arXiv:2601.04987v1 [math.CA] 8 Jan 2026

局部狄利克雷积分及其应用

OMAR EL-FALLAH、KARIM KELLAY 和 HOUSSAME MAHZOULI

Abstract. 我们研究距离函数的局部狄利克雷积分及其在调和狄利克雷空间中的性质。我们给出距离函数局部狄利克雷积分的估计，并据此研究它们是否属于狄利克雷空间的乘子代数。我们给出闭子集为极集的充分条件，并考察调和狄利克雷空间中的循环性。

1. Introduction and main results

本文研究局部狄利克雷积分与距离函数之间的关系。我们的主要目标是分析这些函数是否属于经典狄利克雷空间的乘子代数，以及它们在研究调和狄利克雷空间循环性方面的作用。

设 f 是 $L^1(\mathbb{T})$ 中的一个函数，其中 $\mathbb{T}$ 表示单位圆。我们假设 f的泊松变换的非切向极限 $f^*(\zeta)$ 存在。 f 的局部狄利克雷积分定义为

$$\mathcal{D}_\zeta(f) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{|f^*(\xi)-f^*(\zeta)|^2}{|\xi-\zeta|^2}|d\xi|.$$

注意， $\mathcal{D}_\zeta(f)$ 可能为无穷大。如果 $f^*(\zeta)$ 不存在，我们令 $\mathcal{D}_\zeta(f) = \infty$。该公式由 J. Douglas 在研究经典狄利克雷空间中的极小曲面问题（即 Plateau 问题）时提出。后来，Richter 和 Sundberg[34], 对其进行了研究，并将其扩展到典范分解中的 f，从而推广了 L. Carleson 的一项结果 [14]。此外，他们还刻画了调和狄利克雷空间中的移位不变子空间 [35]。

为了陈述我们的结果，我们先引入一些记号。设 μ 是 $\mathbb{T}$上的一个正博雷尔测度。调和狄利克雷空间 $\mathcal{D}(\mu)$ 由哈代空间 H^2 中的所有函数 f 组成，这些函数的局部狄利克雷积分关于 μ可积。该空间配备以下范数

$$\|f\|_\mu^2 := \|f\|_{H^2}^2 + \mathcal{D}_\mu(f),$$

其中

$$\mathcal{D}_\mu(f) := \int_{\mathbb{T}} \mathcal{D}_\zeta(f)\, d\mu(\zeta).$$

注意到 $\mathcal{D}(\mu) \subset H^2$，因此径向极限 $f^*(\zeta) = \lim_{r\to 1^-} f(r\zeta)$ 在 $\mathbb{T}$ 上几乎处处存在。为简便起见，我们将用 f代替 f^*。当 $\mathrm{d}\mu(\zeta) = \mathrm{d}m(\zeta)/2\pi$ 时， $\mathbb{T}$ 上的归一化弧测度 $\mathcal{D}(\mu)$ 退化为经典狄利克雷空间 $\mathcal{D}$，它由所有

2020年数学主题分类。46E22，31A05，31A15，31A20，47B32。关键词和短语。
狄利克雷空间、乘子、Carleson 测度。

在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的全纯函数 f 组成，这些函数的导数 f' 关于面积测度平方可积。Beurling [9] 给出了哈代空间不变子空间的刻画；然而，对于狄利克雷空间，情况则有所不同。Richter [37] 在研究 2-等距算子及狄利克雷空间移位不变子空间的刻画时，引入了空间 $\mathcal{D}(\mu)$；另见 [38, 35, 23]。更确切地说，考虑狄利克雷空间 $\mathcal{D}$ 的移位不变子空间 $\mathcal{M}$，Richter 建立了以下关键性质：

- 维数$(\mathcal{M} \ominus z\mathcal{M}) = 1$。
- $\mathcal{M} = \varphi\mathcal{D}(\mu_\varphi)$，其中 $\varphi \in \mathcal{M} \ominus z\mathcal{M}$、$\|\varphi\|_{\mathcal{D}} = 1$ 且 $\mathrm{d}\mu_\varphi = |\varphi^*|^2 \mathrm{d}m$。

注意，函数 φ 是 $\mathcal{D}$的乘子，而 φ 是关于 $\mathcal{D}$的极值函数，也就是说，

$$\|\varphi\|_{\mathcal{D}} = 1, \qquad \langle \varphi, z^n \varphi \rangle_{\mathcal{D}} = 0, \quad n \geq 1.$$

关于狄利克雷空间的诸多结果，可参阅专著 [4, 23]；此外，Aleman、Hartz、McCarthy 和 Richter 的近期论文也值得关注，尤其是关于狄利克雷空间中斯米尔诺夫分解的研究 [1, 2, 3]。

研究狄利克雷空间离不开对空间 $\mathcal{D}(\mu)$ 的研究。一个尤为重要的情形是 $\mathcal{D}(\delta_\zeta)$，其范数由局部狄利克雷积分给出。在此背景下，我们为一类称为距离函数的外函数的局部狄利克雷积分建立了新的估计。这些函数的特征是，其边界值$|f^*(\zeta)|$仅取决于 $\mathrm{d}(\zeta, E)$，即从 ζ到 E的距离。更具体地说，给定一个勒贝格测度为零的闭集 $E \subset \mathbb{T}$ 和一个连续函数 $\omega : (0, \pi] \to \mathbb{R}^+$ 满足

$$\log \omega(\mathrm{d}(\cdot, E)) \in L^1(\mathbb{T}),$$

我们将外函数 $f_{\omega,\ E}$ 定义为

$$|f^*_{\omega,E}(\zeta)| = \omega(\mathrm{d}(\zeta, E)) \quad \text{a.e.} \tag{1}$$

Carleson [15] 此前研究过这类函数，并构造了在边界上光滑且零点集预先给定的外函数。我们的主要结果给出了这些距离函数的局部狄利克雷积分估计；当 E 是 H¨older 类的插值集时，还给出了明确的界。

这促使我们研究这些函数是否属于 Dirichlet 空间的乘子代数。与 Hardy 空间或伯格曼空间不同，在这些空间中乘子就是有界全纯函数，而 Dirichlet 空间的乘子刻画则更为复杂。Stegenga [39]根据边界值的对数容量刻画了 Dirichlet 空间的 Carleson 测度。Arcozzi、Rochberg 和 Sawyer [6, 7, 4], 提出的另一种刻画，则将再生核与 Carleson 盒联系起来。我们利用这些结果找出属于乘子代数的距离函数实例。

最后，我们探讨 $\mathcal{D}(\mu)$ 中的循环性。一个核心问题是刻画 $\mathcal{D}(\mu)$ 中的循环函数，即那些其多项式倍函数在 $\mathcal{D}(\mu)$ 中构成稠密子集的函数。$\mathcal{D}(\mu)$ 中的任何循环函数都必须是外函数，并且其边界零点集的 c_μ-容量为零，其中 c_μ是与 $\mathcal{D}(\mu)$ 相关联的自然容量。关于 $\mathcal{D}(\mu)$ 的 Brown-Shields 猜想 [12] 表明，这一条件也可能是充分的。尽管这一猜想已得到广泛

研究于经典狄利克雷空间中（例如，参见 [25, 26, 27, 28, 30] 及其中的参考文献），但对于一般测度 μ，即使是连续函数的情形，这一问题仍未解决。不过，研究已取得一些进展： [21] 证明了该猜想对具有可数支集的测度成立， [19], 则给出了该猜想同样成立的新例子。在本文中，我们进一步给出一些测度和集合的例子，使得该猜想对它们成立。

1.1. 距离函数的局部狄利克雷积分估计。我们的主要结果给出了距离函数的局部狄利克雷积分估计 $f_{\omega,\ E}$。更确切地说，设 E 为单位圆 $\mathbb{T}=\partial\mathbb{D}$ 的闭子集，若满足下列条件，则称 E 为 Carleson 集：

$$\int_{\mathbb{T}} \log \mathrm{d}(\zeta, E)\,|\mathrm{d}\zeta| > -\infty.$$

Carleson 集是某个 Hölder 连续解析函数的零点集。对于 $\alpha>0$，我们将如下距离函数与这样的集合关联起来，该距离函数是由下式给出的外函数：

$$|f^*_{\alpha,E}(\zeta)| = \mathrm{d}(\zeta,E)^\alpha \quad \text{a.e. on } \mathbb{T}.$$

Carleson [15] 关注距离函数是否属于狄利克雷空间。他证明了 $f_{\alpha,\ E}\in\mathcal{D}$ 对于 $\alpha\geq 3$。设 $A^\infty(\mathbb{D}) = \mathrm{Hol}(\mathbb{D})\cap\mathcal{C}^\infty(\mathbb{D})$。Taylor 和 Williams [41] 证明，当 E 是 Carleson 集时，存在一个外函数$f\in A^\infty(\mathbb{D})$，使得 $f^{(n)}|_E=0$。显然， $f\in\mathcal{M}(\mathcal{D})$ 属于狄利克雷空间的乘子代数。在 [26], 中，作者研究了距离函数 $f_{\omega,\ E}$属于狄利克雷空间的条件。设 ω 为递增函数，并且对于某个$\gamma>2$， $\omega(t^\gamma)$ 是凹函数；他们利用 Carleson 公式 [14] 证明了：若 $f_{\omega,\ E}\in\mathcal{D}$，则

$$\int_{\mathbb{T}} \mathrm{d}(\zeta,E)\omega'(\mathrm{d}(\zeta,E))^2|d\zeta| < \infty, \tag{2}$$

特别地，若$\alpha>\frac{1}{2}$，则 $f_{\alpha,\ E}\in\mathcal{D}$，并且可以构造一个 Carleson 集 E，使得 $f_{1/2,\ E}\notin\mathcal{D}$。本文研究距离函数属于乘子代数的情形。为了实现最小增长，我们需要考虑更规则的 Carleson 集。令 $I(\zeta,E)$ 表示包含 ζ 的 $\mathbb{T}\setminus E$ 的连通分支，并且

$$\Gamma(\zeta,E) := \{\zeta'\in\mathbb{T}\setminus I(\zeta,E) : \mathrm{d}(\zeta',E)\leq \mathrm{d}(\zeta,E)\}.$$

闭集 $E\subset\mathbb{T}$ 称为 $\mathcal{L}_1$-集（分别称为 $\mathcal{L}_2$-集），如果对任意 $\zeta\in\mathbb{T}\setminus E$，以下不等式成立：

$$\int_{\Gamma(\zeta,E)} \frac{\log\left(\mathrm{d}(\zeta,E)/\mathrm{d}(\zeta',E)\right)}{|\zeta-\zeta'|^2}\,|d\zeta'| \lesssim \frac{1}{\mathrm{d}(\zeta,E)}, \quad \zeta\in\mathbb{T}\setminus E. \tag{$\mathcal{L}_1$}$$

$$\int_{\Gamma(\zeta,E)} \frac{\log^2\left(\mathrm{d}(\zeta,E)/\mathrm{d}(\zeta',E)\right)}{|\zeta-\zeta'|^2}\,|d\zeta'| \lesssim \frac{1}{\mathrm{d}(\zeta,E)}, \quad \zeta\in\mathbb{T}\setminus E. \tag{$\mathcal{L}_2$}$$

H¨older 类的插值集和广义 Cantor 集都是这类集合的例子。这些集合满足以下 $\mathcal{K}$-条件（根据 Kotochigov）。一个闭集 $E\subset\mathbb{T}$

称为 一个 $\mathcal{K}$-集，如果存在正常数 c_E，使得对于任意弧 $I \subset \mathbb{T}$ ，

$$\sup_{\zeta \in I} \mathrm{d}(\zeta, E) \geq c_E |I|. \tag{$\mathcal{K}$}$$

注意，若 E 是 $\mathcal{K}$-集，则对某个 $\beta > 0$，$\mathrm{d}(\cdot, E)^{-\beta}$ 满足 Muckenhoupt 条件 A_2，因此 $\mathcal{L}_1$ 条件也成立，[11]。

现在考虑满足 $\log \omega(\mathrm{d}(\cdot, E)) \in L^1(\mathbb{T})$ 的 E。我们将式（1）给出的外函数$f_{\omega,\, E}$ 与之关联。由此得到以下结果，它对距离函数的局部狄利克雷积分给出了精确估计。

定理 1.1. 设 ω 是一个递增函数，且对某个 $\gamma > 2$， $\omega(t^\gamma)$ 是凹函数，并且 $t\omega'(t)/\omega(t)$ 是递增的。设 E 是一个由 $\mathbb{T}$ 构成的 Carleson 集。那么

(1) 设 $\alpha \in (0, 1/2)$，则

$$\mathcal{D}_\zeta(f_{\alpha,E}) \asymp \mathrm{d}^{2\alpha-1}(\zeta, E) \text{ for all } \zeta \in \mathbb{T} \iff E \text{ is an } \mathcal{L}_1\text{-set.} \tag{3}$$

(2) 如果 E 是一个 $\mathcal{L}_2$ 集，那么

$$\mathcal{D}_\zeta(f_{\omega,E}) \asymp \mathrm{d}(\zeta, E)\omega'(\mathrm{d}(\zeta, E))^2, \qquad \zeta \in \mathbb{T} \tag{4}$$

(3) 此外，如果 $x\omega'(x) \asymp x^2\omega'(x^2)$，那么

$$\mathcal{D}_\zeta(f_{\omega,E}) \asymp \mathrm{d}(\zeta, E)\omega'(\mathrm{d}(\zeta, E))^2 \text{ for all } \zeta \in \mathbb{T} \iff E \text{ is an } \mathcal{L}_2\text{-set.} \tag{5}$$

为证明这一结果，我们使用狄利克雷空间中外函数的 Richter-Sundberg 公式 7。条件 $\mathcal{L}$ 是得到这一结果所必需的。我们可以注意到，在附加集合属于类 $\mathcal{L}$ 的假设下，可以恢复范数公式（2）。然而，通过考虑二重积分并应用我们的估计，实际上，对于任意 Carleson 集，我们都可以重新得到公式（2），而无需要求它属于类 $\mathcal{L}$。

1.2. 狄利克雷空间中的乘子。定义在 $\mathbb{D}$ 上的解析函数 f 是 $\mathcal{D}$ 的乘子，如果 $f\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$。换言之，函数 $f \in \mathcal{D}$ 是 $\mathcal{D}$ 的乘子，当且仅当

$$\|fg\|_{\mathcal{D}} \lesssim \|g\|_{\mathcal{D}}, \qquad g \in \mathcal{D}.$$

由 $\mathcal{D}$ 的乘子组成的代数 $\mathcal{M}(\mathcal{D})$ 并不容易描述。将其直接改写为关于 $\mathcal{D}$ 的 Carleson 测度的条件（即，对于这些测度 μ ，嵌入 $\mathcal{D} \hookrightarrow L^2(\mathbb{D}, \mu)$ 是连续的）表明，当且仅当 f 有界且测度 $d\mu(z) = |f'(z)|^2\, dA(z)$ 是 $\mathcal{D}$ 的 Carleson 测度时， f 才是 $\mathcal{D}$ 的乘子。

正的 B orel 测度 μ 在 $\overline{\mathbb{D}}$上称为狄利克雷空间的 Carleson 测度 i f

$$\int_{\overline{\mathbb{D}}} |g(z)|^2 \mathrm{d}\mu(z) \lesssim \|g\|_{\mathcal{D}}^2 \qquad g \in \mathcal{D}.$$

Carleson 测度和乘子对于 $\mathcal{D}$ 和的研究出现在各种背景中，尤其是在刻画乘子和插值序列 [40], 以及研究冠定理 [17, 16, 42]方面。这也与狄利克雷空间的弱乘积 [3]有关。Hartz [29] 最近推广了 [33], 的结果，证明弱乘积的乘子

代数与狄利克雷空间的乘子代数一致，且范数相等。多年来，识别 Carleson 测度一直是众多作者广泛研究的主题。Arcozzi、Rochberg 和 Sawyer 给出的 Carleson 测度刻画——定理5.3，另见 [4, 5, 6, 7], ——将使我们能够给出属于乘子代数的距离函数的例子。在 [24], 中，有一种仅基于“Carleson 盒”的刻画，其性质与哈代空间中所采用的刻画相似。我们将研究距离函数$f_{\omega,E}$ 是否属于 $\mathcal{M}(\mathcal{D})$。这将使我们能够提供其他具体的、具有最小增长的 $\mathcal{D}$ 的乘法函数例子，见 [8], ，其中还给出了更多例子。由于 $\mathcal{M}(\mathcal{D})$包含于$\mathcal{D}$ 以及有界全纯函数的代数 H^∞中，我们只关注外函数，因为属于狄利克雷空间的唯一内函数是有限布拉施克乘积。

现在陈述两个结果：第一个涉及特定函数 $f_{\alpha,\ E}$，第二个适用于一般情形。

定理 1.2. 设 $\alpha \in (0, 1/2)$，且 $E \in \mathcal{L}_1$。以下断言等价：

(1) $f_{\alpha,\ E} \in \mathcal{M}(\mathcal{D})$ (2) 测度 $\mathrm{d}\mu_{\alpha,\ E} := \mathrm{d}(\zeta, E)^{2\alpha-1}|\mathrm{d}\zeta|$ 是关于 $\mathcal{D}$ 的 Carleson 测度。(3) 对所有弧 I，以下不等式成立：

$$\int_I \int_I \log \frac{1}{|\zeta - \xi|}\, \mathrm{d}\mu_{\alpha,E}(\zeta)\mathrm{d}\mu_{\alpha,E}(\xi) \lesssim \mu_{\alpha,E}(I).$$

定理 1.3. 设 ω 是一个递增函数，使得对某个 $\gamma > 2$， $\omega(t^\gamma)$ 是凹函数，且 $t\omega'(t)/\omega(t)$ 是递增函数。设 $E \in \mathcal{L}_2$。以下断言等价：

(1) $f_{\omega,\ E} \in \mathcal{M}(\mathcal{D})$ (2) 测度 $\mathrm{d}\mu_{\omega,\ E} := \mathrm{d}(\zeta, E)\omega'(\mathrm{d}(\zeta, E))^2\, |\mathrm{d}\zeta|$ 是关于 $\mathcal{D}$ 的 Carleson 测度。(3) 对所有弧 I，以下不等式成立：

$$\int_I \int_I \log \frac{1}{|\zeta - \xi|}\, \mathrm{d}\mu_{\omega,E}(\zeta)\mathrm{d}\mu_{\omega,E}(\xi) \lesssim \mu_{\omega,E}(I).$$

回顾一下，函数 $f_{\omega,E}$ 属于狄利克雷空间 $\mathcal{D}$ 当且仅当

$$\int_{\mathbb{T}} \mathrm{d}(\zeta, E)\omega'(\mathrm{d}(\zeta, E))^2\ |\mathrm{d}\zeta| < \infty.$$

作为定理1.2和1.3的直接推论，我们得到一个简单的几何条件，将集合 E 与函数 ω联系起来。

推论 1.4. 设 E 是 $\mathbb{T}$的一个闭子集，且令 $\alpha \in (0, 1/2)$。在与上文对 ω 相同的假设下，我们有：

(1) 若 $E \in \mathcal{L}_1$，则只要满足条件，$f_{\alpha,E} \in \mathcal{M}(\mathcal{D})$

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{\log 1/\mathrm{d}(\zeta, E)}{\mathrm{d}(\zeta, E)^{1-2\alpha}}\, |\mathrm{d}\zeta| < \infty.$$

(2) 若 $E \in \mathcal{L}_2$，则只要满足条件，$f_{\omega,E} \in \mathcal{M}(\mathcal{D})$

$$\int_{\mathbb{T}} \mathrm{d}(\zeta, E) \left(\omega'(\mathrm{d}(\zeta, E))\right)^2 \log \frac{1}{\mathrm{d}(\zeta, E)} \, |\mathrm{d}\zeta| < \infty.$$

设 $(\zeta_n)_{n\geq 1}$ 是一列实数，满足对所有 n 都有 $0 < \zeta_n < 1/2$。定义

$$E_{(\zeta_n)} = \left\{ \exp\left(2i\pi \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \zeta_1 \dots \zeta_{n-1}(1-\zeta_n), \quad \varepsilon_n = 0 \text{ or } 1\right\}.$$

集合 $E_{(\zeta_n)}$ 表示与数列 (ξ_n) 对应的完美集；有关此类集合的构造，参见 [31]。当对所有 n，都有 $\zeta_n = \zeta$，其中某个固定的 $\zeta \in$ 属于 $(0, 1/2)$ 时，我们得到常比率为 ζ 的完美对称集 E_ζ。一个著名的例子是经典三进制康托集，对应于 $\zeta = \frac{1}{3}$。回顾一下，$\dim(E_\zeta)$，即 E_ξ 的豪斯多夫维数，等于 $(\log 2)/\log(1/\xi)$。广义康托集给出了重要的 $\mathcal{L}$ 集例子。事实上，若 $\limsup_n \zeta_n < 1/2$，则 $E_{(\zeta_n)}$ 是一个 $\mathcal{L}_2$ 集，参见引理 3.3 和命题 3.4。我们利用狄利克雷空间中 Carleson 测度的单盒条件定理 5.4（见 5.4），推导距离函数 $f_{\omega,E}$ 的乘子条件，其中 E 是一个具有正对数容量的广义 Cantor 集。我们证明，在这种情况下，距离函数 $f_{\omega,E}$ 是乘子，当且仅当它属于狄利克雷空间，参见推论 5.5。特别地，我们有以下结果

推论1.5. 设 $\xi \in (0, 1/2)$，并设 $E = E_\xi$ 为常比率为 ξ 的完美对称集。设 $\alpha \in (0, 1/2)$，以下断言等价：

(1) $f_{\omega,E} \in \mathcal{D}$, (2) $f_{\omega,E} \in \mathcal{M}(\mathcal{D})$,

(3) $\int_0^1 \omega'(t)^2 t^{1-\dim(E_\zeta)} \mathrm{d}t < \infty.$

这一结果尤其使我们能够恢复幂距离外函数 f_{α,E_ξ} 属于狄利克雷空间及其乘子代数的阈值：

$$f_{\alpha,E_\xi} \in \mathcal{D} \iff f_{\alpha,E_\xi} \in \mathcal{M}(\mathcal{D}) \iff \alpha > \frac{1}{2}\dim(E_\xi).$$

1.3. 狄利克雷空间中的循环性。我们还关注狄利克雷空间 $\mathcal{D}(\mu)$ 中的循环性。一个重要问题是确定满足以下条件的函数 $f \in \mathcal{D}(\mu)$

$$\overline{\{pf \ : \ p \text{ is a polynomial}\}} = \mathcal{D}(\mu).$$

这些函数被称为 $\mathcal{D}(\mu)$ 的循环函数。当 $\mu = 0$ 时，空间 $\mathcal{D}(\mu)$ 退化为哈代空间 H^2。贝尔林定理 [9] 指出，H^2 中的循环向量就是外函数。然而，已知在 $\mathcal{D}(\mu)$ 中存在外函数，它们在 $\mathcal{D}(\mu)$ 中并非循环函数。事实上，这类函数的循环性取决于其径向极限在单位圆上的零点分布。当 $\mathrm{d}\mu(\zeta) = \mathrm{d}m(\zeta)/2\pi$ 时，$\mathbb{T}$ 上的归一化弧长测度为 $\mathcal{D}(\mu) = \mathcal{D}$，请回顾 Beurling [23], 所展示的结果：狄利克雷空间中函数的径向极限几乎处处存在。布朗 – 希尔兹猜想 [12] 断言，$f \in \mathcal{D}$ 是循环函数，当且仅当 f 是外函数，且其所有零点的集合

径向极限 f^* 的对数容量为零。在经典狄利克雷空间的背景下， [26, 27] 对某些 Carleson 集给出了该猜想的肯定答案，并且在 [19, 21, 22, 25, 28] 对某些 $\mathcal{D}(\mu)$ 也给出了肯定答案。

需要注意的是，若 f 是 $\mathcal{D}(\mu)$ 的循环元，则 f 是外函数，且 $c_\mu(\mathcal{Z}_{\mathbb{T}}(f)) = 0$，其中

$$\mathcal{Z}_{\mathbb{T}}(f) = \left\{\zeta \in \mathbb{T} : \inf_{r\to 1} |f(r\zeta)| = 0\right\},$$

而 c_μ 是与 $\mathcal{D}(\mu)$ 相关的容量。对于 $\mathcal{D}(\mu)$，Brown-Shields 猜想 [12] 断言反命题也成立。

给定 $E \subset \mathbb{T}$ 和 $t \geq 0$，我们定义

$$E_t := \{\zeta \in \mathbb{T} : \mathrm{d}(\zeta, E) \leq t\},$$

以下定理是我们的主要结果。它推广了 [25, 定理 1.1], ，该定理针对经典狄利克雷空间 $\mathcal{D}$.得到了证明

定理 1.6. 设 $f \in \mathcal{D}(\mu) \cap A(\mathbb{D})$ 为外函数。假设 $E = \mathcal{Z}_{\mathbb{T}}(f)$ 是一个 $\mathcal{K}$-集，并且

$$\mu(E_t) = O\big(h(t)\big), \quad t \to 0^+,$$

其中，对于某个 $\sigma > 0$， $h(t)/t$ 递减，而 $h(t)/t^\sigma$ 递增。如果

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{h(t)} = +\infty, \tag{6}$$

那么 f 在 $\mathcal{D}(\mu)$ 中是循环的。

显然，由于 f 在 $\mathcal{D}(\mu)$ 中是循环的，(6) 蕴含 $c_\mu(E) = 0$。我们将在定理 6.3 中更一般地证明，若集合 E 是一个 $\mathcal{L}_2$ 集且满足 (6)，那么 E 是一个极性集；等价地说，它的容量为零。

本文的结构安排如下。在下一节中，我们将介绍一些关于距离函数的初等结果，并给出距离函数的局部狄利克雷积分的第一个估计。在第 3 节中，我们引入类 $\mathcal{L}$ ，并说明 H¨older 空间的插值集可作为例子。我们还基于狄利克雷空间中外函数的 Richter–Sundberg 公式，推导 $f_{\omega,\,E}$ 和 $f_{\alpha,\,E}$ 的局部狄利克雷积分的精确估计。当 $\mathrm{d}(\cdot, E)^{-\sigma} \in L^1(\mathbb{T})$ 时，我们得到距离函数 $f_{\omega,\,E}$ 的局部狄利克雷积分估计。第 4 节专门讨论距离函数属于 $\mathcal{D}(\mu)$ 的问题。在第 5 节中，我们应用 Arcozzi 关于 Carleson 测度的定理，推导距离函数为乘子的充要条件。利用对距离函数局部狄利克雷积分的估计，我们在这一框架下得到了更精细的结果。我们还利用狄利克雷空间中 Carleson 测度的单盒条件，建立距离函数 $f_{\omega,\,E}$ 的乘子条件，其中 E 是一个具有正对数容量的广义 Cantor 集。最后，在末节中，我们先给出单位圆的闭子集为极集的一个充分条件。随后，我们研究空间 $\mathcal{D}(\mu)$ 中的循环性，得到将狄利克雷空间经典情形加以推广的结果。

最后说明一下记号。我们用 $A \lesssim B$ 表示存在一个与相关变量无关的常数 $C > 0$，使得 $A \leq CB$。类似地，$A \asymp B$ 表示 $A \lesssim B$ 和 $B \lesssim A$ 均成立。

2. 局部狄利克雷积分的初步估计

设 H^2 为哈代空间。每个函数 $f \in \mathcal{D}$ 在 $\mathbb{T}$ 上几乎处处都有非切向极限。若 f 在 $\zeta \in \mathbb{T}$ 处的非切向极限存在，我们用 $f(\zeta)$ 表示该极限。若函数 $f \in H^2$ 具有如下形式，则称其为外函数:

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \log \varphi(\zeta)\, |\mathrm{d}\zeta|\right), \qquad |z| < 1,$$

其中，φ 是 $L^1(\mathbb{T})$ 中的非负函数，且满足 $\log \varphi \in L^1(\mathbb{T})$。注意，几乎处处有 $|f| = \varphi$ 在 $\mathbb{T}$ 上。f 的局部狄利克雷积分定义为

$$\mathcal{D}_\zeta(f) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{|f(\zeta) - f(\xi)|^2}{|\zeta - \xi|^2} |\mathrm{d}\xi| < \infty.$$

我们回顾 Richter–Sundberg 公式 [34]:

$$\mathcal{D}_\zeta(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{|f(\zeta')|^2 - |f(\zeta)|^2 - 2|f(\zeta)|^2 \log(|f(\zeta')|/|f(\zeta)|)}{|\zeta - \zeta'|^2} |\mathrm{d}\zeta'|. \tag{7}$$

设 $\zeta \in \mathbb{T} \setminus E$，且 Σ 是 $\mathbb{T}$ 的一个博雷尔子集。Σ 上的局部狄利克雷积分定义为

$$\mathcal{D}_{\zeta,\Lambda}(f) = \int_{\Sigma} \frac{|f(\zeta')|^2 - |f(\zeta)|^2 - |f(\zeta)|^2 \log\left(|f(\zeta')|^2/|f(\zeta)|^2\right)}{|\zeta' - \zeta|^2} |\mathrm{d}\zeta'|.$$

设 E 是 $\mathbb{T}$ 的一个勒贝格测度为零的闭子集，并设 $\omega : [0, \pi] \to \mathbb{R}^+$ 是一个连续函数，满足

$$\int_{\mathbb{T}} \log \omega(\mathrm{d}(\zeta, E)) |\mathrm{d}\zeta| > -\infty.$$

我们定义如下外距离函数

$$f_{\omega,E}(z) := \exp\Big(\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \log \omega(\mathrm{d}(\zeta, E)) \frac{|\mathrm{d}\zeta|}{2\pi}\Big), \quad z \in \mathbb{D}.$$

特别是,

$$|f^*_{\omega,E}(\zeta)| = \omega(\mathrm{d}(\zeta, E)) \quad \text{a.e on } \mathbb{T}.$$

2.1. 局部狄利克雷积分的初步估计。为了估计局部积分，我们首先将圆周分解为若干个子集。下文将反复用到以下集合:

$$\begin{aligned}
I(\zeta,E) &:= \text{the connected component of } \mathbb{T}\setminus E \text{ containing } \zeta,\\
\Gamma(\zeta,E) &:= \Big\{\zeta'\in\mathbb{T}\setminus I(\zeta,E):\ \ \mathrm{d}(\zeta',E)\le \mathrm{d}(\zeta,E)\Big\},\\
\Sigma(\zeta,E) &:= \Big\{\zeta'\in\mathbb{T}\setminus I(\zeta,E):\ \ \mathrm{d}(\zeta',E)\ge \mathrm{d}(\zeta,E)\Big\},
\end{aligned}$$

引理 **2.1.** 设 ω 是一个递增函数，使得对某个 $\gamma>2$，$\omega(t^\gamma)$ 是凹函数，且 $t\omega'(t)/\omega(t)$ 是递增的。设 E 是一个 $\mathbb{T}$ 的 Carleson 集，并设 $\zeta\in\mathbb{T}\setminus E$。我们有

$$\mathcal{D}_{\zeta,I(\zeta,E)}(f_{\omega,E}) \lesssim \mathrm{d}(\zeta,E)\omega'(\mathrm{d}(\zeta,E))^2, \tag{8}$$

$$\mathcal{D}_{\zeta,\Sigma(\zeta,E)}(f_{\omega,E}) \lesssim \mathrm{d}(\zeta,E)\omega'(\mathrm{d}(\zeta,E))^2, \tag{9}$$

$$\mathcal{D}_{\zeta}(f_{\omega,E}) \gtrsim \mathrm{d}(\zeta,E)\omega'(\mathrm{d}(\zeta,E))^2, \tag{10}$$

其中隐含常数仅依赖于 γ。

证明。设 $\zeta\in\mathbb{T}\setminus E$，令 $\delta=d(\zeta,E)$ 和 $\delta'=d(\zeta',E)$。取 c 为一个较大的普适常数，并写作

$$I := I(\zeta,E) = I_1\cup I_2\cup I_3,$$

其中

$$I_1=\{\zeta'\in I:\ \ \delta'<\delta/c\},\ I_2=\{\zeta'\in I:\ \ \delta/c\le\delta'<c\delta\},\ I_3=\{\zeta'\in I:\ \ \delta'\ge c\delta\}.$$

对于 $\zeta\in I_1$，有

$$\omega^2(\delta')-\omega^2(\delta)-2\omega^2(\delta)\log(\omega(\delta')/\omega(\delta)) = 4\int_{\delta'}^{\delta}\frac{\omega'(t)}{\omega(t)}\int_t^\delta \omega'(s)\omega(s)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \tag{11}$$

Then

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\zeta,I_1}(f_{\omega,E}) &\asymp \int_{I_1}\left(\int_{\delta'}^{\delta}\frac{\omega'(t)}{\omega(t)}\int_t^\delta\omega'(s)\omega(s)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\right)\frac{|\mathrm{d}\zeta'|}{|\zeta-\zeta'|^2}\\
&\asymp \frac{1}{\delta^2}\int_{I_1}\left(\int_{\delta'}^{\delta}\frac{\omega'(t)}{\omega(t)}\int_t^\delta\omega'(s)\omega(s)dsdt\right)|\mathrm{d}\zeta'|\\
&\asymp \frac{1}{\delta^2}\int_{r=0}^{\delta/c}\int_{t=r}^{\delta}\frac{\omega'(t)}{\omega(t)}\int_{s=t}^{\delta}\omega'(s)\omega(s)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r\\
&\asymp \frac{1}{\delta^2}\int_{t=0}^{\delta}t\frac{\omega'(t)}{\omega(t)}\int_{s=t}^{\delta}s\omega'(s)\omega(s)\frac{\mathrm{d}s}{s}\mathrm{d}t \qquad (12)\\
&\lesssim \omega'(\delta)^2\int_{t=0}^{\delta}\log(\delta/t)\mathrm{d}t \asymp \delta\omega'(\delta)^2.
\end{aligned}$$

令 $\zeta \in I_2$，对于 $t \in (\delta', \delta)$ 和 $s \in (t, \delta)$，有 $\omega(t) \asymp \omega(s) \asymp \omega(\delta)$。此外，利用 (11)，我们得到

$$\omega^2(\delta') - \omega^2(\delta) - 2\omega^2(\delta)\log(\omega(\delta')/\omega(\delta)) \asymp (\delta - \delta')^2\omega'(\delta)^2.$$

因此

$$\mathcal{D}_{\zeta, I_2}(f_{\omega,E}) \asymp \omega'(\delta)^2 \int_{I_2} \frac{(\delta'-\delta)^2}{|\zeta-\zeta'|^2}|\mathrm{d}\zeta'| \lesssim \omega'(\delta)^2 \int_{I_2} |\mathrm{d}\zeta'| \asymp \delta\omega'(\delta)^2. \tag{13}$$

注意，对于 $\zeta' \in I_3$，我们有 $|\zeta - \zeta'| \asymp \delta' - \delta \asymp \delta'$。令 $u = |\zeta - \zeta'|$，则

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\zeta, I_3}(f_{\omega,E}) &= 4\int_{\zeta'\in I_3}\int_{t=\delta}^{\delta'} \frac{\omega'(t)}{\omega(t)} \int_{s=\delta}^{t} \omega'(s)\omega(s)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \frac{|\mathrm{d}\zeta'|}{|\zeta-\zeta'|^2} \\
&\lesssim \int_{u=\delta}^{1}\int_{t=\delta}^{u} \frac{\omega'(t)}{\omega(t)} \int_{s=\delta}^{t} \omega'(s)\omega(s)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}u}{u^2} \\
&\asymp \int_{s=\delta}^{1}\int_{t=s}^{1} \frac{\omega'(t)}{\omega(t)}\omega'(s)\omega(s)\frac{\mathrm{d}t}{t}\mathrm{d}s \\
&\asymp \int_{s=\delta}^{1} \omega'(s)\omega(s) \int_{t=s}^{1} t^{1-1/\gamma}\frac{\omega'(t)}{\omega(t)}\frac{\mathrm{d}t}{t^{2-1/\gamma}}\mathrm{d}s \\
&\lesssim \int_{s=\delta}^{1} \omega'(s)\omega(s)s^{1-1/\gamma}\frac{\omega'(s)}{\omega(s)} \int_{t=s}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^{2-1/\gamma}}\mathrm{d}s \\
&\asymp \int_{s=\delta}^{1} s^{2-2/\gamma}\omega'(s)^2\frac{\mathrm{d}s}{s^{2-2/\gamma}} \\
&\lesssim \delta^{2-2/\gamma}\omega'(\delta)^2 \int_{s=\delta}^{1} \frac{\mathrm{d}s}{s^{2-2/\gamma}}\mathrm{d}s \asymp \delta\omega'(\delta)^2.
\end{aligned}$$

引理 8 的第一个不等式由结合这三个估计式得到。不等式 (9) 可以完全按照 I_3 情形中的相同方法推出，因为对于 $\zeta' \in \Sigma(\zeta, E)$，我们有 $\delta' \lesssim |\zeta - \zeta'|$。最后，(10) 由 (13) 得出。至此，引理得证。□

现在我们转而关注局部积分 $\mathcal{D}_{\zeta,\ \Gamma(\zeta,E)}(f_{\omega,\ E})$。回顾一下，

$$\Gamma(\zeta, E) := \Big\{\zeta' \in \mathbb{T} \setminus I(\zeta, E) : \ \mathrm{d}(\zeta', E) \le \mathrm{d}(\zeta, E)\Big\}.$$

引理 2.2. 设 ω 是一个递增函数，使得 $t\omega'(t)/\omega(t)$ 递增。设 E 是一个 Carleson 集。那么

$$\mathcal{D}_{\zeta,\Gamma(\zeta,E)}(f_{\omega,E}) \lesssim \mathrm{d}(\zeta, E)^2\omega'(\mathrm{d}(\zeta, E))^2 \int_{\Gamma(\zeta,E)} \frac{\log^2(\mathrm{d}(\zeta, E)/\mathrm{d}(\zeta', E))}{|\zeta-\zeta'|^2}|\mathrm{d}\zeta'|.$$

证明. 设 $\delta = d(\zeta, E)$ 和 $\delta' = d(\zeta', E)$。

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\zeta,\Gamma(\zeta,E)}(f_{\omega,E}) &= 4\int_{\Gamma(\zeta,E)}\left(\int_{t=\delta'}^{\delta}\frac{\omega'(t)}{\omega(t)}\int_{s=t}^{\delta}s\omega'(s)\omega(s)\frac{\mathrm{d}s}{s}\mathrm{d}t\right)\frac{|\mathrm{d}\zeta'|}{|\zeta-\zeta'|^2} \qquad (14)\\ &\lesssim \int_{\Gamma(\zeta,E)}\delta\omega'(\delta)\omega(\delta)\left(\int_{\delta'}^{\delta}t\frac{\omega'(t)}{\omega(t)}\log\left(\delta/t\right)\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)\frac{|\mathrm{d}\zeta'|}{|\zeta-\zeta'|^2}\\ &\lesssim \int_{\Gamma(\zeta,E)}\delta^2\omega'(\delta)^2\left(\int_{\delta'}^{\delta}\log\left(\delta/t\right)\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)\frac{|\mathrm{d}\zeta'|}{|\zeta-\zeta'|^2}\\ &\asymp \delta^2\omega'(\delta)^2\int_{\Gamma(\zeta,E)}\frac{\log^2(\delta/\delta')}{|\zeta-\zeta'|^2}|\mathrm{d}\zeta'|.\end{aligned}$$

证明至此结束。 □

我们将只考虑 $\omega_\alpha(t) = t^\alpha$ 的情形。给定 $\alpha > 0$，并设 E 为 Carleson 集，我们将如下定义的外距离函数与该集合相关联:

$$f_{\alpha,E}(z) = \exp\left(\alpha\int_{\mathbb{T}}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log\mathrm{d}(e^{it},E)\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}\right), \qquad z\in\mathbb{D}.$$

特别地,

$$|f^*_{\alpha,E}(\zeta)| = \mathrm{d}(\zeta,E)^\alpha \quad \text{a.e. on } \mathbb{T}.$$

注意, $f_{\alpha,\ E} \in \mathcal{D}$ 当且仅当 $d(\cdot, E)^{2\alpha-1} \in L^1(\mathbb{T})$。以下结果改进了 ω_α 的引理 2.2。

引理 2.3。设 E 为 Carleson 集，且令 $\alpha \in (0, 1/2)$。则

$$\mathcal{D}_{\zeta,\Gamma(\zeta,E)}(f_{\alpha,E}) \lesssim \mathrm{d}(\zeta,E)^{2\alpha}\int_{\Gamma(\zeta,E)}\frac{\log(\mathrm{d}(\zeta,E)/\mathrm{d}(\zeta',E))}{|\zeta-\zeta'|^2}|\mathrm{d}\zeta'|.$$

证明。设 $\delta = d(\zeta, E)$ 和 $\delta' = d(\zeta', E)$。由 (14)

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\zeta,\Gamma(\zeta,E)}(f_{\alpha,E}) &\asymp \int_{\Gamma(\zeta,E)}\left(\int_{t=\delta'}^{\delta}\frac{1}{t}\int_{s=t}^{\delta}s^{2\alpha-1}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right)\frac{|\mathrm{d}\zeta'|}{|\zeta-\zeta'|^2}\\ &\lesssim \delta^{2\alpha}\int_{\Gamma(\zeta,E)}\int_{t=\delta'}^{\delta}\frac{\mathrm{d}t}{t}\frac{|\mathrm{d}\zeta'|}{|\zeta-\zeta'|^2}\\ &\asymp \delta^{2\alpha}\int_{\Gamma(\zeta,E)}\frac{\log(\delta/\delta')}{|\zeta-\zeta'|^2}|\mathrm{d}\zeta'|.\end{aligned}$$

证明至此结束。

□

3. 最小增长与 $\mathcal{L}$-集

本小节的目标是刻画具有最小增长的子集 E of $\mathbb{T}$ 。根据引理 2.1，这意味着

$$\mathcal{D}_\zeta(f_{\omega,E}) \asymp \mathrm{d}(\zeta,E)\omega'(\mathrm{d}(\zeta,E))^2, \quad a.e.\ \zeta\in\mathbb{T}.$$

为实现最小增长，我们需要考虑更规则的 Carleson 集。若闭集E 在 $\mathbb{T}$ 上满足以下条件，则称其为 $\mathcal{K}$-集（据 Kotochigov 命名），记作 $E\in\mathcal{K}$：存在正常数 c_E，使得对任意弧 $I\subset\mathbb{T}$,

$$\sup_{\zeta\in I}\mathrm{d}(\zeta,E)\geq c_E|I|, \tag{$\mathcal{K}$}$$

其中 $|I|$表示 I的长度。换言之，任意弧都包含一个点，该点到 E 的距离与弧长同阶。 $\mathcal{K}$-集是 H¨older 类的插值集 [18], ，另见 [10, 11]。注意，对于每个 $\mathcal{K}$–集 E，都存在 $\beta\in(0,1)$，使得 $\mathrm{d}(\zeta,E)^{-\beta}$ 是一个(A_2)-Muckenhoupt 权；更多细节请参见 [10, 11, 18, 25]。下面的引理给出了 $\mathcal{K}$-集的一些度量性质。

引理 3.1. 设 E 是 $\mathbb{T}$ 的闭子集。那么以下条件等价：

(1) $E\in\mathcal{K}$。(2) 存在 $c>0$，使得对于任意弧 I

$$\frac{1}{|I|}\int_I \log(|I|/\mathrm{d}(\zeta,E))|\mathrm{d}\zeta|\leq c.$$

(3) 存在 $c>0$，使得对于任意弧 I 和某个 $0<\beta<1$，有

$$\frac{1}{|I|}\int_I \mathrm{d}(\zeta,E)^{-\beta}|\mathrm{d}\zeta|\leq c|I|^{-\beta}$$

(4) 存在 $c>0$，使得对于任意弧 I 和某个 $0<\beta<1$，有

$$\frac{1}{|I|}\int_I \mathrm{d}(\zeta,E)^{\beta}|\mathrm{d}\zeta|\geq c|I|^{\beta}$$

(5) 存在 $\beta_E\in(0,1]$,，使得对于任意 $\beta\in(0,\beta_E)$，都存在 $c>0$，且对于任意弧 I，有

$$|\{\zeta\in I: d(\zeta,E)\leq t\}|\leq c|I|(t/|I|)^{\beta_E}.$$

所有这些条件都意味着 $\log\mathrm{d}(\cdot,E)\in$ 属于有界平均振荡，且 $\mathrm{d}(\cdot,E)^{-\beta}$ 满足 Muckenhoupt 条件 A_2。Dyn'kin 在 [18] 中证明，(3) 中 β 的取值必须满足

$$\beta<\Big(\log(1/1-c_E)\Big)\Big/\Big(\log(2/1-c_E)\Big).$$

注意， E的测度为零，且 $\log\mathrm{d}(\cdot,E)\in L^1(\mathbb{T})$，因此 E是一个 Carleson 集。 $\mathcal{K}$集的一个重要例子是广义 Cantor 集，参见命题 3.4。现在我们将介绍 $\mathbb{T}$ 的一个子集类，它似乎与 $\mathcal{K}$集类相近。

回忆一下，包含 ζ的 $\mathbb{T}\setminus E$的连通分支记作 $I(\zeta,E)$，并令

$$\Gamma(\zeta,E):=\big\{\zeta'\in\mathbb{T}\setminus I(\zeta,E):\mathrm{d}(\zeta',E)\le\mathrm{d}(\zeta,E)\big\}$$

接下来我们定义 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$-集的概念。

定义 3.2. 设 $E\subset\mathbb{T}$ 是一个闭 Carleson 集。若存在常数 $C>0$，使得对每个 $\zeta\in\mathbb{T}\setminus E$, 以下不等式都成立，则称 E 属于类$\mathcal{L}_1$（分别属于类 $\mathcal{L}_2$）：

$$\int_{\Gamma(\zeta,E)}\frac{\log(\mathrm{d}(\zeta,E))/\mathrm{d}(\zeta',E))}{|\zeta-\zeta'|^2}|\mathrm{d}\zeta'|\le\frac{C}{\mathrm{d}(\zeta,E)},\qquad\zeta\in\mathbb{T}\setminus E.\tag{$\mathcal{L}_1$}$$

$$\int_{\Gamma(\zeta,E)}\frac{\log^2(\mathrm{d}(\zeta,E))/\mathrm{d}(\zeta',E))}{|\zeta-\zeta'|^2}|\mathrm{d}\zeta'|\le\frac{C}{\mathrm{d}(\zeta,E)},\qquad\zeta\in\mathbb{T}\setminus E.\tag{$\mathcal{L}_2$}$$

上述不等式中的最佳常数 C 记为 C_E。

若 E 是一个 $\mathcal{K}$-集，且 $\mathrm{d}(\cdot,E)^{-\beta}$ 满足 Muckenhoupt 条件 A_2，则 $\mathcal{L}_1$ 条件也随之成立（事实上， A_2 蕴含 B_2，见 [11]）。以下结果揭示了 $\mathcal{K}$-集类与类 $\mathcal{L}_2$之间的关系。

引理 3.3. 我们有以下断言

(1) $\mathcal{K}\subset\mathcal{L}_2$。（2）设 E 是一个 Carleson 集。若对每个闭子集 $F\subset E$，都有 $F\in\mathcal{L}_2$，且 $\sup\{C_F:\ F\subset E\}<\infty$，则 $E\in\mathcal{K}$。

*Pr*明。 (1) 设 $E\in\mathcal{K}$，由引理 3.1 (1)、(4) 及 Jensen 不等式可得

$$\frac{1}{|I|}\int_I\log^2(|I|/\mathrm{d}(\zeta,E))|\mathrm{d}\zeta|\le c.$$

令 $\delta=\mathrm{d}(\zeta,E),\quad\delta'=\mathrm{d}(\zeta',E)$。

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma(\zeta,E)}\frac{\log^2(\delta/\delta')}{|\zeta-\zeta'|^2}|\mathrm{d}\zeta'| &\le \sum_{n\ge1}\int_{2^n\delta\le|\zeta'-\zeta|\le2^{n+1}\delta}\frac{\log^2(\delta/\delta')}{|\zeta-\zeta'|^2}|\mathrm{d}\zeta'|\\ &\lesssim \sum_{n\ge1}\frac{1}{2^{2n}\delta^2}\int_{|\zeta'-\zeta|\le2^{n+1}\delta}\log^2(2^{n+1}\delta/\delta')|\mathrm{d}\zeta'|\\ &\lesssim \sum_{n\ge1}\frac{1}{2^n\delta}\asymp 1/\delta.\end{aligned}$$

于是 $E\in\mathcal{L}$。

为证明第二个断言，令 $E\in\mathcal{L}_2$，并令 I 为一条闭弧。不失一般性，我们可以假设 $E\cap I\neq\emptyset$。令 $\zeta\in\mathbb{T}$ 满足 $\mathrm{d}(\zeta,I)=|I|/2$，并令

$J=\{\zeta'\in\mathbb{T}:\ \ |\zeta-\zeta'|\le|I|/2\}$。根据假设，$E\cap I\in\mathcal{L}_2$，于是

$$\begin{aligned}\Big(\frac{1}{|I|}\int_I\log(|I|/\mathrm{d}(\zeta',E))|\mathrm{d}\zeta'|\Big)^2 &\lesssim \frac{1}{|I|}\int_I\log^2(|I|/\mathrm{d}(\zeta',E))|\mathrm{d}\zeta'|\\ &\lesssim \frac{1}{|I|}\int_{I\cup J}\log^2(\mathrm{d}(\zeta,E\cap I)/\mathrm{d}(\zeta',E\cap I))|\mathrm{d}\zeta'|\\ &\lesssim |I|\int_{I\cup J}\frac{\log^2(\mathrm{d}(\zeta,E\cap I)/\mathrm{d}(\zeta',E\cap I))}{|\zeta-\zeta'|^2}|\mathrm{d}\zeta'|\\ &\lesssim C_{E\cap I},\end{aligned}$$

则 $E\in\mathcal{K}$。 □

3.1. 注释与例子。**1.** 类 $\mathcal{L}_2$ 严格大于 $\mathcal{K}$。事实上，设 $\gamma>0$、$a_n=n^{-\gamma}$，并令 E 为由下式给出的闭集

$$E=\{e^{\pm ia_n}:n\ge1\}\cup\{1\}.$$

可以容易地验证，E 不是一个 $\mathcal{K}$-集。为验证 $E\in\mathcal{L}_2$，我们必须证明

$$\int_{\Gamma(\zeta,E)}\frac{\log^2(\mathrm{d}(\zeta,E))/\mathrm{d}(\zeta',E))}{|\zeta-\zeta'|^2}|\mathrm{d}\zeta'|=O(1/\mathrm{d}(\zeta,E)).$$

设 $\zeta=e^{i\theta}$，其中 $\theta\in(a_{N+1},\ a_N)$，某个整数 N。注意到 $I(\zeta,\ E)=I_N$，令 $\delta=\mathrm{d}(\zeta,\ E)$ 且 $\delta'=\mathrm{d}(\zeta',\ E)$，因此该积分中最相关的部分是

$$\int_{\cup_{n\ne N}I_n;\,\delta'<\delta}\frac{\log^2(\mathrm{d}(\zeta,E))/\mathrm{d}(\zeta',E))}{|\zeta-\zeta'|^2}|\mathrm{d}\zeta'|.$$

注意，$\int_{I_k}\log^2(\delta/\delta')\lesssim|I_k|\log^2(\delta/|I_k|)$。于是我们有

$$\begin{aligned}\int_{\cup_{n\ge2N}I_n}\frac{\log^2(\mathrm{d}(\zeta,E))/\mathrm{d}(\zeta',E))}{|\zeta-\zeta'|^2}|\mathrm{d}\zeta'| &\lesssim \sum_{k\ge2N}\frac{1}{a_N^2}\int_{I_k}\log^2(\delta/\delta')|d\zeta'|\\ &\lesssim N^{2\gamma}\sum_{k\ge2N}\frac{1}{k^{1+\gamma}}\log(\delta k^{1+\gamma})\\ &\lesssim N^{2\gamma}\delta^{\gamma/1+\gamma}\int_{2N}^{\infty}\frac{\log^2x}{x^{\frac{1+2\gamma}{1+\gamma}}}dx\\ &\lesssim N^{2\gamma}\delta^{\gamma/1+\gamma}\lesssim1/\delta^{\gamma/1+\gamma}\lesssim1/\delta.\end{aligned}$$

If $N+2 \le k \le 2N$, $a_k - a_{k+1} \asymp N^{-\gamma-1}$和 $a_N - a_k \asymp (k-n)N^{-\gamma-1}$。于是

$$\begin{aligned}\int_{\cup_{n=N+2}^{2N} I_n;\, \delta' < \delta} \frac{\log^2(\mathrm{d}(\zeta,E))/\mathrm{d}(\zeta',E))}{|\zeta-\zeta'|^2}|\mathrm{d}\zeta'| &\lesssim \sum_{k=N+2}^{2N} \frac{1}{(a_N-a_k)^2}\int_{I_k;\delta'<\delta}\log^2(\delta/\delta')|d\zeta'| \\ &\lesssim \sum_{k=N+2}^{2N} \frac{N^{2\gamma+2}}{(k-N)^2}\int_{I_k;\delta'<\delta}\log^2(\delta/\delta')|d\zeta'| \\ &\lesssim \sum_{k=N+2}^{2N} \frac{N^{2\gamma+2}}{(k-N)^2}\int_0^{\delta}\log^2(\delta/t)|dt \\ &\asymp \delta N^{2\gamma+2} \le 1/\delta.\end{aligned}$$

用同样的论证处理其余部分对应的积分，即可得出 $E \in \mathcal{L}_2$。

2. 可以验证，该集合

$$F = \{e^{-in^{-\gamma}} : n \ge 1\} \cup \{1\},$$

不属于 $\mathcal{L}_2$。事实上，使用前面相同的记号，可以很容易证明

$$\int_{\cup_{n\ge N} I_n} \frac{\log^2(\mathrm{d}(\zeta,F))/\mathrm{d}(\zeta',F))}{|\zeta-\zeta'|^2}|\mathrm{d}\zeta'| \asymp \frac{\log^2 1/\mathrm{d}(\zeta,F)}{\mathrm{d}(\bar{\zeta},F)}.$$

3. $\mathcal{K}$-集的一个重要例子，因而也是 $\mathcal{L}_2$-集的一个重要例子，是广义 Cantor 集。下面的结果很简单，而且很可能是众所周知的

命题 命题 3.4. 设 E 是与序列 $(\zeta_n)_{n\ge1}$ 相关联的康托尔集。若

$$\limsup_{n\to\infty} \zeta_n < \frac{1}{2},$$

则 E 满足 $\mathcal{K}$-条件。

证明. 我们要证明 $\sup_{\zeta\in L}\mathrm{d}(\zeta,E) > c|L|$。由于有限个$\mathcal{K}$-集的并仍是一个 $\mathcal{K}$-集，不妨设 $\zeta_n < \eta < \frac{1}{2}$ 对于 $n \ge 1$ 成立。容易看出，我们还可以将问题归结为 $L = I_{k,n}$ 对某些 $n \ge 1$, $1 \le k \le 2^n$ 成立的情形，并且$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }\sup_{\zeta\in I_{k,n}}\mathrm{d}(\zeta,E) \asymp \mathrm{d}(\zeta,E)$，其中 ζ 是 $I_{k,n}$ 的中点。为得出结论，我们注意到

$$\mathrm{d}(\widetilde{\zeta},E) \ge \pi(\zeta_1\dots\zeta_n)(1-2\zeta_{n+1}) \ge \frac{(1-2\eta)}{2}|I_{k,n}|. \qquad \square$$

3.2. 定理 1.1 的证明。定理 1.1 由引理 3.5、引理 3.6 和引理 3.7 推出。

引理 3.5. 设 ω 是一个递增函数，使得对于某个 $\gamma > 2$, $\omega(t^\gamma)$ 是凹函数，并且 $t\omega'(t)/\omega(t)$ 是递增的。设 $E \in \mathcal{L}_2$，则

$$\mathcal{D}_\zeta(f_\omega) \asymp \mathrm{d}(\zeta,E)\omega'(\mathrm{d}(\zeta,E))^2, \tag{15}$$

其中，隐含常数仅依赖于 γ。

证明。令 $\delta = d(\zeta, E)$ 和 $\delta' = d(\zeta', E)$。注意到 $\mathbb{T} = I(\zeta, E) \cup \Sigma(\zeta, E) \cup \Gamma(\zeta, E)$。我们有

$$\mathcal{D}_\zeta(f_{\omega,E}) = \mathcal{D}_{\zeta,I(\zeta,E)}(f_{\omega,E}) + \mathcal{D}_{\zeta,\Sigma(\zeta,E)}(f_{\omega,E}) + \mathcal{D}_{\zeta,\Gamma(\zeta,E)}(f_{\omega,E})$$

由引理 2.1，得

$$\mathcal{D}_{\zeta,I(\zeta,E)}(f_{\omega,E}) + \mathcal{D}_{\zeta,\Sigma(\zeta,E)}(f_{\omega,E}) \lesssim \mathrm{d}(\zeta, E)\omega'(\mathrm{d}(\zeta, E))^2.$$

由引理 2.2，我们还有

$$\mathcal{D}_{\zeta,\Gamma(\zeta,E)}(f_{\omega,E}) \lesssim \mathrm{d}(\zeta, E)^2\omega'(\mathrm{d}(\zeta, E))^2 \int_{\Gamma(\zeta,E)} \frac{\log^2(\mathrm{d}(\zeta, E)/\mathrm{d}(\zeta', E))}{|\zeta - \zeta'|^2}|\mathrm{d}\zeta'|.$$

由于集合 $E \in \mathcal{L}_2$，我们得到

$$\mathcal{D}_{\zeta,\Gamma(\zeta,E)}(f_{\omega,E}) \lesssim \mathrm{d}(\zeta, E)\omega'(\mathrm{d}(\zeta, E))^2$$

结合这些不等式，得到 (15)。 □

引理 3.6. 设 $\alpha \in (0, 1/2)$。设 E 是 $\mathbb{T}$ 的 Carleson 集。则

$$\mathcal{D}_\zeta(f_{\alpha,E}) \asymp \mathrm{d}^{2\alpha-1}(\zeta, E), \qquad \zeta \in \mathbb{T} \setminus E \tag{16}$$

当且仅当 $E \in \mathcal{L}_1$。

证明。设 $\delta = d(\zeta, E)$ 和 $\delta' = d(\zeta', E)$。假设 $E \in \mathcal{L}_1$。由引理 2.1 和引理 2.3，我们有

$$\mathcal{D}_\zeta(f_{\alpha,E}) \lesssim \delta^{2\alpha} \int_{\Gamma(\zeta,E)} \frac{\log(\delta/\delta')}{|\zeta - \zeta'|^2}|\mathrm{d}\zeta'| \lesssim \delta^{2\alpha-1}.$$

反向不等式在引理 2.1 中得证。

反之，假设 (16) 成立。取 $c > 1$ 使得 $2\alpha \log c > 1$。记 $\Gamma(\zeta, E) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$，其中

$$\Gamma_1 = \{\zeta' \in \Gamma(\zeta, E) : \delta' \le \delta/c\}, \quad \text{and} \quad \Gamma_2 = \{\zeta' \in \Gamma(\zeta, E) : \delta/c \le \delta' \le \delta\}.$$

注意，对于 $\zeta' \in \Gamma_1(\zeta, E)$，我们有

$$\delta'^{2\alpha} - \delta^{2\alpha} - 2\delta^{2\alpha}\log(\delta'^{\alpha}/\delta^{\alpha}) \asymp \delta^{2\alpha} log(\delta/\delta')$$

于是得到

$$\mathcal{D}_{\zeta,\Gamma_1}(f_{\alpha,E}) \asymp \delta^{2\alpha} \int_{\Gamma_1} \frac{\log(\delta/\delta')}{|\zeta - \zeta'|^2}|\mathrm{d}\zeta'|,$$

我们还有

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\log(\delta/\delta')}{|\zeta - \zeta'|^2}|\mathrm{d}\zeta'| \lesssim 1/\delta$$

该结果由这两个估计结合引理 2.1 和引理 2.3 得出。 □

引理 3.7. 设 E 是一个 Carleson 集 $\mathbb{T}$，满足 $|E_t| = O(t^\varepsilon)$，其中某个 $\varepsilon \in$ 属于 $(0, 1)$。设 ω 是一个递增函数，满足对于某个 $\gamma > 2$， $\omega(t^\gamma)$ 是凹函数，并且 $t\omega'(t)/\omega(t)$ 是递增的。进一步假设 $x\omega(x) \asymp x^2\omega'(x^2)$，则

$$\mathcal{D}_\zeta(f_{\omega,E}) \asymp \mathrm{d}(\zeta, E)\omega'(\mathrm{d}(\zeta, E))^2, \qquad \zeta \in \mathbb{T} \setminus E \tag{17}$$

当且仅当 $E \in \mathcal{L}_2$。

证明。设 $\delta = d(\zeta, E)$ 和 $\delta' = d(\zeta', E)$。根据引理 3.5，只需证明必要条件。令 $\beta > 0$ 为一个较大的常数，并设

$$\Gamma_1 = \{\zeta' \in \mathbb{T} : |\zeta - \zeta'| > \delta \text{ and } \delta^\beta < \delta' \le \delta\} \quad \text{and} \quad \Gamma_2 := \{\zeta' \in \mathbb{T} : |\zeta - \zeta'| > \delta \text{ and } \delta' \le \delta^\beta\}.$$

Let

$$\Delta(\delta, \delta') = \omega^2(\delta') - \omega^2(\delta) - 2\omega^2(\delta') \log \frac{\omega(\delta')}{\omega(\delta)}$$

对于 $\delta^\beta < \delta' \le \delta$，我们有

$$\delta^\beta \omega'(\delta^\beta) \asymp \delta\omega'(\delta) \quad \text{and} \quad \omega(t) \asymp \omega(s), \quad \delta' \le t \le s \le \delta.$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}
\Delta(\delta, \delta') &= \int_{t=\delta'}^{\delta} \int_{s=t}^{\delta} \frac{\omega'(t)}{\omega(t)} \omega'(s)\, \omega(s)\, ds\, dt \\
&\asymp \int_{\delta'}^{\delta} \int_{\delta}^{t} \omega'(t)\, \omega'(s)\, ds\, dt \\
&= \frac{1}{2}\big(\omega(\delta) - \omega(\delta')\big)^2 \\
&= \frac{1}{2}\Big(\int_{\delta'}^{\delta} x\omega'(x) \frac{dx}{x}\Big)^2 \\
&\ge (\delta'\omega'(\delta'))^2 \log^2(\delta/\delta') \asymp (\delta\omega'(\delta))^2 \log^2(\delta/\delta')
\end{aligned}$$

因此

$$\mathcal{D}_{\zeta,\Gamma_1}(f_{\omega,E}) = \int_{\Gamma_1} \frac{\Delta(\delta, \delta')}{|\zeta - \zeta'|^2} |\mathrm{d}\zeta'| \ge \delta^2(\omega'(\delta))^2 \int_{\Gamma_1} \frac{\log^2(\delta/\delta')}{|\zeta - \zeta'|^2} |\mathrm{d}\zeta'|$$

这意味着以下不等式

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\log^2(\delta/\delta')}{|\zeta - \zeta'|^2} |\mathrm{d}\zeta'| \lesssim \frac{1}{\delta}.$$

另一方面，h 并且，由于 $|E_t| = O(t^{\varepsilon})$，$\log^4(1/\delta') \in L^1(\mathbb{T})$。因此，对于 $\beta\varepsilon > 4$，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_2} \frac{\log^2(\delta/\delta')}{|\zeta-\zeta'|^2}\,|\mathrm{d}\zeta'| &\lesssim \frac{1}{\delta^2}\int_{\Gamma_2}\log^2(1/\delta')\,|\mathrm{d}\zeta'| \\ &\lesssim \frac{1}{\delta^2}\left(\int_{\Gamma_2}|\mathrm{d}\zeta'|\right)^{1/2}\left(\int_{\Gamma_2}\log^4(1/\delta')\,|\mathrm{d}\zeta'|\right)^{1/2} \\ &\lesssim \frac{1}{\delta^2}|E_{\delta^\beta}|^{1/2}\left(\int_{\Gamma_2}\log^4(1/\delta')\,|\mathrm{d}\zeta'|\right)^{1/2}. \\ &\lesssim \delta^{\frac{\beta\varepsilon}{2}-2}\left(\int_{\mathbb{T}}\log^4(1/\delta')\,|\mathrm{d}\zeta'|\right)^{1/2} \lesssim \frac{1}{\delta}.\end{aligned}$$

因此 $E \in \mathcal{L}_2$，这就完成了证明。 □

最后，我们考察这样一种情形：条件 $E \in \mathcal{L}_2$ 并非必要条件。我们有以下结果。

定理 3.8. 设 ω 是一个递增函数，使得对于某个 $\gamma > 2$，$\omega(t^\gamma)$ 是凹函数，且 $t\omega'(t)/\omega(t)$ 是递增函数。设 $E \subset \mathbb{T}$ 是一个闭集，使得对于某个 $\sigma \in (0,1)$，$\mathrm{d}(\cdot,E)^{-\sigma} \in L^1(\mathbb{T})$。那么

$$\mathcal{D}_\zeta(f_{\omega,E}) \lesssim \mathrm{d}(\zeta,E)\omega'(\mathrm{d}(\zeta,E))^2\log^2(1/\mathrm{d}(\zeta,E))$$

反过来，存在一个集合 E，使得对于某个 $\sigma > 0$，$\mathrm{d}(\cdot,E)^{-\sigma} \in L^1(\mathbb{T})$，并且

$$\sup_{d(\zeta,E)\geq\delta}\mathcal{D}_\zeta(f_{\omega,E}) \asymp \delta\omega'(\delta)^2\log^2(1/\delta), \qquad \delta\in(0,1).$$

证明。沿用前一个证明中的记号，并由引理 2.1 和引理 2.2 可知，只需证明

$$\int_{\mathrm{d}(\zeta,\zeta')\geq\delta}\frac{\log^2(\delta/\delta')}{\mathrm{d}(\zeta,\zeta')^2}|\mathrm{d}\zeta'| \lesssim \frac{1}{\delta}\log^2(1/\delta).$$

设 p、q、ε 满足

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \quad q=\log(1/\delta), \quad \text{and} \quad \varepsilon=\frac{\sigma}{2q}.$$

By u利用 H¨older 不等式以及不等式 $\log x \lesssim \frac{x^\varepsilon}{\varepsilon}$，可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{d}(\zeta,\zeta')\geq\delta}\frac{\log^2(\delta/\delta')}{\mathrm{d}(\zeta,\zeta')^2}|\mathrm{d}\zeta'| &\lesssim \Big(\int_{\mathbb{T}}\Big(\log^2\big(\frac{1}{\delta'}\big)\Big)^q|\mathrm{d}\zeta'|\Big)^{1/q}\Big(\int_{\mathrm{d}(\zeta,\zeta')\geq\delta}\frac{|\mathrm{d}\zeta'|}{\mathrm{d}(\zeta,\zeta')^{2p}}\Big)^{1/p}\\ &\lesssim \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\int_{\mathbb{T}}\frac{|\mathrm{d}\zeta'|}{\delta'^{\sigma}}\Big)^{1/q}\Big(\frac{1}{(2p-1)\delta^{2p-1}}\Big)^{1/p}\\ &\lesssim \frac{1}{\varepsilon^2\delta}\\ &\lesssim \frac{1}{\delta}\log^2(1/\delta).\end{aligned}$$

这就完成了所需结果的证明。 □

注。注3.1中的第二个例子说明了该条件的最优性；只需取 $(1+\gamma)(1-\sigma) > 1$。

4. 属于 $\mathcal{D}(\mu)$

局部狄利克雷积分的第一个应用是判定属于 $\mathcal{D}(\mu)$ 的条件。我们有如下结果。

定理 4.1. 设 E 是 $\mathbb{T}$ 的 Carleson 集，且 μ 是 $\mathbb{T}$上的正测度。

(1) 设 $\alpha \in (0, 1/2)$，并假设 $E \in \mathcal{L}_1$，则

$$f_{\alpha,E} \in \mathcal{D}(\mu) \iff \int_{\mathbb{T}}\mathrm{d}(\zeta,E)^{2\alpha-1}\mathrm{d}\mu(\zeta) < \infty.$$

(2) 设 ω 为递增函数，且对于某个 $\gamma > 2$，$\omega(t^\gamma)$ 是凹函数，并且$t\omega'(t)/\omega(t)$ 递增。假设 $E \in \mathcal{L}_2$，则

$$f_{\omega,E} \in \mathcal{D}(\mu) \iff \int_{\mathbb{T}}\mathrm{d}(\zeta,E)\omega'(\mathrm{d}(\zeta,E))^2\mathrm{d}\mu(\zeta) < \infty.$$

证明。由定理 1.1 可直接得到。 □

值得注意的是，在经典狄利克雷空间 $\mathcal{D}$中，[26]已证明了相同的结果，且不需要额外的 $\mathcal{L}$ 条件。在下述定理中，我们给出一类测度，使得可以去掉 $\mathcal{L}$ 条件。

定理4.2。设 μ为由 $\mathrm{d}\mu(\zeta) = \mathrm{d}(\zeta,E)^\alpha|\mathrm{d}\zeta|$定义的测度，其中 $\alpha \geq 0$，并设 $E \subset \mathbb{T}$ 为 Carleson 集。假设对于某个 $\gamma > 2/(2-\alpha)$，$\omega(t^\gamma)$ 是凹函数，并且$t\omega'(t)/\omega(t)$ 是递增函数。则有

$$\mathcal{D}_\mu(f_{\omega,E}) \asymp \int_{\mathbb{T}}\mathrm{d}(\zeta,E)\,\omega'(\mathrm{d}(\zeta,E))^2\,\mathrm{d}\mu(\zeta).$$

证明。令 $\zeta \in \mathbb{T}\setminus E$，并设 $\delta = \mathrm{d}(\zeta,E)$，$\delta' = \mathrm{d}(\zeta',E)$。根据引理 2.1 和引理 2.2，只需证明

$$I = \int_{\mathbb{T}}\delta^2\,\omega'(\delta)^2\left(\int_{\zeta'\in\Gamma(\zeta,E)}\frac{\log^2(\delta/\delta')}{|\zeta-\zeta'|^2}\,|\mathrm{d}\zeta'|\right)\mathrm{d}\mu(\zeta) \lesssim \int_{\mathbb{T}}\delta\,\omega'(\delta)^2\,\mathrm{d}\mu(\zeta).$$

我们将 $\Gamma(\zeta,E) = \Gamma_1(\zeta,E) \cup \Gamma_2(\zeta,E)$ 分解为，其中

$$\Gamma_1(\zeta,E) := \left\{\zeta' \in \mathbb{T} \setminus I(\zeta,E) : \delta' < \frac{\delta}{4}\right\} \quad \text{and} \quad \Gamma_2(\zeta,E) := \Gamma(\zeta,E) \setminus \Gamma_1(\zeta,E).$$

相应地，我们记作 $I = I_1 + I_2$，其中

$$\begin{aligned} I_j &= \int_{\mathbb{T}} \delta^2\, \omega'(\delta)^2 \left(\int_{\zeta' \in \Gamma_j(\zeta,E)} \frac{\log^2(\delta/\delta')}{|\zeta-\zeta'|^2} \,|\mathrm{d}\zeta'| \right) \mathrm{d}\mu(\zeta) \\ &= \int_{\mathbb{T}} \delta^{2+\alpha}\, \omega'(\delta)^2 \int_{\zeta' \in \Gamma_j(\zeta,E)} \frac{\log^2(\delta/\delta')}{|\zeta-\zeta'|^2} \,|\mathrm{d}\zeta'||\mathrm{d}\zeta|,, \quad j = 1,2. \end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned} I_1 &\lesssim \int_{\mathbb{T}} \int_{\Gamma_1(\zeta,E)} \delta'^{2(1-\frac{1}{\gamma})} \omega'(\delta')^2\, \delta^{\frac{2}{\gamma}+\alpha} \frac{\log^2(\delta/\delta')}{|\zeta-\zeta'|^2} \,|\mathrm{d}\zeta'|\,|\mathrm{d}\zeta| \\ &\lesssim \int_{\mathbb{T}} \int_{\Gamma_1(\zeta,E)} \delta'^{2(1-\frac{1}{\gamma})} \omega'(\delta')^2 (\delta-\delta')^{\frac{2}{\gamma}+\alpha} \frac{\log^2\left((\delta-\delta')/\delta'\right)}{|\zeta-\zeta'|^2} \,|\mathrm{d}\zeta'|\,|\mathrm{d}\zeta| \\ &\lesssim \int_{\mathbb{T}} \delta'^{2(1-\frac{1}{\gamma})} \omega'(\delta')^2 \int_{|\zeta-\zeta'|>\delta'} \frac{\log^2(|\zeta-\zeta'|/\delta')}{|\zeta-\zeta'|^{2-\frac{2}{\gamma}-\alpha}} \,|\mathrm{d}\zeta|\,|\mathrm{d}\zeta'| \\ &\lesssim \int_{\mathbb{T}} \delta'^{2(1-\frac{1}{\gamma})} \omega'(\delta')^2 \int_{t \geq \delta'} \frac{\log^2(t/\delta')}{t^{2-\frac{2}{\gamma}-\alpha}} \,dt\,|\mathrm{d}\zeta'| \\ &\asymp \int_{\mathbb{T}} \delta'^{1+\alpha} \omega'(\delta')^2 \,|\mathrm{d}\zeta'|. \end{aligned}$$

对于 $\zeta' \in \Gamma_2(\zeta,E)$，我们有 $\delta/4 \leq \delta' \leq \delta$和 $|\zeta-\zeta'| \geq \delta$。于是

$$\begin{aligned} I_2 &\lesssim \int_{\mathbb{T}} \delta^{2+\alpha} \omega'(\delta)^2 \int_{|\zeta-\zeta'|\geq\delta} \frac{|\mathrm{d}\zeta'|}{|\zeta-\zeta'|^2} \\ &\lesssim \int_{\mathbb{T}} \delta^{1+\alpha} \omega'(\delta)^2 \,|\mathrm{d}\zeta|. \end{aligned}$$

证明至此完成。 □

5. 经典狄利克雷空间中的乘子

5.1. 局部狄利克雷积分导出的乘子。我们先介绍以下引理，它将圆周上的 Carleson 测度与乘子联系起来。

引理**5.1.** 设 $f \in \mathcal{D} \cap H^\infty$。以下断言等价 :

(1) f 是 $\mathcal{D}$的乘子，(2) 测度 $|f'(z)|^2 dA(z)$是 $\mathcal{D}$的 Carleson 测度，(3) 测度 $\mathcal{D}_\zeta(f)|\mathrm{d}\zeta|$是 $\mathcal{D}$的 Carleson 测度。

证明。(1) $\Longleftrightarrow$ (2) 显而易见，且众所周知。我们来证明(1)与(3)等价。根据 Douglas公式，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(fg) &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}}\frac{|f(\zeta)g(\zeta)-f(\zeta')g(\zeta')|^2}{|\zeta-\zeta'|^2}|\mathrm{d}\zeta||\mathrm{d}\zeta'| \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}}\frac{|g(\zeta)(f(\zeta)-f(\zeta'))+f(\zeta')(g(\zeta)-g(\zeta'))|^2}{|\zeta-\zeta'|^2}|\mathrm{d}\zeta||\mathrm{d}\zeta'|.\end{aligned}$$

由于

$$\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}}|f(\zeta)|^2\frac{|g(\zeta)-g(\zeta')|^2}{|\zeta-\zeta'|^2}|\mathrm{d}\zeta||\mathrm{d}\zeta'| \lesssim \|f\|_\infty\mathcal{D}(g),$$

可知， $\mathcal{D}(fg)$有限，当且仅当

$$\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}}|g(\zeta)|^2\frac{|f(\zeta)-f(\zeta')|^2}{|\zeta-\zeta'|^2}|\mathrm{d}\zeta||\mathrm{d}\zeta'| < +\infty.$$

因此， f是一个乘子，当且仅当 $\mathcal{D}_\zeta(f)|\mathrm{d}\zeta|$是 $\mathcal{D}$上的 Carleson 测度。 □

由定理 1.1 和引理5.1，我们得到以下引理

引理 5.2. 设 $0<\alpha<1/2$ 且令 $E\subset\mathbb{T}$，则

(1) 如果 $E\in\mathcal{L}_2$，则 $f_{\omega,\ E}\in\mathcal{M}(\mathcal{D})$ 当且仅当 $d\mu_{\omega,\ E}(\zeta):=\mathrm{d}(\zeta,E)\omega'(\mathrm{d}(\zeta,E))^2|\mathrm{d}\zeta|$是 $\mathcal{D}$ 的 Carleson 测度。(2) 如果 $E\in\mathcal{L}_1$，则 $f_{\alpha,\ E}\in\mathcal{M}(\mathcal{D})$ 当且仅当 $d\mu_{\alpha,\ E}(\zeta):=\mathrm{d}(\zeta,E)^{2\alpha-1}|\mathrm{d}\zeta|$是 $\mathcal{D}$. 的 Carleson 测度

给定一条弧 $I\subset\mathbb{T}$，记其弧长为 $|I|$，并记相应的 Carleson 盒为 $S(I)$，其定义为

$$S(I):=\left\{re^{i\theta}:e^{i\theta}\in I, 1-|I|<r<1\right\}.$$

回顾一下，狄利克雷空间 $\mathcal{D}$ 的再生核为

$$k_w(z)=\frac{1}{\bar{w}z}\log\frac{1}{1-\bar{w}z},\qquad z,w\in\mathbb{D}.$$

我们将使用 Arcozzi、Rochberg 和 Sawyer [6] 给出的 Carleson 测度的以下刻画，并且

定理5.3。 [6] 设 μ 是 $\overline{\mathbb{D}}$上的有限 Borel测度。那么， μ 是 $\mathcal{D}$ 的 Carleson 测度，当且仅当存在一个正常数 C 使得

$$\int_{\overline{S(I)}}\int_{\overline{S(I)}}\mathrm{Re}\ k_w(z)\mathrm{d}\mu(w)\mathrm{d}\mu(z)\le C\mu(\overline{S(I)}).$$

定理 1.2 和定理 1.3 的证明。这里我们讨论一般情形和特殊情形$\omega(t)=t^{\alpha}$。由引理 5.2，只需证明该测度

$$d\mu_{\omega,E}(\zeta):=\mathrm{d}(\zeta,E)\omega'(\mathrm{d}(\zeta,E))^2|\mathrm{d}\zeta|$$

是 $\mathcal{D}$ 的 Carleson 测度。根据定理5.3，测度 $\mathrm{d}\mu_{\omega,\ E}(\zeta)$ 是 $\mathcal{D}$ 的 Carleson 测度，当且仅当对每个闭弧 I，都有

$$\int_I\int_I \log\frac{1}{|\zeta-\zeta'|}\mathrm{d}\mu_{\omega,E}(\zeta)\mathrm{d}\mu_{\omega,E}(\xi)\lesssim\mu_{\omega,E}(I). \tag{18}$$

then (18) 成立，且 $\mathrm{d}\mu_{\omega,\ E}$ 是 Carleson 测度，因此 $f_{\omega,\ E}\in\mathcal{M}(\mathcal{D})$.

反之，如果函数 $f_{\omega,\ E}$ 是 $\mathcal{D}$的乘子，那么测度 $\mathrm{d}\mu_{\omega,\ E}(\zeta):=\mathrm{d}(\zeta,E)\omega'(\mathrm{d}(\zeta,E))^2|\mathrm{d}\zeta|$是 Carleson 测度，因此 (18) 成立，从而完成定理 1.3 的证明。

为了得到一个更简单、更实用的条件，我们回顾 $\mathcal{D}$的 Carleson 测度的单盒刻画，它类似于 Hardy空间的经典刻画。

定理5.4。 [25] 设 μ 是 $\overline{\mathbb{D}}$ 上的有限正博雷尔测度，满足

$$\mu(\overline{S(I)})=O(\phi(|I|)),\qquad (|I|\to 0),$$

其中 $\phi:\ ]0,2\pi]\to]0,\infty]$ 是一个递增函数，满足

$$\int_0^{2\pi}\frac{\phi(x)}{x}dx<\infty.$$

那么 μ 是 $\mathcal{D}$ 的 Carleson 测度。

Let

$$N_E(t):=2\sum_j 1_{\{|I_j|>2t\}}$$

其中 (I_j) 表示 $\mathbb{T}\setminus E$ 的连通分支族。注意，对于任意可测函数 $\Omega\colon (0,\pi]\to\mathbb{R}^+$，我们有

$$\int_{\mathbb{T}}\Omega(\mathrm{dist}(\zeta,E))|d\zeta|=\int_0^{\pi}\Omega(t)N_E(t)dt.$$

我们有 $tN_E(t)\le|E_t|$，其中 $E_t:=\{\zeta\in\mathbb{T}:\mathrm{d}(\zeta,E)\le t\}$。令 $c(E)$ 表示 E 的对数容量。回忆一下，若 E 是与序列 $(\zeta_n)_{n\geqslant 0}$ 相关联的康托尔集，则

$$c(E)=0\iff\int_0^1\frac{ds}{|E_s|}=+\infty\iff\sum_{n\ge 0}2^{-n}\log(1/\pi(\zeta_1\dots\zeta_n))=+\infty$$

我们有以下结果

推论 5.5. 考虑一个取值于 $(0,1/2)$ 的序列 (ζ_n)，满足 $\limsup_n\zeta_n<1/2$；并设 $E=E_{(\zeta_n)}$ 具有正的对数容量，则以下断言等价:

(1) $f_{\omega,\ E}\in\mathcal{D}$, (2) $f_{\omega,\ E}\in\mathcal{M}(\mathcal{D})$,
(3) $\int_{\mathbb{T}}\mathrm{d}(\zeta,E)\omega'(\mathrm{d}(\zeta,E))^2|\mathrm{d}\zeta|<\infty$。

证明。令 $f_{\omega,E}\in\mathcal{D}$。由于 $E\in\mathcal{K}\subset\mathcal{L}_2$，由引理 5.2，只需证明测度 $d\mu_{\omega,E}(\zeta):=\mathrm{d}(\zeta,E)\omega'(\mathrm{d}(\zeta,E))^2$是 $\mathcal{D}$ 的 Carleson 测度。

我们有

$$\mu(\overline{S(I)})\asymp\int_I\omega'(\mathrm{d}(\zeta,E))^2\mathrm{d}(\zeta,E)|\mathrm{d}\zeta|=\int_0^{|I|}t\omega'(t)^2N_{E\cap I}(t)\mathrm{d}t. \tag{19}$$

注意

$$N_{E\cap I}(t)\lesssim\frac{N_E(t)}{N_E(|I|)}.$$

若令

$$\phi(s):=\int_0^s t\omega'(t)^2\frac{N_E(t)}{N_E(s)}\mathrm{d}t,$$

那么，不等式 (19) 变为

$$\mu(\overline{S(I)})=O(\phi(|I|)).$$

另一方面，利用 $c(E)>0$ 即 $\int_0^1\frac{ds}{|E_s|}<\infty$ 这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\phi(x)}{x}\mathrm{d}x &= \int_0^1 t\omega'(t)^2N_E(t)\left(\int_{s=t}^1\frac{\mathrm{d}s}{sN_E(s)}\right)\mathrm{d}t\\ &\asymp \int_0^1 t\omega'(t)^2N_E(t)\mathrm{d}t.\\ &\lesssim \int_0^1\omega'(t)^2|E_t|\mathrm{d}t.\\ &\asymp \int_{\mathbb{T}}\omega'(\mathrm{d}(\zeta,E))^2\mathrm{d}(\zeta,E)|\mathrm{d}\zeta|<+\infty.\end{aligned}$$

应用定理5.4即可完成证明。 □

5.2. 注释与例子。1. 存在 E 使得 $f_{\alpha,\ E}\in\mathcal{D}\backslash\mathcal{M}(D)$，其中 $\alpha<1/2$。在给出这样一个例子之前，我们先回顾一下，测度 μ 是狄利克雷空间 $\mathcal{D}$ 上的 Carleson 测度的必要条件是

$$\mu(\overline{S(I)})=O(1/\log(1/|I|)),\quad(|I|\to 0) \tag{20}$$

现在令 $\theta_n=\sum_{k\geq n}t_k$，其中 $t_n^{2\alpha}=1/(n(\log n)^\beta)$，这里 $\beta>1$ 稍后选定。设

$$E=\left\{e^{i\theta_n},n\geq 2\right\}\cup\{1\}.$$

我们有

$$\int_{\mathbb{T}}\mathrm{d}(\zeta,E)^{2\alpha-1}|\mathrm{d}\zeta|\asymp\sum_{n\geq 1}(\theta_n-\theta_{n+1})^{2\alpha}=\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(\log n)^\beta}<\infty.$$

因此 $f_{\alpha,\ E}\in\mathcal{D}$。

现在我们证明，对于 $\alpha < 1/2$，$f_{\alpha,\ E} \notin \mathcal{M}(D)$。由于 (??) $\mathrm{d}(\zeta, E)^{2\alpha-1} \lesssim \mathcal{D}_\zeta(f_{\alpha,\ E})$。因此，如果 $\mathcal{D}_\zeta(f_{\alpha,\ E})|\mathrm{d}\zeta|$ 是 Carleson 测度，那么对于所有弧 $I \subset \mathbb{T}$，我们有

$$\int_I \mathrm{d}(\zeta, E)^{2\alpha-1}|\mathrm{d}\zeta| \le \frac{C}{\log(1/|I|)}. \tag{21}$$

取 $I = (1, e^{i\theta_N})$,

$$|I| = \theta_N = \sum_{k\ge N} \frac{1}{n^{1/2\alpha}(\log en)^{\beta/2\alpha}} \asymp \frac{1}{n^{(1/2\alpha)-1}(\log en)^{\beta/2\alpha}}$$

且 $\log(1/|I|) \asymp \log n$。由于

$$\int_I \mathrm{d}(\zeta, E)^{2\alpha-1}|\mathrm{d}\zeta| \asymp \sum_{n\ge N} (\theta_n - \theta_{n+1})^{2\alpha} = \sum_{n\ge N} \frac{1}{n(\log n)^\beta} \asymp \frac{1}{(\log n)^{\beta-1}}.$$

当 $\beta \in (1,2)$ 时，必要条件 (20) 成立。因此，若 $\beta > 2$，则 (20) 不成立，$\mathcal{D}_\zeta(f_{\alpha,E})|\mathrm{d}\zeta|$ 不是 $\mathcal{D}$ 的 Carleson 测度。由引理 5.2，$f_{\alpha,E} \notin \mathcal{M}(D)$，从而完成证明。

3. 注意，若我们设

$$\beta_E = \sup\left\{\beta > 0 :\ \mathrm{d}(\cdot, E)^{-\beta} \in L^1(\mathbb{T})\right\},$$

那么由推论 5.5 可得

- 若 $\alpha > (1-\beta_E)/2$，则 $f_{\alpha,\ E} \in \mathcal{M}(\mathcal{D})$,
- 若 $\alpha < (1-\beta_E)/2$，则 $f_{\alpha,\ E} \notin \mathcal{D}$,

情形 $\alpha = (1-\beta_E)/2$ 取决于 E。事实上，若指定集合 E，我们可以得到更好的结果。对于 $\zeta \in (0, 1/2)$，令 E_ζ 为常比率为 ζ 的完美对称集。回忆一下，$\dim(E_\zeta)$，即 E_ζ 的豪斯多夫维数，等于 $(\log 2)/\log(1/\zeta)$。我们有

$$\int_{\mathbb{T}} \mathrm{d}(\xi, E)^{-\beta}|\mathrm{d}\xi| \asymp \sum_n 2^n \int_0^{(1-\zeta)\zeta^n} t^{-\beta} dt \asymp (2\zeta^{1-\beta})^n$$

因此

$$\mathrm{d}(\cdot, E)^{-\beta} \in L^1(\mathbb{T}) \iff \beta < 1 - \frac{\log 2}{\log(1/\zeta)} = 1 - \dim(E_\zeta) = \beta_E.$$

我们得到以下结果

推论 5.6。设 $\xi \in (0, 1/2)$，并令 E_ξ 为常比率为 ξ 的完美对称集。以下断言等价：

(1) $f_{\omega,\ E} \in \mathcal{M}(\mathcal{D})$，(2) $f_{\omega,\ E} \in \mathcal{D}$，(3) $\int_0^1 \omega'(t)$

$^2 t^{1-\dim E_\xi} dt < \infty$.

我们以如下命题结束本节

命题 5.7。设 $E \subset \mathbb{T}$ 为一个闭子集，满足 $\mathrm{d}(\cdot, E)^{-\sigma} \in L^1(\mathbb{T})$，其中$\sigma \in (0,1)$。如果测度

$$d\widetilde{\mu}_{\omega,E} := \mathrm{d}(\zeta, E)\omega'(\mathrm{d}(\zeta, E))^2 \log^2\big(1/\mathrm{d}(\zeta, E)\big)|d\zeta|$$

是 $\mathcal{D}$ 的 Carleson 测度，则外函数 $f_{\omega,\ E}$ 是 $\mathcal{D}$ 的乘子。

6. 狄利克雷空间中的逼近

设 μ 为 $\mathbb{T}$ 上的正博雷尔测度。回忆一下，多项式在 $\mathcal{D}(\mu)$ 中稠密。若函数 $f \in \mathcal{D}(\mu)$ 满足以下条件，则称其在 $\mathcal{D}(\mu)$ 中是循环的

$$[f]_{\mathcal{D}(\mu)} = \mathcal{D}(\mu),$$

其中

$$[f]_{\mathcal{D}(\mu)} := \overline{\{pf \ : \ p \text{ is a polynomial}\}}.$$

为了引入与 $\mathcal{D}(\mu)$ 相关的容量，我们先回顾与 $\mathcal{D}(\mu)$ 相关的调和空间的定义。也就是说，令 $\mathcal{D}^h(\mu)$ 为满足 $\mathcal{D}_\mu(f) < \infty$ 的函数 $f \in L^2(\mathbb{T})$ 所构成的集合，并赋予其范数

$$\|f\|_\mu^2 := |f(0)|^2 + \mathcal{D}_\mu(f).$$

我们回顾 Beurling–Deny 意义下容量的定义：设 U 是 $\mathbb{T}$的一个开子集，则 U 的 c_μ-容量定义为

$$c_\mu(U) := \inf\left\{\|f\|_\mu^2 : u \in \mathcal{D}^h(\mu), f \geq 0 \text{ and } f \geq 1 \text{ a.e. on } U\right\}.$$

按照惯例，我们将任意子集 $F \subset \mathbb{T}$ 的 c_μ-容量定义为

$$c_\mu(F) = \inf\left\{c_\mu(U) : U \text{ open}, F \subset U\right\}.$$

6.1. 极集。本节中，我们将建立一个确保某个集合容量为零的充分条件。

下文将多次用到以下变量替换公式；我们假设 $\mu(E) = 0$。

$$\int_{\mathbb{T}} \Omega(\mathrm{d}(\zeta, E))\, d\mu(\zeta) = \int_0^{2\pi} \Omega(t)\, d\mu(E_t).$$

- 若 Ω 可微，则

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \Omega(t)\, d\mu(E_t) &= -\int_0^{2\pi} \Big(\int_t^{2\pi} \Omega'(s)\, ds\Big)\, d\mu(E_t) + \Omega(2\pi)\,\mu(E_{2\pi}) \\ &= -\int_0^{2\pi} \Omega'(s)\,\mu(E_s)\, ds + \Omega(2\pi)\,\mu(\mathbb{T}).\end{aligned}$$

因此

$$\int_{\mathbb{T}} \Omega(\mathrm{d}(\zeta, E))\, d\mu(\zeta) = -\int_0^{2\pi} \Omega'(s)\,\mu(E_s)\, ds + \Omega(2\pi)\,\mu(\mathbb{T}). \tag{22}$$

• 如果 $\Omega(2t) \asymp \Omega(t)$，那么

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \Omega(t)\, d\mu(E_t) &\asymp \sum_n \Omega(2^{-n})(\mu(E_{2^{-n}}) - \mu(E_{2^{-n-1}})) \\ &\lesssim \int_0^{2\pi} \Omega(t)\, \frac{\mu(E_t)}{t}\, dt + \Omega(2\pi)\, \mu(\mathbb{T}).\end{aligned}$$

因此

$$\int_{\mathbb{T}} \Omega(\mathrm{d}(\zeta, E))\, d\mu(\zeta) \lesssim \int_0^{2\pi} \Omega(t)\, \frac{\mu(E_t)}{t}\, dt + \Omega(2\pi)\, \mu(\mathbb{T}). \tag{23}$$

我们需要以下引理，它在假设 ω 为非递增函数的条件下，对 $\mathcal{D}_\mu(f_{\omega,\ E})$给出一个估计。

引理 6.1. 设 $E \subset \mathbb{T}$ 是一个 $\mathcal{L}_2$-集。设 ω 是一个非递增函数，使得对于某个 $\gamma > 2$， $\omega(t^\gamma)$是凸的，且 $t|\omega'(t)|\omega(t)$是递增的。如果

$$\int_0^1 \omega'(t)^2\, \mu(E_t)\, dt < \infty, \tag{24}$$

那么$f_{\omega,\ E} \in \mathcal{D}(\mu)$。

证明。证明过程与引理 2.1 和引理 3.5 的证明基本相同，只需稍作调整以考虑关于 ω的假设。令 $\delta = d(\zeta, E)$，我们得到

$$\mathcal{D}_\zeta(f_{\omega,E}) \lesssim \delta\omega'(\delta)^2$$

现在令 $\Omega(t) = t\omega'(t)^2$, 我们有 $\Omega(2t) \asymp \Omega(t)$，根据 (23)，得到

$$\int_{\mathbb{T}} \mathcal{D}_\zeta(f_{\omega,E})\, d\mu(\zeta) \lesssim \int_{\mathbb{T}} \Omega(\mathrm{d}(\zeta, E))\, d\mu(\zeta) \lesssim \int_{\mathbb{T}} \Omega(t)\, \frac{\mu(E_t)}{t} dt$$

这就完成了证明。 □

以下 结果可由关于容量的弱不等式立即得到 s.

命题 6.2。设 F 是 $\mathbb{T}$的一个闭子集。那么，当且仅当存在一个外函数 $f \in \mathcal{D}(\mu)$，使得对所有 $\zeta \in F$都有 $f^*(\zeta) = \infty$时， F 是 c_μ-极的，即 $c_\mu(F) = 0$。

定理 6.3。设 $E \subset \mathbb{T}$ 是一个 $\mathcal{L}_2$-集。此外，假设测度 μ 满足

$$\mu(E_t) = O\big(h(t)\big) \quad as\ t \to 0^+,$$

其中， $h\colon (0, 1) \to \mathbb{R}^+$， $h(t)/t$ 递减， $h(t)/t^\beta$ 递增，对 $\beta \in (0, 1)$成立。如果

$$\int_0^1 \frac{dt}{h(t)} = +\infty, \tag{25}$$

那么 $c_\mu(E) = 0$

证明。令 $f_{\omega,E}$ 为外函数，使得

$$\omega(t) = \log \int_t^{\pi} \frac{\mathrm{d}s}{h(s)} \quad \text{a.e. on } \mathbb{T}$$

函数 ω 是非增的；关于 h 的假设意味着，对于某个 $\gamma > 2$， $\omega(t^{\gamma})$ 是凹函数，并且 $t|\omega'(t)|\omega(t)$ 是递增的。由于 h 满足（25），因此

$$\int_0^1 \frac{dt}{h(t)\Big(\int_t^1 ds/h(s)\Big)^2} < \infty.$$

因此，（26）成立。所以 $f_{\omega,\,E} \in \mathcal{D}(\mu)$ 和 $f_{\omega,\,E}(\zeta)$ 在 E 上 $= \infty$，于是根据命题 6.2 $c_{\mu}(E) = 0$。□

注。1. 由于移位算子在 $\mathcal{D}(\mu)$ 中是一个 2-等距算子，因此 $\mathcal{D}(\mu) \subset L^2(\mu)$。所以，若 $\mu(E) > 0$，则 $c_{\mu}(E) > 0$。

2. 粗略地说，定理 6.3 表明，如果

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\mu(E_t)} = +\infty$$

那么 $c_{\mu}(E) = 0$。当 $\mu = m$ 是勒贝格测度时，容量 c_{μ} 与对数容量可比。条件

$$\int_0^t \frac{dt}{|E_t|} = +\infty,$$

蕴含 $c(E) = 0$。此结果归功于 Carleson [13, 定理 2，第 30], 页；另见 [21,定理 5，4] 关于极集。

3. 显然，若 f 在 $\mathcal{D}(\mu)$ 中是循环的，则 f 是外函数，且其零点集 $\mathcal{Z}_{\mathbb{T}}(f) \subset \mathbb{T}$ 是极性的，即 $c_{\mu}\big(\mathcal{Z}_{\mathbb{T}}(f)\big) = 0$，其中

$$\mathcal{Z}_{\mathbb{T}}(f) = \left\{\zeta \in \mathbb{T} : \inf_{r\to 1} |f(r\zeta)| = 0\right\},$$

下面关于循环性的定理 6.4 使我们能够推出定理 6.3。

6.2. $\mathcal{D}(\mu)$ 中的循环性。

定理 6.4. 设 $f \in \mathcal{D}(\mu) \cap A(D)$ 是一个外函数，且 $E = \{\zeta \in \mathbb{T} \mid f(\zeta) = 0\}$。若存在函数 $g \in \mathcal{D}(\mu)$ 使得

$$|g(z)| \lesssim \mathrm{d}(z, E)^4, \quad z \in \mathbb{D},$$

则 $g \in [f]_{\mathcal{D}(\mu)}$。

证明。见 [25, 26, 22] □

我们需要以下引理，该引理在较弱的正则性假设下，为 $\mathcal{D}_\mu(f_{\omega,\ E})$ 提供了一个估计；特别是，在 E 是一个 $\mathcal{K}$-集的情况下，不要求 $t\omega'(t)/\omega(t)$ 具有单调性。

引理 6.5. 设 $E \subset \mathbb{T}$ 是一个 $\mathcal{K}$-集。设 ω 是一个递增函数，使得对于某个 $\gamma > 2$， $\omega(t^\gamma)$ 是凹函数，并且对于某个 $\varepsilon \in \in (0, \beta_E)$， $\omega(t)/t^\varepsilon$ 是非递增的。设 μ 是一个正的勒贝格测度，使得当 $t \to 0$时， $\mu(E_t) = O(h(t))$，其中 h 是递增的，且 $h(t)/t$ 是递减的。则

$$\mathcal{D}_\mu(f_{\omega,E}) \lesssim \|\omega' h\|_\infty \|\omega\|_\infty. \tag{26}$$

其中，隐含常数仅依赖于 γ、 ε 和 β_E。

证明. 证明与引理 2.1 和引理 3.5 的证明非常相似，仅有少量修改。因此，我们只强调这些修改发生的步骤。令 $\delta = d(\zeta, E)$，且 $\delta' = d(\zeta', E)$。对于引理 2.1 中的积分 $I_i (i = 1, 2, 3)$，只有 I_1涉及 $tw'(t)/w(t)$为递增函数这一条件。因此，唯一的改动涉及 I_1。令

$$\Omega(u) = \frac{1}{u^2} \int_{t=0}^{u} t \frac{\omega'(t)}{\omega(t)} \int_{s=t}^{\delta} \omega'(s)\omega(s)\, ds\, dt = \frac{1}{u^2} \int_{s=0}^{u} \omega'(s)\omega(s) \int_{t=0}^{s} t \frac{\omega'(t)}{\omega(t)}\, ds\, dt$$

因此 $-\Omega'(u) \le \Omega(u)/u$。由 (12) 和 (23) 可得

$$\int_{\mathbb{T}} \mathcal{D}_{\zeta, I_1}(f_{\omega,E})\, d\mu(\zeta) \asymp \int_{\mathbb{T}} \Omega(\mathrm{d}(\zeta, E)) \mathrm{d}\mu(\zeta) = -\int_0^1 \Omega'(t)\mu(E_t)\mathrm{d}t + \Omega(2\pi)\mu(\mathbb{T}).$$

因此

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} \mathcal{D}_{\zeta, I_1}(f_{\omega,E})\, d\mu(\zeta) &\le \int_0^1 \frac{1}{u^2} \int_0^u t \frac{\omega'(t)}{\omega(t)} \int_t^u \omega'(s)\omega(s)\, ds\, dt\, \frac{h(u)}{u} du \\
&= \int_0^1 t \frac{\omega'(t)}{\omega(t)} \int_t^1 s^{1-1/\gamma} \omega'(s)\omega(s) \frac{ds}{s^{1-1/\gamma}} \int_s^1 \frac{h(u)}{u^3} du \\
&\le \int_0^1 t^{2-1/\gamma} \frac{\omega'(t)^2}{\omega(t)} \int_t^1 \omega(s)h(s)\, \frac{ds}{s^{3-1/\gamma}} \\
&\le \int_0^1 \omega'(t)^2 h(t)\, dt.
\end{aligned}$$

现在，对于 Γ，令 $I_n=\{\zeta'\in\mathbb{T}:\ |\zeta-\zeta'|<2^n\delta\}$。令 $\beta=(\varepsilon+\beta_E)/2$，由于 E 是一个 $\mathcal{K}$-集，根据 (5) 中的引理 3.1，$|\{\zeta'\in I_n:\ \mathrm{d}(\zeta',E)<t\}|\le|I_n|(t/|I_n|)^\beta$。于是得到

$$\begin{aligned}\int_{|\zeta-\zeta'|>\delta,\,\delta'<t}\frac{|\mathrm{d}\zeta'|}{|\zeta-\zeta'|^2}&=\sum_{n\ge1}\int_{I_{n+1}\setminus I_n,\,\delta'<t}\frac{|\mathrm{d}\zeta'|}{|\zeta-\zeta'|^2}\\&\le\sum_{n\ge1}\frac{1}{(2^n\delta)^2}\int_{I_n,\,\delta'<t}|\mathrm{d}\zeta'|\\&\le\sum_{n\ge1}\frac{1}{(2^n\delta)^2}|\{\zeta'\in I_n:\,\mathrm{d}(\zeta',E)<t\}|\\&\lesssim\sum_{n\ge1}\frac{1}{(2^n\delta)^2}2^{n+1}\delta\left(\frac{t}{2^{n+1}\delta}\right)^\beta\asymp\frac{t^\beta}{\delta^{1+\beta}}.\end{aligned}$$

因此，由 (14) 可得

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\zeta,\Gamma(\zeta,E)}(f_{\omega,E})&=4\int_{|\zeta-\zeta'|>\delta,\,\delta'<\delta}\left(\int_{\delta'}^{\delta}\frac{\omega'(t)}{\omega(t)}\int_t^\delta\omega'(s)\omega(s)\,ds\,dt\right)\frac{|\mathrm{d}\zeta'|}{|\zeta-\zeta'|^2}\\&\asymp\int_0^\delta\frac{\omega'(t)}{\omega(t)}\int_t^\delta\omega'(s)\omega(s)\,ds\int_{|\zeta-\zeta'|>\delta,\,\delta'<t}\frac{|\mathrm{d}\zeta'|}{|\zeta-\zeta'|^2}\\&\le\frac{1}{\delta^{1+\beta}}\int_0^\delta t^{\beta_E}\frac{\omega'(t)}{\omega(t)}\int_t^\delta\omega'(s)\omega(s)\,dsdt=\widetilde{\Omega}(\delta)\end{aligned}$$

注意，$\widetilde{\Omega}'(u)\le\widetilde{\Omega}(u)/u$，于是由 (23) 得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}}\mathcal{D}_{\zeta,\Gamma(\zeta,E)}(f_{\omega,E})d\mu(\zeta)&\lesssim\int_{u=0}^1\int_{t=0}^u t^\beta\frac{\omega'(t)}{\omega(t)}\int_{s=t}^\delta\omega'(s)\omega(s)\,\frac{h(u)}{u^{2+\beta}}dsdtdu\\&\lesssim\int_{t=0}^1 t^\beta\frac{\omega'(t)}{\omega(t)}\int_{s=t}^1\omega'(s)\omega(s)\,\frac{h(s)}{s^{1+\beta}}\,dsdt\\&\lesssim\|\omega'h\|_\infty\int_{t=0}^1 t^\beta\frac{\omega'(t)}{\omega(t)}\int_{s=t}^1\frac{\omega(s)}{s^\varepsilon}\frac{ds}{s^{1+\beta-\varepsilon}}dt\\&\asymp\|\omega'h\|_\infty\|\omega\|_\infty.\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

定理 6.4 的证明。设 $\sigma=1-1/\gamma_0$，令 $\gamma\in(0,\gamma_0)$、$\alpha\in(0,1/\gamma_0)$、$\sigma\in(0,1/2)$ 和 $\eta\in(0,1)$。考虑外函数 $f_{\omega_\eta,\ E}:\ [0,\pi]\to.\mathbb{R}_+$ 其中 ω_η 由下式给出

$$\omega_\eta(t)=\begin{cases}c_\eta t^\alpha & \text{if } 0\le t\le\eta,\\ \left(\displaystyle\int_t^{2\pi}\frac{\mathrm{d}s}{h(s)}\right)^{-\sigma} & \text{if } \eta<t\le\pi\end{cases}$$

这里 c_η 是使 ω_η 连续的常数。由于 $\int_0^{2\pi} ds/h(s) = \infty$ 且$h(t)/t^{1-1/\gamma_0}$ 递增，我们可以选择 $\eta_0 \in (0,\pi)$，使得对于 $\eta \in (0,\eta_0)$

(1) ω_η 递增，(2) 对任意 $\varepsilon > \alpha$， $\omega_\eta(t)/t^\varepsilon$

非递增，(3) $\omega_\eta(t^\gamma)$ 是凹函数，(4) sup

$\|\omega_\eta' h\|_\infty \|\omega_\eta\|_\infty < \infty_{.\eta<\eta_0}$

由引理（6.5），可得 $f_{\omega_\eta,\ E} \in \mathcal{D}(\mu)$。注意，当 $\eta \to 0$ 时，$|f^*_{\omega_\eta,\ E}| \to |g^*|$ 在 $\mathbb{T}$ 上几乎处处成立，其中 g 是如下定义的外函数：

$$g^*(\zeta) = \left(\int_{\mathrm{d}(\zeta,E)}^{2\pi} \frac{ds}{h(s)} \right)^{-\sigma}, \qquad \text{a.e. on } \mathbb{T}.$$

显然，$\log|g^*| \in L^1(\mathbb{T})$。由定理 4.1 的第 (2) 部分，得到 $g \in \mathcal{D}(\mu)$；由引理 6.5，还可得 $1/g \in \mathcal{D}(\mu)$。因此， g 在 [19] 中是循环的。

由定理 6.4，可得 $f^{4/\alpha}_{\omega_\eta,\ E} \in [f]_{\mathcal{D}(\mu)}$。因此，由 Richter–Sundberg 定理[36], 可知，$f_{\omega_\eta,\ E} \in [f]_{\mathcal{D}(\mu)}$。于是， $g \in [f]_{\mathcal{D}(\mu)}$。由于 g 在 $\mathcal{D}(\mu)$ 中是循环的，我们得出

$$[f]_{\mathcal{D}(\mu)} = \mathcal{D}(\mu),$$

至此，证明完成。

致谢。第一作者的研究工作部分得到了阿拉伯基金会奖学金计划和杰出学者奖 - 文件 1092 的资助。第二作者的研究工作部分得到了 ANR 项目 ANR-24-CE40-5470 的资助。

References

[1] Aleman, A.; Hartz, M. McCarthy, J.; Richter, S., 由完全 Nevanlinna-Pick 因子诱导的分解。《数学进展》335 (2018), 372–404.[2] Aleman, A.; Hartz, M. McCarthy, J.; Richter, S., 完全 Pick 空间中的自由外函数。《美国数学会会刊》376 (2023), no. 3, 1929–1978.[3] Aleman, A.; Hartz, M. McCarthy, J.; Richter, S., 完全 Pick 空间的弱乘积。《印第安纳大学数学杂志》70 (2021), 325–352.[4] Arcozzi, N.; Rochberg, R.; Sawyer, E.; Wick, B., 狄利克雷空间及相关函数空间。数学调查与专著, 239. 美国数学会, 罗德岛州普罗维登斯, 2019.[5] Arcozzi, N.; Rochberg, R.; Sawyer, E.; Wick, B., 狄利克雷空间：综述。《纽约数学杂志》17A (2011), 45–86.[6] Arcozzi, N.; Rochberg, R.; Sawyer, E., Drury-Arveson Hardy 空间及复球上其他 Besov-Sobolev 空间的 Carleson 测度。《数学进展》218 (2008), no. 4, 1107–1180.[7] Arcozzi, N.; Rochberg, R.; Sawyer, E., 解析 Besov 空间的 Carleson 测度。《伊比利亚美洲数学杂志》18 (2002), no. 2, 443–510.[8] Benyamine, B., Hilbert 乘法不等式的有限截段与狄利克雷空间的乘子。博士论文，波尔多大学，2022年6月7日。[9] Beurling, A., 关于希尔伯特空间中线性变换的两个问题。《数学学报》81 (1948), 239–255.[10] Bruna, J., 调和分析（明尼阿波利斯，明尼苏达州，1981），第 74–85 页。

[11] Bruna, J., 全纯利普希茨函数的峰集。《印第安纳大学数学杂志》32 (1983), no. 2, 257–272.[12] Brown, L.; Shields, A. L., 狄利克雷空间中的循环向量。《美国数学会会刊》285 (1984), no. 1, 269–303.[13] Carleson, C, 《例外集选题》，范诺斯特兰德数学研究丛书，第 13 卷，Van Nostrand，普林斯顿，新泽西州，1967。 [5] R. Chacón，Carleson 型测度[14] Carleson, L. 狄利克雷积分的表示公式。《数学杂志》73 (1960), 190–196.[15] Carleson, L., 单位圆周上正则函数的唯一性集。《数学学报》87 (1952), 325–345.[16] Costea, S; Sawyer, E; and B.D. Wick, B., Drury-Arveson Hardy 空间及单位球上其他全纯 Besov-Sobolev 空间的冠定理。 $\mathbb{C}^n$《分析与偏微分方程》4 (2011), 499-550.[17] Douglas, R. G.; Krantz, S. G.; Sawyer, E.; Treil, S.; Wick, B.; 冠问题史。《冠问题》，1-29，《菲尔兹研究所通讯》72，施普林格，纽约，2014.[18] Dyn'kin, E. M.; 伪解析延拓。《分析与数学杂志》60 (1993), 45–70.[19] El-Fallah, O.; Elmadani, Y.; Labghail, I. 狄利克雷空间中的极值函数与不变子空间。《数学进展》408 (2022), part B, Paper No. 108604, 29 pp.[20] El-Fallah, O.; Elmadani, Y.; Kellay, K. 狄利克雷空间中的核与容量估计。《泛函分析杂志》276 (2019), no. 3, 867–895.[21] El-Fallah, O.; Elmadani, Y.; Kellay, K. 狄利克雷空间中的循环性与不变子空间。《泛函分析杂志》270 (2016), no. 9, 3262–3279.[22] El-Fallah, O.; Kellay, K. 加权狄利克雷空间中的逼近。已提交[23] El-Fallah, O.; Kellay, K.; Mashreghi, J.; Ransford, T., 《狄利克雷空间入门》。剑桥数学专著丛书，203。剑桥大学出版社，剑桥，2014.[24] El-Fallah, O.; Kellay, K.; Mashreghi, J.; Ransford, T., 狄利克雷空间 Carleson 测度的单盒条件。《美国数学会会刊》143 (2015), no. 2, 679–684.[25] El-Fallah, O.; Kellay, K.; Ransford, T., 加权狄利克雷空间中的康托集与循环性。《数学分析与应用杂志》372 (2010), no. 2, 565–573.[26] El-Fallah, O.; Kellay, K.; Ransford, T., 关于狄利克雷空间循环性的 Brown-Shields 猜想。《数学进展》222 (2009), no. 6, 2196-2214.[27] El-Fallah, O.; Kellay, K.; Ransford, T., 狄利克雷空间中的循环性。《数学档案》44 (1), 61-86.[28] Elmadani, Y.; Labghail, I. 狄利克雷空间中的循环性。《加拿大数学通报》62 (2019), no. 2, 247–257.[29] Hartz, M., 每个完全 Pick 空间都满足列行性质。《数学学报》231 (2023), no. 2, 345–386.[30] Hedenmalm, H; Shields, A., 解析函数巴拿赫空间中的不变子空间。《密歇根数学杂志》37 (1990), no. 1, 91–104.[31] Kahane, J.-P; Salem, R., 完美集与三角级数。第二版。Hermann，巴黎，1994.[32] Kerman, R. and Sawyer, E. 狄利克雷型空间的 Carleson 测度与乘子。《美国数学会会刊》309 (1988), no. 1, 87–98.[33] Richter, S.; Wick, B.; 关于函数弱乘积空间上的乘子的一则注。《具体算子》3 (2016), no. 1, 25–28.[34] Richter, S. and Sundberg, C. 局部狄利克雷积分的一个公式。《密歇根数学杂志》38 (1991), no. 3, 355–379.[35] Richter, S.; Sundberg, C., 狄利克雷移位的不变子空间与伪连续延拓。《美国数学会会刊》341 (1994), no. 2, 863-879.[36] Richter, S; Sundberg, C., 狄利克雷空间中的乘子与不变子空间。《算子理论杂志》28 (1992), no. 1, 167-186.[37] Richter, S., 循环解析二等距算子的一个表示定理。《美国数学会会刊》328 (1991), no. 1, 325–349.[38] Richter, S., 狄利克雷移位的不变子空间。《纯粹与应用数学杂志》386 (1988), 205–220.[39] Stegenga, D., 狄利克雷空间的乘子。《伊利诺伊数学杂志》24 (1980), no. 1, 113–139。

[40] Seip, K.，《解析函数空间中的插值与采样》。大学讲座系列，第 33 卷。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2004 年。[41] Taylor, B. A. 和 Williams, D. L，《具有光滑边界值的解析函数环中的理想》。《加拿大数学杂志》22（1970），1266–1283。[42] Trent, T. T.，《狄利克雷空间上乘子的冠定理》。《积分方程与算子理论》49（2004），123–139。[43] Wu, Z.《狄利克雷空间的 Carleson 测度与乘子》。《泛函分析杂志》169（1999），第 1 期，148–163。

Laboratoire Analyse et Applications. Université Mohamed V Rabat. Morocco
电子邮箱，O. El-Fallah：o.elfallah@um5r.ac.maUniv. Bordeaux, CNRS,
Bordeaux INP, IMB, UMR 5251, F-33400 Talence, Franc E
电子邮箱，K.Kellay：kkellay@math.u-bordeaux.fr
Laboratoire Analyse et Applications. Université Mohamed V Rabat. Morocco
电子邮箱，H. Mahzouli：mahzouli@fsr.ac.ma