb{G}_m^t$ 含有关于 Weil 高度的小点扎里斯基稠密集的情形。不失一般性，假设 X 生成 $\mathbb{G}_m^t$。那么，对于任意非平凡特征 $\chi : \mathbb{G}_m^t \to \mathbb{G}_m$，像 $\chi(X) = \mathbb{G}_m$。设 $(x_i) \in X(K)$ 是一个小的一般序列。那么，序列 $(\chi(x_i)) \in \mathbb{G}_m(K)$ 是一个由小点组成的一般序列。因此，x_i 和 $\chi(x_i)$都满足定理 2.3.6 的条件。

我们用阿代尔曲线表示 K，并假设其所有阿基米德赋值均已规范化。用 Ω_∞ 表示阿基米德赋值的集合，并用 ν表示由阿代尔曲线结构限制得到的测度。我们考虑阿代尔空间 $(\mathbb{G}_m^t)^{\mathrm{an}}_{\Omega_\infty}$ 上的测度 δ_{x_i}，它通过将函数 $f : (\mathbb{G}_m^t)^{\mathrm{an}}_{\Omega_\infty} \to \mathbb{R}$ 映射到积分来定义

$$\int_{\Omega_\infty} f_\omega(x_i)\nu(d\omega).$$

记 π 为到 $(\mathbb{C}^*)^t$上的投影。首先注意，根据定理 2.3.6 应用于 X，测度 δ_{x_i} 等分布于某个测度 μ。由定理 2.3.6 应用于 $\mathbb{G}_m$，或者更确切地说应用于其紧化 $\mathbb{P}^1$，测度 $\chi_*\mu$ 必定是沿纤维积分单位圆上的哈尔测度所得的测度。由傅里叶理论可知，对于每个可测集 $U \subset \Omega_\infty$，$\pi_*\mu$是 $(S^1)^t$上的哈尔测度的倍数。因此，μ是 $(S^1)^t$ 上的哈尔测度与 Ω_∞上的测度的乘积测度。然而，此时 $\mu(X_{\Omega_\infty}) = 0$，这与 μ 支撑在 X 的阿代尔空间上的事实矛盾。□

5.3. **无迹阿贝尔簇的几何 Bogomolov 猜想**。在此，我们利用 Gao 关于退化子簇的定理，证明特征零的全局赋值域上的无迹阿贝尔簇的 Bogomolov 猜想。

引理 5.3.1。(BC) 对于特征0的非阿基米德 *GVF* 上的每个无迹阿贝尔簇都成立。

证明。根据引理 5.0.5 和引理 5.0.6，我们处于这样的情形：X具有有限稳定子，并生成 A。

我们将使用 Bogomolov 猜想的高度表述。具体而言，我们要证明：如果 A 是特征零的非阿基米德代数闭 GVF K 上的无迹阿贝尔簇，且 X 是满足$\frown h(X) = 0$的子簇，那么 X 是某个阿贝尔子簇经过一个高度 0 的点平移得到的平移。

在继续证明之前，我们回顾一下阿贝尔概形子簇非退化性的一些基本事实。设 $\mathcal{M}$ 是阿贝尔概形 $\mathcal{A} \to S$ 上的一个充足对称几何阿代尔线丛，其中该阿贝尔概形定义在 $\mathbb{C}$ 上。根据 [YZ24，第 6.2 节，2], 对于阿贝尔概形 $\mathcal{A}$ 的一个子概形 $\mathcal{X}$，Betti 映射一般具有满

秩与 $\mathcal{M}|_{\mathcal{X}}$ 是大线丛这两个条件等价。满足这些等价条件的簇 $\mathcal{X}$ 称为非退化。根据 [Yua21，定理 4，1], 线丛 $\langle\mathcal{M},\ldots\ldots,\ \mathcal{M}\rangle_{\mathcal{X}/S}$ 是大线丛，当且仅当 $\mathcal{M}^{\boxtimes N}$ 是 $\mathcal{X}^{[N]}=\mathcal{X}\times_S\cdots\times_S\mathcal{X}$ 上的大线丛（对充分大的 N）。满足这些等价条件的簇 $\mathcal{X}$ 称为潜在非退化。

由于高度在基变换下保持不变，我们可以假设，只需对定义在有限型几何赋值域 K 上的对 $X\subset A$ 证明 Bogomolov 猜想，其中该几何赋值域在常数域 k 上有限型，并且 K 在定义域中的超越次数最小。我们将 $X\subset A$ 扩展为簇 S上的族 $\mathcal{X}\subset\mathcal{A}$，其分式域为 K。设 $\mathcal{M}$ 是$\mathcal{A}$上的充足对称几何阿代尔线丛。根据引理 2.1.2，只需证明 $\langle\mathcal{M},\ldots,\mathcal{M}\rangle_{\mathcal{X}/S}$上的 Deligne 配对 S 是一个大线丛。我们可以假设从 S 到相对希尔伯特概形的模映射一般有限，从而将情形归结为 S 是相对希尔伯特概形 $\mathbf{Hilb}^\circ$的一个闭不可约子簇。令 η 表示 S的一个几何泛点。对 $X\subset A$ 所作的假设意味着，在将 S替换为一个开子簇后， $\mathcal{X}$满足这些条件

(1) $\mathcal{X}_\eta$是 $\mathcal{A}_\eta$的不可约子簇 (2) 对所有 $s\in S(\mathbb{C})$, $\mathcal{X}_s$ 生成 $\mathcal{A}_s$ (3) 子簇 $\mathcal{X}_\eta$ 具有有限稳定子。

根据 [GGK21，引理 3.4]， $\mathcal{X}$ 是潜在非退化的，从而完成证明。□

5.4. **拟分裂半阿贝尔簇的 Bogomolov 猜想**。本节将拟分裂半阿贝尔簇的 Bogomolov 猜想归约到无迹阿贝尔簇的情形。Yamaki 最初在阿贝尔簇的极化函数域情形证明了这一归约，参见 [Yam18]。我们将其推广到全局赋值域和拟分裂半阿贝尔簇。

我们首先证明等变簇的 Bogomolov 猜想。设 k 是赋有平凡 GVF 结构的代数闭域。设 X 是定义在 k上的簇。设 L是 X上的丰线丛。注意，它定义了 X 上的几何阿代尔线丛，因此可以考虑相对于 L的高度。设 K 是 k 的有限生成全局赋值域扩张，常数域为k。若 $Z\subset X_K$ 满足 $h_L(Z)=0$，或等价地，满足 $\zeta_{\mathrm{ess}}(L|_Z)=0$，则称其为小的。

命题 5.4.1（等变博戈莫洛夫猜想）。设 $Z\subset X_K$ 是一个小子簇。那么， Z 可以定义在 k上。

证明。设 F 是 K 的一个 GVF 扩张，其常数域为 F_{const}，且 Z包含一个由 F_{const} 点构成的扎里斯基稠密集。根据命题 2.6.8，这样的 F 存在。于是， Z 定义在 F_{const} 上。由于它也定义在 K 上，根据 [DG61, IV$_2$ 4.8.11]，它定义在$K\cap F_{\mathrm{const}}=k$ 上。□

引理 5.4.2。设 K 是一个代数闭几何赋值域。那么，在 $K(x)$ 上存在唯一的 *GVF* 结构，使得 $\mathrm{ht}(x)=0$.[6]

证明。不失一般性，假设 K是可数的。设 $(K,\Omega,\mathcal{A},\nu)$ ϕ 是一个表示阿代尔曲线 K 的阿代尔曲线，且在平凡绝对值处没有测度。由强三角不等式，对所有 $a\in K$，$\mathrm{ht}(x+a)=\mathrm{ht}(a)$。由此可知，任何表示 $K(x)$ 的阿代尔曲线都支撑在满足 $|x+a|=1$ 的绝对值上

[6]这一结果对阿基米德GVF同样成立。它是 Ben Yaacov 和 Hrushovski 对 Bilu 等分布定理的推广，可见于未发表的笔记中。

若 $|a| \leq 1$。对于 K 的任意非平凡非阿基米德赋值 v，存在唯一的绝对值扩张 $K(x)$ 具有这一性质，即高斯范数。因此，我们可以找到一个表示 $K(x)$ 的阿代尔曲线，其形式为 $(K(x),(\mathbb{P}^1(K)) \sqcup \Omega\ \mathcal{B}, \mu)\ \psi)$，其中在 Ω 上，映射 ψ 将点映到 K 的相应非平凡赋值上的高斯点。限制在 Ω 上的测度 μ 由 ν 决定。K 上平凡绝对值的扩张赋值可与 $\mathbb{P}^1(K)$ 等同。每个这样的 $a \in \mathbb{P}^1(K))$ 上的测度由以下性质决定：$\mu(\{\infty\}) = 0$，以及对所有 $a \in K$，$x - a$ 的乘积公式。□

引理 5.4.3. 设 A 是定义在几何 *GVF* K 上的无迹阿贝尔簇，并假设 *Bogomolov* 猜想对 A 成立。那么，其函数域的代数闭包配备典范 *GVF* 结构 $K(\eta)$ 后，其常数域为 k。

证明. 若 $A = A_1 \times A_2$ 的基变换 $A_1 \otimes K(A_2)$ 由 [Yam18, 引理 A.1] 可知具有平凡的 $K(A_2)/k(A_2)$-迹。特别地，若引理对 A_2 在 K 上以及 $A_1 \otimes K(A_2)$ 在 $K(A_2)$ 上成立，那么我们便可得出 A 的引理成立。由庞加莱可约性，不妨设 A 是单的。由引理 2.1.4，只需研究 $K(\eta)$ 的常数域。

设 $s \in K(\eta) \setminus K$。若要使 s 的高度为 0，零点集 $\mathrm{div}(s)$ 的高度必须为 0，因此它是一个高度 0 的阿贝尔子簇平移。于是我们归结到 A 是椭圆曲线 E 的情形。注意到 E 可以定义在 $k(j(E))$ 上，并令 v 表示 $k(j(E))$ 上的 $j(E)^{-1}$-进赋值 v。将 K 表示为一条阿代尔曲线 $(K, (\Omega\ \mathcal{A}, \nu)\ \phi)$，使得坏约化处 Ω_{bad} 延拓 v。令 $\mathcal{M}$ 表示与除子 $[0]$ 相关联的典范度量对称丰沛线丛。

令 $K(\eta)$ 为 E 的函数域，并令 $x \in K(\eta) \setminus k$ 具有高度 0。记 $K(\eta)$ 的 GVF 泛函为 ϕ。那么，$K(\eta)/K(x)$ 有限，并且 $K(x)$ 带有唯一的 GVF 结构，该结构扩张 K 且满足 $\mathrm{ht}(x) = 0$。对于 K 的每个赋值 ω，$K(x)$ 的 GVF 测度都支撑在高斯点上。我们通过从 $k(j(E))(x)$ 拉回，在 $K(x)$ 上定义一个阿代尔除子 D：它由一个平凡除子和一个定义在 $\mathbb{P}^1_v$ 上的连续非负函数 f 组成，该函数恰好在高斯点处取零。我们注意到，$K(x)$ 的 GVF 泛函在 D 处的取值必为 0。我们考虑将 D 拉回到 $K(E)$。仍记其为 D，并将其在每个赋值处的格林函数记为 f_ω。

我们看到，对于所有 $\omega \in \Omega_{\mathrm{bad}}$，$\int_{E_\omega^{\mathrm{an}}} f_\omega c_1(\mathcal{M}_\omega) > 0$；根据 Gub10，推论 7.3]，$c_1(\mathcal{M}_\omega)$ 是 E_ω^{an} 的骨架上的哈尔测度。特别地，

$$\phi(D) = \int_{\Omega_{\mathrm{bad}}} \int_{E_\omega^{\mathrm{an}}} f_\omega c_1(\mathcal{M}_\omega) \nu(d\omega) > 0.$$

这与假设 $K(\eta)$ 是 $K(x)$ 的 GVF 扩张相矛盾。□

我们还需要这一结果的阿基米德类比。

引理 *5.4.4.* 设 K 是一个可数阿基米德 *GVF*，由阿代尔曲线 $(K, (\Omega\ \mathcal{A}, \nu)\ \phi)$ 表示。假设 $K(X)$ 是 K 到簇 X 的函数域的 *GVF* 扩张，其表示阿代尔曲线 $(K(X), (\Psi, \mathcal{B}, \mu)\ \psi)$ 含有一个在 $X_U^{\mathrm{an}} \setminus \bigcup_{Z \subset X}$ 上形如 $d\mu_\omega d_\omega$ 的测度子空间 Z_U^{an}，且对正测度集合 Ω 中的某个集合 $U \subset$，有 $\mathrm{Supp}(\mu_\omega) = X_\omega^{\mathrm{an}}$。记 $K(X)^{\mathrm{sym}}$ 的 *GVF* 泛函为 ϕ。那么，对于 $K(X)$ 上任意满足 $\phi(\mathcal{D}) = 0$ 的有效阿代尔除子 $\mathcal{D}$，可推出

$\mathcal{D}$ 是几何平凡的。特别地，高度为 0 的元素集合 $\{x \in K(\eta)^{\times} \mid \mathrm{ht}(x) = 0\}$ 包含于 K。

证明。通过取范数线丛，只需证明在 $\mathcal{D}$ 定义于 X的一个双有理修改上的情形下结论成立。该陈述中"特别是"的部分可由考察 $s \in K(X) \setminus K$的 $\mathcal{D} = \mathrm{div}(s) \wedge 0$ 得出。

设 $\mathcal{D}$ 是一个非几何平凡的有效阿代尔除子。那么，在任意阿基米德赋值 ω 处， $\mathcal{D}$ 的格林函数在 Supp($\mathcal{D}$) 的某个欧几里得邻域内为正。由于 μ_ω 的支撑是 X_ω^{an}，因此

$$\phi(\mathcal{D}) \geq \int_{\Omega_\infty} \int_{X_\omega^{\mathrm{an}}} g_{\mathcal{D}}(x)\mu_\omega(dx)\nu(d\omega) > 0$$

由此即可得出所述结论。 □

推论 5.4.5. 设 A是阿基米德 *GVF* K上的一个阿贝尔簇。令$K(\eta)$ 表示 A 的函数域，并赋予其典范 *GVF* 结构。那么，高度为0 的元素构成的集合 $\{x \in K(\eta)^{\times} \mid \mathrm{ht}(x) = 0\}$ 包含于 K。

证明。若 $X = A$ 是定义在 K 上的阿贝尔簇，则 $K(\eta)$上的典范 GVF 结构满足引理 5.4.4 的条件。对于每个阿基米德赋值 ω ，可以取 μ_ω 为 A_ω^{an}上的哈尔测度。□

下面的引理是 [LY25，命题 4.6] 的推广，涵盖非阿基米德和阿基米德情形。

引理 5.4.6. 设 A 是定义在几何赋值域 K 上的阿贝尔簇，配备丰沛对称典范赋范线丛 $\mathcal{M}$。若 K 是非阿基米德的，则假设 A 的 K/k-迹平凡。进一步假设 *Bogomolov* 猜想对 A成立。

(1) 若 K 是非阿基米德的，设 Y 是定义在 k 上的簇，且 M_Y 是 Y 上的丰线丛，其拉回定义了Y_K上的阿代尔线丛 M_Y 。设 $X \subset Y_K \times A$ 关于 $M_Y \boxtimes \mathcal{M}$的高度为 0 。则 X 具有形式 $W_K \times (A' + a)$，其中 $W \subset Y$是定义在 k上的子簇， A' 是 A 的阿贝尔子簇，而 $a \in A(K)$ 是一个高度为 0的点。

(2) 若 K 是阿基米德的，则 *Bogomolov* 猜想对 $\mathbb{G}_m^t \times A$成立。

特别地，如果 *Bogomolov* 猜想对 A 成立，且 G 是一个等变半阿贝尔簇，那么 *Bogomolov* 猜想对 $G \times A$成立。

证明。在阿基米德情形下，记 $Y = \mathbb{G}_m^t$。设 X 是 $Y_K \times A$的一个小子簇。根据阿贝尔簇的 Bogomolov 猜想，我们可以假设 X 到 A 的投影 $\pi(X)$就是 A 本身。令 η 表示 A 的一般点，并将带有典范 GVF 结构的 A 的函数域记为 $K(\eta)$。那么，$X_{K(\eta)}$ 的不可约分支都是小子簇。

由命题 5.4.1 和引理 5.4.3，非阿基米德情形下结论成立，因为 $X_{K(\eta)}$ 的每个不可约分支都定义在 k上。

接下来讨论阿基米德情形。令 Z 为$X_{K(\eta)}$的一个不可约分支。由命题 5.2.2 可知， Z 必为某个子群经过一个高度为 0 的点平移所得。因此，我们可以假设 Z 是一个点。于是，它在（K（η）$^{\times}$）^{t}中定义了一个高度为 0 的元组。由推论 5.4.5 可知， Z 定义在 K上。这证明了 X 是子群 T 经过一个高度为 0 的点 $T \times A$ 平移所得，从而证明了 Bogomolov 猜想。□

5.5. **化归到准分裂情形**。本节通过证明以下引理，将一般半阿贝尔簇的 Bogomolov 猜想化归到准分裂情形。

引理 5.5.1。设 $X \subset G$ 是一个具有有限稳定子且生成 G 的半阿贝尔簇中的小子簇。那么， G 与一个准分裂半阿贝尔簇同源。

设 X 是一个具有有限稳定子且生成 G 的小子簇。通过取一个同源，我们可以假设 G 的阿贝尔商是其迹与一个无迹阿贝尔簇的乘积 $A_{0,\ K} \times A_1$ 。

我们使用的一个重要工具是相对 Faltings-Zhang 映射，该映射由[LY25]引入。我们定义半阿贝尔簇的一个同构，以表明G是 A 上的 $\mathbb{G}_m^t$-主齐性空间，具体为 β_n : $G_{/A}^n \to (\mathbb{G}_m^t)^{n-1} \times G$ 通过 $(g_1、\ \ldots\ldots、\ g_n) \mapsto (g_1 - g_2,\ g_2 - g_3、\ \ldots\ldots、\ g_n - g_{n-1},\ g_1)$。我们通过将$\beta_n$ 与 $\mathrm{id}_{(\mathbb{G}_m^t)^{n-1}} \times \pi$复合来定义相对 Faltings-Zhang 映射 α_n。之所以如此命名，是因为它在 π 的纤维上恢复了 $\mathbb{G}_m^t$ 的 Faltings-Zhang 映射。

$$\begin{array}{ccc} G_{/A}^n := \underbrace{G \times_A \cdots \times_A G}_{n \text{ times}} & \xrightarrow{\alpha_n} & \mathbb{G}_m^{t(n-1)} \times A \\ & \searrow^{\beta_n} & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{id} \times \pi} \\ & & \mathbb{G}_m^{t(n-1)} \times G. \end{array}$$

相对 Faltings-Zhang 映射的性质与通常的 Faltings-Zhang 映射类似。

引理 5.5.2 (命题 5.8 [LY25])。若 $\mathrm{Stab}(X)$ 是有限的，则对 $n \gg 0$ ，存在一个不可约分支 $Z_n \subset X_{/A}^n$ ，使得 $Z_n \to \alpha_n(Z_n)$ 是一般有限的，并且 $\alpha_n(Z_n) = \alpha_n(X_{/A}^n)$。

引理 5.5.3 (命题 5.7 [LY25])。设 X' 是一个小子簇的n重纤维幂 $X_{/A}^n \subset G_{/A}^n$ 的一个不可约分支。那么 $X' \subset G_{/A}^n$ 是小的。

证明。证明仅依赖于投影公式，该公式在几何赋值域/阿代尔曲线中同样成立，参见 [CM21, 定理 4.4。9]。□

现在我们将相对 Faltings-Zhang 映射应用于当前情形。根据引理 5.5.2，令 $Z_n \subset X_{/A}^n$ 为一个不可约分支，使映射 $Z_n \to \alpha_n(Z_n)$ 一般有限。由于取纤维幂保持小性（引理 5.5.3），且β_n 是一个同构，因此 $\alpha_n(Z_n)$ 和 $\beta_n(Z_n)$ 都是小子簇。

现在我们聚焦于 $Z = \beta_n(Z_n)$。 $Z \subset \mathbb{G}_m^N \times G$是一个小子簇，其在 π : $\mathbb{G}_m^N \times G \to \mathbb{G}_m^N \times A$ 到 $\pi(Z)$ 上的投影是一般有限的。我们的目标是证明， G 在同源意义下具有如下形式: $G = G_{0,\ K} \times A'$ 其中A'是一个无迹阿贝尔簇。

若 K 是非阿基米德的，则 $\pi(Z)$ 具有 $W_K \times A_1$ 的形式，其中 W 是定义在 k 上的 $\mathbb{G}_m^N \times A_0$ 的子簇，且其到 A_0 的投影根据拟分裂半阿贝尔簇的 Bogomolov 猜想生成 A_0 。若 K 是阿基米德的，我们也可以类似地将问题约化到 $\pi(Z) = \mathbb{G}_m^N \times A$ 的情形。将 $\mathbb{G}_m^N$ 紧化，并令 $M = \widehat{\rho}(\Delta)$ 为其紧化上的典范度量线丛。用 W 表示 W 在此紧化中的闭包。于是，通过将定义在 k 上的丰线丛 $M_{\overline{W}}$ 从 $\overline{W}$ 拉回，得到 W_K 上的阿代尔线丛 M_W。这

使我们恰好处于 [LY25，定理 5。6] 的情形，唯一的区别是我们在全局赋值域上工作。

注意到，我们可以将 G解释为 $\mathbb{G}_m^t$ 上的 A-丛。因此，Z 在这个定义于 $W_K \times A_1$ 上的 $\mathbb{G}_m^t$-丛上给出一个亚纯多截面。这里指的是定义在一般有限覆盖 Y 上的亚纯截面。等价地，我们得到 $\mathbb{G}_m$-丛的 t 个亚纯多截面 $s_1, \ldots, s_t$。Z 的高度与相对于 $K(W_K \times A_1)$ 上的典范 GVF 结构的阿代尔除子 $|\mathrm{div}(s_1)| + \cdots + |\mathrm{div}(s_t)|$ 的高度一致。

引理 *5.5.1* 的证明。经过前面进行的约化，我们证明 G 是准分裂的。由引理 5.5.5，G 在 $W_K \times A'$ 上定义的线丛具有 $Q_K \boxtimes \mathcal{T}$ 的形式，其中 Q 是在 k 上定义的线丛，$\mathcal{T}$ 是挠元。注意到，Q 唯一地延拓为 A_0 上的线丛。投影 $W \to A_0$ 经由阿尔巴尼斯簇 $\mathrm{Alb}(W)$ 分解。由于其像生成 A_0，态射 $\mathrm{Alb}(W) \to A_0$ 是满射。数值平凡线丛唯一地延拓到阿尔巴尼斯簇。根据假设，该线丛由像 $A_0^\vee(K)$ 中的元素 $\mathrm{Alb}(W)^\vee(k)$ 定义；但由于 $A_0^\vee \to \mathrm{Alb}(W)^\vee$ 是单射，因此 A_0 上的线丛可定义在 k 上。□

本节余下部分将用于证明引理 5.5.5。我们需要以下关于数值平凡线丛的引理。该引理并非原创，但我们找不到相关参考文献。

引理 5.5.4. 设 X 和 Y 是代数闭域 K 上的两个真簇。那么，我们有一个同构 $\mathrm{Pic}_0(X) \times \mathrm{Pic}_0(Y) \cong \mathrm{Pic}_0(X \times Y)$。换言之，$X \times Y$ 上任意数值平凡线丛都具有 $Q_1 \boxtimes Q_2$ 的形式。

证明。固定两个基点 $x \in X(K)$ 和 $y \in Y(K)$。设 L 是 $X \times Y \times \mathrm{Pic}_0(X \times Y)$ 上的万有线丛。设 L_x 是其在 $\{x\} \times Y \times \mathrm{Pic}_0(X \times Y) \cong Y \times \mathrm{Pic}_0(X \times Y)$ 上的限制，L_y 是其在 $X \times \{y\} \times \mathrm{Pic}_0(X \times Y) \cong X \times \mathrm{Pic}_0(X \times Y)$ 上的限制。分别用 π_x 和 π_y 表示投影。那么，我们断言 $L \cong \pi_x^* L_x \otimes \pi_y^* L_y$。根据立方定理（参见 [Sta23, 0BF4],），只需验证将其限制到 $\{x\} \times Y \times \mathrm{Pic}_0(X \times Y)$、$X \times \{y\} \times \mathrm{Pic}_0(X \times Y)$ 和 $X \times Y \times \{e\}$ 后，该结论仍成立。根据构造，这一点显然成立。□

引理 5.5.5. 设 $\mathcal{Q}$ 是 $\overline{W}_K \times A'$ 上带有典范度量的数值平凡线丛，且 A' 是无迹阿贝尔簇。设 s 是 $\mathcal{Q}$ 的亚纯多重截面，相对于 $K(W_K \times A')$ 上的典范 *GVF* 结构，其高度为 0。那么，线丛 $\mathcal{Q}$ 具有形式 $Q_K \boxtimes \mathcal{T}$，其中 Q 是定义在 k 上的线丛，$\mathcal{T}$ 是挠线丛。

证明. 令 Y 表示 $W_K \times A'$。只需考虑截面的情形，因为 $p^*\mathcal{Q}$ 的范数线丛是 $[K(X) : K(Y)] \cdot \mathcal{Q}$，对任意一般有限映射 $p : X \to Y$ 均成立。

由引理 5.5.4，线丛具有形式 $Q_1 \boxtimes Q_2$。拉回到 W 的函数域后，我们应用引理 5.5.8 证明 Q_2 是挠元。另一方面，将 Q_1 拉回到 $X_{K(A)}$。于是，由等变 Bogomolov 定理，s 只能在定义于 $K(A)$ 的常数域上的子簇上消失；根据引理 5.4.3，该常数域为 k。因此，Q_1 定义在 k 上，正如所需。□

引理 5.5.6. 设 E 是赋值域 K上的一条具有乘法约化的椭圆曲线。设 $D = P_1 + \cdots + P_n - P_1' - \cdots - P_n'$ 是一个数值平凡除子。假设

典范格林函数 g_D 在 E^{an} 的骨架上为常数，并令 r表示到该骨架的收缩映射。那么， $r(P_1)\dots,r(P_n)$ 以及 $r(P_1')\dots,r(P_n')$按重数一致。特别地，由 D 定义的点 $Q\in E(K)$ 满足$r(Q)=0$。

证明。由引理 2.2.4 可知， $g_D(x)$ 除相差一个加法常数外，具有如下形式：$g_{[0]}(x-P_1)+\cdots+g_{[0]}(x-P_n)-g_{[0]}(x-P_1')-\cdots-g_{[0]}(x-P_n')$，其中$g_{[0]}$ 表示除子 $[0]$ 在典范度量下的格林函数。格林函数可根据 Tate 的后续工作，在 [JS24, §8.5] 中明确写出。

将 E^{an} 的骨架与适当的 $l\in\mathbb{R}$ 对应于 $\mathbb{R}/l\mathbb{Z}$ 后，$g_{[0]}$ 在骨架上的限制 g 为

$$\frac{l}{2}B_2(\nu/l)-\frac{1}{12}l,$$

其中， B_2 表示第二伯努利多项式 $B_2(T)=T^2-T+1/6$。注意， g 在每个非零点处均可微。其导数为 $2^{\frac{\nu}{l}-1}$。在 0 处，右侧导数为 $-\frac{1}{2}$，但左侧导数为$-\frac{1}{12}$。特别地， g_D 在骨架上的限制为

$$g(x+r(P_1))+\cdots+g(x+r(P_n))-g(x+r(P_1'))-\cdots-g(x+r(P_n'))$$

只有当 $r(P_1)\dots,r(P_n)$ 和 $r(P_1')\dots,r(P_n')$ 具有相同重数时，才可能可微。□

引理 5.5.7。设 E 是几何 *GVF* K 上的一条非等势椭圆曲线。设 ϕ 表示 $K(E)$ 上典范 *GVF* 结构对应的 *GVF* 泛函。设$\mathcal{D}$ 是一个阿代尔除子，使得 $\mathcal{O}(\mathcal{D})$ 是一个典范度量化的数值平凡线丛，且 $\phi(|\mathcal{D}|)=0$。那么， $\mathcal{O}(\mathcal{D})$ 是一个挠线丛。

证明。设 $\overline{\mathcal{D}}$ 是一个阿代尔除子，使得 $\mathcal{O}(\mathcal{D})$ 是一个典范度量化的数值平凡线丛，且 $\phi(|\mathcal{D}|)=0$。将 K 替换为一个使 E 和 $\mathcal{D}$ 有定义的可数子域。设 $Q\in E(K)$ 是唯一的点，使得 $\mathcal{D}$与 $[Q]-[0]$有理等价。

注意到， E 可以在 $k(j(E))$上定义，并令 v 表示 $k(j(E))$上的 $j(E)^{-1}$-进赋值 v。将 K 表示为阿代尔曲线$(K,(\Omega,\mathcal{A},\nu),\phi)$，使得坏约化处$\Omega_{\mathrm{bad}}$ 延拓 v。用$g_{\mathcal{D}}$表示 $\mathcal{D}$ 的格林函数。令 $\mathcal{M}$ 表示与除子 $[0]$相关联的规范度量对称丰沛线丛。按照§2.3 中对极化阿代尔曲线的显式描述，我们计算得

$$\phi(|\overline{\mathcal{D}}|)=\sum_{P\in\mathrm{PDiv}(E)}|\operatorname{ord}_P(\mathcal{D})|\widehat{h}(P)+\int_\Omega\int_{E_\omega^{\mathrm{an}}}|g_{\overline{\mathcal{D}}}|c_1(\overline{\mathcal{M}}_\omega)\nu(d\omega).$$

由于被积函数非负，因此在$\mathcal{D}$ 有零点或极点的所有地方， $\widehat{h}(P)=0$。特别地，由 $\mathcal{D}$ 定义的点 $Q\in E(K)$满足$\widehat{h}(Q)=0$。另一方面，我们得出

$$\int_{\Omega_{\mathrm{bad}}}\int_{E_\omega^{\mathrm{an}}}|g_{\overline{\mathcal{D}}}|c_1(\overline{\mathcal{M}}_\omega)\nu(d\omega).$$

由于根据 [Gub10，推论 7.3]， $c_1(\mathcal{M}_\omega)$ 是 E_ω^{an}骨架上的哈尔测度，我们可推得，对于几乎所有的 $w\in\Omega_{\mathrm{bad}}$， $|g_{\mathcal{D}}|$ 在 E_w^{an}的骨架上恒为 0。令 r_w 表示在 w处到骨架的收缩映射。于是，由引理 5.5.6 可知，在几乎所有 w 坏约化处， $r_w(Q)=0$。

假设 Q 不是挠元且高度为 0。那么， $[n]Q$ 的序列是高度 0 的泛序列，因此根据定理 2.3.6，它等分布于骨架上的哈尔测度。这与以下事实矛盾：在几乎所有坏约化处， Q 到骨架的收缩映射为 0。因此， Q 是挠元。□

引理 5.5.8。设 Q 是阿贝尔簇 A上的一个数值平凡线丛，并具有亚纯多截面 s。假设截面 s 关于 $K(A)$ 上的典范 *GVF* 结构的高度为 0。若 A 具有平凡迹，则 Q 是挠元。

证明。 与引理 5.5.5 中相同的论证表明，只需考虑亚纯截面的情形。由庞加莱可约性，不失一般性，可假设 A 具有 $A_1 \times \cdots \times A_k$ 的形式。由引理 5.5.4 可得 $Q = Q_1 \boxtimes \cdots \boxtimes Q_k$。只需证明 Q_1 是挠元。为此，我们将 Q 和 s 基变换到 $A_1 \otimes K(A_2 \times \cdots \times A_k)$。这个阿贝尔簇具有平凡的$K(A_2 \times \cdots \times A_k)/k(A_2 \times \cdots \times A_k)$-迹，这是由 [Yam18，引理 A.1] 得出的；特别地，关于其典范 GVF 结构，它在 $K(A_2 \times \cdots \times A_k)$ 上无迹。由于 $K(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k)$ 上的典范 GVF 结构可由 $A_1 \otimes K(A_2 \times \cdots \times A_k)$ 的典范 GVF 得到，其中 $K(A_2 \times \cdots \times A_k)$ 配备了其典范 GVF 结构。因此，只需在 A为单簇的情形下证明该引理。

如果 Q 非平凡，那么 s 必定在 A的某个子簇上消失。该子簇的高度必为 0。根据 Bogomolov 猜想，它是阿贝尔子簇的平移。由于假设 A 是简单的，当 $\dim A > 1$ 时，这种情况不可能发生。因此，我们归结为 $A = E$ 是椭圆曲线且其 j-不变量属于 $K \setminus k$的情形。

如果 K 是阿基米德的，由引理 5.4.4 可知， s 必定是常截面，且 Q是平凡的。如果 K 是非阿基米德的，则可应用引理 5.5.7 证明 Q是挠元。□

5.6. **主要结果的证明**。

定理 1。 (BC)对特征0的几何赋值域上的每个阿贝尔簇都成立。

证明。 这由引理 5.3.1 中的无迹情形直接推出，它是引理 5.4.6 的一个特殊情形。□

定理 2。 设 G 是一个半阿贝尔簇，其阿贝尔商为 A。若(BC)对 A成立，则(BCSA) 对 G 成立。

特别地，(BCSA) 在所有特征0的全局赋值域上都成立。此外，对于阿贝尔商为椭圆曲线的半阿贝尔簇 G，(BCSA) 在任意特征的全局赋值域上都成立。

证明。 后两个断言由第一个断言和定理 1 立即得出。特征为 p 的情形成立，是因为椭圆曲线的 Bogomolov 猜想是平凡的。

还需证明第一个断言。设 $X \subset G$ 是一个小子簇。我们需要证明 X 是特殊的。根据引理 5.0.5 和引理 5.0.6，我们将问题归约到 X 具有有限稳定子且生成 G 的情形。由引理 5.5.1，只需考虑 G 是拟分裂的情形。拟分裂半阿贝尔簇的 Bogomolov 猜想已在引理 5.4.6 中得到证明。□

参考文献

[Abr94] Dan Abramovich。《半阿贝尔簇的子簇》。英文。载于：《Compositio Mathematica》90.1（1994），第 37–52 页。issn：0010-437X。网址：https: //eudml.org/doc/90266。[Ben14] Itaï Ben Yaacov。《度量赋值域的模型论性质》。英文。载于：符号逻辑杂志 79.3（2014），第 655–675 页。issn：0022-4812。doi：10.1017/jsl.2014.16。[Ben+24] Itaï Ben Yaacov、Pablo Destic、Ehud Hrushovski 和 Michał Szach- niewicz。全局赋值域：基础。2024。arXiv：2409.04570[math.LO]。[BH22] Itaï Ben Yaacov 和 Ehud Hrushovski。全局赋值函数域：存在闭包。预印本，arXiv：2212.07269 [math.LO]（2022）。2022。网址：https://arxiv.org/abs/2212.07269。[Bil97] Yuri Bilu。《代数环面上小点的极限分布》。英文。载于：《Duke Math. J.》89.3（1997），第 465–476 页。issn：0012-7094。doi：10.1215/S0012-7094-97-08921-3。[Can+21] Serge Cantat、Ziyang Gao、Philipp Habegger 和 Junyi Xie。《几何 Bogomolov 猜想》。英文。载于：《Duke Math. J.》170.2（2021），第 247–277 页。issn：0012-7094。doi：10.1215/00127094-2020-0044。[Cha00] Antoine Chambert-Loir。《半阿贝尔簇上的小高度点》。法文。载于：Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.（4）33.6（2000），第 789–821 页。issn：0012-9593。doi：10.1016/S0012- 9593(00)01053-3。网址：https://eudml.org/doc/82534。[Che11] Huayi Chen。《算术体积函数的可微性》。载于：伦敦数学会杂志 84.2（2011 年 7 月），第 365–384 页。issn：0024-6107。doi：10.1112/jlms/jdr011。网址：https://doi.org/10.1112/jlms/jdr011。[CM18] Huayi Chen 和 Atsushi Moriwaki。《非阿基米德域上半正可逆层的延拓性质》。载于：Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.（5）18.1（2018），第 241–282 页。issn：0391-173X,2036- 2145。[CM20] Huayi Chen 和 Atsushi Moriwaki。Adelic 曲线上的 Arakelov 几何。Springer Singapore，2020。doi：https://doi.org/10.1007/978-981-15-1728-0。[CM21] Huayi Chen 和 Atsushi Moriwaki。Adelic 曲线上的算术交理论。2021。arXiv：2103.15646 [math.AG]。[CM22] Huayi Chen 和 Atsushi Moriwaki。《Adelic 曲线上的等分布定理》。载于：arXiv:2209.11365v1（2022）。[CM24] Huayi Chen 和 Atsushi Moriwaki。Adelic 曲线上的 Arakelov 几何中的正性：Hilbert-Samuel 公式与等分布定理。Springer，2024。[Con06] Brian Conrad。《Chow 的 K/k-像与 K/k-迹，以及 Lang-Néron 定理》。英文。载于：Enseign. Math.（2）52.1-2（2006），第 37–108 页。issn：0013-8584。[DeM16] Laura DeMarco。《分岔、交与高度》。英文。载于：代数与数论 10.5（2016），第 1031–1056 页。issn：1937-0652。doi：10.2140/ant.2016.10.1031。

[DHS24] Pablo Destic、Nuno Hultberg 和 Michał Szachniewicz。《族中的高度连续性与托里克簇中的完全交》。2024。arXiv：2412.15988 [math.NT]。网址：https://arxiv.org/abs/2412. 15988。[DG61] Jean Dieudonné 和 Alexander Grothendieck。“代数几何基础”。载于：高等科学研究所数学出版物 4、8、11、17、20、24、28、32（1961–1967）。[DGH22] Vesselin Dimitrov、Ziyang Gao 和 Philipp Habegger。“相对 Bogomolov 猜想的一个推论”。英文。载于：《数论杂志》230（2022），第 146–160 页。ISSN：0022-314X。DOI：10.1016/j.jnt.2021. 03.028。[FG24] Charles Favre 和 Chen Gong。非阿基米德方法与动力系统退化。预印本，arXiv：2406.15892 [math.DS]（2024）。2024。网址：https://arxiv.org/abs/2406.15892。[Gao20] Ziyang Gao。“Betti 映射的泛秩与非典型交”。英文。载于：Compositio Mathematica 156.12（2020），第 2469–2509 页。ISSN：0010-437X。DOI：10.1112/S0010437X20007435。[GGK21] Ziyang Gao、Tangli Ge 和 Lars Kühne。一致 Mordell-Lang 猜想。预印本，arXiv：2105.15085 [math.NT]（2021）。2021。网址：https://arxiv.org/abs/2105.15085。[Gro61] Alexander Grothendieck。“代数几何中的构造技术与存在性定理 IV：Hilbert 概形”。法文。载于：布尔巴基研讨班：1960/61 年，报告 205–222。布尔巴基研讨班 6。报告：221。法国数学会，1961，第 249–276 页。网址：https://www.numdam.org/item/SB_1960-1961__6__249_0/。[Gub97] Walter Gubler。“全局赋值域上的子簇高度”。英文。载于：算术几何。研讨会论文集，意大利科尔托纳、阿雷佐，1994 年 10 月 16–21 日。剑桥：剑桥大学出版社，1997，第 190–227 页。ISBN：0-521-59133-3。 MGub[Walter Gubler。“阿贝尔簇上的非阿基米德典范测度”。英文。载于：Compositio Mathematica 146.3（2010），第 683–730 页。ISSN：0010-437X。DOI：10.1112/S0010437X09004679。10] GY[Ruoyi Guo 和 Xinyi Yuan。数值有效锥与连续极小值：一个例子。2025。arXiv：2511.25] math.AG12509 [。网址：https://arxiv.org/abs/2511.12509。]Hul[Nuno Hultberg。托里克丛的阿拉克洛夫几何：Okounkov 体与 BKK。2024。arXiv：2412.24] math.NT04169 [。网址：https://arxiv.org/abs/2412.04169。]JX[Ariyan Javanpeykar 和 Junyi Xie。“伪双曲簇的有限性性质”。英文。载于：《国际数学研究通知》2022.3（2022），第 1601–1643 页。ISSN：1073-7928。DOI：10.1093/imrn/rnaa168。22] JS[Robin de Jong 和 Farbod Shokrieh。典范局部高度与 Berkovich 骨架。预印本，arXiv：2405.24] math.NT17826 [（2024）。2024。网址：https://arxiv.org/abs/2405.17826。] Liu[Long Liu。1-动机的 Chow 迹与 Lang-Néron 群。2024。arXiv：2404.24] math.AG13200 [。网址：https://arxiv.org/abs/2404. 13200。

[LY25] Wenbin Luo 和 Jiawei Yu。半阿贝尔簇的几何 Bogomolov 猜想。2025。arXiv：2505 .07193 [math.AG]。网址：https://arxiv.org/abs/2505.07193。[Luo 21] Yusheng Luo。“有理映射的极限、 $\mathbb{R}$-树与重心扩张”。英文。载于：《Adv. Math.》393（2021）。编号 108075，共 46 页。ISSN：0001-8708。DOI：10.1016/j.aim.2021.108075。[Luo22] Yusheng Luo。“通过重心扩张研究有理映射的树与长度谱，以及 Berkovich 空间”。英文。载于：《Duke Math. J.》171.14（2022），第 2943–3001 页。ISSN：0012-7094。DOI：10.1215/00127094-2022-0056。[MS25] Niki Myrto Mavraki 和 Harry Schmidt。“关于分裂有理映射族的动力学 Bogomolov 猜想”。英文。载于：《Duke Math. J.》174.5（2025），第 803–856 页。ISSN：0012-7094。DOI：10 .1215/00127094 - 2024 - 0041。网址：projecteuclid . org / journals / duke - mathematical-journal/volume-174/issue-5/On-the-dynamical- Bogomolov - conjecture - for - families - of - split - rational / 10 . 1215/00127094-2024-0041.full。[MY25] Niki Myrto Mavraki 和 Jit Wu Yap。定量动力学 Zhang 基本不等式与 Bogomolov 型问题。2025。arXiv：2512.07655 [math.NT]。网址：https://arxiv.org/abs/2512.07655。[Mor85] Laurent Moret-Bailly。阿贝尔簇族。（阿贝尔簇族）。法文。第 129 卷。Astérisque。法国数学会（SMF），巴黎，1985。[Mor14] Atsushi Moriwaki。阿拉克洛夫几何。英文。第 244 卷。数学专著译丛。普罗维登斯，罗得岛：美国数学会（AMS），2014。ISBN：978-1-4704-1074-2。[MV25] Jackson S. Morrow 和 Paul Vojta。幺幂秩为 1 的交换代数群上的非阿基米德 Green–Griffiths–Lang–Vojta 猜想。预印本，arXiv：2502.10379 [math.AG] （2025）。2025。网址：https://arxiv.org/abs/2502.10379。[MFK94] D. Mumford、J. Fogarty 和 F. Kirwan。几何不变量理论。英文。第 3 次增订版。第 34 卷。数学与相关领域成果。柏林：Springer-Verlag，1994。ISBN：3-540-56963-4。DOI：10.1007/978-3-319-65907-7。网址：hdl.handle.net/2433/102881。[Séd23] Antoine Sédillot。“阿代尔曲线上相对 χ-体积的可微性”。载于：arXiv:2303.03377（2023）。[Séd25] Antoine Sédillot。拓扑阿代尔曲线：代数覆盖、数论几何与闭点高度。2025。arXiv：2503.20156[math.NT]。网址：https://arxiv.org/abs/2503.20156。[Sta23] Stacks 项目作者。Stacks 项目。https : / / stacks . math.columbia.edu。2023。[Sza23] Michał Szachniewicz。通过阿拉克洛夫几何证明 $\mathbb{Q}$ 作为全局赋值域的存在闭性。2023。arXiv：2306.06275 [math.LO]。[XY22] Junyi Xie 和 Xinyi Yuan。“任意特征下的几何 Bogomolov 猜想”。英文。载于：《Invent. Math.》229.2（2022），第 607–637 页。ISSN：0020-9910。DOI：10.1007/s00222-022-01112-1。[Yam18] Kazuhiko Yamaki。“函数域上阿贝尔簇的迹与几何 Bogomolov 猜想”。英文。载于：《J. Reine Angew.

数学. 741 (2018), 第 133–159 页。ISSN：0075-4102。doi：10.1515/crelle- 2015-0086.[Yap25] Jit Wu Yap。《有理映射小点的数量》。2025。arXiv：2510.12039 [math.NT]。网址：https://arxiv.org/abs/2510.12039.[Yua21] Xinyi Yuan。《算术大性与一致 *Bogomolov* 型结果》。预印本, arXiv:2108.05625 [math.NT] （2021）。2021。网址：https://arxiv.org/abs/2108.05625.[YZ24] Xinyi Yuan 和张寿武。《准射影簇上的阿代尔线丛》。2024。arXiv：2105.13587 [math.NT].[Zha98] 张寿武。“阿贝尔簇上小点的等分布”。英文。载于：数学年刊（第二辑）147.1 (1998), 第 159–165 页。ISSN：0003-486X。doi：10.2307/120986.[Zha95] 张寿武。“算术簇上的正线丛”。载于：美国数学会杂志8（1995年1月）, 第 187–187 页。doi：10.2307/2152886。

西湖大学理论科学研究院，中国浙江省杭州市西湖区三墩镇敦裕路600号，邮编310030电子邮箱地址：nuno.hultberg@outlook.com