arXiv:2601.05015v1 [math.AP] 8 Jan 2026

具有锥形渐近的 Allen–Cahn 解的节点集比较

SANGHOON LEE 和 TAEHUN LEE

Abstract. 我们为节点集（可能具有奇点）渐近于正则极小超锥的 Allen–Cahn 方程整体解建立了比较原理。我们证明，正相的包含关系会迫使解满足全局序关系。因此，正相唯一决定该解，而正相的严格包含意味着相应的节点集互不相交。我们的分析依赖于无界且不一定光滑的区域上线性化算子的最大值原理，并由此得出 Allen–Cahn 方程对应于极小超曲面的强最大值原理的一个类比结果。

1. Introduction

本文探讨 Allen–Cahn 方程整体解的序关系性质与刚性结果

$$\Delta u + u - u^3 = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

具体而言，本文聚焦于节点集渐近于正则极小超锥的解$\mathcal{C}$ （即以原点为唯一奇点的极小超锥）。方程（1.1）是相变理论中的经典模型，描述二元混合物分离为由 $u = \pm 1$表示的两个稳定相。

对（1.1）的分析中，一个核心主题是整体解的节点集（即零水平集）与极小超曲面之间的深刻联系。De Giorgi猜想 [12], 鲜明地体现了这一联系。该猜想断言，任何沿一个方向单调的有界解都必须是一维的——等价地说，其水平集必须是平面——在维数 $n \leq 8$下成立。Ghoussoub 和 Gui [21] 在 $n = 2$维情形下，以及 Ambrosio 和 Cabr´e [2] 在 $n = 3$维情形下，肯定地证明了该猜想。随后，Savin [32] 在 $4 \leq n \leq 8$ 维情形下，在一个温和的附加假设下证明了该猜想。之后，Wang 给出了另一种证明 [37]。相比之下，在维数$n \geq 9$下，del Pino、Kowalczyk 和 Wei [15] 构造了一个反例，表明 De Giorgi猜想中的维数限制 $n \leq 8$ 是精确的。这一结果可视为 Allen–Cahn 方程的对应版本，与 Bombieri、De Giorgi 和 Giusti [6]著名的反例相呼应。

过去几十年来，关于 Allen–Cahn 方程解的节点集结构和模空间，已有大量研究；例如，参见 [10, 11, 13, 14, 16, 18, 20, 22, 23, 26, 28, 36, 38, 39], ，这里只列举少数几项。近来，Florit–Simon 和 Serra [19]在维数为 $n = 4$ 时，针对 De Giorgi猜想的稳定版本取得了显著进展。尽管如此，与稳定极小超曲面理论相比，我们对这一方向的理解仍不够深入，尤其是在低维和高维情形下与稳定 Bernstein问题相关的研究方面。

在维数 $n \geq 8$ 下，已知许多节点集非平面的例子。特别是，节点集恰好由 Simons 锥 $\mathcal{C}_{m,m}$ 给出的解，

$$\mathcal{C}_{m,m} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m : |x| = |y|\}, \tag{1.2}$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：35J61；次要分类：35B08、35B50、53A10。

Key words and phrases. Allen–Cahn 方程、极小锥、节点集、比较原理。T. Lee 获得了由韩国政府（韩国科学技术信息通信部）资助的韩国国家研究基金会项目支持（RS-2023-00211258）。

已由 Cabr´e 和 Terra [7, 8, 9]构造并研究。这些解称为鞍形解（见定理 2.1）。此外，受 Hardt–Simon 叶层 [25] 所提供的几何图景启发——该叶层是由一参数族光滑极小超曲面构成的 $\mathbb{R}^{2m} \setminus \mathcal{C}_{m,m}$ 叶层，这些超曲面渐近于 $\mathcal{C}_{m,m}$——Liu、Wang 和 Wei [29]构造了节点集渐近于这些叶片的整体解，并利用 Pacard 和 Wei [31]构造的解族作为障碍函数，证明这些解是全局极小解。最近，Agudelo 和 Rizzi [1] 针对节点集渐近于 Lawson 锥的解，确立了类似的存在性结果。

受 Hardt–Simon叶层唯一性的启发，一个自然的问题是：上述构造的解的节点集是否自身构成欧氏空间的叶层？这些解是否穷尽了节点集渐近于西蒙斯锥的所有整体解（参见 [17, 34]在极小超曲面的情形）？作为实现这些目标的必要一步，我们建立以下关于节点集的强最大值原理。

定理 1.1. 设 $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ 为正则极小超锥。假设 u_1 和 u_2 是方程 (1.1) 的非恒定解，其节点集渐近于 $\mathcal{C}$ （按照 C^1 意义，参见定义 2.2）。若 $\{u_1 > 0\} \subseteq \{u_2 > 0\}$，则 $u_1 \leq u_2$ 在 $\mathbb{R}^n$中成立。此外，或者 $u_1 \equiv u_2$，或者 $u_1 < u_2$ 处处成立。

正相的严格包含迫使相应的解严格有序，从而确保它们的节点集永不相交。该结果可视为极小超曲面强最大值原理的 Allen–Cahn 类比 [27, 33, 35, 40]。然而，值得注意的是，一般而言，节点集并不存在这种强最大值原理的纯局部版本。因此，定理1.1 意味着节点集唯一确定了解。这将 Cabr´e [7]的唯一性定理推广到节点集渐近于锥而非与锥完全重合的情形，并且允许节点集上存在奇异点。

推论 1.2 （解的唯一性）。设 u_1 和 u_2 是满足定理 1.1假设的解。如果它们的正相重合，即 $\{u_1 > 0\} = \{u_2 > 0\}$，那么 $u_1 \equiv u_2$ 在 $\mathbb{R}^n$中。

我们的证明扩展了 Cabr´e [7]所建立的、针对无界区域上线性化算子的最大值原理框架。一个关键区别在于，我们研究的区域边界不一定光滑，并且可能表现出超出锥形情形的更一般奇异点类型。这一复杂性要求将若干基本的分析工具——包括最大值原理、渐近行为分析以及极小解的存在性理论——推广到这一更广泛的渐近情形。特别是，我们对节点集的奇异部分，即 $\{u = 0\} \cap \{|\nabla u| = 0\}$，附近进行了更精细的分析。

我们指出，在 C^1 意义下渐近于 $\mathcal{C}$ 的条件，已被文献中的一大类解所满足。这不仅包括节点集与锥本身重合的鞍形解（如 [8, 9], 中所研究的），还包括节点集对应于与该锥相关的 Hardt-Simon叶片的解，例如 [29, 31]中构造的解。

本文的组织结构如下。在第2节，我们介绍几何设置，并回顾包括稳定性性质在内的标准预备结果。第3节证明了解在无穷远处一致收敛于一维剖面。最后，在第4节，我们给出定理1.1的证明。为此，我们首先在无界区域上推导线性化算子的最大值原理，并建立极小障碍解的存在性。最后，我们介绍主定理的直接推论，包括严格序关系以及与鞍形解的比较。

2. Preliminaries

我们首 首先回顾与西蒙斯锥相关的鞍形解概念 .

定义 2.1 (鞍形解)。 我们称有界解 $u\colon\ \mathbb{R}^{2m}\to\mathbb{R}$ （1.1）的 鞍形解 ，若以径向坐标 $s=|x|$ 和 $t=|y|$ 对于（$x,\ y$） $\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m$满足：

(i) u 仅依赖于变量 s 和 t，记作 $u(x,\ y)=u(s,\ t)$。(ii) $u>0$ 在区域 $\mathcal{C}^+=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^{2m}$ 中：$s>t\}$。(iii) u 关于对角线是奇函数，即在 $\mathbb{R}^{2m}$中，$u(s,\ t)=-u(t,\ s)$。

接下来，我们介绍正则极小锥的几何设置，以定义节点集的渐近行为。设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个正则极小锥（即， $\mathcal{C}$ 在原点处有一个孤立奇点）。我们将定义在 $\mathcal{C}\setminus B_R$ 上、对应某个 $R>0$ 的法向量场记作 η，并令S 为锥 $\mathcal{C}$的横截面 $\mathcal{C}\cap\mathbb{S}^{n-1}$。我们在锥上使用坐标系 $(z,\ r)=rz\in\mathcal{C}\subset\mathbb{R}^n$，其中 $z\in S$ 且 $r>0$。

定义 2.2 （渐近于锥的 C^1 意义下）。 设 $\mathcal{C}\subset\mathbb{R}^n$ 为正则极小锥。若开集 Ω 的边界 $\Gamma=\partial\Omega$ 满足以下条件，则称其在 $\mathcal{C}$ 该 C^1意义下 渐近于锥：

存在半径 $R>0$ 和紧集 $K\subset\mathbb{R}^n$，使得 $\Gamma\setminus K$ 可以表示为 $\mathcal{C}\setminus B_R$上的法向图:

$$\Gamma\setminus K=\{rz+h(r,z)\nu_{\mathcal{C}}(rz)\mid r>R,\ z\in S\}, \tag{2.1}$$

其中 $S=\mathcal{C}\cap\mathbb{S}^{n-1}$, $\nu_{\mathcal{C}}$ 是定义在 $\mathcal{C}$上的单位法向量场，而函数 $h\in C^1((R,\infty)\times S)$ 满足衰减条件

$$\lim_{r\to\infty}\sup_{z\in S}\left(|h(r,z)|+|\partial_r h(r,z)|+\frac{1}{r}|\nabla_S h(r,z)|\right)=0. \tag{2.2}$$

这里， ∇_S 表示在链环 S上的协变导数。

我们回顾 Allen–Cahn 方程的强最大值原理和唯一延拓性质。证明均为标准内容，因此略去。

引理 2.3 （强最大值原理）。 设 Ω $\subset\mathbb{R}^n$ 为一个区域。假设 u 和 v 是 (1.1) 在 Ω 内的解，且 $u\le v$ 在 Ω内。如果存在一点 $x_0\in\Omega$ 使得 $u(x_0)=v(x_0)$，则 $u\equiv v$ 在 Ω内。

引理 2.4 （唯一延拓原理）。 设 Ω $\subset\mathbb{R}^n$ 是一个区域。假设 u 和 v 是方程 （1.1）在 Ω中的解。若 $u=v$ 在 Ω的某个非空开子集上成立，则 $u\equiv v$ 在 Ω中成立。

下面的命题证明了正解的稳定性。这个结果对应于 [9], 中的注 3.3，但为了完整起见，我们仍给出证明。

命题 2.5 （正解的稳定性）。 设 Ω $\subset\mathbb{R}^n$ 是一个区域（可能无界）。假设 u 是 *Allen–Cahn* 方程 $-\Delta u=u-u^3$ 在 Ω 中的一个解，且 $0<u<1$在 Ω中。那么 u 是 Ω中的稳定解，即，

$$\int_\Omega\left(|\nabla\xi|^2-(1-3u^2)\xi^2\right)\,dx\ge 0\quad \textit{for all } \xi\in C_c^\infty(\Omega).$$

证明。 由于 $0<u<1$，我们有 $(1-3u^2)u<u-u^3=-\Delta u$ 在 Ω 中。将此不等式乘以ξ^2/u ，其中任意 $\xi\in C_c^\infty$(Ω)，并进行分部积分，可得

$$\int_\Omega(1-3u^2)\xi^2\,dx\le\int_\Omega\frac{-\Delta u}{u}\xi^2\,dx=\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla\left(\frac{\xi^2}{u}\right)\,dx\le\int_\Omega|\nabla\xi|^2\,dx,$$

其中，最后一个不等式中用到了恒等式 $\nabla u\cdot\nabla(\frac{\xi^2}{u})=|\nabla\xi|^2-|u\nabla(\frac{\xi}{u})|^2$。 □

我们通过紧性论证得到整体解时，需要用到以下结果来排除平凡解。

命题 2.6. 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为一个区域。假设Ω 包含半径任意大的球。那么，平凡解 $u \equiv 0$ 在Ω中是不稳定的。

证明。 在 $u \equiv 0$ 处的线性化算子对应于二次型

$$Q_0(\xi) := \int_\Omega \left(|\nabla \xi|^2 - \xi^2\right)\, dx.$$

为了证明不稳定性，我们必须找到一个试验函数 ξ，使得 $Q_0(\xi) < 0$。对于任意 $R > 0$，令 $B_R \subset \Omega$ 为半径为 R 的球。令 ϕ_R 为 B_R 上与特征值 $\lambda_1(B_R)$ 对应的 $-\Delta$ 的第一个狄利克雷特征函数。在 B_R 外将 ϕ_R 延拓为零，我们有 $\phi_R \in H_0^1(\Omega)$。直接计算可得

$$Q_0(\phi_R) = \int_{B_R} \left(|\nabla \phi_R|^2 - \phi_R^2\right)\, dx = (\lambda_1(B_R) - 1) \int_{B_R} \phi_R^2\, dx.$$

由于 $\lambda_1(B_R) \propto R^{-2}$，我们可以选取充分大的 R，使得 $\lambda_1(B_R) < 1$。这意味着$Q_0(\phi_R) < 0$，证明得证。□

3. Asymptotic behavior of solutions

本节中，我们将确定定义在区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上的解的渐近行为，其中其边界 $\Gamma = \partial\Omega$ 渐近于极小锥 $\mathcal{C}$。特别地，我们考虑一个在 Ω 内为正且在 Γ上消失的解u 。

回顾一下，西蒙斯锥 $\mathcal{C}_{m,\ m}$ 定义为

$$\mathcal{C}_{m,m} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m : |x| = |y|\}.$$

考虑方程（1.1）的一个整体解，其节点集渐近于 $\mathcal{C}_{m,\ m}$。将此解限制在其某个节点域上，并注意到该区域内解为正，我们便可以应用本节中得到的结果。这推广了 [9][定理 1.6], 中的渐近分析；在那里，作者针对节点集恰好 为西蒙斯锥的整体鞍形解证明了该结果。

引理 3.1。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个区域，其边界 $\Gamma = \partial\Omega$ 渐近于一个极小超锥$\mathcal{C}$，且满足 C^1 意义下（见定义 2.2）。设 $\{x_k\} \subset \Gamma$ 是一个满足 $|x_k| \to \infty$ 的序列，使得内向单位法向量 ν（x_k） 收敛于 $\nu_\infty \in \mathbb{S}^{n-1}$。令 $H := \{y \cdot \nu_\infty = 0\}$ 并令 $H^+ := \{y \cdot \nu_\infty > 0\}$。那么，对于任意 $R > 0$，我们有

(1) $d_{\mathcal{H}}\big((\Gamma - x_k) \cap B_R, H \cap B_R\big) \to 0$,
(2) $d_{\mathcal{H}}\big((\Omega - x_k) \cap B_R, H^+ \cap B_R\big) \to 0$,

其中 $k \to \infty$， $d_{\mathcal{H}}$ 表示豪斯多夫距离。

证明。 由于（2）由（1）立即推出，我们证明（1）。

令 $\Gamma_k := \Gamma - x_k$ 以及 $\mathcal{C}_k := \mathcal{C} - p_k$，其中 $x_k = p_k + h(p_k)\nu_{\mathcal{C}}(p_k)$ 如定义 2.2所述。根据豪斯多夫距离的三角不等式 $d_{\mathcal{H}}$，只需证明 Γ_k 收敛到 $\mathcal{C}_k$，且$\mathcal{C}_k$ 收敛到 H 于 $B_R(0)$。

首先，我们比较 Γ 与 $\mathcal{C}$。由于 $|x_k| \to \infty$，球 $B_R(x_k)$ 包含于$r \gg 1$所在的区域。衰减条件（2.2）意味着 $|h(r, z)| \to 0$ 一致地趋于 $r \to \infty$。因此， Γ在固定球内 $\mathcal{C}$ 相对于平移后的标架 B_R 变得任意接近。因此，

$$d_{\mathcal{H}}\big(\Gamma_k \cap B_R, \mathcal{C}_k \cap B_R\big) \to 0 \quad \text{as } k \to \infty. \tag{3.1}$$

接下来，我们比较 $\mathcal{C}_k$ 与 H。由于 $\mathcal{C}$ 的主曲率按 $O(1/|p_k|)$衰减，该锥渐近平坦。因此，

$$d_{\mathcal{H}}\big(\mathcal{C}_k \cap B_R, H_k \cap B_R\big) \to 0 \quad \text{as } k \to \infty, \tag{3.2}$$

其中 $H_k := \{y \in \mathbb{R}^n : \ y \cdot \nu_{\mathcal{C}}(p_k) = 0\}$ 是 $\mathcal{C}$ 在 p_k处的切超平面。因此，只需证明 $\nu_{\mathcal{C}}(p_k) \to \nu_\infty$。

我们将 Γ 缩放至 Γ/r_k，其中 $r_k = |p_k|$。注意，锥 $\mathcal{C}$ 在该缩放下保持不变。Γ/r_k 仍然是关于 $\mathcal{C}$ 的法向图，由 $h'_k(r,z) = h(r_k r, z)/r_k$ 表示。在 $(1, p_k/r_k)$ 附近，缩放后的超曲面 Γ/r_k 是 $\mathcal{C}$ 上某个固定紧区域的图。由于 $|h'_k|, |Dh'_k| \to 0$ as $k \to +\infty$ 根据 (2.2)，$\nu_{\mathcal{C}}(p_k) \to \nu_\infty$ as Γ/r_k 是 C^1-扰动的 $\mathcal{C}$。因此

$$d_{\mathcal{H}}\big(H_k \cap B_R, H \cap B_R\big) \to 0 \quad \text{as } k \to \infty$$

结合 (3.1) 和 (3.2)，即完成证明。 □

我们用 $u_0(z) := \tanh(z/\sqrt{2})$ 表示一维异宿解。我们还定义与锥 $\mathcal{C}$ 相关联的渐近剖面函数 U，其定义为

$$U(x) := u_0\left(\operatorname{dist}(x, \mathcal{C})\right).$$

定理 3.2. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个区域，其边界 $\Gamma := \partial\Omega$ 在无穷远处渐近于极小锥$\mathcal{C}$，这里的渐近意义是 C^1（见定义 2.2）。设 u 是方程 (1.1) 在 Ω 中的有界解，满足 $u = 0$ 在 $\Gamma = \partial\Omega$ 上成立，且 $u > 0$ 在 Ω中成立。那么，

$$\|u - U\|_{L^\infty(\Omega \setminus B_R)} + \|\nabla u - \nabla U\|_{L^\infty(\Omega \setminus B_R)} \to 0 \quad as\ R \to \infty.$$

证明。我们用反证法。假设定理的断言不成立。那么，存在一个常数 $\varepsilon > 0$ 和一个点列 $\{x_k\} \subset \Omega$，使得 $|x_k| \to \infty$，并且

$$|u(x_k) - U(x_k)| + |\nabla u(x_k) - \nabla U(x_k)| \geq \varepsilon. \tag{3.3}$$

由于 u 有界，因此根据最大值原理可得 $|u| \leq 1$，标准椭圆估计表明，∇u 在 Ω 中也一致有界（参见 [30]）。

我们区分两种情形。

情形 1。序列 $d_k := \operatorname{dist}(x_k, \Gamma)$ 无界。

不妨取一个子列，设 $d_k \to \infty$。由于 Γ 渐近于 $\mathcal{C}$，从 x_k 到锥 $\mathcal{C}$的距离也趋于无穷。在区域 Ω 中，这意味着 $U(x_k) \to 1$ 以及 $\nabla U(x_k) \to 0$。因此，(3.3) 给出

$$|u(x_k) - 1| + |\nabla u(x_k)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.4}$$

对于充分大的 k。

令 $v_k(y) := u(y + x_k)$。由于 $d_k = \operatorname{dist}(x_k, \Gamma) \to \infty$，对于任意固定的 $R > 0$，球 $B_R(x_k)$ 在所有充分大的 k下都严格包含于 Ω 中。因此，序列 v_k 在不断扩张并趋于全空间 $\mathbb{R}^n$的球上均有定义。根据标准椭圆估计，不妨取一个子列，使得 v_k 在 $C^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 中收敛于极限函数 v。于是，v 是一个满足以下条件的整体解

$$\begin{cases} -\Delta v = v - v^3 & \text{in } \mathbb{R}^n, \\ 0 \leq v \leq 1 & \text{in } \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{3.5}$$

应用刘维尔型结果（例如，[4,命题 1。14]），v 必为恒定函数，即$v \equiv 0$ 或 $v \equiv 1$。若 $v \equiv 1$，则 $u(x_k) \to 1$ 且 $\nabla u(x_k), \to 0$这与（3.4）矛盾。因此只剩下 $v \equiv 0$这一情形。然而，由于稳定性在局部收敛下保持不变，由定理2.5可知，极限 v 必须是 $\mathbb{R}^n$中的稳定解。这与命题2.6矛盾。该命题断言，在包含任意大球的任何区域中，平凡解都不稳定（例如 $\mathbb{R}^n$）。因此，情形 1 不可能发生。

情形 2。序列 $d_k := \operatorname{dist}(x_k, \Gamma)$ 有界。

不妨取一个子列，并假设 $d_k \to d \geq 0$。令 $x_k^0 \in \Gamma$ 为实现距离的点，即$|x_k - x_k^0| = d_k$。由于 $x_k \in \Omega$，我们可以写成

$$x_k = x_k^0 + d_k \nu(x_k^0),$$

其中 $\nu(x_k^0)$ 表示 Γ在 x_k^0处的单位内法向量。由于 $\{\nu(x_k^0)\}$ 位于单位球面上，不妨取一个子列，存在单位向量 $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$，使得当 $k \to \infty$时， $\nu(x_k^0) \to \nu$。

设 $w_k(y) := u(y + x_k^0)$ 定义在平移区域 $\Omega_k := \Omega - x_k^0$ 上。由于 Γ 在无穷远处渐近于极小锥，区域序列 Ω_k 在局部收敛于半空间 H^+。由标准椭圆估计可知， w_k 在 $C^2(H^+)$ 中局部收敛于极限 w，该极限定义在 H^+中。

为确定 $H = \partial H^+$ 上的边界条件，任取一点 $y \in H^+$。利用中值定理以及 $|\nabla u|$的一致有界性，我们得到估计

$$|w_k(y)| = |u(y + x_k^0)| \le \|\nabla u\|_{L^\infty} \operatorname{dist}(y + x_k^0, \Gamma) = \|\nabla u\|_{L^\infty} \operatorname{dist}(y, \partial\Omega_k).$$

令 $k \to \infty$ 取极限，由于 $\partial\Omega_k \to H$ 局部一致收敛，我们得到

$$|w(y)| \le C \operatorname{dist}(y, H) \quad \text{for all } y \in H^+,$$

其中 C 是一个普适常数。该不等式意味着，当 $\operatorname{dist}(y, H) \to 0$ 时， $w(y) \to 0$。因此，w 连续延拓至边界 H，并满足

$$w(y) = 0 \quad \text{for } y \in H.$$

结合 u 在 Ω 中的正性，极限 w 在半空间中满足狄利克雷问题：

$$\begin{cases} -\Delta w = w - w^3 & \text{in } H^+, \\ w \ge 0 & \text{in } H^+, \\ w = 0 & \text{on } H. \end{cases} \tag{3.6}$$

根据定理2.5， u 在 Ω 中稳定，因此极限 w 是 H^+中的稳定解。根据定理 2.6，平凡解是不稳定的，这意味着 $w \not\equiv 0$。由强最大值原理， w 严格为正。由于 w 是半空间中的有界解，我们应用 Angenent 的刚性结果 [3]，从而推得 w 是唯一的一维剖面，且仅依赖于到边界的距离。因此，

$$w(y) = u_0(y \cdot \nu) \quad \text{for all } y \in H^+,$$

其中 ν 是 H的单位内法向量。

现在我们导出一个与 (3.3) 矛盾的结论。回顾 $x_k = x_k^0 + d_k \nu_k^0$，其中 $\nu_k^0 \to \nu$。利用局部一致收敛 $w_k \to w$，我们估计 $u(x_k)$：

$$u(x_k) = w_k(d_k \nu_k^0) = w(d_k \nu) + o(1) = u_0(d_k) + o(1).$$

由于 $u_0(d_k) = U(x_k) + o(1)$，我们有 $u(x_k) = U(x_k) + o(1)$。类似地， $\nabla u(x_k) = \nabla U(x_k) + o(1)$。这意味着 $|u(x_k) - U(x_k)| + |\nabla u(x_k) - \nabla U(x_k)| \to 0$，与 (3.3) 矛盾。□

4. Proof of Theorem 1.1

本节将给出定理1.1的证明。为此，我们首先在无界区域上建立最大值原理，并证明极小解的存在性。这些结果将 [7]中关于鞍形解的命题 1.3 和引理 3.1 推广到我们的情形。

引理 4.1。 设 $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ 是一个区域，其边界 $\Gamma = \partial\mathcal{O}$ 与一个极小锥渐近$\mathcal{C}$ 于 C^1 意义下（见定义 2.2）。设 u 是方程 (1.1) 的一个整体解，其正相为 $\mathcal{O}$，即 $\mathcal{O} = \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) > 0\}$。假设 $v \in C^2(\mathcal{O}) \cap C^0(\mathcal{O})$ 是线性化算子在 u处的一个次解，满足

$$\Delta v + (1 - 3u^2)v \ge 0 \quad \text{in } \mathcal{O}, \qquad v \le 0 \quad \text{on } \Gamma,$$

and

$$\limsup_{\substack{x \in \mathcal{O} \\ |x| \to \infty}} v(x) \le 0.$$

那么 $v \le 0$ 属于 $\mathcal{O}$。

证明。 反设 $v(x_0) > 0$ 在某个 $x_0 \in \mathcal{O}$处。令 $t(x) := \operatorname{dist}(x, \Gamma)$ 为到边界的距离函数。取 $\varepsilon \in (0, t(x_0)]$ （稍后确定）。我们将区域划分为边界带 N_ε 和内部集合 $\mathcal{O}_\varepsilon$:

$$N_\varepsilon = \{x \in \mathcal{O} : 0 < t(x) < \varepsilon\}, \qquad \mathcal{O}_\varepsilon = \{x \in \mathcal{O} : t(x) > \varepsilon\}.$$

根据一维异宿渐近（定理 3.2），存在 $\kappa_\varepsilon > 0$ 使得

$$u(x) \geq \kappa_\varepsilon \quad \text{for all } x \in \mathcal{O}_\varepsilon.$$

在 $\mathcal{O}_\varepsilon$ 上定义 $w := v/u$ ，并令 $\alpha := \sup_{\mathcal{O}_\varepsilon} w$。由于 $u \geq \kappa_\varepsilon > 0$ 在 $\mathcal{O}_\varepsilon$ 上，关于 Γ 的假设 $v \leq 0$ 以及 $\limsup_{|x|\to\infty} v(x) \leq 0$ 蕴含 $\limsup_{|x|\to\infty} w(x) \leq 0$。由于 $v(x_0) > 0$，我们有 $\alpha > 0$。此外，上确界在某个内点 $x_1 \in \mathcal{O}_\varepsilon$ 处取得，即 $w(x_1) = \alpha$。

考虑函数 $\phi := v - \alpha u$。我们声称 $\phi \leq 0$ 属于 N_ε。首先，注意到 $L_u\phi = L_u v - \alpha L_u u$。由于根据假设 $L_u v \geq 0$，并且

$$L_u u = \Delta u + (1 - 3u^2)u = -(u - u^3) + (1 - 3u^2)u = -2u^3 < 0,$$

我们在 N_ε 中有 $L_u\phi \geq 2\alpha u^3 > 0$ 。边界条件为:

在 Γ 上， $v \leq 0$ 且 $u = 0$，因此 $\phi \leq 0$。

在 $\partial N_\varepsilon \cap \mathcal{O} = \partial\mathcal{O}_\varepsilon$ 上， $v/u \leq \alpha$ 推出 $\phi \leq 0$。

尽管由于边界 Γ 的不规则性，区域 N_ε 可能不是一个“窄区域”，但只要该区域的补集满足一致密度估计， L_u 的最大值原理仍然成立（参见 Berestycki、Nirenberg 和 Varadhan [5, 定理 2.5]）。

反设 $\sup_{N_\varepsilon} \phi > 0$。根据边界条件 $\phi \leq 0$ （在 $\partial N_\varepsilon \cap \mathcal{O}$ 上）以及无穷远处的衰减条件，存在一个最大值点 $x_0 \in N_\varepsilon$ ，使得

$$\phi(x_0) = \sup_{N_\varepsilon} \phi > 0.$$

我们构造比较函数 $\psi(x) := a(\varepsilon^2 - |x - x_0|^2)$，其中常数 $a > 0$ 待定。考虑集合 $D := N_\varepsilon \cap \{\phi > 0\}$。在此区域内，由于 $\Delta\phi \geq -(1 - 3u^2)\phi$ 且 $1 - 3u^2 \leq 1$，我们有

$$\Delta(\phi - \psi) = \Delta\phi + 2na \geq -(1 - 3u^2)\phi + 2na \geq -\phi(x_0) + 2na.$$

取 $a := \phi(x_0)/2n$，我们有 $\Delta(\phi - \psi) \geq 0$ 属于 $D \cap B_{2\varepsilon}(x_0)$。由于 $\phi - \psi \leq \phi \leq 0$ 在$\partial D \cap B_{2\varepsilon}(x_0)$上成立，我们将函数 $(\phi - \psi)_+$ 延拓为在 $B_{2\varepsilon}(x_0) \setminus D$上为零。此延拓在 $B_{2\varepsilon}(x_0)$ 中连续，并在粘性意义下为次调和函数。

应用 次调和函数在 $B_{2\varepsilon}(x_0)$ 上的平均值性质，我们得到

$$\phi(x_0) - a\varepsilon^2 = (\phi - \psi)(x_0) \leq \frac{1}{|B_{2\varepsilon}(x_0)|} \int_{B_{2\varepsilon}(x_0)} (\phi - \psi)_+ \, dx.$$

由于 $(\phi - \psi)_+ \leq \phi \leq \phi(x_0)$，且支集包含于 $D \cap B_{2\varepsilon}(x_0)$ 中，

$$\phi(x_0)\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2n}\right) \leq \frac{|D \cap B_{2\varepsilon}(x_0)|}{|B_{2\varepsilon}(x_0)|}\phi(x_0).$$

两边除以 ϕ $(x_0) > 0$ 并重新整理，可得补集密度的一个界:

$$\frac{|B_{2\varepsilon}(x_0) \setminus D|}{|B_{2\varepsilon}(x_0)|} \leq \frac{\varepsilon^2}{2n}.$$

由于 $x_0 \in N_\varepsilon$，存在一个边界点 $\bar{x}_0 \in \Gamma$ 使得 $|x_0 - \bar{x}_0| < \varepsilon$。注意到$B_\varepsilon(\bar{x}_0) \setminus N_\varepsilon \subset B_{2\varepsilon}(x_0) \setminus D$ （因为 $\phi \leq 0$ 在 Γ 上且位于 $\mathcal{O}$之外），我们推得

$$\frac{|B_\varepsilon(\bar{x}_0) \setminus N_\varepsilon|}{|B_{2\varepsilon}(x_0)|} \leq \frac{\varepsilon^2}{2n}.$$

为导出矛盾，我们依赖节点集 $\Gamma = \{u = 0\}$的几何性质。回顾一下，Allen–Cahn 方程的解 u 是实解析的。节点集 Γ 分解为正则部分 $\mathcal{R} = \{x \in \Gamma : |\nabla u(x)| \neq 0\}$ 和奇异部分 $\mathcal{S} = \{x \in \Gamma : \nabla u(x) = 0\}$。

我们为区域的补集建立一致密度估计， $\mathcal{O}^c$。根据定理3.2，存在一个足够大的半径 $R_0 > 0$ 使得当 $|x| > R_0$ 时， $\Gamma \setminus B_R \subset \mathcal{R}$。因此，一致密度估计成立：存在 ε_1， $c_1 > 0$ 使得

$$\frac{|B_\rho(x) \setminus \mathcal{O}|}{|B_\rho(x)|} \geq c_1 \quad \text{for all } x \in \Gamma \cap \{|x| > R_0\} \text{ and } \rho < \varepsilon_1.$$

接下来，考虑紧致部分 $K := \Gamma \cap B_{R_0}$。对于任意 $x \in K$，令 $d(x)$ 表示 u 在 x处的消失阶。若 $x \in \mathcal{R}$，则 $d(x) = 1$，且 Γ 局部是一个 C^1 超曲面，这意味着 $\lim_{\rho\to 0} |B_\rho(x) \setminus \mathcal{O}|/|B_\rho(x)| = 1/2$。若 $x \in \mathcal{S}$，我们声称消失阶满足 $\sup_{x\in\mathcal{S}\cap K} d(x) \leq C < \infty$。事实上，若不然，则存在一个序列 $x_k \in \mathcal{S} \cap K$ 使得 $d(x_k) \to \infty$。取一个子列后，$x_k \to x_* \in K$。由 u的光滑性可知，这意味着 u 在 x_*处具有无限消失阶。然而，根据解析函数的唯一延拓原理， u 必定恒等于零，这与 $u > 0$ 属于 $\mathcal{O}$矛盾。由于消失阶有界，由 [24] 可知， Γ 在任意奇异点处的局部几何由有限次数的齐次调和多项式所支配，即 $u(x) = P(x) + o(x^d)$，其中 P是一个次数为d的非零齐次多项式。这表明补集 $\mathcal{O}^c$ 在每一点都具有正密度。具体而言，

$$\liminf_{\rho\to 0} \frac{|B_\rho(x) \setminus \mathcal{O}|}{|B_\rho(x)|} > 0 \quad \text{for all } x \in K.$$

因此，存在普适常数 $\varepsilon_2, c_2 > 0$ ，使得

$$\frac{|B_\rho(x) \setminus \mathcal{O}|}{|B_\rho(x)|} \geq c_2 \quad \text{for all } x \in K \text{ and } \rho < \varepsilon_2.$$

事实上，若存在点列 $x_k \in K$ 和半径 $\rho_k \searrow 0$ ，使得 t

$$\frac{|B_{\rho_k}(x_k) \setminus \mathcal{O}|}{|B_{\rho_k}(x_k)|} < \frac{1}{k},$$

那么，由于 x_k 沿某个子列收敛到某个 $x_0 \in K$ ， $\mathcal{O}^c$ 在 x_0 处的下密度为零，这与逐点密度严格为正的假设矛盾。

结合紧致部分和渐近尾部的估计，我们得出存在普适常数 $c > 0$ ，使得

$$\frac{|B_\varepsilon(\bar{x}_0) \setminus \mathcal{O}|}{|B_\varepsilon(\bar{x}_0)|} \geq c \quad \text{for all } \bar{x}_0 \in \Gamma.$$

回顾先前推导出的矛盾不等式：

$$\frac{|B_\varepsilon(\bar{x}_0) \setminus N_\varepsilon|}{|B_{2\varepsilon}(x_0)|} \leq \frac{\varepsilon^2}{2n}.$$

由于 $B_\varepsilon(\bar{x}_0) \setminus \mathcal{O} \subset B_\varepsilon(\bar{x}_0) \setminus N_\varepsilon$ 且 $|B_{2\varepsilon}(x_0)| = 2^n |B_\varepsilon(\bar{x}_0)|$，我们有

$$\frac{c}{2^n} \leq \frac{|B_\varepsilon(\bar{x}_0) \setminus \mathcal{O}|}{|B_{2\varepsilon}(x_0)|} \leq \frac{|B_\varepsilon(\bar{x}_0) \setminus N_\varepsilon|}{|B_{2\varepsilon}(x_0)|} \leq \frac{\varepsilon^2}{2n}.$$

如果我们选择 ε 足够小（具体而言，$\varepsilon < \sqrt{2nc/2^n}$） ，这个不等式 $c/2^n \leq \varepsilon^2/2n$ 就会导致矛盾。因此，假设 $\sup_{N_\varepsilon} \phi > 0$ 不成立，从而完成了在 N_ε上的 $\phi \leq 0$ 证明。

将此结果与 $\mathcal{O}_\varepsilon$上 α 的定义结合起来，我们得到

$$w = \frac{v}{u} \leq \alpha \ \text{ in } \mathcal{O}, \qquad \text{and} \qquad w(x_1) = \alpha.$$

特别地， w 在 $\mathcal{O}$中达到一个内部最大值。

接下来，我们计算 w 在 $\mathcal{O}$中满足的方程。令 $v = uw$ 并利用 $\Delta(uw) = u\,\Delta w + 2\nabla u\cdot\nabla w + w\,\Delta u$，我们得到

$$0 \le L_u(uw) = \Delta(uw) + (1-3u^2)uw$$
$$= u\Big(\Delta w + 2\,\frac{\nabla u}{u}\cdot\nabla w + w\Big(\frac{\Delta u}{u} + 1 - 3u^2\Big)\Big).$$

由于 u 满足 $\Delta u + u - u^3 = 0$，括号内变为

$$\Delta w + 2\,\nabla(\log u)\cdot\nabla w - 2u^2\,w \;\ge\; 0 \quad \text{in } \mathcal{O}.$$

在内部最大值点 x_1，我们有 $\nabla w(x_1) = 0$ 且 $\Delta w(x_1) \le 0$，因此

$$0 \le \Delta w(x_1) - 2u(x_1)^2\,w(x_1) \le -2u(x_1)^2\,\alpha < 0,$$

这与矛盾。因此 $v \le 0$ 属于 $\mathcal{O}$。 □

引理 *4.2.* 设 $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^n$ 是一个开集，其边界 $\Gamma = \partial\mathcal{O}$ 在 C^1 意义下渐近于极小锥 $\mathcal{C}$。假设 u_1、$u_2 \in C^2(\mathcal{O})\cap C^0(\overline{\mathcal{O}})$ 是 *(1.1)* 在 $\mathcal{O}$ 中的解，并且在 $\overline{\mathcal{O}}$ 中为正。若 u_1、u_2 中有一个在 $\partial\mathcal{O} = \Gamma$ 上消失，则存在一个正解 $u_0 \in C^2(\mathcal{O})\cap C^0(\overline{\mathcal{O}})$，它是 *(1.1)* 的解，使得

$$0 < u_0 \le \min\{u_1, u_2\} \quad \textit{in } \mathcal{O}, \qquad \textit{and} \quad u_0 = 0 \quad \textit{on } \Gamma.$$

证明。令 $\psi := \min\{u_1, u_2\}$。根据假设，$0 < \psi < 1$ 属于 $\mathcal{O}$ 且 $\psi = 0$ 在 Γ 上。由于 ψ 是两个解的最小值，因此它是 Allen–Cahn 方程在粘性意义下的上解。

固定 $R > 1$ 并令 $D_R := \mathcal{O}\cap B_R$。区域 D_R 是一个有界开集。边界数据

$$u = 0 \text{ on } \Gamma\cap B_R, \qquad u = \psi \text{ on } \partial B_R\cap\mathcal{O}$$

沿 $\Gamma\cap\partial B_R$ 是相容的，因为 $\psi|_\Gamma \equiv 0$。利用下解／上解对 $0 \le \psi$，我们得到一个解

$$u_R \in C^2(D_R)\cap C^0(\overline{D_R}) \quad \text{of (1.1) with} \quad 0 \le u_R \le \psi \text{ in } D_R.$$

由内部 Schauder 估计，族 $\{u_R\}_{R>1}$ 在 $C^{2,\alpha}(K)$ 中一致有界，其中 $K \Subset \mathcal{O}$为任意紧集，且常数与 R 无关。因此存在一个子列 $\{u_{R_j}\}$收敛于函数 u_0，且收敛于 $C^2_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O})$。由于 $0 \le u_0 \le \psi$ 在 $\mathcal{O}$中，极限 u_0 可连续延拓至 Γ，且取值为 0。因此，$u_0 \in C^2(\overline{\mathcal{O}})\cap C^0(\overline{\mathcal{O}})$在 $\mathcal{O}$ 中满足方程 (1.1)，并且 $\{u_0 = 0\} \supset \Gamma$。

还需证明 $u_0 > 0$ 在 $\mathcal{O}$中。如前所述，强最大值原理表明，要么 $u_0 > 0$，要么 $u_0 \equiv 0$ 在 $\mathcal{O}$中。反设 $u_0 \equiv 0$。由于 u_R 是 D_R 中的一个正解，满足 $0 < u_R \le \psi < 1$，根据定理 2.5，u_R 是 D_R 中的稳定解。令 $R \to \infty$ 趋于极限，并代入稳定性不等式，我们得到 u_0 也是 $\mathcal{O}$中的稳定解。然而，由于 $\mathcal{O}$ 包含半径任意大的球，根据定理 2.6，平凡解是不稳定的。这就产生了矛盾。因此，$u_0 > 0$ 在 $\mathcal{O}$中，从而 $\{u_0 = 0\} = \Gamma$。□

现在我们可以证明主定理了。

定理*1.1*的证明。设 u_1 和 u_2 是方程（1.1）的两个解，其节点集在 C^1 意义下渐近于极小锥 $\mathcal{C}$。假设 $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$。根据引理4.2，存在一个极小解 $u \in C^2(\Omega_1)\cap C^0(\overline{\Omega_1})$，满足

$$0 < u(x) \le \min\{u_1(x), u_2(x)\} \quad \text{for all } x \in \Omega_1, \tag{4.1}$$

并且 $u(x) = 0$ 对于 $x \in \partial\Omega_1$成立。注意到 u_2 在 Ω_1 中为正（因为 $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$），所以 $\min\{u_1, u_2\}$ 为正，且（4.1）定义良好。

我们定义差函数 $v := u_1 - u$ 在 Ω 中。由（4.1），可得 $v \ge 0$ 在 Ω 中。我们的目标是证明 $v \equiv 0$。

首先，我们验证 v 是 u处线性化算子的次解。令 $L_u := \Delta + (1 - 3u^2)$ 。由于 u_1 和 u 都满足 Allen–Cahn 方程（1.1）于 Ω 中$_1$，因此有

$$\begin{aligned} L_u v &= \Delta(u_1 - u) + (1 - 3u^2)(u_1 - u) \\ &= u_1^3 - u^3 - 3u^2(u_1 - u) = (u_1 - u)^2(u_1 + 2u). \end{aligned}$$

由于 $u_1 > 0$ 和 $u > 0$ 属于 Ω_1, ，可知 $L_u v \geq 0$ 属于 Ω_1。因此， v 是 Ω_1中的一个次解。接下来，我们考察边界和渐近行为。由于 $u_1 = 0$ 且 $u = 0$ 在 Ω_1, 上，我们显然有 $v = 0$ 在 Ω_1上。

关于无穷远处的行为，我们应用定理3.2，该定理保证节点集渐近于极小锥 $\mathcal{C}$ 的任意解都一致收敛于典范剖面 $U_{\mathcal{C}}$。由于 u_1 和 u 都属于这类解，因此有

$$\lim_{|x|\to\infty} |u_1(x) - U_{\mathcal{C}}(x)| = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{|x|\to\infty} |u(x) - U_{\mathcal{C}}(x)| = 0.$$

由三角不等式可得

$$\limsup_{|x|\to\infty,\, x\in\Omega_1} |v(x)| \leq \limsup_{|x|\to\infty} |u_1(x) - U_{\mathcal{C}}(x)| + \limsup_{|x|\to\infty} |u(x) - U_{\mathcal{C}}(x)| = 0.$$

由于 v 在 $\partial\Omega_1$ 上以及无穷远处均为零，且满足 $L_u v \geq 0$ 在 Ω 中$_1$, ，我们可以应用无界区域的最大值原理（引理 4.1）得出 $v \leq 0$ 在 Ω 中$_1$。结合 $v \geq 0$ 由构造可知这一事实，我们得到 $v \equiv 0$ 在 Ω 中$_1$, ，这意味着 $u_1 \equiv u$ 在 Ω 中$_1$。回顾（4.1），可推得

$$u_1 \leq u_2 \quad \text{in } \Omega_1 = \{u_1 > 0\}. \tag{4.2}$$

接下来，我们考虑负相。注意到包含关系 $\{u_1 > 0\} \subseteq \{u_2 > 0\}$ 意味着

$$\{u_2 \leq 0\} \subseteq \{u_1 \leq 0\}.$$

我们断言，这意味着严格负相的包含关系，即 $\{u_2 < 0\} \subseteq \{u_1 < 0\}$。反设结论不成立。则存在一点 x_0 ，使得$u_2(x_0) < 0$ ，但 $u_1(x_0) \geq 0$。由于 $x_0 \in \{u_2 \leq 0\} \subseteq \{u_1 \leq 0\}$，必有 $u_1(x_0) = 0$。由于集合 $\{u_2 < 0\}$ 是开集， x_0 是 u_1 的一个内部局部极大值点（因为在该集合中 $u_1 \leq 0$ ）。将强最大值原理应用于方程 $-\Delta u_1 = u_1 - u_1^3$，可得在包含 x_0的连通分支上， $u_1 \equiv 0$ ；再由唯一延拓可知，$u_1 \equiv 0$ 在全局成立。这与 u_1 是一个非常数解的假设矛盾。因此，我们得到 $\{u_2 < 0\} \subseteq \{u_1 < 0\}$。

现在，令 $v_1 := -u_2$ 且 $v_2 := -u_1$。由于非线性项 $f(u) = u - u^3$ 是奇函数， v_1 和 v_2 也是（1.1）的解。上面证明的包含关系可写为 $\{v_1 > 0\} \subseteq \{v_2 > 0\}$。因此，我们可以对 v_1 和 v_2应用与正相情形完全相同的论证。这得到$v_1 \leq v_2$ 在 $\{v_1 > 0\}$中，对应于 $-u_2 \leq -u_1$ 在 $\{u_2 < 0\}$中。等价地，

$$u_1 \leq u_2 \quad \text{in } \{u_2 < 0\}. \tag{4.3}$$

最后，在剩余区域 $u_1 \leq 0$ 且 $u_2 \geq 0$中，不等式 $u_1 \leq u_2$ 显然成立。结合（4.2）和（4.3），我们得出 $u_1 \leq u_2$ 在全空间 $\mathbb{R}^n$中成立。

由强最大值原理可直接推出，要么 $u_1 \equiv u_2$ ，要么处处 $u_1 < u_2$ 。证明至此完成。□

本节最后给出定理 1.1 的两个直接推论。

推论 4.3 （严格序关系和互不相交的节点集）。 设 u_1 和 u_2 是满足定理 *1.1* 假设的解，且设 $\Omega_i = \{u_i > 0\}$。如果 $\Omega_1 \subsetneq \Omega_2$, ，那么 $u_1 < u_2$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中成立。因此，节点集互不相交，即 $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 = \emptyset$。

定理 4.3 的一个重要推论是，节点集对单侧局部扰动具有刚性。如果一个解的节点集渐近于一个极小锥，就不可能仅在一个紧集内沿一个方向对节点集进行变形（即严格扩大或缩小正相），从而形成另一个解的节点集。

最后，我们将定理 1.1 应用于鞍形解 u_s。由于 u_s 的节点集恰好是西蒙斯锥，因此它可作为一个全局屏障，适用于正相包含在锥一侧内的任意解。

推论 4.4（与鞍形解的比较）。令 $\mathcal{C}_{m,m}$ 为由 (1.2) 定义的西蒙斯锥，并令 u_s 为 (1.1) 的鞍形解（见定义 *2.1*）。设 u 是 (1.1) 的非恒定解，其节点集渐近于$\mathcal{C}_{m,m}$。

(i) 若 u 的正相包含在 $\mathcal{C}^+_{m,m}$中，即 $\{u>0\}\subseteq\{|x|>|y|\}$，则

$$u(x,y)\le u_s(x,y)\quad \textit{for all } (x,y)\in\mathbb{R}^{2m}.$$

(ii) 若 u 的正相包含在 $\mathcal{C}^-_{m,m}$中，即 $\{u>0\}\subseteq\{|x|<|y|\}$，则

$$u(x,y)\le -u_s(x,y)\quad \textit{for all } (x,y)\in\mathbb{R}^{2m}.$$

注记。由此可得一个关于 u 的全局逐点界，该界以一维解 u_0表示。事实上，[8]中已证明，鞍形解 u_s 满足

$$|u_s(x,y)|\le|u_0\left(\operatorname{dist}\left((x,y),\mathcal{C}\right)\right)|=\left|u_0\left(\frac{|x|-|y|}{\sqrt{2}}\right)\right|\quad \text{for all } (x,y)\in\mathbb{R}^{2m},$$

其中 $u_0(z)=\tanh(z/\sqrt{2})$表示一维异宿轨道剖面。

References

[1] Agudelo, O., and Rizzi, M. Lawson锥与Allen-Cahn方程，2025。[2] Ambrosio, L., and Cabré, X. n维实数空间中的半线性椭圆方程整体解与De Giorgi猜想。 *J. Amer. Math. Soc. 13*, 4 (2000), 725–739。[3] Angenent, S. B. 半线性边值问题解的唯一性。 *Math. Ann. 272*, 1 (1985), 129–138。[4] Berestycki, H., Hamel, F. c., and Nadirashvili, N. KPP 型问题中的传播速度。I. 周期框架。 *J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 7*, 2 (2005), 173–213。[5] Berestycki, H., Nirenberg, L., and Varadhan, S. R. S. 一般区域中二阶椭圆算子的主特征值与最大值原理。 *Comm. Pure Appl. Math. 47*, 1 (1994), 47–92。[6] Bombieri, E., De Giorgi, E., and Giusti, E. 极小锥与伯恩斯坦问题。 *Invent. Math. 7* (1969), 243–268。[7] Cabré, X. *J. Math. Pures Appl. (9) 98* 3 2012 239 256

Allen-Cahn方程鞍形解的唯一性与稳定性。， （），–。[8] Cabré, X. and Terra J. $\mathbb{R}^{2m}$ *J. Eur. Math.*，双稳态 *Soc. (JEMS) 11* 4 2009 819 843
扩散方程在全空间中的鞍形解。， （），–。[9] Cabré, X., and Terra, J. 双稳态扩散方程鞍形解的定性性质。 *Communications in Partial Differential Equations 35*, 11 (2010), 1923–1957。[10] Caffarelli, L. A. and Córdoba A. *J. Reine*，相变： *Angew. Math. 593* 2006 209 235
中间层的一致正则性。（），–。[11] Chan, H., Fernández-Real, X., Figalli, A., and Serra, J. 三维自由边界 Allen-Cahn与伯努利问题的全局稳定解是一维的，2025。[12] De Giorgi, E. 泛函与算子的收敛问题。载于 *Proceedings of the International Meeting on Recent Methods in Nonlinear Analysis (Rome, 1978)* 1979 131 188 （），

Pitagora，博洛尼亚，第–页。[13] del Pino, M., Kowalczyk, M., and Pacard, F. 平面上Allen-Cahn方程的模空间理论。 *Trans. Amer. Math. Soc. 365*, 2 (2013), 721–766。[14] del Pino, M., Kowalczyk, M., and Wei, J. Toda 系统与Allen-Cahn方程中的聚集界面。 *Arch. Ration. Mech. Anal. 190*, 1 (2008), 141–187。[15] del Pino, M. Kowalczyk M. and Wei J. $N\ge 9$ *Ann. of Math.*，关于 *(2) 174* 3 2011 1485 1569
De Giorgi猜想的研究：维数为中的情形。， （），–。

[16] del Pino, M., Kowalczyk, M., and Wei, J. Allen-Cahn方程的整体解与 $\mathbb{R}^3$中有限总曲率的完备嵌入极小曲面。 *J. Differential Geom. 93*, 1 (2013), 67–131。[17] Edelen, N., and Spolaor, L. 二次锥附近极小曲面的正则性。 *Ann. of Math. (2) 198*, 3 (2023), 1013–1046。[18] Figalli, A., and Serra, J. 关于边界反应的稳定解：维数为$4+1$时的De Giorgi型结果。 *Invent. Math. 219*, 1 (2020), 153–177。[19] Florit-Simon, E., and Serra, J. 关于 $\mathbb{R}^4$中有界能量密度Allen-Cahn方程稳定解的研究, 2025。[20] Gaspar, P., and Guaraco, M. A. M. 相变谱的Weyl定律与极限界面密度。 *Geom. Funct. Anal. 29*, 2 (2019), 382–410。[21] Ghoussoub, N., and Gui, C. 关于De Giorgi猜想及若干相关问题。 *Math. Ann. 311*, 3 (1998), 481–491。[22] Guaraco, M. A. M. *J.* 相变 *Differential Geom. 108* 1 2018 91 133 的极小极大方法与嵌入极小超曲面的存在性。, （）, –。[23] Hamel, F., Liu, Y., Sicbaldi, P., Wang, K., and Wei, J. Allen-Cahn方程及相关问题的半空间定理。 *J. Reine Angew. Math. 770* (2021), 113–133。[24] Han, Q. 椭圆方程解的奇异集。 *Indiana Univ. Math. J. 43*, 3 (1994), 983–1002。[25] Hardt, R. and Simon L. *J. Reine Angew. Math.*, 带 *362* 1985 102 129 孤立奇点的面积极小超曲面。（）, –。[26] Hutchinson, J. E., and Tonegawa, Y. van der Waals-Cahn-Hilliard理论中相变界面的收敛。 *Calc. Var. Partial Differential Equations 10*, 1 (2000), 49–84。[27] Ilmanen, T. *Calc. Var. Partial Differential* 奇异 *Equations 4* 5 1996 443 467 极小超曲面的强最大值原理。, （）, –。[28] Li, M. M.-c., Parise, D., and Sarnataro, L. 具有Neumann边界条件的黎曼流形上Allen-Cahn方程极限界面的边界行为。 *Arch. Ration. Mech. Anal. 248*, 6 (2024), 论文编号124, 43。[29] Liu, Y. Wang K. and Wei J. $n \geq 8$ *J. Math.*, 维 *Pures Appl. (9) 108* 6 2017 818 840 数为时Allen-Cahn方程的全局极小解。, （）, –。[30] Modica, L. *Comm. Pure Appl.* 非线 *Math. 38* 5 1985 679 684 性Poisson方程的梯度界与Liouville定理。, （）, –。[31] Pacard, F. and Wei J. 8 *J.*, 维 *Funct. Anal. 264* 5 2013 1131 1167 数为时Allen-Cahn方程的稳定解与极小锥。, （）, –。[32] Savin, O. 相变中平坦水平集的正则性。 *Ann. of Math. (2) 169*, 1 (2009), 41–78。[33] Simon, L. 面积极小超曲面的严格最大值原理。 *J. Differential Geom. 26*, 2 (1987), 327–335。[34] Simon, L., and Solomon, B. 渐近于n维实数空间中二次锥的极小超曲面。 *Invent. Math. 86*, 3 1986 535 551（）, –。[35] Solomon, B., and White, B. 相对于偶参数椭圆泛函平稳的变分簇的强最大值原理。 *Indiana Univ. Math. J. 38*, 3 (1989), 683–691。[36] Tonegawa, Y., and Wickramasekera, N. van der Waals–Cahn–Hilliard理论中的稳定相变界面。 *J. Reine Angew. Math. 668* (2012), 191–210。[37] Wang, K. Savin关于Allen-Cahn方程定理的新证明。 *J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 19*, 10 (2017), 2997–3051。[38] Wang, K., and Wei, J. 有限Morse指标蕴含有限端。 *Comm. Pure Appl. Math. 72*, 5 (2019), 1044–1119。[39] Wang, K., and Wei, J. 过渡层的二阶估计。 *Adv. Math. 358* (2019), 106856, 85。[40] Wickramasekera, N. 奇异极小超曲面的尖锐强最大值原理与尖锐唯一延拓定理。 *Calc. Var. Partial Differential Equations 51*, 3-4 (2014), 799–812。

Department of Mathematics, The Chinese University of Hong Kong, Shatin, N.T., Hong Kong
Email address: sanghoonlee@cuhk.edu.hk

Department of Mathematics, Konkuk University, Seoul 05029, Korea*Email address*: taehun@konkuk.ac.kr