此处将在排版后的文章中显示与文章类型相应的横幅

arXiv:2601.05010v1 [physics.flu-dyn] 8 Jan 2026

双空化泡相互作用产生的超音速射流动力学：加速度、尖端破碎和穿透

Shuai Yan[1,2], A-Man Zhang[1,2]†, Tianyuan Zhang[1,2], Pu Cui[1,2], Rui Han[3],‡, 以及 Shuai Li[1,2]¶

[1]哈尔滨工程大学船舶工程学院，中国哈尔滨 150001[2]哈尔滨工程大学船舶结构安全全国重点实验室，中国哈尔滨 150001

[3]黑龙江省核动力系统与设备重点实验室，哈尔滨工程大学，中国哈尔滨 150001

（收到日期：xx；修订日期：xx；接受日期：xx）

本研究通过实验和数值模拟，研究了由两个串列空化泡相互作用产生的高速液体射流的动力学。根据生成顺序，这两个空化泡分别称为气泡1和气泡2。尽管整体塌缩模式和射流方向已有充分记录，但超音速射流加速、尖端破碎及其后续穿透的内在机制仍有待阐明。在实验中，我们采用水下电放电法生成了两个近乎相同且能量很高的空化气泡，并使用高速摄像机捕捉其瞬态相互作用。我们发现，从气泡2尖端产生的射流呈现三种截然不同的状态：锥形、伞形和喷射射流；这些状态随初始气泡间距（记为 γ）和起始时间差（记为 θ）而变化。采用流体体积法和边界积分法进行的数值模拟很好地再现了实验观察结果，并阐明了射流加速机制。我们发现，不同状态之间的转变取决于气泡1溃灭所产生的压力波的时空特性，该压力波会冲击气泡2的高曲率尖端。具体而言，压力波在气泡尖端收缩之前冲击时，会形成锥形射流；若冲击发生在收缩之后，则会形成伞形射流。喷射射流由气泡尖端破碎形成，呈现雾状和针状形态，速度范围为 10 至 1200 多米/秒。值得注意的是，我们观察到喷射射流的穿透距离超过最大气泡半径的十倍，因此非常适用于远距离、可控的流体输送。最后，我们在 $\gamma - \theta$ 参数空间中建立了射流速度和穿透距离的相图，为无针注射和微泵送等生物医学应用提供了实用参考。

关键词： 气泡动力学、空化、射流

† 通讯邮箱：zhangaman@hrbeu.edu.cn ‡ 通讯邮箱：hanrui@hrbeu.edu.cn ¶ 通讯邮箱：lishuai@hrbeu.edu.cn

摘要不得延伸至第 2 页

MSC代码（可选）请在此处输入 MSC代码

1. 引言

空化气泡在溃灭过程中会产生冲击波和高速射流等独特的瞬态动力学特征，在水力机械侵蚀这一破坏性现象中发挥着关键作用（Blake 和 Gibson 1987；Brennen 1995；Philipp 和 Lauterborn 1998；Zhao 等人 2025），同时也广泛应用于超声清洗（Ohl 等人 2006a）、超声乳化（Ren 等人 2023；Li 等，2024）、声化学（Suslick 1990；Moholkar 等人 1999）等有益领域。在边界附近或超声激励下由气泡产生的液体射流具有重要的科学研究价值，因为其局部高速流动能够显著增强液体中的传质（Yang 等人 2023；Li 等，2024），并实现对软材料的精确穿孔（Arita 等人 2013；Wei 等人 2014；Orthaber 等人 2014；George 等人 2018；Wang 等人 2022；Cattaneo 等人 2025）。近期研究表明，刚性边界附近的单个气泡能够产生速度超过 1000 m/s 的奇异射流（Lechner 等人 2019，2020；Reuter 和 Ohl 2021），其速度几乎是传统气泡射流的十倍。要产生如此高的速度，需要极小的初始气泡壁间距。Brujan 等人（2001）还发现，弹性边界附近的激光诱导空化气泡，其射流速度可达 960 m/s。然而，由于边界条件严苛，且冲击波可能对邻近目标或组织造成损伤（Ohl & Wolfrum 2003；Dijkink 等人 2007），单气泡系统在无针注射等实际应用中的可控性较差。

通过具有时间间隔的串列气泡之间的相互作用，可以产生更加可控、细长且高速的穿刺射流（Han 等人，2015年；Liang 等人，2021年；Fan 等（2024））。研究人员利用激光脉冲（Han 等人，2015年；Tomita 和 Sato，2017年；Robles 等人，2020年；Fan 等（2024））和放电方法（Fong 等，2009；Luo 等人，2021年；Liang 等人，2021年、2022a），对毫米尺度至厘米尺度范围内的串列气泡动力学及相关穿刺射流进行了研究。为确保全文表述清晰，本文将先出现的气泡称为气泡1，将随后出现的气泡称为气泡2。已发表文献对双气泡的整体相互作用、塌缩模式和射流方向进行了充分记录。Fong 等，2009的奠基性研究通过实验首次阐明了“弹射”效应，并揭示了一个两阶段水动力过程：(i) 气泡2最初被吸引向气泡1；(ii) 随后气泡2被推离，从而形成一股穿透气泡2的高速射流。在这一过程中，气泡1充当气泡2的“自由表面”，由此诱发一股背离该“自由表面”的反向射流。Han 等人（2015年）通过考察初始时间差 Δt 和初始气泡间距 d 对串列气泡动力学的影响，进行了更系统的分析。他们结合使用同步激光诱导气泡实验和数值模拟，重点研究了来自第二个气泡的射流速度变化。这种定向射流已成功用于软生物材料的精确穿透（Robles 等人，2020年）。

双气泡系统产生的射流相较于单气泡射流具有明显优势，包括冲击区域更集中、穿透深度更大。由于射流能够穿透相对较长的距离，它还有望减少热损伤，并减轻冲击波压力对周围靶标的影响。Sankin 等(2010) 和 Yuan 等(2015年) 表明，当单个气泡无法实现细胞膜的局部穿孔时，气泡1产生的射流却能够实现这一点

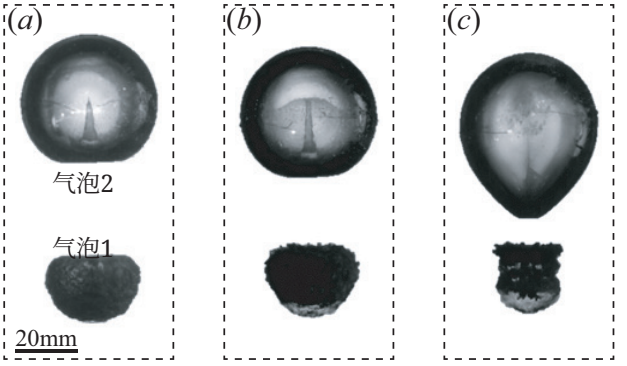

图1：串列双气泡相互作用形成的穿刺射流的三种状态。串列双气泡的动力学主要受其初始空间偏移 d 和时间延迟 Δt支配。（a）锥形射流，d = 45.1 mm，时间为 Δt = 2.40 ms；（b）伞形射流，d = 37.5 mm，时间为 Δt = 3.00 ms；（c）喷射射流，d = 36.7 mm，时间为 Δt = 2.80 ms。图中的比例尺表示长度为 20 mm。

。这进一步证明，与单个气泡相比，气泡对产生的定向射流具有更强的穿透能力。近期，Fan 等(2024年) 报道称，通过串列气泡系统形成的超声速微射流速度超过 1000 m/s。他们揭示，气泡1的溃灭会诱发气泡2的径向收缩，随后其细长表面发生颈部断裂。这一过程称为颈部断裂。强烈的汇聚流形成高压滞止点，进一步加速流体，使气泡2内部产生超声速微射流。然而，我们仍需深入了解射流加速度、射流尖端破碎及其后续穿透过程；这些对于拓展其在无针生物医学应用中的潜力至关重要。

在本研究中，我们采用水下电放电法开展了数百次双气泡相互作用实验（Cui 等 2020；Han等2022；Zhang 等2025年）。我们发现了从气泡2底部涌现的三种不同穿刺射流状态，如图1（a）—（c）所示，分别对应锥形、伞形和喷射射流。我们揭示了射流特征与初始气泡间距 d以及两气泡启动时间差 Δt 之间的关系。此外，采用流体体积法和边界积分法进行的数值模拟很好地再现了实验观察。通过结合实验与数值模拟，本研究旨在：（i）阐明穿刺射流加速的内在机制；（ii）揭示大参数空间范围内的射流状态；（iii）量化不同状态下射流的穿透能力；（iv）建立最优控制策略，以调控双气泡系统中的射流形态、速度和穿透距离。

本文结构安排如下。首先，在§2中详细介绍实验和数值方法。在§3中，我们介绍穿刺射流三种状态的形成与演变，并比较实验观察与数值结果。在§4中，我们考察气泡1的溃灭如何控制气泡2中锥形射流和伞形射流的启动。在§5中，我们阐述喷射射流的形成及其不稳定性。在§6中，我们采用简化的液体子弹模型，研究不同类型的穿刺射流穿透气泡表面后的演变。同时，我们建立了控制参数空间中射流速度和穿透距离的相图，并定量讨论控制

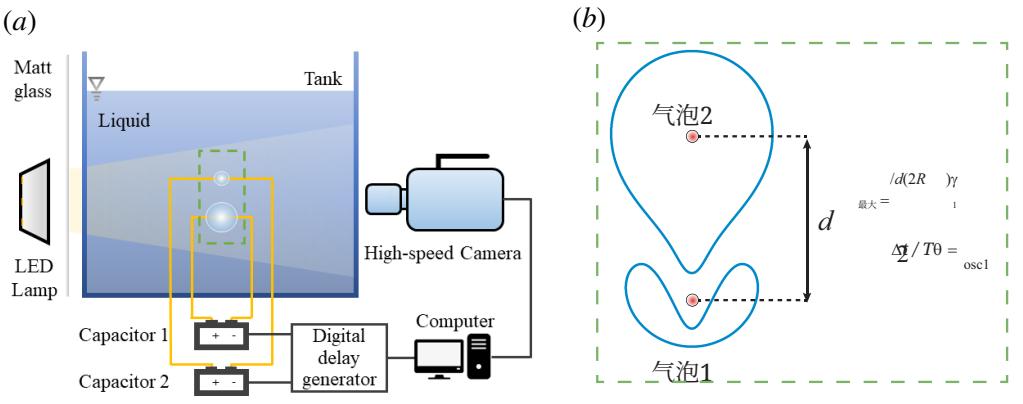

图2：(*a*) 气泡对动力学的实验装置。通过水下电放电法生成厘米尺度的气泡。利用计算机和数字延迟发生器，在预设时间延迟下控制两个电容器的放电过程。(*b*) 描述控制串列双气泡动力学的参数，其中d表示相对初始气泡间距，$R_{\max}$ 表示两个大小相同气泡的最大半径。气泡2在初始气泡1之后经过 Δt 的时间延迟生成。T_{osc1} 表示气泡1的振荡周期，定义为从气泡生成到首次溃灭的时间。

参数如何影响穿刺射流的不同状态。最后，在§7中总结本研究得出的结论。

2. 方法

2.1. 实验装置

两个气泡间相互作用的实验在尺寸为600 mm × 600mm × 600 mm的水槽中进行，环境压力为大气压（~101 kPa），室温为（~20°C）。采用水下电放电法（Cui 等（2020）；Han 等，2022；Zhang et al. 2025；Pei 等，2025）产生空化气泡，如图2(a)所示。该系统使用两个并联的2200 μF电容器，其正、负电极分别独立接线。所用导线半径约为0.1 mm，仅相当于最大气泡半径的0.05%以下，其对气泡脉动和射流行为的影响可以忽略不计（Li 等，2020）。在导线中点处有意设置两个局部高电阻点，以便在放电过程中通过集中焦耳热促进气泡生成（Cui 等（2020））。在所有实验中，两个电容器均施加相同的放电电压，以确保气泡1和气泡2的尺寸一致。实验在恒定放电电压500 V下进行。通过重复实验，测得平均最大气泡半径 $R_{\max}$ 为23 mm，相应的第一次振荡周期约为4.5 ms。此处，T_{osc} 定义为从气泡生成到第一次溃灭的时间，并通过高速成像加以确定。重复实验中的气泡尺寸分布显示，最大半径变化小于5%，显著低于Fong 等（2009）和Han 等（2015）提出的15%阈值，该阈值可接受地支持气泡尺寸相近这一结论。通过调节两个局部高电阻点之间的相对距离，可以方便地控制两个气泡之间的初始间距。两个气泡的时序

《流体聚焦》文章不得超过此页长度

通过数字延迟发生器（DG645，SRS Stanford Research Systems）进行精确控制，先对电容器1放电，再对电容器2放电。考虑到放电电路的时间不确定性，两个气泡之间预设的延迟间隔可调节至 ±2 μs精度，相对于气泡振荡周期而言可以忽略不计。空化气泡最初位于约300 mm的水深处（$>13R_{\max}$），此处边界效应对主导性的气泡间相互作用影响较小（Supponen 等2016年）。

采用高速摄像机（Phantom V2012）捕捉气泡的瞬态行为，拍摄速度为每秒 43000–110000 帧，曝光时间为 1–2 μs。使用焦距为 100 mm 的微距镜头详细记录气泡动力学，同时使用另一支焦距为 50 mm 的镜头捕捉穿刺射流在液体中的传播。经磨砂玻璃过滤的连续光源（600 W）从背面提供照明。将气泡1初生的瞬间定义为时间零点；该时刻与放电火花出现前拍摄的最后一帧阴影法图像相对应。因此，定义的时间零点与气泡实际初生时刻之间的时间偏差不超过最大帧间隔，即 9–23 μs。时间分辨率（9–23 μs）在气泡振荡首个周期的 1% 以内；相对于约 4 ms 的振荡时间尺度而言，这一偏差可以忽略。长度测量存在一个图像像素（0.1–0.2 mm）的空间不确定性，相当于最大气泡半径的约 1%。

2.2. 数值方法

为探究控制串列双气泡相互作用的基本机制，我们采用两套互补的数值模型，分别基于边界积分法（BIM）和流体体积法（VoF），用于不同目的的数值模拟。首先，BIM 具有计算灵活性，可通过数值操作（例如人为调整气泡形态或位置）解耦复杂的气泡相互作用，从而分离出控制穿透射流形成的主导因素（Fong等2009年；Dadvand 等 2012；Peters 等 2013；Han 等 2022）。然而，射流穿透后，需要采用涡环模型继续模拟（Wang等 1996；Han 等 2022；Li 等 2024年），此时拓扑结构的复杂性带来了显著的计算挑战。因此，我们采用互补的 VoF 模型，通过基于网格的模拟呈现气泡的完整演化过程，同时捕捉实验无法观测到的流动特征。

在第一个模型中，我们采用了一种经过充分验证、基于势流理论的边界积分代码（Han 等 2022；Li 等 2024年）。气泡周围的流场满足拉普拉斯方程，而假设每个气泡内部的气体压力在空间上均匀，并由绝热状态方程控制。模拟同时启动两个气泡，同时最初将气泡2置于无穷远处并冻结其势（不更新速度势），以消除其对气泡1振荡的水动力影响。达到预定延迟时间后，将气泡2移至指定位置以激活气泡间的相互作用。我们为每个气泡使用200个表面单元，这一设置在数值精度与计算效率之间实现了最佳平衡（Li 等2020；Tong等2022；Yan 等 2025年）。

在第二个模型中，我们采用流体体积法追踪气液界面，并利用有限体积法求解纳维–斯托克斯方程，从而捕捉串列双气泡的完整演化过程，包括射流穿透和破碎。我们采用改进且经过充分验证的 solvercavBubbleFoam（Koch 等 2016年； Zeng 等 2018年*a*；Reese 等2022年），该求解器源自开源平台 OpenFOAM 中的 compressibleInterFoam 求解器（Weller 等 1998年），用于进行模拟。在流体体积法框架下，两种流体被视为互不相溶。液相体积分数（α）和气相

体积分数（$1-\alpha$）由一个输运方程控制

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t}+\nabla\cdot(\alpha \boldsymbol{u})+\nabla\cdot(\alpha(1-\alpha)\boldsymbol{U_r})=\alpha(1-\alpha)\left(\frac{\psi_g}{\rho_g}-\frac{\psi_l}{\rho_l}\right)\frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}t}+\alpha\nabla\cdot\boldsymbol{u}, \tag{2.1}$$

其中$\boldsymbol{u}$ 表示速度场， t 为时间， ρ 表示密度，而 $\psi = \mathrm{D}\rho/\mathrm{D}p$中的下标 l 和 g 用于区分液相和气相。$\boldsymbol{U_r}$ 表示两相之间的相对速度，项 $\nabla\cdot(\alpha(1-\alpha)\boldsymbol{U_r})$ 用于保证界面保持锐利（Rusche 2002；Deshpande 等2012）。在每个时间步，液相和气相均满足纳维–斯托克斯方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho \boldsymbol{u})=0, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial \rho \boldsymbol{u}}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho \boldsymbol{u}\boldsymbol{u})=-\nabla p+\nabla\cdot\boldsymbol{S}+\boldsymbol{f}_\delta. \tag{2.3}$$

黏性应力张量$\boldsymbol{S}$ 定义为$\boldsymbol{S} = \mu(\nabla\boldsymbol{u} + \nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} - 2(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{I}/3)$，其中 μ 表示动力黏度，而$\boldsymbol{I}$ 表示单位张量。项$\boldsymbol{f}_\delta$ 用于计入表面张力的贡献。数值实现遵循Zeng 等(2018*b*）和 Reese等(2022）。

控制方程采用 Tait 状态方程进行热力学闭合，该方程适用于气泡内部的气体和周围液体

$$p=(p_0+B)\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\kappa}-B, \tag{2.4}$$

其中，参考压力 $p_0 = 101325$ 帕，Tait压力 $B = 304。6$ 兆帕，参考密度$\rho_0 = 998$千克·米$^{-3}$，液体（水）的绝热系数为 $\kappa = 7。15$。气泡内的气体采用理想气体模型，并使用绝热状态方程（Tait方程的一种特例，其中 $B = 0$），其中 $p_0 = 101325$帕，$\rho_0 = 1。29$ 千克·米$^{-3}$，且 $\kappa = 1。25$（Fong 等人，2009年；Han 等人，2022）。

为确保网格收敛，包含气泡和射流的计算域内网格尺寸设为最大气泡半径的1/460（Zeng 等人，2018年*a*；Reese 等人，2022）。计算开始时，串列双气泡被建模为球形，半径范围为2.5至6.7毫米，内部压力为2至28兆帕，并静止于水中。在这些条件下，Keller–Miksis方程（Keller & Miksis1980）预测的气泡尺寸和周期与实验测量略有偏差，表明在此范围内，结果对初始参数的选择具有稳健性。计算中考虑了相变效应：气泡1的平衡半径在其最大值处缩小了65%（Koch 等人，2016；Liang 等人，2022*b*；Fan 等人，2024年）。流体体积法的数值计算域足够大（$200R_{\max}$），可减轻反射压力波对核心计算域的影响。

2.3. 无量纲化

系统采用三个基本量进行无量纲化：两个等尺寸气泡的最大半径 $R_{\max}$、静水压力 P_∞ 和液体密度 ρ_∞。为阐明支配气泡动力学的主要因素，我们首先考察相关的无量纲数。在气泡尺度下，特征雷诺数、韦伯数和弗劳德数分别定义为：

$$Re=\frac{\rho U R_{\max}}{\mu}\sim O(10^5),\quad We=\frac{\rho U^2 R_{\max}}{\sigma}\sim O(10^4),\quad Fr=\frac{U}{\sqrt{gR_{\max}}}\sim O(10), \tag{2.5}$$

其中，$U = \sqrt{P_\infty/\rho} \approx 10$ m/s 为特征速度，气泡的特征长度为 $R_{\max} \approx 23$ mm，水的黏度为 $\mu = 0.001$ Pa · s，表面张力为 $\sigma = 0.073$ N/m。这表明黏性效应、毛细效应和重力效应均可忽略。因此，在 §4 的 BIM计算中，我们不考虑这些效应。串列双气泡的动力学主要由其初始空间偏移 d 和时间延迟 Δt 决定。在我们的无量纲系统中，这些参数表示为 γ 和 θ，

$$\gamma = \frac{d}{2R_{\max 1}}, \qquad \theta = \frac{\Delta t}{R_{\max 1}\sqrt{\rho/P_\infty}}, \tag{2.6}$$

如图 2(*b*)所示。对于本研究所展示的实验，由于气泡1呈球形脉动，我们采用气泡1的最大宽度作为 $R_{\max 1}$。数值验证表明，这一近似是合理的：在所研究的参数空间（$0.7 < \theta < 1.7$ 和 $0.6 < \gamma < 1$）内，气泡1的最大宽度与其自由膨胀值之间的偏差为 0.1%–4%。所有实验数据中的$2R_{\max 1}\sqrt{\rho}/P_\infty$ 值均与环境压力 P_∞下自由场中最大半径为 $R_{\max 1}$ 的气泡1的首个振荡周期相符，偏差低于 3%。因此，这种对起始时间差的无量纲化方法与 Fong 等人（2009年）和 Han 等人（2015年）采用的方法一致，即以气泡的首个振荡周期作为特征时间尺度。

3. 射流形态的三种状态

我们首先概述实验中观察到的穿刺射流，并结合使用 OpenFOAM 进行的数值模拟加以说明。随后分析不同穿透射流状态的特征，并讨论其在液体中的穿透性能。

3.1. 锥形射流

图3 展示了由两个串列气泡产生锥形射流的形成过程，参数为$\gamma = 0$。98 和 $\theta = 1$。10，并将数值模拟结果与实验观察进行比较。在初始高压的驱动下，气泡1呈球形膨胀（帧1），并赋予周围流体显著的惯性。这种惯性使气泡不断增大并超过其平衡半径；当气泡在 $t = 2.33$ ms（帧2）达到最大半径时，其内部压力以及邻近区域的压力均降至远低于局部静水压力的水平。随后，气泡2形成并以非球形形态膨胀，这是由于相对于气泡2中心，流场中的压力分布不对称。气泡2的下表面被拉向气泡1，形成一个高曲率尖端（帧3–5）。该尖端处的曲率是气泡2上表面曲率的5.87倍。在气泡2的下端尖端完全收缩之前，气泡1溃灭并发出冲击波，冲击气泡2的下表面（帧6）。这种相互作用产生反射稀疏波，在气泡2底部附近诱发一簇微米级空化气泡，如帧6中的红框所示。气泡1溃灭产生的冲击波与气泡2下方局部高压区共同作用，进一步加速其下表面，最终形成清晰的锥形液体射流（帧7）。随着气泡1重新膨胀，其内部压力迅速下降（帧7），从而降低周围流场的压力。然而，气泡2的不对称溃灭促使周围流体汇聚至初始收缩区域，使射流基部的压力升高。压力升高进一步加速流体运动和气泡收缩，由此形成正反馈回路。由此产生的动量聚焦效应（Lauterborn

1982；Philipp & Lauterborn 1998；Koukouvinis 等人2016*a*）维持了高压区，从而推动射流持续发展。当锥形射流撞击气泡2的相对表面时，其速度迅速下降（帧8–9）。与此同时，气泡2顶部形成一个尖锐突起，该突起移动了相当长的距离，并逐渐碎裂成更小的碎片（帧10）。

值得注意的是，对于能够在连续数帧中清晰追踪射流尖端的情况，本实验中锥形射流穿过气泡2中心时的速度约为32.3 m/s。该速度通过高速成像追踪连续四帧中射流的位置测得。空间误差为一个像素的长度，约为0.2 mm。相机抖动导致的时间误差在纳秒量级，因此可以忽略不计。因此，误差计算为 ±0.4mm/0.069ms = ±5.8 m/s。为考虑气液界面的折射效应对位移测量的影响，将射流尖端到气泡中心的距离乘以修正因子1.33（Philipp & Lauterborn 1998），得到校正后的射流速度约为43。1 ± 7.7 m/s。该数值与数值模拟结果高度吻合；模拟预测，在相同位置的瞬时射流速度为42 m/s。尽管图 3所示结果吻合度极高，但驱动锥形射流形成的主要机制究竟是射流尖端的高曲率，还是气泡1溃灭引起的高压，目前仍未得到解答，后文§4.1节将对此作进一步分析。

3.2. 伞形射流

如图4所示，减小两个串列气泡之间的距离会增强它们之间的相互作用。该图比较了 $\gamma = 0.82$和 $\theta = 1.38$条件下伞形射流的实验结果与数值结果。与锥形射流的初始演化类似，在气泡1的影响下，气泡2的下表面逐渐伸长（帧1–4），形成一个尖端，其曲率是上表面曲率的7.33倍，相较于图3所示情形显著增大。在曲率增大的作用下，尖端在气泡1溃灭过程中收缩（帧5–6）。如帧6对应的数值结果所示，伞形射流尖端在气泡1最终溃灭之前形成。随后，气泡1的环形塌陷产生多道压力冲击波（Ohl 等人 1999；Gonzalez-Avila 等人 2021）。由于这些冲击波持续的时间远短于射流演化的特征时间尺度，它们会累积加速伞形射流的上游流体，使其变宽，甚至形成第二个伞状结构；这一现象将在§4.2中分析。如帧7和帧8所示，实验中气泡2的射流尖端呈现出清晰的伞状形态，其特征是扁平前缘及其周围的破碎液膜。尽管其他系统中也有类似射流形态的记录（Shinjo & Umemura 2010；Karri et al. 2012；Supponen et al. 2015；Koukouvinis et al. 2016b；Zhang et al. 2025），但这种伞形射流背后的机制及其动力学仍鲜为人知。我们将在§4.2中对这些现象进行更详细、深入的分析。

与锥形射流相比，伞形射流的峰值速度显著更高，在数值模拟中约为 92.3 m/s，在实验中达到 85。6 ± 7.7 m/s。值得注意的是，射流穿透气泡2的上表面后仍能保持稳定传播，传播距离约为气泡最大半径的 4.5 倍。高速液体射流所具备的独特能力——实现显著的穿透距离——使串列气泡相互作用在无针注射和微泵送应用中展现出巨大潜力（Ohl 等 2020*b*；Robles 等 2020；Sankin 等2010）。我们将在§6.进一步探讨射流穿透距离在广阔参数空间内的依赖关系。

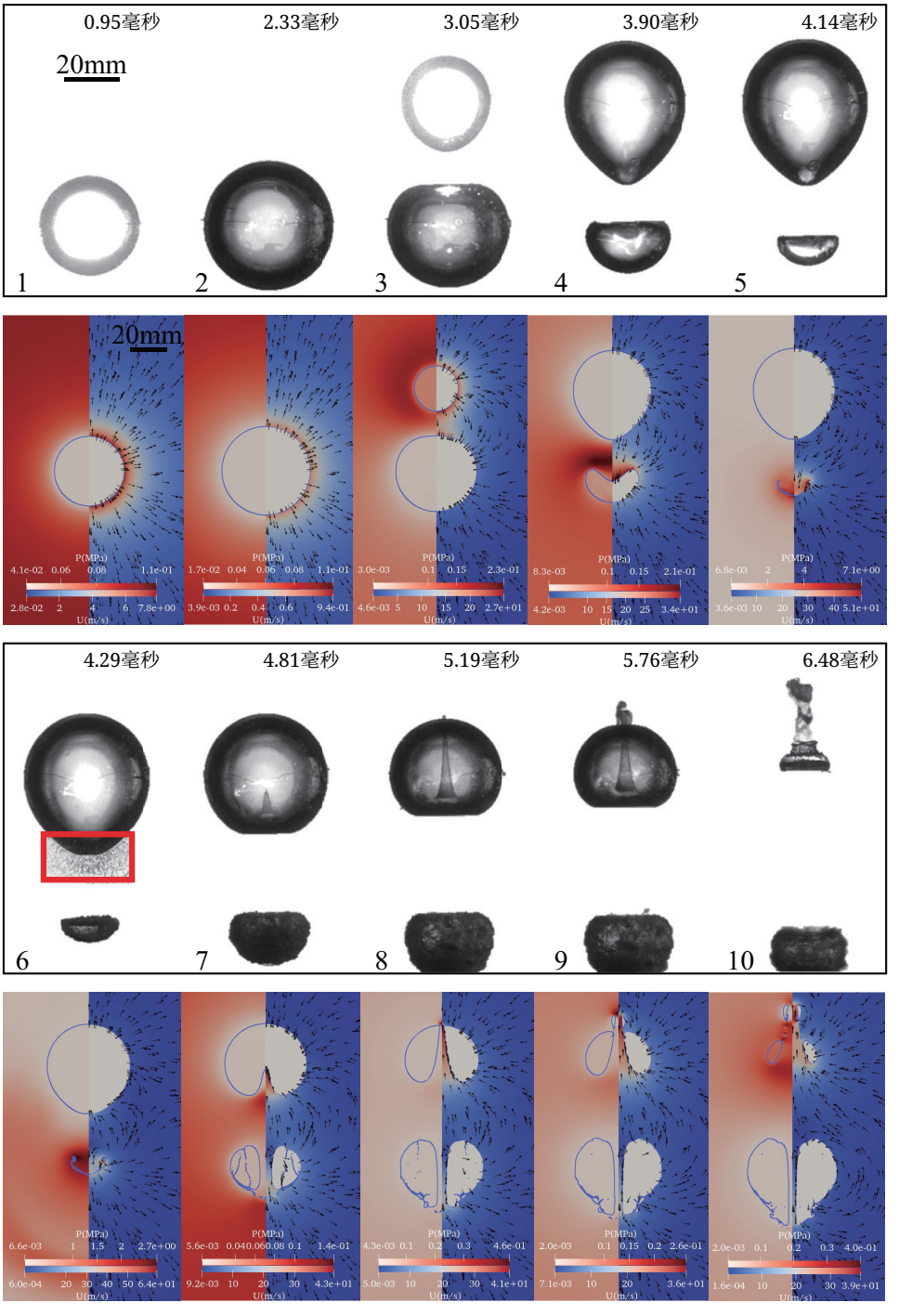

图3：反相气泡对产生的锥形射流动力学：实验（奇数行）与数值模拟（偶数行）的对比。第6帧中的红框标出了由稀疏波诱发的一组空化气泡；该稀疏波因气泡1产生的塌缩冲击波而从气泡2的界面反射。数值结果对应的无量纲时间分别为0.42、1.04、1.36、1.73、1.84、1.87、2.13、2.40、2.56和2.76。时间尺度 $R_{\max}\sqrt{\rho/P_\infty}$ 为2.25毫秒。初始参数为 $\gamma = 0。98, \theta = 1。10。$

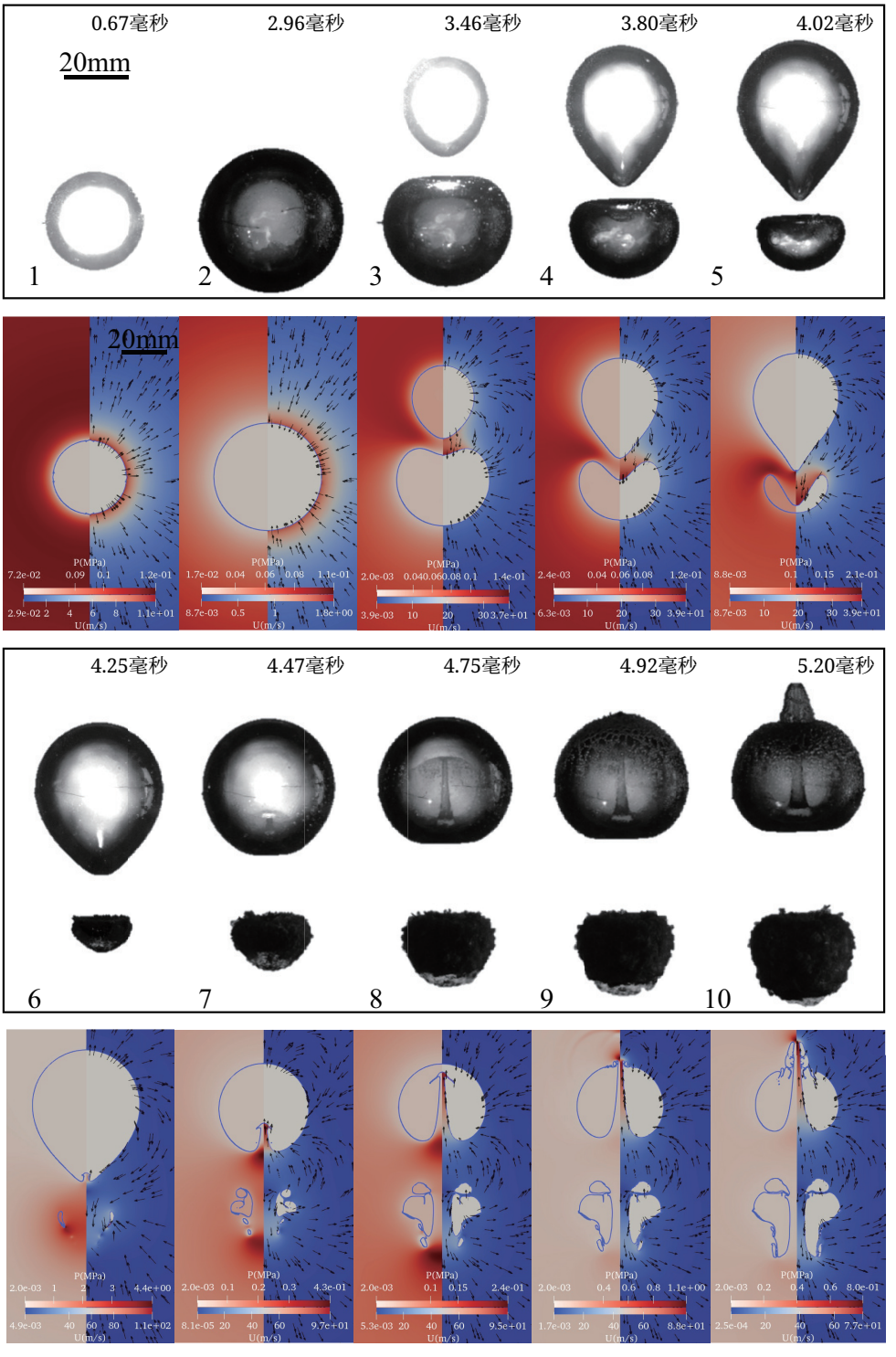

图4：反相气泡对产生的伞形射流动力学：实验（奇数行）与数值模拟（偶数行）的对比。数值结果对应的无量纲时间分别为0.29、1.31、1.51、1.64、1.78、1.89、1.98、2.09、2.13和2.22。时间尺度 $R_{\max}\sqrt{\rho/P_\infty}$ 为2.25毫秒。初始参数为 $\gamma = 0.82$，$\theta = 1.38$。

Rapid文章不得超过此页长度

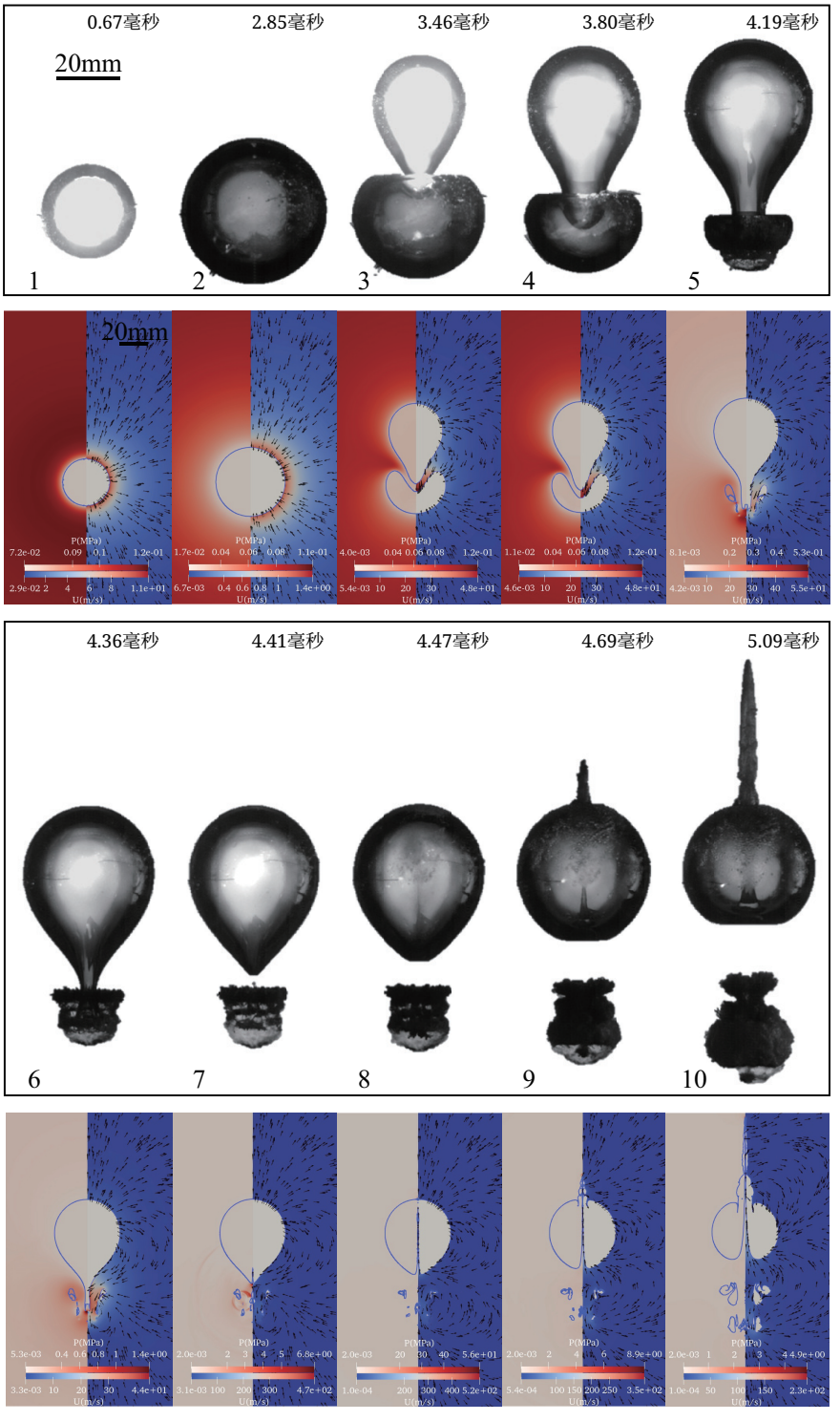

图5：反相气泡对产生的喷射射流动力学：实验（奇数行）与数值模拟（偶数行）的对比。对应于数值结果的无量纲时间分别为0.28、1.21、1.49、1.53、1.72、1.77、1.79、1.83、1.87和2.00。时间尺度~~$R_{\max}\sqrt{\rho/P_\infty}$~~为2.35毫秒。初始参数为 $\gamma = 0。76, \theta = 1。23$。

3.3. 喷射射流

进一步增强两个串列气泡之间的相互作用，会使射流形态从伞状形态转变为喷射射流。图5展示了喷射射流的形成过程，其对应的 $\gamma = 0。76$ 和 $\theta = 1。23$。不同于锥形射流和伞形射流，在气泡1的膨胀阶段，气泡2的下表面向气泡1内部延伸（帧3–4）。随后，气泡1的上表面撞击下表面，引发环状塌缩并释放冲击波。该冲击波在气泡2的细长尖端处诱发颈部断裂（帧5–7）。颈部断裂产生的高压驻点驱动液体射流快速向上加速（Fan 等 2024年），最终形成尖端带有喷雾的高速射流。喷射射流速度显著更快，从形成（由颈部断裂触发）到撞击气泡2上表面的整个轨迹，仅需三个帧的时间间隔即可完成。相对测量误差主要由有限的时间分辨率造成，时间不确定性最高可达一个帧间隔，由此导致的速度相对误差最高可达50%（Gonzalez-Avila 等2020）。实验中测得的该类射流最大速度可超过1000 m/s。值得注意的是，该射流的尖端本质上是不稳定的。实验观察和数值模拟均表明，气泡2的上表面首先受到细小液滴的撞击，随后被连续射流穿透。本文将连续射流定义为喷雾液滴后方的连续液柱，其速度低于不稳定的射流尖端。连续射流的速度对于依赖射流连贯性的实际应用尤为重要。实验测得的速度约为 375 ± 5.8 m/s，而数值模拟预测的速度为417 m/s。由于与锥形射流和伞形射流相比，该喷射射流具有更窄且速度更快的连续段，因此在此情况下，其传播距离可达最大气泡半径的6.5倍。Fan等Fan 等(2024年)。在本研究中，我们同样利用厘米尺度的空化气泡再现了超声速射流，但观察到了超声速射流在气泡2内部更为详细的演化过程。我们发现，该射流本质上是不稳定的，其特征是尖端发生破碎。破碎液滴有时会沿倾斜轨迹运动，最终撞击气泡2上表面中心附近，如后文所述。有趣的是，尽管喷射射流尖端的轨迹偏离了串列气泡系统的对称轴，连续射流却能迅速重新对准该轴，从而继续沿轴线穿透并运动。

3.4. 穿刺射流的穿透

穿刺射流穿透气泡2的对侧表面并进入周围液体后，我们始终观察到，每股射流在传播过程中都被气腔包裹，这一现象与入水问题中的气腔相似，如图6、7和8所示。时间坐标以射流穿透临界时刻为零进行归一化，从而为对比分析建立统一的参考基准。

图中展示了气泡的演化以及锥形射流的穿透过程6，曲线描绘了射流尖端穿透距离随时间的变化。在这种情况下，锥形射流穿透气泡表面后，速度仅为 24 m/s，射流尖端仅前进了最大气泡半径的 2 倍距离，便发生溃灭和破碎。时刻 1–2 显示，锥形射流穿透气泡表面后，会在其尖端后方形成连续气腔。气腔最初在气泡附近夹断（时刻 3–5），穿过一段稳定距离后（时刻 5–6），便解体为气泡簇（时刻 7）。

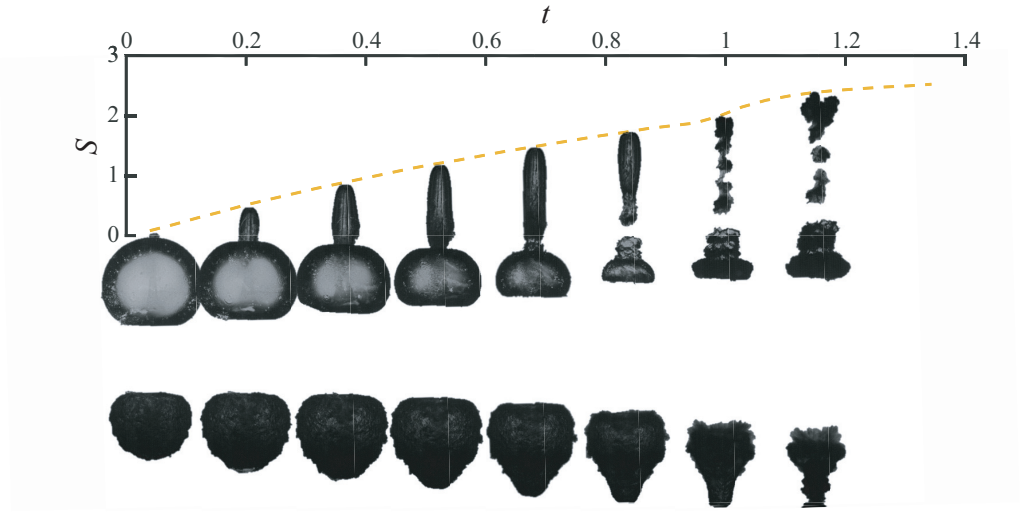

图6：锥形射流穿透后气腔的演变。曲线描绘了射流尖端在水中穿透距离 S 随时间的变化。在本图及后续图中，所有无单位的变量均为无量纲。时间尺度 $R_{\max}\sqrt{\rho/P_\infty}$ 为~~2.25~~ms。初始参数为 $\gamma = 0.86, \theta = 1.53$。

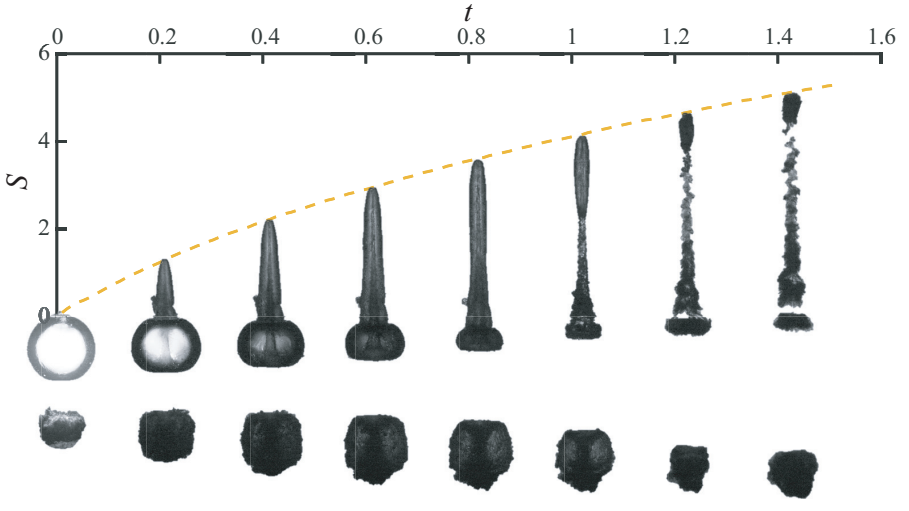

图7：伞形射流穿透后气腔的演变。曲线描绘了射流尖端在水中穿透距离 S 随时间的变化。时间尺度 $R_{\max}\sqrt{\rho/P_\infty}$ 为 2.25ms。初始参数为 $\gamma = 0.71, \theta = 1.53$。

随着射流尖端速度降低，尖端处的气腔先溃灭，随后立即膨胀，导致时刻 7 的距离曲线明显上升。由于没有上游射流补充，尖端处的气腔迅速失去向前动量，并逐渐消散（时刻 8）。因此，我们只关注射流尖端溃灭时刻的穿透距离，不将其后的气腔演化纳入研究。

与锥形射流相比，伞形射流具有更高的速度，并且在穿透气泡后仍保持约 63 m/s 的速度，这有利于形成

水中的延伸空腔（时刻 2–4），并使穿透距离超过最大气泡半径的 5 倍，如图 7所示。在这种情况下，气泡2发生显著拉长。紧邻环形气泡的空腔在气泡2发生环形塌陷后立即夹断并溃灭，随后连续的溃灭沿空腔向下游传播（时刻 6）。射流尖端处的空腔最终溃灭，其向前动量逐渐消散（时刻 8）。

喷射射流穿透气泡表面后气腔的形态演化如图8所示。与锥形射流和伞形射流相比，喷射射流穿透气泡表面后的速度显著更高（本例中为108米/秒），因此形成了更加细长的气腔，其长度可达最大气泡半径的6.5倍。气泡2显著拉长，导致其溃灭后的二次反弹明显弱于气泡1。气泡2的大量能量转化为射流动能，因此溃灭较弱。同时，气泡1产生的冲击波受到气泡2的屏蔽，从而尽可能减少对上部靶体注入点的无差别损伤。

射流穿透后的气腔演化与刚体入水形成的气腔相似（Speirs等，2018）。这类气腔随后的破碎通常用邦德数（$Bo = \rho g D^2/\sigma$）和韦伯数（$We = \rho U^2 D/\sigma$）来表征（Aristoff与Bush，2009；Truscott等，2014；Speirs等，2018）。鉴于三种状态下的尖端半径范围存在重叠（锥形射流为0.75–1.50毫米，伞形射流为0.50–1.25毫米，高速喷射射流为0.25–0.75毫米），对于这些低邦德数（$Bo \sim O(10^{-1}\text{-}10)$）情况，气腔形状取决于韦伯数（Aristoff与Bush，2009；Truscott等，2014；Speirs等，2018）。在低韦伯数下，锥形射流和伞形射流均穿透气泡表面并形成浅封闭。相比之下，与较高 We相关的喷射射流会形成惯性力占主导的气腔，并在气泡2影响下的静水压力作用下形成深封闭。值得注意的是，如图5第10帧所示，喷射射流穿透气泡表面进入水中后会产生飞溅。然而，由于这类射流通常形成于气泡达到最大半径时，此时内部气体密度相对较低，飞溅界面处相应的压力降不足以驱动闭合。因此，观察到的是深封闭，而非表面封闭。不同类型射流所形成气腔的断裂闭合类型差异显著，并伴有与不同射流尖端形态相对应的不同流动结构，但这些差异对最大穿透距离的影响可以忽略不计；最大穿透距离主要由射流速度决定。本研究将重点探讨射流在水中的穿透能力，详见第6节。

4. 锥形射流与伞形射流的形成机制

如前所述，气泡2在气泡1的作用下形成细长尖端。细长尖端处的高曲率与气泡1的溃灭共同决定了射流形成的动力学过程。本节采用 BIM 在时间上分离这两种协同作用，并系统比较它们对气泡2中射流形成的影响。

4.1. 锥形射流形成：气泡*1*压力波的作用

如§3.1 所示，锥形射流的形成始于气泡1溃灭产生的瞬态高压压力波，该压力波加速气泡2的细长尖端，并驱使其向气泡内部收缩，从而形成液体射流。有人可能会认为，气泡2尖端的高曲率也有助于液体射流的形成（Lauterborn，1982；Tomita 等，2002；Sieber 等，2022；Zeng 等，2024年）。然而，

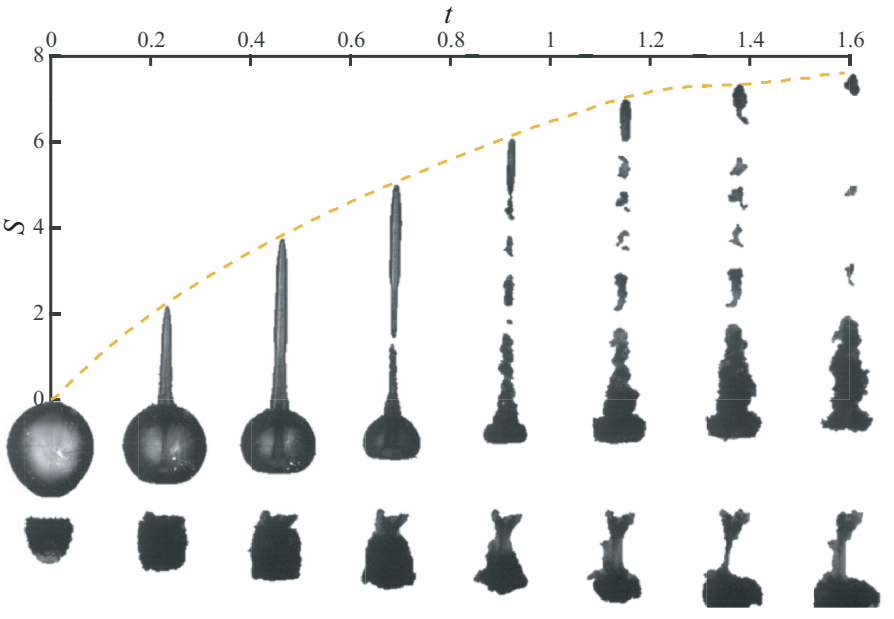

图8：喷射射流穿透后的气腔演化。曲线描绘了射流尖端在水中穿透距离 S 的时间演化过程。时间尺度 $R_{\max}\sqrt{\rho/P_\infty}$ 为 2.25ms。初始参数为 $\gamma = 0。85$、$\theta = 0。95$。

锥形射流的形成究竟是由高曲率还是压力波驱动，仍有待阐明。

我们首先通过 BIM 模拟，考察气泡2细长尖端处的高曲率在驱动锥形射流形成中的作用。为排除气泡1溃灭对气泡2的影响，当气泡2下端尖端的向下速度降至零时，我们将气泡1从模拟中移除（Fong 等 2009年；Dadvand 等 2012； Peters 等2013；Han 等 2022）。图9展示了气泡2随后发生的形态演化，以及沿其对称轴的速度随时间的变化。图9(*b*)中，红线表示射流速度，蓝线表示其北极点处的速度。为便于比较，气泡表面向外膨胀时，两种速度均定义为负值；向内收缩时，均定义为正值。图中还包含以实心菱形和方形符号表示的实验数据和流体体积法数据。时刻1表示气泡2下端尖端处的膨胀速度降至零的时刻。此时，在气泡1的作用下，气泡2膨胀成蛋形，如图9(*a*)所示。随后将气泡1从模拟中移除，以消除其压力波的影响。正如预期，气泡表面曲率较高的区域会快速收缩（Lauterborn, 1982；Tomita 等 2002），从而促使射流在气泡2的下端尖端处形成。然而，图9(*b*)中，模拟得到的射流速度和加速度显著低于实验观察和流体体积法结果。在 BIM 模拟中，气泡上表面与射流尖端以相近的速度收缩（时刻5—7）。尖端持续变宽，使锥形射流转变为圆柱形，这与我们的实验观察不同。由此可知，尽管气泡表面的高曲率可能有助于射流初始形成阶段，但它并非支配锥形射流后续演化的主要因素。

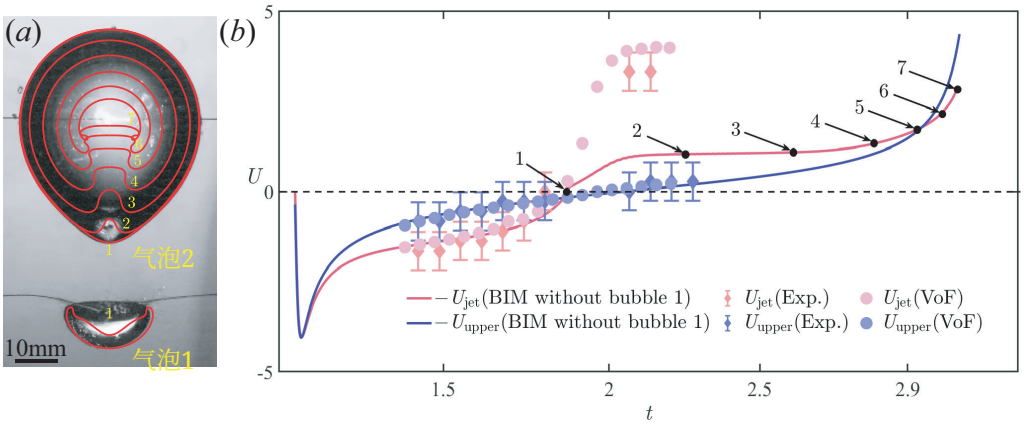

图9：气泡2射流演化的边界积分模拟。当气泡2下端尖端的向下速度达到零时，移除气泡1。(*a*) 气泡2的形态演化。瞬间1–7展示了边界积分模拟中气泡演化过程的不同快照。(*b*) 气泡2沿对称轴的速度随时间的变化。红色和蓝色实线分别表示边界积分模拟中射流和气泡2北极点的速度。带误差棒的实心菱形表示相应的实验数据。速度通过高速成像的连续三帧测量。误差主要源于空间分辨率，其中位置误差相当于一个像素的长度。由相机抖动引起的时间误差处于纳秒尺度，因此可以忽略不计。实心圆表示流体体积法模拟的结果。时间尺度$R_{\max}\sqrt{\rho/P_\infty}$为2.25毫秒。初始参数为$\gamma = 0.98, \theta = 1.10$。

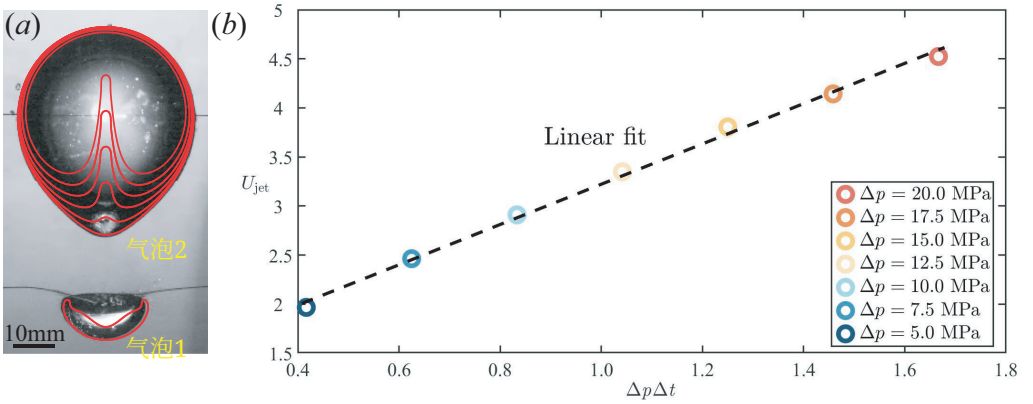

图10：气泡2射流演化的边界积分模拟。在气泡1内施加一个持续时间为20 μs的压力脉冲。(*a*) 气泡2的形态演化。气泡1的形态对应的无量纲时间为1.58，而气泡2的形态从最外层到最内层分别对应无量纲时间1.58、1.64、1.73、1.82、1.93和2.04。(*b*) 气泡1受到不同压力脉冲时，气泡2锥形射流的最大速度。时间尺度$R_{\max}\sqrt{\rho/P_\infty}$为2.25ms。初始参数为$\gamma = 0。98, \theta = 1。10$。

继 Ory 等 (2000) 和 Peters 等 (2013)之后，我们调整气泡1产生的压力脉冲，以探究压力波在锥形射流形成中的作用。当气泡2在膨胀阶段的尖端速度降至零时，我们保持气泡1的几何轮廓不变，并施加持续时间为 20 μs 的压力脉冲

同时改变其幅值。通过水听器测量，实验测定气泡1溃灭产生的压力脉冲持续时间约为 20 μs（Cui 等 2020）。压力幅值限制在 5–20 兆帕范围内（Cui 等 2020），以确保加速后的射流速度处于物理上合理的范围内。压力脉冲过后，将气泡1的内部压力设为静水压力，以消除其后续影响。

图 10 展示了气泡1产生的压力脉冲冲击下气泡2尖端的演变。图10(*a*) 中气泡2形态随时间变化的序列，与图9(*a*) 中的模拟相比发生了显著变化。尖端曲率与来自气泡1的压力波共同作用，形成了锥形射流，这与我们的实验观察一致。正如 Ory 等(2000) 和 Peters 等 (2013) 所指出的，当界面主要受压力脉冲支配时，射流速度与压力脉冲幅值和持续时间的乘积成正比，可表示为 $U_{\text{jet}} \propto \Delta p \Delta t$。图 10(*b*) 所示的数值模拟充分验证了这一关系。总之，我们认为，表面曲率与压力波的相对作用因射流发展阶段不同而异。高曲率表面对射流的初始形成至关重要，因为曲率较大的区域会先发生回缩（Lauterborn（1982）；Tomita等2002）。然而，后续的射流演化更多受压力波支配，这一点也得到我们的研究结果印证：锥形射流的速度与压力脉冲幅值和持续时间的乘积呈正相关。因此，曲率与压力波的相互作用是锥形射流形成的关键。

4.2. 伞状射流形成：射流形成后气泡*1*溃灭

我们在图4中初步阐述了伞状射流的形成过程，其特征是射流尖端周围存在扁平前缘和破碎液膜。伞状射流与液体射流冲击静止气体时观察到的蘑菇状结构相似（Shinjo & Umemura2010）。空气阻力被认为是蘑菇状结构形成的主要驱动因素。有趣的是，我们基于势流理论，使用 BIM 进行的模拟成功再现了类似的伞状尖端，如图 11（*a*）所示。鉴于 BIM 未考虑空气阻力，并假设气泡内压力均匀，这表明空气流动并非伞状结构形成的主要原因。通过实验观察，我们发现，当气泡1在气泡2的射流初始形成阶段之后发生溃灭时，通常会形成伞状射流。这一发现表明，串列气泡系统中的伞状射流与水射流内部的流动结构相关，而该结构受气泡间耦合作用支配。本节将更详细地分析伞状射流的形成过程。

我们在图 11(*b*) 中展示了 BIM 模拟得到的射流柱沿轴向速度的演变。同时，图 11(*c*) 展示了射流基部下方的压力变化以及射流尖端的速度。气泡2下表面的尖端在$t \approx 1.64$ 时收缩（图 11(*c*) 中的黑色虚线），同时速度短暂上升。在射流初始形成阶段，局部高曲率驱动射流尖端处出现峰值速度。然而，由于气泡2下方的汇聚流使射流基部压力持续升高，在随后的演变过程中，上游流体（靠近射流基部的流体）的速度逐渐超过射流尖端的速度。当上游流体超过射流尖端时，尖端处的液体被推移并向外扩散，形成伞状结构，如图 11(*a*) 中的瞬间 2 所示。气泡1溃灭后，射流尖端的加速度明显降低。这是因为塌陷诱导压力加速射流基部附近的流体，并使液体射流柱变宽，从而增加了其流体惯性，进而增强其加速阻力。

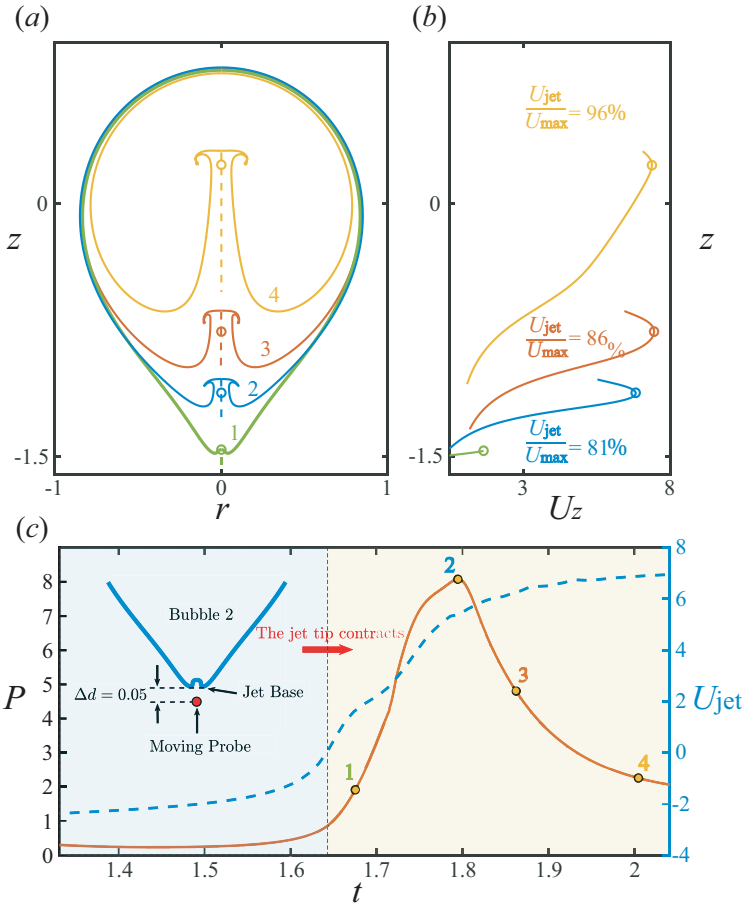

图 11：气泡2伞形射流演化的边界积分模拟。（a）气泡2的形态演化。虚线表示速度提取的位置。（b）气泡2射流柱中沿对称轴的轴向速度演化（U_z）。U_{jet} 和 $U_{\max}$ 分别表示射流尖端的速度以及射流柱中沿对称轴的最大速度。（a）和（b）中的实线与标签颜色相同，表示相同的时刻（1.68、1.80、1.86、2.01）。圆圈标出射流柱中最大速度的位置。（c）移动探针处（位于射流基部下方0.05个无量纲单位，实线）的压力随时间变化，以及射流尖端速度随时间的变化（虚线）。射流尖端在$t \approx 1.64$时收缩。与标签1、2、3和4对应时刻的气泡轮廓见面板（a）。时间尺度$R_{\max}\sqrt{\rho/P_\infty}$为2.25毫秒。初始参数为 $\gamma = 0.83$、$\theta = 1$ 10 .。

随着气泡1回弹，射流处的压力逐渐降低。射流最大速度的位置逐渐靠近射流尖端，导致上游流体与尖端之间的速度差减小，如图 11(*b*) 中瞬间 3 到瞬间 4 之间所示。在某些情况下，当气泡在自由表面附近生成时，向下的伯杰克尼斯气泡射流中也能观察到类似的伞状结构（Supponen等人，2015；Koukouvinis 等人，2016*b*）。自由表面在作用上模拟了气泡1，从而诱发其下方气泡呈现特征性的蛋形变形。随着气泡2的高曲率尖端收缩，会产生动量聚焦效应（Lauterborn，1982；

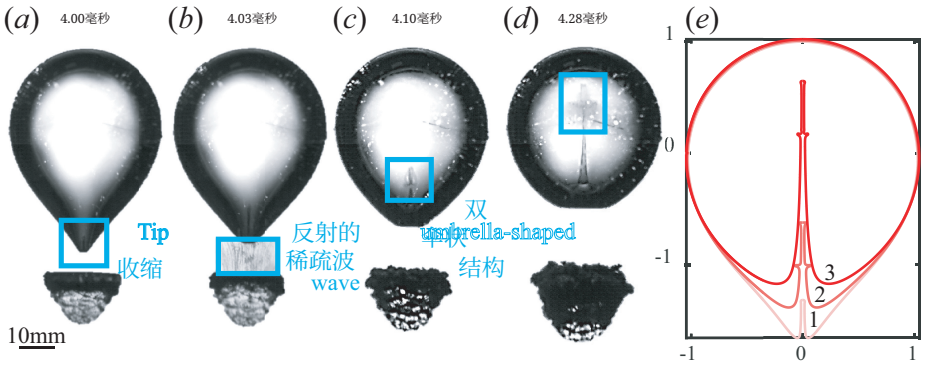

图12：双伞形射流的演化。在（*a*）至（*d*）各图中，下方气泡为气泡1，另一个为气泡2。蓝色实线框标示了尖端收缩、反射稀疏波和双伞状结构。（*e*）展示了气泡2双伞形射流演化的边界积分模拟。在瞬间1，于气泡1内施加一个持续20 μs、压力为60兆帕的压力脉冲。对应于瞬间1、2和3的无量纲时间分别为1.76、1.80和1.88。时间尺度 $R_{max}\sqrt{\rho/P_\infty}$ 为2.25毫秒。初始参数为 $\gamma = 0.83, \theta = 1.06$。

Philipp & Lauterborn 1998；Koukouvinis等 2016*a*，*b*），使尾随射流的速度超过射流尖端的速度，从而形成类似的伞状结构。这些结果表明，在射流演化过程中，仅通过提高射流基部的压力即可引发伞状射流形成，压力波并非必要条件。

有趣的是，我们观察到，在本系统的特定条件下会形成双伞状射流，如图12所示。在（*a*）图中，气泡2的尖端开始向内收缩。（*b*）图中的一簇空化气泡标志着气泡1完全溃灭，并触发压力波的发射。此冲击波过后，可以同时观察到两个伞状结构，一个位于射流尖端，另一个位于射流中部，如（*c*）和（*d*）图所示。第一个伞状结构源于流动聚焦，这表明压力波并非其形成的必要条件。相反，第二个结构则由液柱发展而来；该液柱因气泡1溃灭时发出的压力波而变宽。这种双伞状射流与Geschner 等人（2001）和Srinivasan 等人（2011）的研究结果一致；他们证明，在液体射流形成一个伞状结构后施加压力激励，会导致第二个伞状结构形成（见Geschner、Obermier 和 Chaves （2001）中的图3）。

通过边界积分模拟，我们重现了这种独特射流的演化过程，如图（*e*）所示。在该模拟中，气泡1溃灭至最小体积时，其几何轮廓保持不变。此时（时刻1），将气泡1的内部压力调制为瞬态压力脉冲（持续时间为 20 μs，幅值为 60 兆帕），从而在气泡2的射流基部诱发瞬态冲击波。压力脉冲结束后，将气泡1的内部压力设为静水压力，以消除后续影响。压力脉冲作用后，射流中部出现轴向突起（时刻2），最终发展为与实验观察相符的次级伞状结构（时刻3）。这进一步阐明了伞形射流形成的两个关键方面。首先，气泡必须形成高曲率尖端，才能引发尖端收缩。其次，驱动伞形射流形成的是气泡2射流基部的压力升高（由汇聚流或压力波导致）。

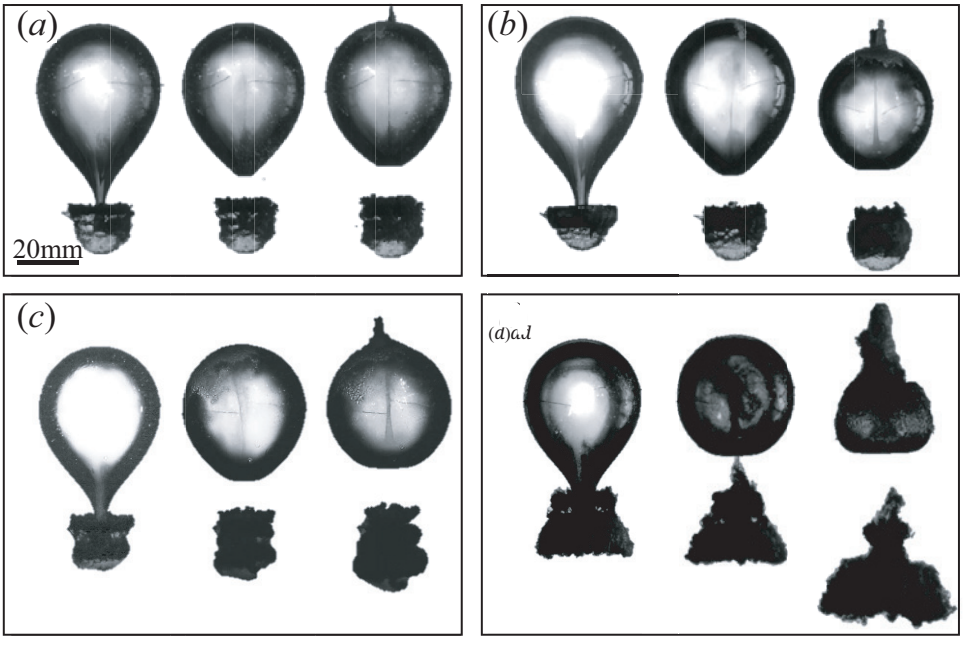

图13：四种喷射射流：（a）针状喷射射流。初始参数为 $\gamma = 0.76, \theta = 1.25$，各帧对应的时间分别为 4.14 ms、4.19 ms 和 4.25 ms。（b）倾斜喷射射流。初始参数为 $\gamma = 0.77, \theta = 1.33$，各帧对应的时间分别为 4.25 ms、4.36 ms 和 4.53 ms。（c）倾斜片状喷射射流。初始参数为 $\gamma = 0.72, \theta = 1.35$，各帧对应的时间分别为 4.19 ms、4.32 ms 和 4.49 ms。（d）雾状喷射射流。初始参数为 $\gamma = 0.7, \theta = 1.21$，各帧对应的时间分别为 4.12 ms、4.54 ms 和 5.58 ms。

与此同时，我们系统地改变状态方程中的初始气体密度参数（ρ_{g0} = 0.26、1.29 和 6.45 kg/m3），以表示气泡内不同的气体含量（此处未列出相应的数值结果）。结果表明，气体密度对射流速度的影响很小（在 0.2% 以内），且伞形射流的尖端形态总体保持一致。这些模拟表明，射流结构主要源自液体流动，在很大程度上独立于气泡内的气体流动。这一发现加深了我们对流动结构如何支配射流尖端形态的基本认识。

5. 喷射射流的动力学与转变：从针状结构到雾状结构

随着 γ进一步减小，压力波的冲击位置从底部转移至气泡2细长尖端的颈部区域，从而引发颈部断裂并产生喷射射流。这一过程使射流速度加快，超过空气声速。在两个串列气泡的强相互作用中观察到四种喷射射流，如图13所示。射流尖端可能破碎成细小液滴，或

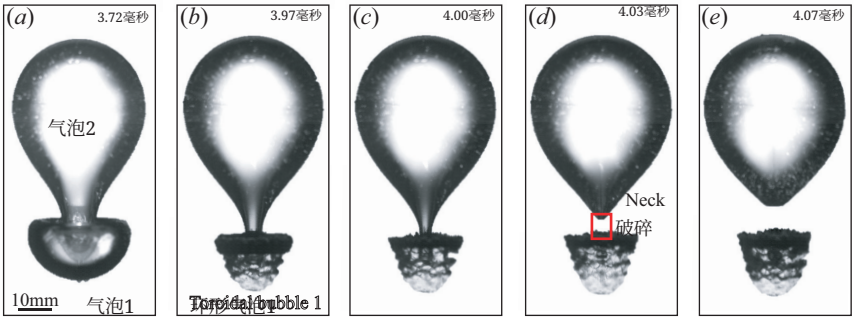

图14：气泡1的射流冲击气泡2下表面后，气泡2颈部断裂过程的演化细节。初始参数为 $\gamma = 0.79$、$\theta = 1$ 11 。

形成倾斜状／薄膜状喷雾（图13(*a*)-(*c*)），这与细长气泡2的颈部断裂有关。进一步减小 γ 会诱发气泡聚并，从而减弱来自气泡1的压力波强度。气泡聚并会产生另一种喷射模式，即雾状喷射射流，其特点是液体射流较宽且带有飞溅状尖端，如图13(*d*)所示。

5.1. 颈部断裂导致的喷射射流

图 14 展示了气泡2颈部断裂过程的详细演化。气泡1收缩期间，气泡2的尖端深入气泡1内部，但未发生聚并（图（*a*））。因此，气泡1溃灭产生的高压力直接作用于气泡2细长尖端的颈部（图（*b*）），从而引发颈部断裂（图（*c*））。在颈部断裂过程中，流动聚焦产生的高压力驱动下，厘米尺度串列气泡中的超声速射流速度可超过1000 m/s（图（*d*）），与毫米尺度实验中的速度相当（Fan等，2024年）。尽管颈部断裂加速后的喷射射流速度极高，但我们观察到，喷射射流的尖端总是破碎成雾滴，如图13（*a*）-（*c*）所示。在这些实验中，液滴首先撞击气泡表面，形成一簇微小凹坑，而连续射流随后穿透上表面。这种行为可以用沃辛顿射流脱落机制解释，如Gordillo& Gekle（2010）所示。颈部断裂后，射流尖端获得显著的高动能，并因液体的毛细减速而破碎。脱落的液滴随后由于不稳定性进一步破碎成更小的液滴，这一过程称为二次雾化（Guildenbecher 等2009；Choi 等 2022；Huck 等 2022）。这解释了实验中在喷射射流尖端观察到的细小液滴云。

通过大量实验，我们观察到，具有笔直针状尖端的超音速射流相对少见，而倾斜射流（图13(*b*）或倾斜片状射流（图13(*c*）则更为常见。我们将这种普遍性归因于颈部断裂过程固有的不稳定性（Gekle 与 Gordillo（2010））。断裂过程中的任何初始扰动都可能导致颈部发生非对称撞击和非奇异塌陷（Burton 等 2005年；Keim 等 2006；Enriquez 等 2012）。由于记忆效应，即使是微小的初始扰动也会在整个颈部断裂过程中持续存在（Keim 等 2006）。因此，颈部断裂过程中的初始方位不对称性很容易影响后续过程中射流的形态和方向，从而形成图

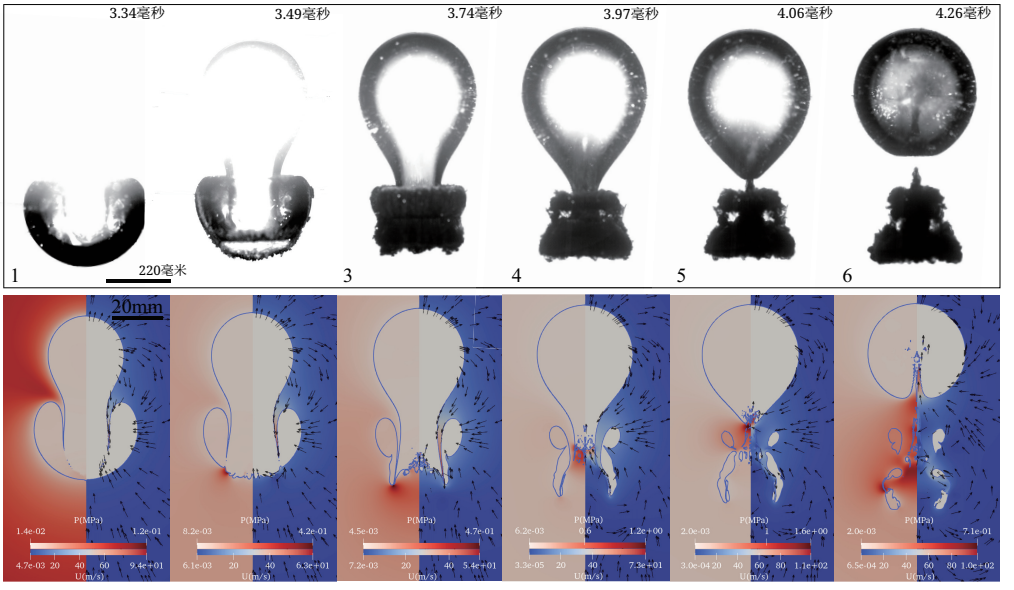

图15：反相气泡对产生的雾状喷射射流的动力学：实验结果（奇数行）与数值模拟结果（偶数行）的对比。与数值结果对应的无量纲时间分别为1.38、1.44、1.56、1.67、1.74和1.87。时间尺度 $R_{\max}\sqrt{\rho/P_\infty}$ 为2.25毫秒。初始参数为$\gamma = 0.65$、 $\theta = 1.19$。

13(*b*）。Schmidt 等 (2009年）和Enriquez 等 (2012）发现，当初始椭圆空腔接近圆形时，颈部不会塌陷为无穷小奇点，而是从相对的两侧发生撞击，从而形成片状射流，这与图13(*c*）中观察到的射流非常相似。

尽管喷射射流的尖端因不稳定性而破碎成液滴，但后续的连续射流仍具有很高的稳定性。该射流以极高的速度运动，方向性优异，并与串列双气泡的轴线保持良好对齐。射流方向具有良好的稳定性，这是由于射流基部提供了支撑，而非颈部断裂的驻点（Gekle与Gordillo（2010））。关于该射流在液体中的穿透能力，将在§6和§7中进一步介绍。

5.2. 气泡聚并引起的喷射射流

雾状喷射射流的形成涉及气泡2的细长尖端深入穿透气泡1内部，使得实验观察颇具挑战。因此，我们采用 OpenFOAM 模拟来补充对这一射流演化过程的研究。雾状喷射射流的整体演化如图15所示，并给出了速度场和压力场。由于较小，气泡2的细长尖端与气泡1的表面聚并（时刻1）。在时刻2至3，气泡2的尖端在收缩过程中形成破碎射流，随后破碎射流继续演化，形成分散微小气泡团簇（时刻4）。由于气泡2持续收缩，分散微小气泡被其牵引（时刻5）。如图所示，破碎液体射流进一步向气泡内部传播，并在其根部牵引出一条气体尾部（时刻5至6）。射流呈现破碎的径向飞溅形态（时刻6），与针状喷射射流截然不同。上述射流演化细节在实验中无法观察到，因为气泡2的细长尖端在时刻1至3被

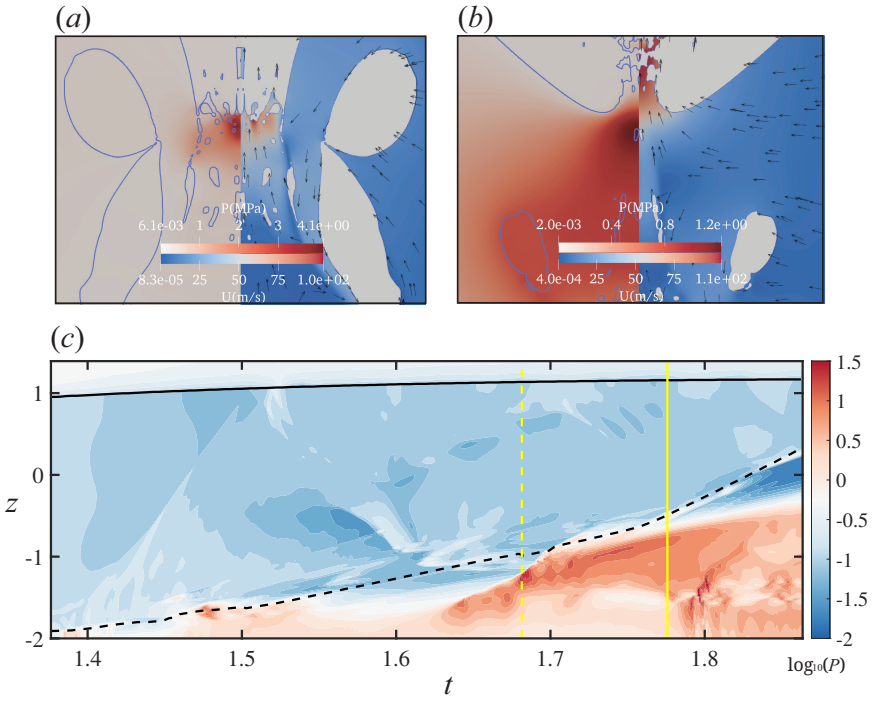

图16：图中所示雾状喷射射流的演化15。（*a-b*） t = 1。68、1。78时流场的放大细节。射流基部下方的小气泡发生溃灭并产生局部高压区域。（*c*）串列双气泡对称轴上的压力时空图。黑色实线和虚线分别表示气泡2上表面和射流尖端的轴向位置。黄色虚线和实线分别对应（*a*）和（*b*）中的两个典型时刻。时间尺度 $R_{\max}\sqrt{\rho/P_\infty}$ 为 2.25 ms。

气泡1遮挡，或在时刻4至5呈现为雾状气体团簇。尽管我们采用的是轴对称模拟，而非计算成本高昂的三维建模，但数值结果成功捕捉了实验中的主要物理过程，从而弥补了实验观察的局限，并为雾状喷射射流的形成提供了关键见解。

图16展示了 t = 1。68、1。78时微小气泡周围流场的放大图，分别对应图16（*a*）—（*b*）。这些小气泡发生溃灭并产生局部高压波，从而加速破碎射流。此外，图16（*c*）展示了射流形成和发展过程中对称轴上的压力时空图，以便更全面地了解射流演化。黑色实线和虚线分别表示气泡2上表面和射流尖端的轴向位置。可以看出，射流发展过程中气泡2的上表面几乎没有变化。黄色虚线和实线分别对应两个典型时刻，分别与（*a*）和（*b*）相关。这些气泡间歇性溃灭，在t = 1。6-1。8时间间隔内使射流基部持续产生压力波动。在这些高压作用下，破碎射流持续加速，其不稳定性进一步增强，最终引发径向飞溅（图15中的时刻5—6）。

与颈部断裂产生的局部高压滞止点相比，分散微小气泡的溃灭会引发持续的高压波动，从而加速形成更宽的液体射流。因此，其射流速度显著

低于针状喷射射流的速度。从无针注射应用的角度来看，这类速度相对较低且尖端易飞溅的雾状射流并不理想，应当避免。

6. 射流穿透

6.1. 初步说明

气泡2内穿刺射流的演化在三个不同状态下表现出显著的速度变化，其中喷射射流状态下的最大速度超过1200 m/s。然而，穿刺射流在穿透气泡表面后会经历速度衰减。特别是对于喷射射流，尽管射流尖端的高速破碎液滴只能扰动气泡界面，但射流在其内部速度（气泡2内）与外部速度（穿透气泡2后）之间表现出明显的速度差。为进一步阐明这三种射流状态的穿透性能，我们在 γ 图 17中展示了射流速度和穿透距离对初始气泡间距的依赖关系。此处，内部速度 U_{jet} 是射流在气泡2内的最大速度，外部速度 U_{water} 表示射流穿透后进入液体时的速度，而 $S_{\max}$ 表示在其尖端的空腔突起塌缩时刻，射流在液体中的最大穿透距离。相对初始气泡时间差， θ，在实验和数值模拟中均保持不变。BIM和流体体积法得到的射流速度与图17(a)中的实验结果吻合良好。由于BIM在处理气泡表面网格拓扑方面存在局限性，因此仅使用BIM模拟涉及锥形射流和伞形射流的情形。

如图17(a)所示，随着 γ减小，射流形态呈现出明显的转变：依次从锥形射流演变为伞形射流，最终变为喷射射流。总体而言，内部速度 U_{jet} 与 γ呈非单调关系，随着 γ 减小，先增大后减小。当 γ 减小至约0.77时， U_{jet} 会骤然增大至超过120（对应的量纲值为1200 m/s），如附录中的图21 所示。这一增幅归因于气泡2细长尖端处颈部断裂引发的极端加速度，与Fan等人(2024年)报告的速度非常接近。进一步减小初始气泡间距会导致两个气泡聚并，并使 U_{jet}迅速下降。图 $S_{\max}$ 17(b)中最大穿透距离 $S_{\max}$ 与外部射流速度 U_{water} 之间的强相关性表明，穿透性能主要由外部射流速度 U_{water} 而非内部射流速度 U_{jet}决定。尤其是在无针注射应用中，外部射流的穿透特性是本研究关注的重点。

6.2. 穿刺射流的穿透性能

为描述穿刺射流进入液体后的动力学，我们将射流概念化为具有初始速度 U_{water} 和有效质量 m的液体子弹，从而建立简化模型。当这种液体子弹在水中传播时，卷吸空腔包裹其主体，仅尖端与周围液体接触。因此，主要阻力 F 来自前进尖端处的流体动力压力，表示为 $F = -C_{\text{D}}\rho A u^2$，其中 ρ 表示水的密度， A 表示射流的尖端横截面积（空腔尖端处液相的横截面积），而 u 表示射流速度。阻力系数 C_{D} （主要由尖端几何形状决定）在本研究中取值为 $C_{\text{D}} = 0。5$（Soh 等，2005；Mallick等，2014；Kuwata 等，2021）均采用此值。忽略

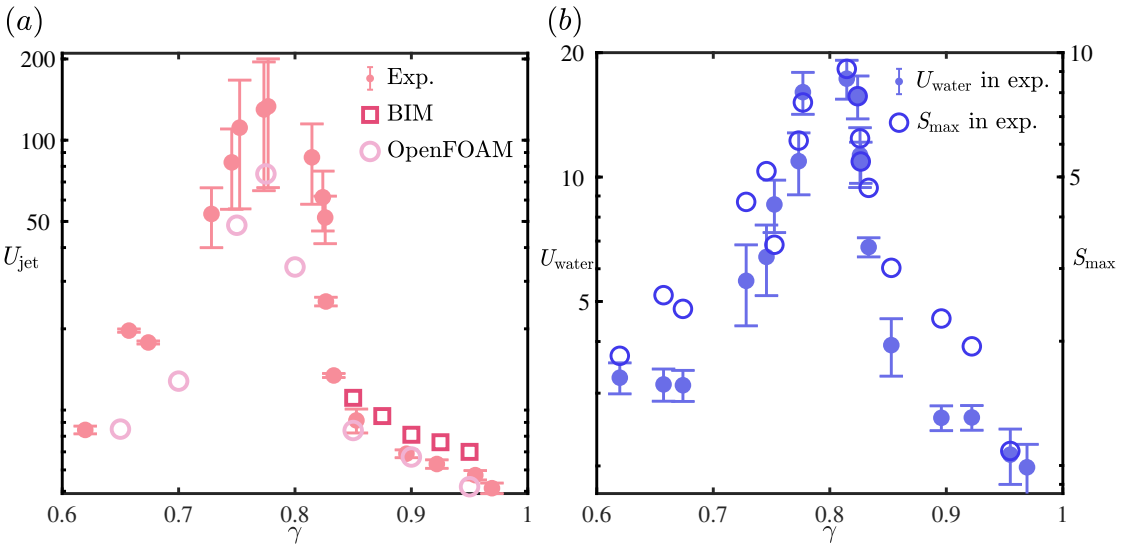

图17：在 γ 固定为 $\theta = 1$时，穿刺射流的速度和最大穿透距离的关系。速度通过高速成像的若干连续帧测得。误差主要来自空间分辨率，其中位置误差相当于一个像素的长度。对于速度最快的射流（喷射射流），由于高速成像固有的时间分辨率限制，实验测得的速度是实际速度的下限。射流从形成（由颈部断裂触发）到撞击 Gonzalez-Avila 等人 2020）所示气泡表面的轨迹仅需三帧，因此最大相对不确定性高达50%（Gonzalez-Avila 等人 2020）。(*a*) 穿刺射流内部速度 U_{jet} 与 γ的关系。实心符号表示实验数据。空心符号表示通过 BIM 和 OpenFOAM 获得的数值结果。U_{jet} 表示气泡2中射流的最大速度。(*b*) 穿刺射流外部速度 U_{water} 和最大穿透距离 $S_{\max}$ 与 γ的关系。 U_{water} 表示射流穿透后进入液体时的速度， $S_{\max}$ 表示空腔尖端突起塌缩时射流在液体中的最大穿透距离。图中所有变量均为无量纲。速度标度 $\sqrt{P_\infty/\rho}$ 为10米/秒。

黏性和表面张力效应后，射流的动量方程可简化为：

$$m\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -C_{\mathrm{D}}\rho A u^2, \tag{6.1}$$

其中 m 表示射流有效质量。通过分离变量并对方程（6.1）积分，可得 u（t）$= U_{\mathrm{water}}/$（$1 + KU_{\mathrm{water}}t$），其中 $K = C_{\mathrm{D}}\rho A/m$。因此，穿透量 S可表示为

$$S(t) = \int_0^t u(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{K}\ln(1 + KU_{\mathrm{water}}t). \tag{6.2}$$

由于穿刺射流在传播过程中会发生断裂，只有断裂点下游的流体才能为穿透提供能量。通常，这段射流的长度约为 0。$5S_{\max}$，其中 $S_{\max}$ 表示最大穿透距离。假设这段射流以恒定速度 U_{water}进入水中，并考虑到实验观察发现这段射流的横截面积几乎保持不变，液体子弹的有效质量可简化为 $m = 0。5\rho AS_{\max}$，得到 $K = 1/S_{\max}$。我们测量了图 K 和 U_{water} 中的每种情况，并将其列于图 6、7和8 中，并对预测结果

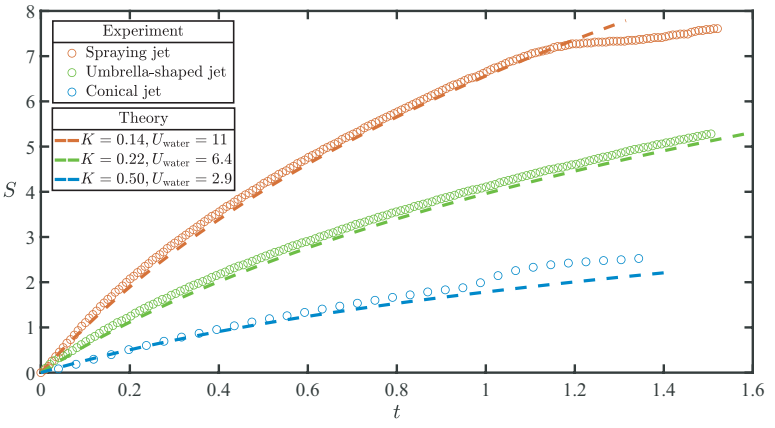

图18：三种穿刺射流状态下穿透距离的时间曲线 S。空心符号表示实验结果，虚线表示由公式（6.2）针对不同 K 和U_{water}值给出的液体子弹模型预测结果。 U_{water} 表示射流进入水中的速度。图中的所有变量均为无量纲量。

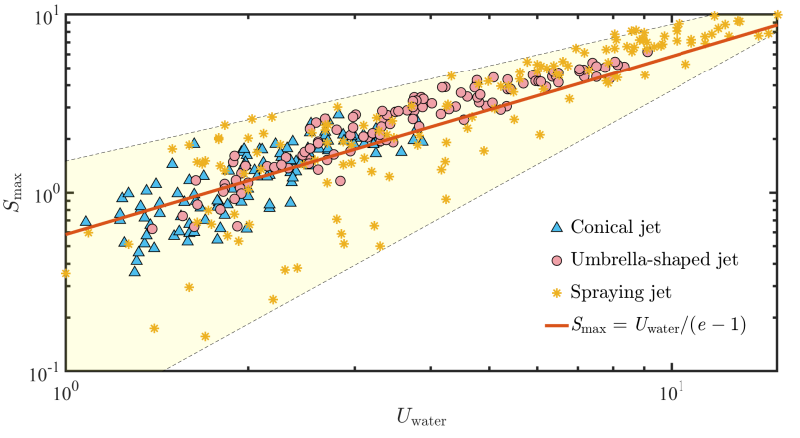

图19：外部射流速度 U_{water} 随最大穿透距离 S_{max}的变化。 U_{water} 表示射流进入水中的速度。 S_{max} 表示射流尖端空腔溃灭时射流在水中经过的距离。数据汇聚于红色实线 $S_{max} = U_{water}/(e-1)$，该实线由公式（6.2）推导得到。黄色阴影区域表示喷射射流的分布范围。

曲线与方程（6.2）所得曲线在图 18中与实验曲线进行了比较。液体子弹模型的预测结果与实验结果吻合良好，直至射流尖端处的空腔塌缩。塌缩后，射流的推进能量显著耗散，最大穿透距离达到 S_{max}。大量实验数据表明，所有穿刺射流的塌缩时间均稳定地处于 0。$8 < t < 1$。2。我们统一采用 $t = 1$ 并将其代入方程（6.2），得到 $S_{max} = U_{water}/(e-1)$，这是适用于大多数穿刺射流的一般结论。一旦确定射流速度 U_{water}，便可估算最大穿透距离 S_{max}，并通过方程（S 6.2）进一步得到穿透距离的时间曲线。

我们提供 全面深入地了解三种类型 s

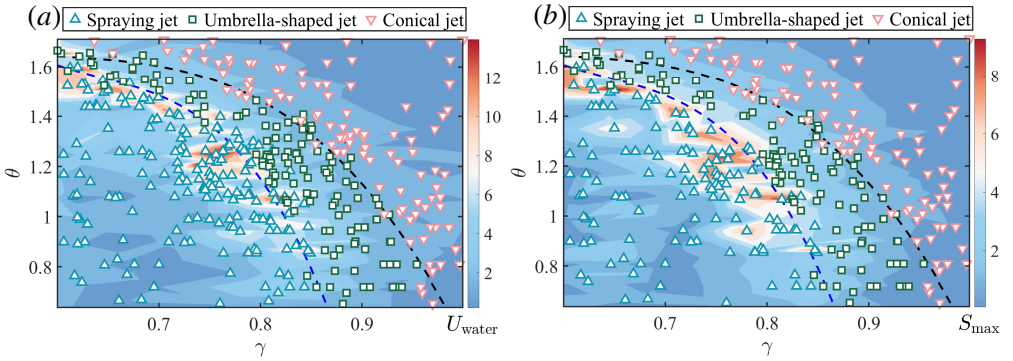

图20：外部射流速度 U_{water} (*a*)和最大穿透距离 S_{max} (*b*) 随 γ 和 θ变化的相图，背景颜色根据实验数据插值得到。虚线表示拟合得到的不同射流状态之间的边界：黑色虚线区分锥形射流和伞形射流，蓝色虚线区分伞形射流和喷射射流。

射流的穿透能力，见图19。总体而言，穿刺射流的穿透能力主要由其外部射流速度决定 U_{water}，这与我们的液体子弹模型一致，图中的实线对此进行了说明。圆锥形射流和伞形射流的数据分布集中。外部射流速度相同时，圆锥形射流和伞形射流的最大穿透距离相近。然而，伞形射流能够达到更高的外部射流速度，从而扩大其穿透范围。低速喷射射流的穿透能力不稳定，且略低于圆锥形射流和伞形射流；尤其是具有明显不稳定性的雾状喷雾射流，情况更为突出。这可能是由于对雾状喷雾射流的外部射流速度测量值过高 U_{water} 。破碎射流尖端撞击后形成的不连续空腔会干扰对上游连续射流速度的测量，导致对具有穿透能力的连续相真实速度的估计偏高。相比之下，高速喷射射流仍符合液体子弹模型。其颈缩破裂加速机制使其外部速度能够超过伞形射流所能达到的速度。就射流穿透能力的上限而言，喷射射流优于其他类型，因此非常适用于需要远距离穿透和高效物料输送的应用场景。对于要求穿透距离较短的情况，伞形射流凭借更优异的稳定性和可控性，是更理想的选择。下一节将讨论如何通过控制初始参数来实现伞形射流，或优化喷射射流的穿透性能。

6.3. $\theta - \gamma$ 参数空间中的射流状态、速度和穿透距离图

本节考察串列气泡系统的初始参数 θ 和 γ 对穿透射流不同状态的影响。我们选取约300个实验数据点并进行插值，以获得相图；在所研究的参数空间（$0.7 < \theta < 1.7$ 和 $0.6 < \gamma < 1$）内，不同符号表示三种不同的穿透射流状态。重点关注穿刺射流穿透气泡表面后的外部射流速度 U_{water} 和最大穿透距离 S_{max} 。

图 20(*a*) 和 (*b*) 根据 θ 和 γ 展示了三种射流状态的相图。我们的实验数据主要关注能够产生高速喷射射流和伞形射流的参数空间，因为这些射流与无针注射应用密切相关。随着相对起始时间差 θ 从 0 开始增大，气泡1之间的相互作用

气泡1和气泡2之间的相互作用从吸引转变为排斥，导致射流方向反转：从指向气泡1转为穿透气泡2。当 θ 超过约 2 时，气泡2与气泡1的主振荡发生水动力学解耦。气泡2的动力学完全由气泡1溃灭及随后再膨胀产生的压力波所支配。因此，这种解耦状态不在我们的研究范围内。每幅图中的背景颜色表示 U_{water} 和$S_{\max}$的大小，不同符号则用于区分三种穿透射流状态。这些状态之间的边界以虚线标示：黑色虚线将锥形射流与伞形射流分隔开，而蓝色虚线则区分伞形射流和喷射射流。

图 20（a）表明，射流形态由参数θ 和 γ的相互作用共同决定。较大的 θ 和 γ 对应较大的相对起始距离和时间差，有利于锥形射流的形成，而较小的数值则主要产生喷射射流。稳定伞形射流局限于这两种形态之间狭窄的中间区域。图20（a）的右上部和左下部分别对应气泡间耦合最弱和最强的形态区域。这些区域表现出较低的射流速度，这是锥形射流和雾状喷雾射流的典型特征。具有较高速度、适用于实现水下定向能量传递的喷射射流和伞形射流，广泛分布于 θ 和 γ取中等值的区域。我们的相图中的高速射流区域再现了Han 等人（2015年）和Fan 等人（2024年）报道的研究结果。由于实验数据点大幅增加，我们的相图分辨率高于以往研究。我们发现，相图中的高速射流区域沿伞形射流与喷射射流边界的左侧呈带状分布。图中标出了内部速度超过1200 m/s的参数区域，同时量化了其对应的外部速度变化。这种更高的分辨率能够更精确地控制穿刺射流。

由于外部射流速度 U_{water} 无法充分表征穿刺射流的穿透能力，我们进一步研究了其最大穿透距离 $S_{\max}$ 在 $\theta-\gamma$ 参数空间 $\theta-\gamma$中的分布。正如图20(b)所示，其在参数空间中的分布模式与外部速度相似。在红色标注的参数区域内，喷射射流在远距离应用中表现出最佳穿透性能，该区域对应针状喷射射流。与此同时，邻近红色标注区域的伞形射流则具有更优的短距离穿透能力。这些发现为利用串列气泡射流作为传统针式注射系统的可行替代方案，建立了全面的控制框架。

7. 总结与结论

本研究揭示了两个反相、尺寸为厘米级的串列空化气泡所产生的穿刺射流动力学。通过控制两个气泡的相对起始距离 γ 和相对起始时间差 θ，我们通过实验识别出穿刺射流的三种不同形态，即锥形射流、伞形射流和喷射射流。我们还采用流体体积法（VoF）和边界积分法（BIM）进行了数值模拟，以补充这些实验观察，并阐明了各种穿刺射流形成的内在机制。主要发现总结如下。

对于一对反相气泡，过度膨胀的气泡1（半径大于平衡状态时的半径）会吸引气泡2，并将其近侧拉伸成高曲率的细长尖端。这个尖端首先溃灭

，并演变成细长的穿刺射流，其动力学取决于气泡1最终溃灭与气泡2尖端自收缩之间的时空失配。如果气泡1在尖端尚未能凭借自身曲率收缩之前就发生溃灭，冲击压力波便会驱动向内流动形成锥形射流。射流速度与压力波的冲量呈线性关系，这表明表面曲率触发射流，而压力波控制其后续发展。因此，锥形射流的形成受局部曲率与压力波之间相互作用的控制。当尖端在气泡1溃灭之前收缩时，则会出现伞形射流。汇聚流使上游流体加速至超过尖端前进速度。当这股更快的流体超过尖端时，会将前缘液片向外扫成一层薄薄的径向液膜。如果随后气泡1在射流基部附近溃灭，所发出的压力波可能会诱发第二片伞状液片，跟随射流尖端运动。

喷射射流起源于气泡2细长尖端的颈部断裂，而这一过程由气泡1溃灭时发出的高压波触发。这些射流速度可超过 1200 m/s，初始呈紧凑的针状形态。尽管颈部断裂固有的不稳定性可能导致尖端破碎并倾斜，但在射流基部的支撑下，连续射流仍具有很高的稳定性，表现出较强的轴对称性并保持持续的速度。当相对起始距离 γ 足够小时，针状射流不再受到颈部断裂产生的局部高压滞止点加速。相反，气泡2的细长尖端会与气泡1聚并，并在颈部收缩过程中裹挟一团分散的微气泡。随后，这些微气泡溃灭，产生间歇性的高压波动，最终形成混乱的雾状喷射射流，与最初的针状结构明显不同。

穿透气泡界面后，穿刺射流的尖端后方会留下一条细长气腔。最大气腔长度是衡量射流穿透能力的可靠定量指标。我们的分析揭示了不同射流形态各自鲜明的穿透特性。针状喷射射流表现最佳，其气腔长度可达到气泡最大半径的十倍以上。伞形射流凭借优异的流动稳定性和方向可控性，在短距离穿透方面表现最佳。相比之下，锥形和雾状喷射射流因速度较低且穿透过程中能量耗散迅速，穿透能力有限。值得注意的是，我们的简化液体子弹模型能够很好地预测所有穿刺射流状态下的穿透过程和最大穿透距离。通过大量实验，我们系统绘制了 γ-θ 参数空间中三种射流状态的形成条件，并量化了它们在水中的最大速度和穿透距离。这些结果全面加深了我们对反相气泡系统中射流形成与演化的认识，并为需要精确控制射流行为的应用（如无针注射）奠定了基础。

致谢
我们感谢 Q.X. Wang 提供的深刻见解和帮助。

资助
本研究得到国家自然科学基金委员会（项目编号：52525102、12372239、12572284）、黑龙江省重点研发计划项目（JD24A002）、船舶结构安全全国重点实验室（Naklas2024ZZ004-J）和Xplore奖的资助。

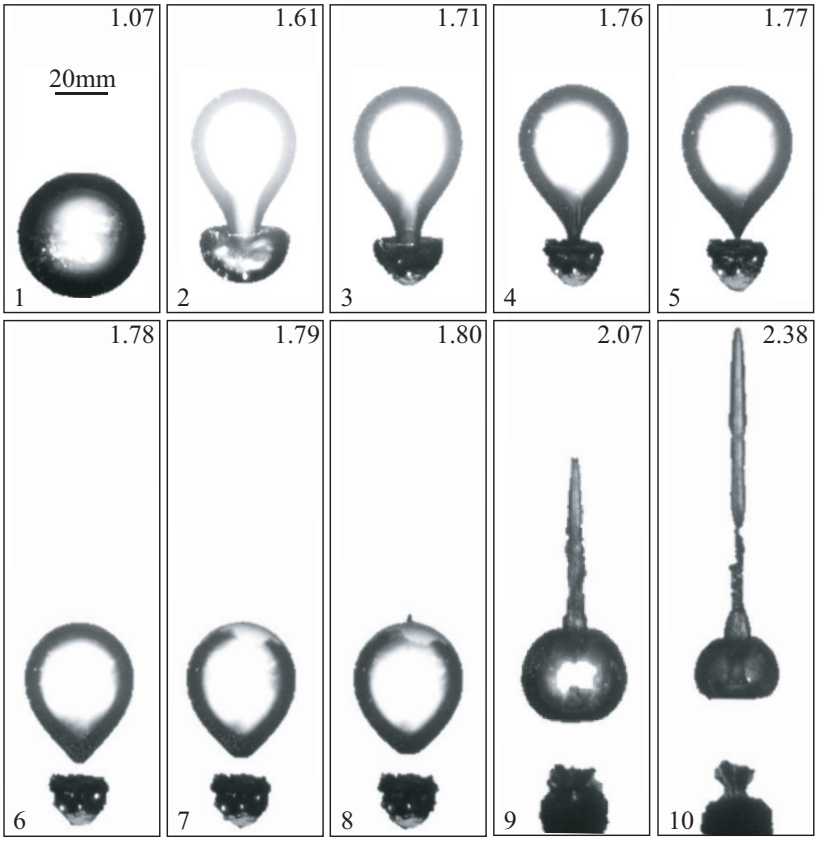

图21：反相气泡对产生的喷射射流动力学，对应于图17(*a*)中射流速度最高的情况。时间尺度 $R_{\max}\sqrt{\rho/P_\infty}$ 为2.25毫秒。初始参数为 $\gamma = 0。78$， $\theta = 1。07。$

利益声明

作者声明不存在利益冲突。

作者 ORCID

Shuai Yan https://orcid.org/0009-0005-3869-7231；A-Man Zhanghttps://orcid.org/0000-0003-1299-3049；Tianyuan Zhang https://orcid.org/0000-0001-7238-2608；Pu Cui https://orcid.org/0000-0001-8179-1366；Rui Han https://orcid.org/0000-0003-3699-5954；Shuai Li https://orcid.org/0000-0002-3043-5617。

附录

本节展示了图17（*a*）中射流速度最高的工况所对应的图像序列。如图21 所示，从 $t \approx 1。77$（帧5）到 $t \approx 1。79$（帧7），气泡2的细长尖端发生颈部断裂，随后射流尖端撞击气泡2的上表面。在这0.02的时间间隔内，射流总共前进了2.49，因此最小估算速度为123（对应于1230 m/s）。

参考文献

Aristoff, J.M. & Bush, J.W.M. 2009年 小型疏水球体的入水。《流体力学杂志》619, 45–78. Arita, Y., Ploschner, M., Antkowiak, M., Gunn-Moore, F. & Dholakia, K. 2013 光学捕获金纳米粒子的激光诱导击穿及其在单细胞转染中的应用。Opt. Lett. 38 (17), 3402–3405. Blake, J.R. & Gibson, D.C. 1987 边界附近的空化气泡。Annu. Rev. Fluid Mech. 19 (1), 99–123. Brennen, C.E. 1995《空化与气泡动力学》。牛津大学出版社。Brujan, E.-A., Nahen, K., Schmidt, P. & Vogel, A. 2001 弹性边界附近激光诱导空化气泡的动力学。《流体力学杂志》433, 251–281. Burton, J.C., Waldrep, R. & Taborek, P. 2005 气泡夹断过程中的尺度规律与失稳。Phys. Rev. Lett. 94 (18), 184502. Cattaneo, M., Guerriero, G., Shakya, G., Krattiger, L.A., Paganella, L.G., Narciso, M.L. & Supponen, O. 2025 21, 590 598 周期性射流促进微气泡介导的药物递送。Nat. Phys. – . Choi, D., Byun, J. & Park, H. 2022 环形双喷嘴气体射流流动引起的液柱雾化分析。《流体力学杂志》943, A25. Cui, P., Zhang, A.-M., Wang, S.P. & Liu, Y.L. 2020 两个塌缩气泡相互作用、冲击波发射及破冰的实验研究。《流体力学杂志》897, A25. Dadvand, A., Khoo, B.C., Shervani-Tabar, M.T. & Khalilpourazary, S. 2012 火花生成气泡诱导的液滴动力学边界元分析。Eng. Anal. Bound. Elem. 36 (11), 1595–1603. Deshpande, S.S., Anumolu, L. & Trujillo, M.F. 2012 两相流求解器 interfoam 的性能评估。Comput. Sci. Discov. 5 (1), 014016. Dijkink, R., Le Gac, S., Nijhuis, E., van den Berg, A., Vermes, I., Poot, A. & Ohl, C.-D. 2007 空化–细胞相互作用的调控：跨膜运输与存活率研究。Phys. Med. Biol. 53 (2), 375. Enriquez, O.R., Peters, I. R., Gekle, S., Schmidt, L.E., Lohse, D. & van der Meer, D. 2012 水中非轴对称撞击形成的空气空腔的塌缩与断裂闭合。《流体力学杂志》701, 40–58. Fan, Y.Z., Bußmann, A., Reuter, F., Bao, H.Z., Adami, S., Gordillo, J., Adams, N. & Ohl, C.-D. 2024 共振惯性空化气泡对对超声速微射流的增强。Phys. Rev. Lett. 132 (10), 104004. Fong, S.W., Adhikari, D., Klaseboer, E. & Khoo, B.C. 2009 多个具有相位差的火花生成气泡之间的相互作用。Exp. Fluids 46, 705–724. Gekle, S. & Gordillo, J.M. 2010 空腔塌缩后沃辛顿射流的生成与破碎。第一部分：射流形成。《流体力学杂志》663, 293–330. George, S.D., Chidangil, S. & Mathur, D. 2018 迷你综述：激光诱导微气泡形成及其生物医学影响。Langmuir 35 (31), 10139–10150. Geschner, F., Obermier, G. & Chaves, H. 2001 正弦强迫液体射流破碎过程中各种现象的研究。ILASS-Europe 2001, 2–6. Gonzalez-Avila, S.R., Denner, F. & Ohl, C.-D. 2021 刚性壁面附近空化气泡膨胀与塌缩产生的声压。Phys. Fluids 33 (3), 032118. Gonzalez-Avila, S.R., Van Blokland, A.C., Zeng, Q.Y. & Ohl, C.-D. 2020 狭窄间隙中空化气泡塌缩产生的射流及其剪切应力增强。《流体力学杂志》884, A23. Gordillo, J.M. & Gekle, S. 2010 空腔塌缩后沃辛顿射流的生成与破碎。第二部分：拉伸射流的尖端破碎。《流体力学杂志》663, 331–346. Guildenbecher, D.R., L´opez-Rivera, C. & Sojka, P.E. 2009 二次雾化。Exp. Fluids 46 (3), 371–402. Han, B., K¨ohler, K., Jungnickel, K., Mettin, R., Lauterborn, W. & Vogel, A. 2015 激光诱导气泡对的动力学。《流体力学杂志》771, 706–742. Han, R., Zhang, A.-M., Tan, S.C. & Li, S. 2022 空化气泡与两种不互溶流体界面的多时间尺度相互作用。《流体力学杂志》932, A8. Huck, P.D., Osuna-Orozco, R., Machicoane, N. & Aliseda, A. 2022 湍流同轴气体射流雾化后的喷雾扩散状态。《流体力学杂志》932, A36. Karri, B., Ohl, S.-W., Klaseboer, E., Ohl, C.-D. & Khoo, B.C. 2012 带孔板附近火花诱导振荡气泡产生的射流与喷雾。Phys. Rev. E 86 (3), 036309.

Keim, N.C., Møller, P., Zhang, W.W. & Nagel, S.R. 2006 水中空气泡的破碎：记忆与圆柱对称性的破坏。《物理评论快报》97 (14), 144503. Keller, J.B. & Miksis, M. 1980 大振幅气泡振荡。《美国声学学会杂志》68 (2), 628–633. Koch, M., Lechner, C., Reuter, F., K¨ohler, K., Mettin, R. & Lauterborn, W. 2016 使用有限体积法和流体体积法，通过 OpenFOAM 对激光生成的空化气泡进行数值建模。《计算流体》126, 71–90. Koukouvinis, P., Gavaises, M., Supponen, O. & Farhat, M. 2016a 重力作用下塌缩气泡的数值模拟。《流体》28 (3), 032110. Koukouvinis, P., Gavaises, M., Supponen, O. & Farhat, M. 2016b 自由表面附近气泡膨胀与塌陷的模拟。《流体》28 (5), 052103. Kuwata, M., Abe, Y., Yokota, S., Nonomura, T., Sawada, H., Yakeno, A., Asai, K. & Obayashi, S. 2021 极低长细比圆柱体周围的流动特性。《物理评论：流体》6 (5), 054704. Lauterborn, W. 1982 38, 165 178 空化泡动力学——复杂问题的新工具。《应用科学研究》– . Lechner, C., Lauterborn, W., Koch, M. & Mettin, R. 2019 在极靠近固体边界处膨胀和塌缩的气泡产生的快速细射流：数值研究。《物理评论：流体》4 (2), 021601. Lechner, C., Lauterborn, W., Koch, M. & Mettin, R. 2020 可压缩液体中固体边界附近气泡的射流形成：距离依赖性的数值研究。《物理评论：流体》5 (9), 093604. Li, S., Prosperetti, A. & van der Meer, D. 2020 圆柱表面环形气泡的动力学及其在地球物理勘探中的应用。《国际多相流杂志》129, 103335. Li, S., Zhao, Z.S., Zhang, A.-M. & Han, R. 2024 悬浮于不同母液中的液滴内的空化气泡动力学。《流体力学杂志》979, A47. Liang, W., Chen, R., Zheng, J., Li, X.Y. & Lu, F.Y. 2021 自由场中电火花产生的两个近似等尺寸气泡之间的相互作用。《流体》33 (6), 067107. Liang, W., Lin, Y.L., Zhu, C.L., Zhang, Y.W. & Chen, R. 2022a 两个电火花气泡耦合载荷作用下铝膜动态响应的实验研究。《海洋工程》266, 112888. Liang, X.X., Linz, N., Freidank, S., Paltauf, G. & Vogel, A. 2022b 激光诱导空化过程中球形气泡振荡与冲击波发射的全面分析。《流体力学杂志》940, A5. Luo, J., Xu, W.L. & Khoo, B.C. 2021 气泡分层对空化气泡塌缩所产生冲击波的影响。《流体力学杂志》919, A16. Mallick, M., Kumar, A., Tamboli, N., Kulkarni, A., Sati, P., Devi, V. & Chandar, S 2014 圆柱绕流阻力系数研究。《国际土木工程研究杂志》5 (4), 301–306. Moholkar, V.S., Kumar, P.S. & Pandit, A.B. 1999 用于声化学效应的水动力空化。《超声声化学》6 (1-2), 53–65. Ohl, C.-D., Arora, M., Dijkink, R., Janve, V. & Lohse, D. 2006a 激光诱导空化气泡的表面清洗。《应用物理快报》89 (7), 074102. Ohl, C.-D., Arora, M., Ikink, R., De Jong, N., Versluis, M., Delius, M. & Lohse, D. 2006b 射流型空化气泡引发的声孔化。《生物物理学杂志》91 (11), 4285–4295. Ohl, C.-D., Kurz, T., Geisler, R., Lindau, O. & Lauterborn, W. 1999 气泡动力学、冲击波与声致发光。《伦敦皇家学会哲学汇刊 A 辑》357 (1751), 269–294. Ohl, C.-D. & Wolfrum, B. 2003 冲击波诱导空化使黏附的 HeLa 细胞脱离并发生声孔化。《生物化学与生物物理学报：一般主题》1624 (1-3), 131–138. Orthaber, U., Petkov ˇsek, R., Schille, J., Hartwig, L., Hawlina, G., Drnov ˇsek-Olup, B., Vre ˇcko, A. & Poberaj, I. 2014 激光诱导空化气泡对薄弹性膜的影响。《光学与激光技术》64, 94–100. Ory, E., Yuan, H.P., Prosperetti, A., Popinet, S. & Zaleski, S. 2000 窄管中蒸气泡的生长与塌陷。《流体》12 (6), 1268–1277. Pei, S.C., Zhang, A.-M., Liu, C., Zhang, T.Y., Han, R. & Li, S. 2025 环境温度对空化气泡动力学的影响。《流体力学杂志》1023, A28. Peters, I.R., Tagawa, Y., Oudalov, N., Sun, C., Prosperetti, A., Lohse, D. & van der Meer, D. 2013 高度聚焦的超声速微射流：数值模拟。《流体力学杂志》719, 587–605. Philipp, A. & Lauterborn, W. 1998 单个激光产生的气泡引起的空化侵蚀。《流体力学杂志》361, 75–116.

Reese, H., Sch¨adel, R., Reuter, F. & Ohl, C.-D. 2022 利用单个空化气泡对黏性液体进行微观泵送。《流体力学杂志》944, A17. Ren, Z.B., Han, H., Zeng, H., Sun, C., Tagawa, Y., Zuo, Z.G. & Liu, S.H. 2023 激光诱导空化气泡塌缩时与附着于刚性边界的半球形液滴之间的相互作用。《流体力学杂志》976, A11. Reuter, F. & Ohl, C.-D. 2021 利用单个空化气泡生成超音速针状射流。《应用物理快报》118 (13), 134103. Robles, V., Gutierrez-Herrera, E., Devia-Cruz, L.F., Banks, D., Camacho-Lopez, S. & Aguilar, G. 2020 通过双气泡激光诱导空化微射流穿透软材料。《流体》32 (4), 042005. Rusche, H. 2002 高相含率分散两相流的计算流体动力学。博士论文，伦敦大学。Sankin, G.N., Yuan, F. & Zhong, P. 2010 用于局部定向单细胞膜穿孔的脉动串列微气泡。《物理评论快报》105 (7), 078101. Schmidt, L.E., Keim, N.C., Zhang, W.W. & Nagel, S.R. 2009 脱离中的空气泡内编码记忆的振动。《自然·物理》5 (5), 343–346. Shinjo, J. & Umemura, A. 2010 液体射流初级破碎模拟：液丝与液滴形成的动力学。《国际多相流杂志》36 (7), 513–532. Sieber, A.B., Preso, D.B. & Farhat, M. 2022 颗粒边界附近空化气泡的动力学。《流体力学杂志》947, A39. Soh, W.K., Khoo, B.C. & Yuen, W.Y.D. 2005 水射流撞击自由表面时的空气卷吸。《实验流体》39 (3), 498–506. Speirs, N.B., Pan, Z., Belden, J. & Truscott, T.T. 2018 多液滴流与射流的入水。《流体力学杂志》844, 1084–1111. Srinivasan, V., Salazar, A.J. & Saito, K. 2011 使用流体体积（VoF）方法对调制液体射流的破碎过程建模。《应用数学建模》35 (8), 3710–3730. Supponen, O., Kobel, P., Obreschkow, D. & Farhat, M. 2015 塌缩气泡的内部世界。《流体》27 (9), 091113. Supponen, O., Obreschkow, D., Tinguely, M., Kobel, P., Dorsaz, N. & Farhat, M. 2016 单个空化气泡射流的尺度律。《流体力学杂志》802, 263–293. Suslick, K.S. 1990 声化学。《科学》247 (4949), 1439–1445. Tomita, Y., Robinson, P.B., Tong, R.P. & Blake, J.R. 2002 曲面刚性边界附近空化气泡的生长与塌陷。《流体力学杂志》466, 259–283. Tomita, Y. & Sato, K. 2017 不同时刻产生的两个相互作用空化气泡驱动的脉冲射流。《流体力学杂志》819, 465–493. Tong, S.Y., Zhang, S., Wang, S.P. & Li, S. 2022 刚性壁面上气泡诱导的压力、力与冲量特性。《海洋工程》255, 111484. Truscott, T.T., Epps, B.P. & Belden, J. 2014 弹体入水。《流体力学年度评论》46 (1), 355–378. Wang, A., Zhong, Y.X., Wang, G.H., Huang, J., Wang, J.Z. & Wang, Y,W. 2022 不同厚度软膜附近空化气泡形成两股轴向射流的实验研究。《AIP进展》12 (9), 095023. Wang, Q.X., Yeo, K.S., Khoo, B.C. & Lam, K.Y. 1996 气泡与自由表面之间的非线性相互作用。《计算流体》25 (7), 607–628. Wei, C.-W., Xia, J.J., Lombardo, M., Perez, C., Arnal, B., Larson-Smith, K., Pelivanov, I., Matula, T., Pozzo, L. & O'Donnell, M. 2014 金纳米球纳米乳液中的激光诱导空化对血栓的破坏：体外结果。《光学快报》39 (9), 2599–2602. Weller, H.G., Tabor, G., Jasak, H. & Fureby, C. 1998 使用面向对象技术的计算连续介质力学张量方法。《计算物理》12 (6), 620–631. Yan, S., Chen, Y., Lyu, K., Qin, H., Zhang, A.-M. & Li, S. 2025 刚性壁面附近非球形空化气泡动力学的数值与实验基准研究。《应用海洋研究》154, 104423. Yang, Z.Y., Ji, B.Q., Ault, J.T. & Feng, J. 2023 油膜包覆气泡破裂过程中增强的奇异射流形成。《自然·物理》19 (6), 884–890. Yuan, F., Yang, C. & Zhong, P. 2015 串列气泡诱导射流流动造成的细胞膜变形与生物效应。《美国国家科学院院刊》112 (51), E7039–E7047. Zeng, Q.Y., Gonzalez-Avila, S.R., Dijkink, R., Koukouvinis, P., Gavaises, M. & Ohl, C.-D. 2018a 射流型空化气泡产生的壁面剪切应力。《流体力学杂志》846, 341–355.

Zeng, Q.Y., Gonzalez-Avila, S.R., Ten Voorde, S. & Ohl, C.-D. 2018年*b* 空化诱导的瑞利–泰勒不稳定性导致的黏性液滴射流。《流体力学杂志》**846**，916–943。Zeng,Q.Y., Zhang,A.-M., Tan,B.H., An,H.J. &Ohl,C.-D. 2024年由远壁增强近壁空化气泡的射流。《流体力学杂志》**987**，R2。Zhang, T.Y., Zhang, A.-M., Zhang, S., Long, S.N., Han, R., Liu, L.Q., Ohl, C.-D. & Li, S. 2025年由空化涡环驱动的自由液面射流。《流体力学杂志》**1003**，A4。Zhao, Z.S., Li, S., Xiong, C.W., Cui, P., Wang, S.P. & Zhang, A.-M. 2025年中等距离下气泡溃灭引发空化侵蚀的新见解。《流体力学杂志》**1015**，A33。