arXiv:2601.05024v1 [math.NT] 8 Jan 2026

留数定理、正则化与奇偶定理

JiaLi[a,*] 和 Ce Xu[b,†]

a. 北京大学数学科学学院，北京 100000，中国 b. 安徽师范大学数学与统计学院，芜湖 241002，中国

摘要。 本文采用围道积分和留数演算，推导出（圆分）多重ζ值（多重ζ值）的显式奇偶公式。一项关键创新在于将双重洗牌正则化应用于围道积分，由此得到两种不同的正则化奇偶公式——一种通过洗牌正则化，另一种通过积和正则化。值得注意的是，这首次表明围道积分方法可以扩展到正则化情形（包括 $k_r = 1$），从而克服了以往方法的局限。我们的结果不仅为任意深度下的显式奇偶关系提供了依据，也为将这一技术推广到多重ζ值的其他变体奠定了基础。

关键词: （圆分）多重 ζ 值；多重（Hurwitz）ζ 值；多重（Hurwitz）多对数函数；围道积分；留数演算；奇偶定理；正则化。

美国数学会学科分类（2020年）： 11M32,11M99.

1 引言

对于一个多重指标 $\boldsymbol{k} := (k_1, \dots, k_r) \in (\mathbb{Z}_{>0})^r$，我们称其为正多重指标。若此外满足$k_r > 1$，则 $\boldsymbol{k}$ 称为可容许。我们记

$$|\boldsymbol{k}| := k_1 + \cdots + k_r, \quad \mathrm{dep}(\boldsymbol{k}) := r,$$

并分别称它们为 $\boldsymbol{k}$的权和深度。按照惯例，我们用 $\{m\}_r$表示由 m构成、重复 r 次的序列。

对于一个可容许多重指标 $\boldsymbol{k} := (k_1, \dots, k_r)$，经典的多重ζ值（MZVs）定义为（ [14, 32]）

$$\zeta(\boldsymbol{k}) \equiv \zeta(k_1, \dots, k_r) := \sum_{0<n_1<\cdots<n_r} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}}. \tag{1.1}$$

另一种经常与经典多重ζ值一同研究的对象称为多重ζ星值 （MZSVs），其定义为

$$\zeta^\star(\boldsymbol{k}) \equiv \zeta^\star(k_1, \dots, k_r) := \sum_{0<n_1\leqslant\cdots\leqslant n_r} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}}. \tag{1.2}$$

*电子邮箱：jialimath001@pku.org.cn

†电子邮箱：cexu2020@ahnu.edu.cn

多重ζ值的概念由 Hoff- man [14] 和 Zagier [32]于 20 世纪 90 年代初独立提出。由于多重ζ值与结理论、代数几何和理论物理等多个数学与物理领域有着深刻联系，因此吸引了众多数学家和物理学家的持续关注。经过三十多年的发展，这一领域已积累了大量研究成果。关于 2016年以前研究进展的全面综述，读者可参阅 Zhao 的权威专著 [34]。此外，在多年的持续研究中，人们还提出并研究了多重ζ值的各种推广和变体，例如交错多重ζ值 [1], 多重 t-值 [6,7,15,20], 多重T-值 [17], Mordell-Tornheim ζ函数 [8], 等。相关参考文献可参见例如 [16,18,19,30] 及其中所列文献。

在有关多重ζ值及其相关变体的诸多研究问题中，奇偶性研究是一个相当重要的课题。在 [2], Borwein 和 Girgensohn 提出了以下引人注目的结果，称为多重ζ值的奇偶性结果或奇偶性猜想:

猜想 1.1 (Borwein–Girgensohn [2], 1996)。对于 $r \in \mathbb{Z}_{>1}$和 $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_r) \in (\mathbb{Z}_{>0})^r$，若其深度与权的奇偶性不同，则可用深度更低的多重ζ值表示，其中 $k_r > 1$, $\zeta(k_1, \ldots, k_r)$

深度为 2 的情形欧拉早已研究过，而深度为 3 的情形由 Borwein 和 Girgensohn 在 [2]中证明。Ihara-Kaneko-Zagier [12]给出了普遍情形的证明。Tsumura [24] 用不同的方法给出了这一结果的另一种证明。此外，Tsumura [25]证明，在深度与权满足特定奇偶性条件时，导子为 4 的多重 L值可用深度更低的多重 L值表示。遗憾的是，上述证明均未能给出奇偶性结果的一般显式公式。在研究多重ζ值及其变体的奇偶关系显式公式方面，Panzer 于 2017年发表的关于多重多对数函数方程的研究 [21]无疑是一项重要贡献。这一结果不仅给出了任意深度分圆多重ζ值的奇偶关系，还提供了一个用于计算函数方程的计算机程序。此外，Panzer 还推导出了深度为 2 和 3 时的显式公式。Panzer 建立的多重多对数奇偶性结果陈述如下 [21, 定理 1.3]。

定理 1.2 (Panzer [21], 2017). 对于所有的 $r \in \mathbb{Z}_{>1}$和 $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_r) \in (\mathbb{Z}_{>0})^r$，函数

$$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{n}}(z_1, z_2, \ldots, z_r) - (-1)^{n_1+\cdots+n_r-r}\,\mathrm{Li}_{\boldsymbol{n}}(1/z_1, 1/z_2, \ldots, 1/z_r)$$

的深度至多为 $r-1$，这意味着它可以写成以下函数的 $\mathbb{Q}$-线性组合

$$(2\pi i)^{k_0} \prod_{i=1}^{d} \log^{k_i}(-z_i \cdots z_d) \prod_{i=1}^{s} \mathrm{Li}_{\boldsymbol{n}^{(i)}}(\boldsymbol{z}^{(i)}),$$

其中指标 $\boldsymbol{n}^{(i)} \in \mathbb{N}^{d_i}$具有总深度 $d_1 + \cdots + d_s < d$，并保持权 $|\boldsymbol{k}| + \sum_s |\boldsymbol{n}^{(i)}| = |\boldsymbol{n}|$。每个自变量 $\boldsymbol{z}_j^{(i)}$都是某个$i=1$的连续乘积 $z_\mu z_{\mu+1} \cdots z_\nu$

$\mu \leqslant \nu$。这里，对于任意 $(k_1、\ldots、k_r) \in (\mathbb{Z}_{>0})^r$，带有 r 个变量的经典多重多对数函数定义为

$$\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_r}(x_1,\ldots,x_r) := \sum_{0<n_1<\cdots<n_r} \frac{x_1^{n_1}\cdots x_r^{n_r}}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}} \tag{1.3}$$

当对所有 $j = 1,\ldots,r$ 都有 $|x_j \cdots x_r| < 1$ 时，该级数收敛。它可以解析延拓为定义在 $\mathbb{C}^r$ 上的多值亚纯函数（见 *[33]*）。

然而，值得注意的是，尽管 Panzer 的论文提供了一种用于推导函数方程的计算算法，但仍未能给出任意深度的多重 ζ 值和多重多对数奇偶关系的显式公式。Hirose [13] 最近运用 Bouillot [3]发展的多重正切函数理论，建立了多重 ζ 值奇偶性的显式公式。Umezawa [26]最近将 Hirose 的奇偶性结果推广到了多重多对数的情形。

众所周知，围道积分理论和留数定理是研究无穷级数的极其有效的方法。在 1998 年发表的论文 [10], 中，Flajolet 和 Salvy 系统地运用围道积分研究了一类多重 ζ 值变体的奇偶性，这类变体称为“欧拉和”（可表示为多重 ζ 值的整数线性组合）。此后，许多作者将他们的围道积分方法推广到相关变体，以研究其奇偶性结果，例如多重 t-值 [15], 多重T-值 [17], 以及多重 M-值 [29]——这些统称为“欧拉 T-和、欧拉 S-和等”（可表示为多重混合值的整数线性组合）。相关结果可参见 [27, 29] 等文献。

然而，这些论文中的结果无法为多重ζ值、多重 t 值、多重 T 值或多重 M 值的任意深度提供奇偶公式。此外，需要注意的是，上述研究中采用的围道积分方法无法处理 正则化 情形（即 $k_r = 1$ 的情况）。

本文旨在采用围道积分方法推导多重ζ值的显式奇偶公式。我们的创新之处在于将双重洗牌正则化应用于围道积分，从而得到两种不同的奇偶公式：一种通过洗牌正则化获得，另一种通过积和正则化获得。此外，这一方法还可以扩展用于研究多重ζ值的许多其他变体的奇偶性质，例如分圆多重ζ值。

本文的结构安排如下。第 2 节首先定义若干类具有指定求和范围的有限多重赫尔维茨ζ值。随后，我们研究这些有限多重赫尔维茨 ζ 函数所满足的一些基本性质。接着，我们给出这些有限多重赫尔维茨ζ值在整数点处的级数展开或洛朗展开。这些公式对于计算后续各节所讨论的围道积分中被积函数在极点处的留数起着至关重要的作用。

第3节介绍了本文的主要方 pp法，并 p提供一些必要的 y 引理。
在第4节中，我们首先运用围道积分的方法，建立若干涉及有限多重赫尔维茨ζ值的无穷级数恒等式。通过对这些恒等式进行正则化并取适当的极限，我们推导出适用于任意深度多重ζ值的两类正则化奇偶公式。

最后，在第5节中，我们运用类似的技巧，给出分圆多重ζ值在 shuffle 和 stuffle 正则化下的奇偶公式。由于这一过程与正文中的过程十分相似，这里省略详细的导出过程。

2 性质与展开

定义 2.1。对于正多重指标 $\boldsymbol{k}=(k_1,\ \ldots\ldots,\ k_r)$，令 $m_1,\ m_2\in\mathbb{Z}\cup\{-\infty,+\infty\}$满足 $m_1<m_2$。我们定义以下记号

$$\zeta_{(m_1,m_2)}(\boldsymbol{k};s):=\sum_{m_1<n_1<\cdots<n_r<m_2}\frac{1}{(n_1+s)^{k_1}\cdots(n_r+s)^{k_r}},$$
$$\zeta_{(m_1,m_2]}(\boldsymbol{k};s):=\sum_{m_1<n_1<\cdots<n_r\leqslant m_2}\frac{1}{(n_1+s)^{k_1}\cdots(n_r+s)^{k_r}}.$$

类似地，我们还定义以下记号

$$\zeta^{\star}_{(m_1,m_2)}(\boldsymbol{k};s)=\sum_{m_1<n_1\leqslant\cdots\leqslant n_r<m_2}\frac{1}{(n_1+s)^{k_1}\cdots(n_r+s)^{k_r}},$$
$$\zeta^{\star}_{(m_1,m_2]}(\boldsymbol{k};s)=\sum_{m_1<n_1\leqslant\cdots\leqslant n_r\leqslant m_2}\frac{1}{(n_1+s)^{k_1}\cdots(n_r+s)^{k_r}}.$$

为保证级数的收敛性，当 $m_2=+\infty$（分别地，$m_1=-\infty$）时，我们要求 $k_r>1$（分别地，$k_1>1$）。特别地，若 $s=0$，我们将上述符号简记为 $\zeta_{(m_1,m_2)}(\boldsymbol{k}):=\zeta_{(m_1,m_2)}(\boldsymbol{k};0)$ $\zeta_{(m_1,m_2]}(\boldsymbol{k}):=\zeta_{(m_1,m_2]}(\boldsymbol{k};0)$ $\zeta^{\star}_{(m_1,m_2)}(\boldsymbol{k}):=\zeta^{\star}_{(m_1,m_2)}(\boldsymbol{k};0)$ and$\zeta^{\star}_{(m_1,m_2]}(\boldsymbol{k})=\zeta^{\star}_{(m_1,m_2]}(\boldsymbol{k};0)$。

例 2.1. 我们很容易看出

$$\zeta(\boldsymbol{k};s)=\zeta_{(0,+\infty)}(\boldsymbol{k};s):=\sum_{0<n_1<\cdots<n_r}\frac{1}{(n_1+s)^{k_1}\cdots(n_r+s)^{k_r}},$$

and

$$\zeta^{\star}(\boldsymbol{k};s)=\zeta^{\star}_{(0,+\infty)}(\boldsymbol{k};s):=\sum_{0<n_1\leqslant\cdots\leqslant n_r}\frac{1}{(n_1+s)^{k_1}\cdots(n_r+s)^{k_r}}.$$

特别地，对于可容许多重指标 $\boldsymbol{k}:=(k_1,\ldots,k_r)$，我们有

$$\zeta(\boldsymbol{k})=\zeta_{(0,+\infty)}(\boldsymbol{k};0)=\sum_{0<n_1<\cdots<n_r}\frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}$$

and

$$\zeta^{\star}(\boldsymbol{k})=\zeta^{\star}_{(0,+\infty)}(\boldsymbol{k};0):=\sum_{0<n_1\leqslant\cdots\leqslant n_r}\frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}.$$

定义 2.2. 设 $\boldsymbol{y}=(y_1,\ldots,y_r)\in\mathbb{C}^r$ 和 $0\leqslant i\leqslant j\leqslant r+1$，我们定义以下记号

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_{(i,j)}&:=(y_{i+1},y_{i+2},\ldots,y_{j-2},y_{j-1})\in\mathbb{C}^{j-i-1},\\
\boldsymbol{y}_{[i,j)}&:=(y_i,y_{i+1},\ldots,y_{j-2},y_{j-1})\in\mathbb{C}^{j-i},\\
\boldsymbol{y}_{(i,j]}&:=(y_{i+1},y_{i+2},\ldots,y_{j-1},y_j)\in\mathbb{C}^{j-i},\\
\boldsymbol{y}_{[i,j]}&:=(y_i,y_{i+1},\ldots,y_{j-1},y_j)\in\mathbb{C}^{j-i+1},
\end{aligned}$$

以及 $\overleftarrow{\boldsymbol{y}_{[i,j]}}:=(y_j,\ y_{j-1},\ \ldots\ldots,\ y_{i+1},\ y_i)$。类似地，可以用相同的方式定义 $\overleftarrow{\boldsymbol{y}_{[i,j)}}$，$\overleftarrow{\boldsymbol{y}_{(i,j]}}$ 和 $\overleftarrow{\boldsymbol{y}_{(i,j)}}$。

命题 2.2。 设 m_1、$m_2 \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$、 $m_1 < m_2$和 $n \in \mathbb{Z}$，则有以下恒等式

(1)（平移）

$$\zeta_{(m_1,m_2)}(k_1, \ldots, k_r; s) = \zeta_{(m_1+n,m_2+n)}(k_1, \ldots, k_r; s-n).$$

(2)（分解）若 $m_1 < n < m_2$，则有

$$\begin{aligned}
&\zeta_{(m_1,m_2)}(k_1, \ldots, k_r; s) \\
&= \sum_{j=0}^{r} \zeta_{(m_1,n]}(k_1, \ldots, k_j; s)\zeta_{(n,m_2)}(k_{j+1}, \ldots, k_r; s) \\
&= \sum_{j=0}^{r} \zeta_{(m_1,n)}(k_1, \ldots, k_j; s)\zeta_{(n,m_2)}(k_{j+1}, \ldots, k_r; s) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{(s+n)^{k_j}} \zeta_{(m_1,n)}(k_1, \ldots, k_{j-1}; s)\zeta_{(n,m_2)}(k_{j+1}, \ldots, k_r; s).
\end{aligned}$$

(3)（反射）

$$\zeta_{(m_1,m_2)}(k_1, \ldots, k_r; s) = (-1)^{|\boldsymbol{k}|}\zeta_{(-m_2,-m_1)}(k_r, \ldots, k_1; -s).$$

(4)（反 *antipode* 恒等式）

$$\sum_{j=0}^{r} (-1)^j \zeta^{\star}_{(m_1,m_2)}(k_j, \ldots, k_1; s)\zeta_{(m_1,m_2)}(k_{j+1}, \ldots, k_r; s) = 0.$$

(5)（截断）若 $0 < m_1 < m_2$，则有

$$\zeta_{(m_1,m_2)}(k_1, \ldots, k_r; s) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \zeta^{\star}_{(0,m_1]}(k_j, \ldots, k_1; s) \cdot \zeta_{(0,m_2)}(k_{j+1}, k_{j+2}, \ldots, k_r; s).$$

(6)（展开）若 $m_1 < m_2 \leqslant 0$ 或 $0 \leqslant m_1 < m_2$，则有

$$\zeta_{(m_1,m_2)}(k_1, \ldots, k_r; s) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{|\boldsymbol{n}|=m} \prod_{l=1}^{r} \binom{-k_l}{n_l} \zeta_{(m_1,m_2)}(k_1 + n_1, \ldots, k_r + n_r) \right) s^m,$$

其中 $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_r) \in (\mathbb{Z}_{\geqslant 0})^r$ 以及 $|s| < 1$。

证明。 (1) 将定义 $\zeta_{(m_1,m_2)}(\boldsymbol{k}; s)$ 的有限重多重和分母中的 s 替换为 $(n + s - n)$，并进行直接计算，得到

$$\begin{aligned}
\zeta_{(m_1,m_2)}(\boldsymbol{k}; s) &= \sum_{m_1 < n_1 < \cdots < n_r < m_2} \frac{1}{(n_1 + s)^{k_1} \cdots (n_r + s)^{k_r}} \\
&= \sum_{m_1 < n_1 < \cdots < n_r < m_2} \frac{1}{(n_1 + n + s - n)^{k_1} \cdots (n_r + n + s - n)^{k_r}}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{m_1+n<n_1<\cdots<n_r<m_2+n} \frac{1}{(n_1+s-n)^{k_1}\cdots(n_r+s-n)^{k_r}}$$
$$= \zeta_{(m_1+n,m_2+n)}(\boldsymbol{k}; s-n).$$

(2) 将求和指标 $m_1 < n_1 < \cdots < n_r < m_2$ 截断于 n，得到

$$\begin{aligned}
&\zeta_{(m_1,m_2)}(k_1,\ldots,k_r;s)\\
&= \sum_{m_1<n_1<\cdots<n_r<m_2} \frac{1}{(n_1+s)^{k_1}\cdots(n_r+s)^{k_r}}\\
&= \sum_{j=0}^{r} \sum_{m_1<n_1<\cdots<n_j\leqslant n<n_{j+1}<\cdots<n_r<m_2} \frac{1}{(n_1+s)^{k_1}\cdots(n_r+s)^{k_r}}\\
&= \sum_{j=0}^{r} \zeta_{(m_1,n]}(k_1,\ldots,k_j;s)\zeta_{(n,m_2)}(k_{j+1},\ldots,k_r;s)\\
&= \sum_{j=0}^{r} \zeta_{(m_1,n)}(k_1,\ldots,k_j;s)\zeta_{(n,m_2)}(k_{j+1},\ldots,k_r;s)\\
&\quad + \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{(s+n)^{k_j}} \zeta_{(m_1,n)}(k_1,\ldots,k_{j-1};s)\zeta_{(n,m_2)}(k_{j+1},\ldots,k_r;s).
\end{aligned}$$

(3) 将求和指标 $m_1 < n_1 < \cdots < n_r < m_2$ 改为 $-m_1 > -n_1 > \cdots > -n_r > -m_2$，得到

$$\begin{aligned}
\zeta_{(m_1,m_2)}(k_1,\ldots,k_r;s) &= \sum_{m_1<n_1<\cdots<n_r<m_2} \frac{1}{(n_1+s)^{k_1}\cdots(n_r+s)^{k_r}}\\
&= (-1)^{|\boldsymbol{k}|} \sum_{m_1<n_1<\cdots<n_r<m_2} \frac{1}{(-n_1-s)^{k_1}\cdots(-n_r-s)^{k_r}}\\
&= (-1)^{|\boldsymbol{k}|} \sum_{-m_1>-n_1>\cdots>-n_r>-m_2} \frac{1}{(-n_1-s)^{k_1}\cdots(-n_r-s)^{k_r}}\\
&= (-1)^{|\boldsymbol{k}|} \sum_{-m_2<n_r'<\cdots<n_1'<-m_1} \frac{1}{(n_1'-s)^{k_1}\cdots(n_r'-s)^{k_r}}\\
&= (-1)^{|\boldsymbol{k}|} \zeta_{(-m_2,-m_1)}(k_r,\ldots,k_1;-s).
\end{aligned}$$

(4) 如果 $r=1$，那么

$$\zeta_{(m_1,m_2)}(k_1;s) - \zeta^{\star}_{(m_1,m_2)}(k_1;s) = \zeta_{(m_1,m_2)}(k_1;s) - \zeta_{(m_1,m_2)}(k_1;s) = 0.$$

我们假设情形 $r-1$；对于 r，有

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{r} (-1)^j \zeta^{\star}_{(m_1,m_2)}(k_j,\ldots,k_1;s)\zeta_{(m_1,m_2)}(k_{j+1},\ldots,k_r;s)\\
&= \sum_{j=0}^{r-2} (-1)^j \zeta^{\star}_{(m_1,m_2)}(k_j,\ldots,k_1;s)\zeta_{(m_1,m_2)}(k_{j+1},\ldots,k_r;s)\\
&\quad + (-1)^{r-1} \zeta^{\star}_{(m_1,m_2)}(k_{r-1},\ldots,k_1;s)\zeta_{(m_1,m_2)}(k_r;s)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + (-1)^r \zeta^\star_{(m_1,m_2)}(k_r,\dots,k_1;s)\\
&= \sum_{j=0}^{r-2}(-1)^j \zeta^\star_{(m_1,m_2)}(k_j,\dots,k_1;s)\zeta_{(m_1,m_2)}(k_{j+1},\dots,k_{r-1};s)\cdot\zeta_{(n_{r-1},m_2)}(k_r;s)\\
&\quad + (-1)^{r-1}\zeta^\star_{(m_1,m_2)}(k_{r-1},\dots,k_1;s)\zeta_{(m_1,m_2)}(k_r;s)\\
&\quad + (-1)^r \zeta^\star_{(m_1,m_2)}(k_r,\dots,k_1;s)\\
&= (-(-1)^{r-1}\zeta^\star_{(m_1,m_2)}(k_{r-1},\dots,k_1;s))\cdot\zeta_{(n_{r-1},m_2)}(k_r;s) \qquad \text{(by induction)}\\
&\quad + (-1)^{r-1}\zeta^\star_{(m_1,m_2)}(k_{r-1},\dots,k_1;s)\cdot\zeta_{(m_1,m_2)}(k_r;s)\\
&\quad + (-1)^r \zeta^\star_{(m_1,m_2)}(k_r,\dots,k_1;s)\\
&= (-1)^{r-1}\zeta^\star_{(m_1,m_2)}(k_{r-1},\dots,k_1;s)\cdot\zeta_{(m_1,n_{r-1}]}(k_r;s)\\
&\quad + (-1)^r \zeta^\star_{(m_1,m_2)}(k_r,\dots,k_1;s)\\
&= (-1)^{r-1}\zeta^\star_{(m_1,m_2)}(k_r,\dots,k_1;s)\\
&\quad + (-1)^r \zeta^\star_{(m_1,m_2)}(k_r,\dots,k_1;s)\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

(5) 若 $r=1$, 则

$$
\begin{aligned}
\zeta_{(m_1,m_2)}(k_1;s) &= \sum_{m_1<n_1<m_2}\frac{1}{(n_1+s)^{k_1}}\\
&= \sum_{0<n_1<m_2}\frac{1}{(n_1+s)^{k_1}} - \sum_{0<n_1\leqslant m_1}\frac{1}{(n_1+s)^{k_1}}\\
&= \zeta_{(0,m_2)}(k_1;s) - \zeta^\star_{(0,m_1]}(k_1;s).
\end{aligned}
$$

我们假设情形 $r-1$, 其中 r, 因为

$$
\begin{aligned}
&\zeta_{(0,m_2)}(k_1,\dots,k_r;s)\\
&= \sum_{0<n_1<\cdots<n_r<m_2}\frac{1}{(n_1+s)^{k_1}\cdots(n_r+s)^{k_r}}\\
&= \sum_{j=0}^{r}\sum_{0<n_1<\cdots<n_j\leqslant m_1<n_{j+1}<\cdots<n_r<m_2}\frac{1}{(n_1+s)^{k_1}\cdots(n_r+s)^{k_r}}\\
&= \sum_{j=0}^{r}\zeta_{(0,m_1]}(k_1,\dots,k_j;s)\zeta_{(m_1,m_2)}(k_{j+1},\dots,k_r;s)\\
&= \zeta_{(m_1,m_2)}(k_1,\dots,k_r;s)\\
&\quad + \sum_{j=1}^{r}\zeta_{(0,m_1]}(k_1,\dots,k_j;s)\zeta_{(m_1,m_2)}(k_{j+1},\dots,k_r;s)\\
&= \zeta_{(m_1,m_2)}(k_1,\dots,k_r;s) \qquad \text{(by induction)}\\
&\quad + \sum_{j=1}^{r}\zeta_{(0,m_1]}(k_1,\dots,k_j;s)\times\left(\sum_{i=j}^{r}(-1)^{i-j}\zeta^\star_{(0,m_1]}(k_i,\dots,k_{j+1};s)\zeta_{(0,m_2)}(k_{i+1},\dots,k_r;s)\right)\\
&= \zeta_{(m_1,m_2)}(k_1,\dots,k_r;s)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{i=1}^{r}(-1)^i\zeta_{(0,m_2)}(k_{i+1},\dots,k_r;s)\times\left(\sum_{j=1}^{i}(-1)^j\zeta^{\star}_{(0,m_1]}(k_i,\dots,k_{j+1};s)\zeta_{(0,m_1]}(k_1,\dots,k_j;s)\right)\\
&=\zeta_{(m_1,m_2)}(k_1,\dots,k_r;s)\qquad\text{(by Antipode identity)}\\
&\quad+\sum_{i=1}^{r}(-1)^i(-\zeta^{\star}_{(0,m_1]}(k_i,\dots,k_1;s))\zeta_{(0,m_2)}(k_{i+1},\dots,k_r;s)\\
&=\zeta_{(m_1,m_2)}(k_1,\dots,k_r;s)-\sum_{i=1}^{r}(-1)^i\zeta^{\star}_{(0,m_1]}(k_i,\dots,k_1;s)\zeta_{(0,m_2)}(k_{i+1},\dots,k_r;s),
\end{aligned}
$$

因此，我们有

$$
\zeta_{(m_1,m_2)}(k_1,\dots,k_r;s)=\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\zeta^{\star}_{(0,m_1]}(k_j,\dots,k_1;s)\cdot\zeta_{(0,m_2)}(k_{j+1},k_{j+2},\dots,k_r;s).
$$

(6) 我们有

$$
\begin{aligned}
&\zeta_{(m_1,m_2)}(k_1,\dots,k_r;s)\\
&=\sum_{m_1<n_1<\cdots<n_r<m_2}\frac{1}{(n_1+s)^{k_1}\cdots(n_r+s)^{k_r}}\\
&=\sum_{m_1<n_1<\cdots<n_r<m_2}\frac{1}{n_1^{k_1}\left(1+\dfrac{s}{n_1}\right)^{k_1}\cdots n_r^{k_r}\left(1+\dfrac{s}{n_r}\right)^{k_r}}\\
&=\sum_{m_1<n_1<\cdots<n_r<m_2}\sum_{j_1=0}^{\infty}\binom{-k_1}{j_1}\frac{s^{j_1}}{n_1^{k_1+j_1}}\cdots\sum_{j_r=0}^{\infty}\binom{-k_r}{j_r}\frac{s^{j_r}}{n_r^{k_r+j_r}}\\
&=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{|\boldsymbol{n}|=m}\prod_{l=1}^{r}\binom{-k_l}{n_l}\zeta_{(m_1,m_2)}(k_1+n_1,\dots,k_r+n_r)\right)s^m,
\end{aligned}
$$

其中 $\boldsymbol{n}:=(n_1,\dots,n_r)\in(\mathbb{Z}_{\geqslant 0})^r$ 且 $|\boldsymbol{n}|:=n_1+\cdots+n_r$，并且我们用到了以下众所周知的结果

$$
(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n\quad(|x|<1).
$$

由此，命题得证。 □

我们得到，$\zeta_{(m_1,m_2)}(\boldsymbol{k};s)$ 在整数点处有如下洛朗展开或泰勒展开。

定理 2.3. 设 $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_r)$ 为一个正多重指标。设 $m_1,m_2\in\mathbb{Z}\cup\{-\infty,+\infty\}$，$m_1<m_2$。若 $n\in\mathbb{Z}_{\geqslant -m_1}\cup\mathbb{Z}_{\leqslant -m_2}$，且 $|s-n|<1$，则有

$$
\zeta_{(m_1,m_2)}(\boldsymbol{k};s)=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{|\boldsymbol{n}|=m}\prod_{l=1}^{r}\binom{-k_l}{n_l}\zeta_{(n+m_1,n+m_2)}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{n})\right)(s-n)^m,
$$

其中 $\boldsymbol{n}:=(n_1,\dots,n_r)\in(\mathbb{Z}_{\geqslant 0})^r$ 且 $|\boldsymbol{n}|:=n_1+\cdots+n_r$。

证明。经直接计算，我们得到

$$\begin{aligned}\zeta_{(m_1,m_2)}(\boldsymbol{k};s) &= \zeta_{(n+m_1,n+m_2)}(\boldsymbol{k};s-n) \qquad \text{(by translation)}\\ \text{(by expansion)} &= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{|\boldsymbol{n}|=m}\prod_{l=1}^{r}\binom{-k_l}{n_l}\zeta_{(n+m_1,n+m_2)}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{n})\right)(s-n)^m.\end{aligned}$$

这就得到了所需的结果。 □

特别地，如果 $n=0$ 和 $|s|<1$，则

$$\zeta_{(m_1,m_2)}(\boldsymbol{k};s)=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{|\boldsymbol{n}|=m}\prod_{l=1}^{r}\binom{-k_l}{n_l}\zeta_{(m_1,m_2)}(\boldsymbol{k})\right)s^m. \tag{2.1}$$

定理 2.4。设 $\boldsymbol{k}=(k_1、\ldots、k_r)$ 为正多重指标。设 $m_1、m_2\in\mathbb{Z}\cup\{-\infty,+\infty\}、m_1<m_2$。若 $-m_2<n<-m_1$，且 $|s-n|<1$，则有

$$\zeta_{(m_1,m_2)}(\boldsymbol{k};s)=\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m(s-n)^m+\sum_{j=1}^{r}\sum_{m=0}^{\infty}b_{m,j}(s-n)^{m-k_j}\right), \tag{2.2}$$

其中

$$\begin{aligned}a_m &:= \sum_{|\boldsymbol{n}|=m}\prod_{l=1}^{r}\binom{-k_l}{n_l}\sum_{j=0}^{r}\zeta_{(n+m_1,0)}(\boldsymbol{k}_{[1,j]}+\boldsymbol{n}_{[1,j]})\zeta_{(0,n+m_2)}(\boldsymbol{k}_{(j,r]}+\boldsymbol{n}_{(j,r]}),\\ b_{m,j} &:= \sum_{|\boldsymbol{n}|-n_j=m}\prod_{l\neq j}\binom{-k_l}{n_l}\zeta_{(n+m_1,0)}(\boldsymbol{k}_{[1,j)}+\boldsymbol{n}_{[1,j)})\zeta_{(0,n+m_2)}(\boldsymbol{k}_{(j,r]}+\boldsymbol{n}_{(j,r]})\end{aligned}$$

且 $\boldsymbol{n}:=(n_1、\ldots、n_r)\in(\mathbb{Z}_{\geqslant 0})^r$。

证明。我们有

$$\begin{aligned}&\zeta_{(m_1,m_2)}(\boldsymbol{k};s)\\ &=\zeta_{(n+m_1,n+m_2)}(\boldsymbol{k};s-n)\\ &=\sum_{j=0}^{r}\zeta_{(n+m_1,0)}(\boldsymbol{k}_{[1,j]};s-n)\cdot\zeta_{(0,n+m_2)}(\boldsymbol{k}_{(j,r]};s-n)\\ &\quad+\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{(s-n)^{k_j}}\zeta_{(n+m_1,0)}(\boldsymbol{k}_{[1,j)};s-n)\cdot\zeta_{(0,n+m_2)}(\boldsymbol{k}_{(j,r]};s-n)\\ &=\sum_{j=0}^{r}\sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_r=0}^{\infty}\prod_{l=1}^{r}\binom{-k_l}{n_l}\zeta_{(n+m_1,0)}(\boldsymbol{k}_{[1,j]}+\boldsymbol{n}_{[1,j]})\cdot\zeta_{(0,n+m_2)}(\boldsymbol{k}_{(j,r]}+\boldsymbol{n}_{(j,r]})(s-n)^{|\boldsymbol{n}|}\\ &+\sum_{j=1}^{r}\sum_{l\neq j}\sum_{n_l=0}^{\infty}\prod_{i\neq j}\binom{-k_i}{n_i}\zeta_{(n+m_1,0)}(\boldsymbol{k}_{[1,j)}+\boldsymbol{n}_{[1,j)})\cdot\zeta_{(0,n+M)}(\boldsymbol{k}_{(j,r]}+\boldsymbol{n}_{(j,r]})(s-n)^{|\boldsymbol{n}|-n_j-k_j}\\ &=\sum_{m=0}^{\infty}a_m(s-n)^m+\sum_{j=1}^{r}\sum_{m=0}^{\infty}b_{m,j}(s-n)^{m-k_j},\end{aligned}$$

其中

$$a_m := \sum_{|\boldsymbol{n}|=m} \prod_{l=1}^{r} \binom{-k_l}{n_l} \sum_{j=0}^{r} \zeta_{(n+m_1,0)}(\boldsymbol{k}_{[1,j]} + \boldsymbol{n}_{[1,j]}) \zeta_{(0,n+m_2)}(\boldsymbol{k}_{(j,r]} + \boldsymbol{n}_{(j,r]}),$$

$$b_{m,j} := \sum_{|\boldsymbol{n}|-n_j=m} \prod_{l\neq j} \binom{-k_l}{n_l} \zeta_{(n+m_1,0)}(\boldsymbol{k}_{[1,j)} + \boldsymbol{n}_{[1,j)}) \zeta_{(0,n+m_2)}(\boldsymbol{k}_{(j,r]} + \boldsymbol{n}_{(j,r]})$$

且 $\boldsymbol{n} := (n_1, \ldots\ldots, n_r) \in (\mathbb{Z}_{\geqslant 0})^r$。 □

例 2.5。 特别地，如果 $r = 1, k_1 = k$ 且 $n \in \mathbb{Z}_{<0}$，那么 $(|s - n| < 1)$

$$\zeta(k; s) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-k}{m} \zeta_{(n,0)}(k + m)(s - n)^m + \frac{1}{(s - n)^k} + \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-k}{m} \zeta(k + m)(s - n)^m.$$

3 主要思想

Flajolet 和 Salvy [10] 定义了一个核函数 $\xi(s)$，它满足两个要求：(1). $\xi(s)$ 在整个复平面上是亚纯函数。(2). $\xi(s)$ 在由无限多个圆组成的集合 $|s| = \rho_k$ 上满足 $\xi(s) = o(s)$，其中 $\rho_k \to \infty$。基于核函数 $\xi(s)$ 的这两个条件，Flajolet 和 Salvy 推导出了以下留数引理。

引理 3.1。 (参见 [10]) 设 $\xi(s)$ 是一个核函数，且 $r(s)$ 是一个在无穷远处$O(s^{-2})$的有理函数。那么

$$\sum_{\alpha\in O} \mathrm{Res}(r(s)\xi(s), \alpha) + \sum_{\beta\in S} \mathrm{Res}(r(s)\xi(s), \beta) = 0, \tag{3.1}$$

其中， S 是 $r(s)$ 的极点集合， O 是 $\xi(s)$ 中不是 $r(s)$极点的极点集合。这里$\mathrm{Res}(r(s)\ \alpha)$ 表示 $r(s)$ 在 $s = \alpha.$ 处的留数

引理 3.2. (参见 [10]) 对于任意 $n \in \mathbb{Z}$,

$$\pi \cot(\pi s) = \frac{-2}{s - n} \sum_{k=0}^{\infty} \zeta(2k)(s - n)^{2k},\ \zeta(0) = -1/2, \tag{3.2}$$

$$\frac{\pi}{\sin(\pi s)} = \frac{2(-1)^n}{s - n} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\zeta}(2k)(s - n)^{2k},\ \bar{\zeta}(0) = \frac{1}{2}, \tag{3.3}$$

¯其中 $\zeta(s)$ 表示由下式定义的交错黎曼ζ函数

$$\bar{\zeta}(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = (1 - 2^{1-s})\zeta(s) \quad (\Re(s) > 0).$$

在 [10], Flajolet 和 Salvy 使用大圆形围道上的留数计算和特定函数，为欧拉和推导出更多相互独立的关系。这些函数的形式为$\xi(s)r(s)$，其中 $r(s) := 1/s^q$ 而 $\xi(s)$ 是余切函数（或余割函数）与多伽马函数的乘积。

我们可以尝试用多重赫尔维茨 ζ 函数替换他们论文中的核函数，并结合围道积分与留数定理，推导出多重ζ值之间的一些关系。例如，考虑以下围道积分：

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{C_R}\frac{\pi\cot(\pi s)\zeta_{(m_1,m_2)}(\boldsymbol{k};s)}{s^q}ds \tag{3.4}$$

and

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{C_R}\frac{\pi\csc(\pi s)\zeta_{(m_1,m_2)}(\boldsymbol{k};s)}{s^q}ds, \tag{3.5}$$

其中 C_R 表示半径为 R 的圆形围道。显然，上述两个围道积分均为零。

4 奇偶性猜想与正则化

本节首先结合引理 3.1 和 3.2、命题 2.2 以及定理 2.3 和 2.4，计算围道积分 (3.4) 的留数，从而建立若干涉及有限多重 ζ 值的公式。随后，我们对这些公式进行正则化并取极限，推导出多重 ζ 值正则化的奇偶公式。

我们始终假设 $m_1,m_2\in\mathbb{Z}\cup\{-\infty,+\infty\}$, $m_1<m_2$, $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_r)$ 是正多重指标，且 $q\in\mathbb{Z}_{>1}$。

定理 4.1。若 $m_2\leqslant 0$ 或 $m_1\geqslant 0$，则有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\leqslant -m_2,n\neq 0}\frac{\zeta_{(n+m_1,n+m_2)}(\boldsymbol{k})}{n^q}+\sum_{n\geqslant -m_1,n\neq 0}\frac{\zeta_{(n+m_1,n+m_2)}(\boldsymbol{k})}{n^q}\\
&-2\sum_{2k+m=q}\left(\sum_{|\boldsymbol{n}|=m}\prod_{l=1}^{r}\binom{-k_l}{n_l}\zeta_{(m_1,m_2)}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{n})\right)\zeta(2k)\\
&+\sum_{-m_2<n<-m_1}\sum_{j=0}^{r}\frac{\zeta_{(n+m_1,0)}(\boldsymbol{k}_{[1,j]})\zeta_{(0,n+m_2)}(\boldsymbol{k}_{(j,r]})}{n^q}\\
&-2\sum_{-m_2<n<-m_1}\sum_{j=1}^{r}\sum_{2k+m=k_j}\left(\begin{array}{c}\displaystyle\sum_{|\boldsymbol{n}|=m}\binom{-q}{n_j}\prod_{l\neq j}\binom{-k_l}{n_l}\frac{\zeta_{(n+m_1,0)}(\boldsymbol{k}_{[1,j)}+\boldsymbol{n}_{[1,j)})}{n^{q+n_j}}\\ \times\zeta_{(0,n+m_2)}(\boldsymbol{k}_{(j,r]}+\boldsymbol{n}_{(j,r]})\end{array}\right)\zeta(2k)\\
&=0,
\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{n}=(n_1,\dots,n_r)\in(\mathbb{Z}_{\geqslant 0})^r$。

证明。我们考虑以下围道积分

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{C_R}F_q(\boldsymbol{k};s)\mathrm{d}s:=\lim_{R\to\infty}\oint_{C_R}\frac{\pi\cot(\pi s)\zeta_{(m_1,m_2)}(\boldsymbol{k};s)}{s^q}\mathrm{d}s=0.$$

显然，函数 $F_q(\boldsymbol{k};s)$ 的奇点仅为整数处的极点。不难看出，

$$\frac{1}{s^q}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-q}{k}\frac{(s-n)^k}{n^{q+k}}\quad(n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}).$$

结合式 (3.2) 应用定理 2.3 和 2.4，通过逐一讨论各个情形，我们可以求得以下情形的留数值。

情形 1。如果 $n \leqslant -m_2$ 或 $n \geqslant -m_1$，则

(1) 如果 $n \neq 0$，则有

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[F_q, s=n] &= \lim_{s\to n}(s-n)\frac{\pi\cot(\pi s)\zeta_{(m_1,m_2)}(\boldsymbol{k};s)}{s^q}\\ &= \zeta_{(n+m_1,n+m_2)}(\boldsymbol{k})\cdot\frac{1}{n^q}.\end{aligned} \tag{4.1}$$

(2) 如果 $n=0$，则有

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[F_q, s=0] &= \frac{1}{q!}\lim_{s\to 0}\frac{\mathrm{d}^q}{\mathrm{d}s^q}\left\{s^{q+1}\frac{\pi\cot(\pi s)\zeta_{(m_1,m_2)}(\boldsymbol{k};s)}{s^q}\right\}\\ &= -2\sum_{2k+m=q}\left(\sum_{|\boldsymbol{n}|=m}\prod_{l=1}^{r}\binom{-k_l}{n_l}\zeta_{(m_1,m_2)}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{n})\right)\zeta(2k).\end{aligned} \tag{4.2}$$

情形 2。如果 $-m_2 < n < -m_1$，则有

$$\begin{aligned}&\operatorname{Res}[F_q, s=n]\\ &=\sum_{j=0}^{r}\frac{\zeta_{(n+m_1,0)}(\boldsymbol{k}_{[1,j]})\zeta_{(0,n+m_2)}(\boldsymbol{k}_{(j,r]})}{n^q}\\ &\quad-2\sum_{j=1}^{r}\sum_{2k+m=k_j}\left(\begin{array}{c}\displaystyle\sum_{|\boldsymbol{n}|=m}\binom{-q}{n_j}\prod_{l\neq j}\binom{-k_l}{n_l}\frac{\zeta_{(n+m_1,0)}(\boldsymbol{k}_{[1,j)}+\boldsymbol{n}_{[1,j)})}{n^{q+n_j}}\\ \times\zeta_{(0.n+m_2)}(\boldsymbol{k}_{(j,r]}+\boldsymbol{n}_{(j,r]})\end{array}\right)\zeta(2k).\end{aligned}$$

根据引理 3.1，我们知道

$$\begin{aligned}&\sum_{n\leqslant -m_2, n\neq 0}\operatorname{Res}[F_q, s=n]+\sum_{-m_2<n<-m_1}\operatorname{Res}[F_q, s=n]\\ &+\operatorname{Res}[F_q, s=0]+\sum_{n\geqslant -m_1, n\neq 0}\operatorname{Res}[F_q, s=n]=0.\end{aligned}$$

Fin最后，将这三项贡献合并起来即可得到定理 4.1 的结论。 □

定理 4.2. 若 $m_1 < 0 < m_2$，则有

$$\begin{aligned}&\sum_{n\leqslant -m_2}\frac{\zeta_{(n+m_1,n+m_2)}(\boldsymbol{k})}{n^q}+\sum_{n\geqslant -m_1}\frac{\zeta_{(n+m_1,n+m_2)}(\boldsymbol{k})}{n^q}\\ &-2\sum_{2k+m=q}\left(\sum_{|\boldsymbol{n}|=m}\prod_{l=1}^{r}\binom{-k_l}{n_l}\sum_{j=0}^{r}\zeta_{(m_1,0)}(\boldsymbol{k}_{[1,j]}+\boldsymbol{n}_{[1,j]})\zeta_{(0,m_2)}(\boldsymbol{k}_{(j,r]}+\boldsymbol{n}_{(j,r]})\right)\zeta(2k)\\ &-2\sum_{j=1}^{r}\sum_{2k+m=q+k_j}\left(\sum_{|\boldsymbol{n}|-n_j=m}\prod_{l\neq j}\binom{-k_l}{n_l}\zeta_{(n+m_1,0)}(\boldsymbol{k}_{[1,j)}+\boldsymbol{n}_{[1,j)})\zeta_{(0,n+m_2)}(\boldsymbol{k}_{(j,r]}+\boldsymbol{n}_{(j,r]})\right)\zeta(2k)\end{aligned}$$

$$+\sum_{j=0}^{r}\sum_{-m_2<n<-m_1,n\neq 0}\frac{\zeta_{(n+m_1,0)}(\boldsymbol{k}_{[1,j]})\zeta_{(0,n+m_2)}(\boldsymbol{k}_{(j,r]})}{n^q}$$

$$-2\sum_{-m_2<n<-m_1,n\neq 0}\sum_{j=1}^{r}\sum_{2k+m=k_j}\left(\begin{array}{c}\displaystyle\sum_{|\boldsymbol{n}|=m}\binom{-q}{n_j}\prod_{l\neq j}\binom{-k_l}{n_l}\frac{\zeta_{(n+m_1,0)}(\boldsymbol{k}_{[1,j)}+\boldsymbol{n}_{[1,j)})}{n^{q+n_j}}\\ \times\zeta_{(0,n+m_2)}(\boldsymbol{k}_{(j,r]}+\boldsymbol{n}_{(j,r]})\end{array}\right)\zeta(2k)$$

$$=0,$$

其中 $\boldsymbol{n}=(n_1,\ldots,n_r)\in(\mathbb{Z}_{\geqslant 0})^r$。

证明。我们考虑以下围道积分

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{C_R}F_q(\boldsymbol{k};s)\mathrm{d}s:=\lim_{R\to\infty}\oint_{C_R}\frac{\pi\cot(\pi s)\zeta_{(m_1,m_2)}(\boldsymbol{k};s)}{s^q}\mathrm{d}s=0.$$

显然，函数 $F_q(\boldsymbol{k};s)$ 的奇点仅为整数处的极点。

情形 1。如果 $n\leqslant -m_2$ 或 $n\geqslant -m_1$，那么我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[F_q,s=n]&=\lim_{s\to n}(s-n)\frac{\pi\cot(\pi s)\zeta_{(m_1,m_2)}(\boldsymbol{k};s)}{s^q}\\&=\zeta_{(n+m_1,n+m_2)}(\boldsymbol{k})\cdot\frac{1}{n^q}.\end{aligned}\tag{4.3}$$

情形 2。如果 $-m_2<n<-m_1$，那么

(1) 如果 $n\neq 0$，我们有

$$\begin{aligned}&\mathrm{Res}[F_q,s=n]\\&=\sum_{j=0}^{r}\frac{\zeta_{(n+m_1,0)}(\boldsymbol{k}_{[1,j]})\zeta_{(0,n+m_2)}(\boldsymbol{k}_{(j,r]})}{n^q}\\&\quad-2\sum_{j=1}^{r}\sum_{2k+m=k_j}\left(\begin{array}{c}\displaystyle\sum_{|\boldsymbol{n}|=m}\binom{-q}{n_j}\prod_{l\neq j}\binom{-k_l}{n_l}\frac{\zeta_{(n+m_1,0)}(\boldsymbol{k}_{[1,j)}+\boldsymbol{n}_{[1,j)})}{n^{q+n_j}}\\ \times\zeta_{(0,n+m_2)}(\boldsymbol{k}_{(j,r]}+\boldsymbol{n}_{(j,r]})\end{array}\right)\zeta(2k).\end{aligned}$$

(2) 如果 $n=0$，我们有

$$\begin{aligned}&\mathrm{Res}[F_q,s=0]\\&=-2\sum_{2k+m=q}\left(\sum_{|\boldsymbol{n}|=m}\prod_{l=1}^{r}\binom{-k_l}{n_l}\sum_{j=0}^{r}\zeta_{(m_1,0)}(\boldsymbol{k}_{[1,j]}+\boldsymbol{n}_{[1,j]})\zeta_{(0,m_2)}(\boldsymbol{k}_{(j,r]}+\boldsymbol{n}_{(j,r]})\right)\zeta(2k)\\&\quad-2\sum_{j=1}^{r}\sum_{2k+m=q+k_j}\left(\sum_{|\boldsymbol{n}|-n_j=m}\prod_{l\neq j}\binom{-k_l}{n_l}\zeta_{(n+m_1,0)}(\boldsymbol{k}_{[1,j)}+\boldsymbol{n}_{[1,j)})\zeta_{(0,n+m_2)}(\boldsymbol{k}_{(j,r]}+\boldsymbol{n}_{(j,r]})\right)\zeta(2k).\end{aligned}$$

根据引理 3.1，我们知道

$$\sum_{n\leqslant -m_2}\mathrm{Res}[F_q,s=n]+\sum_{-m_2<n<-m_1,n\neq 0}\mathrm{Res}[F_q,s=n]$$

$$+\operatorname{Res}[F_q, s=0]+\sum_{n\geqslant -m_1}\operatorname{Res}[F_q, s=n]=0.$$

最后，结合这两种情况即可得到定理 4.2 的结论。 □

推论 4.3. 设 $M \gg 1$为固定整数，对于 $q\in\mathbb{Z}_{>1}$和 $\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_r)$为正多重指标，我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta^{\star}_{(0,n]}(k_j,\ldots,k_1)\zeta_{(0,n+M)}(k_{j+1},\cdots,k_r)}{n^q}\\
&-2\sum_{2k+m=q}\left(\sum_{|\boldsymbol{n}|=m}\prod_{l=1}^{r}\binom{-k_l}{n_l}\zeta_{(0,M)}(k_1+n_1,\ldots,k_r+n_r)\right)\zeta(2k)\\
&+\sum_{-M<n<0}\sum_{j=0}^{r}\frac{\zeta_{(n,0)}(k_1,\ldots,k_j)}{n^q}\zeta_{(0,n+M)}(k_{j+1},k_{j+2},\ldots,k_r)\\
&\quad-2\sum_{-M<n<0}\sum_{j=1}^{r}\sum_{2k+m=k_j}\left(\begin{array}{c}\displaystyle\sum_{|\boldsymbol{n}|=m}\binom{-q}{n_j}\prod_{l\neq j}\binom{-k_l}{n_l}\frac{\zeta_{(n,0)}(k_1+n_1,\ldots,k_{j-1}+n_{j-1})}{n^{q+n_j}}\\ \times\zeta_{(0,n+M)}(k_{j+1}+n_{j+1},\ldots,k_r+n_r)\end{array}\right)\zeta(2k)\\
&+\sum_{n\leqslant -M}\frac{\zeta_{(n,n+M)}(k_1,\ldots,k_r)}{n^q}=0,
\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{n}=(n_1,\ldots,n_r)\in(\mathbb{Z}_{\geqslant 0})^r$。

证明。设 $m_{\ 1}=0, m_2=M$，利用定理 4.1 和命题 2 中的截断公式 .2

$$\zeta_{(m_1,m_2)}(k_1,\ldots,k_r;s)=\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\zeta^{\star}_{(0,m_1]}(k_j,\ldots,k_1;s)\zeta_{(0,m_2)}(k_{j+1},k_{j+2},\ldots,k_r;s),$$

我们即可得到所需结论。 □

为了给出积和正则化，我们首先需要建立一些预备引理。

引理 4.4。 设 $\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_r)\in(\mathbb{Z}_{>0})^r$是一个正多重指标，则对所有 $n\in\mathbb{Z}_{>0}$，我们有

$$\zeta^{\star}_{(0,n]}(\boldsymbol{k})<2^{r-1}(1+\ln(n))^r.$$

证明。 通过直接计算，我们得到

$$\begin{aligned}
\zeta^{\star}_{(0,n]}(\boldsymbol{k})&\leqslant\zeta^{\star}_{(0,n]}(\{1\}_r)\\
&=\sum_{0<n_1\leqslant\cdots\leqslant n_r\leqslant n}\frac{1}{n_1\cdots n_r}\\
&=\sum_{0<n_1<\cdots<n_r\leqslant n}\frac{1}{n_1\cdots n_r}\\
&\quad+\sum_{0<n_1\leqslant<n_2<\cdots<n_r\leqslant n}\frac{1}{n_1\cdots n_r}+\cdots+\sum_{0<n_1<\cdots<n_{r-1}\leqslant n_r\leqslant n}\frac{1}{n_1\cdots n_r}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{0<n_1=\cdots=n_r\leqslant n}\frac{1}{n_1\cdots n_r}\\
&<\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r-1}{r-1-j}\zeta_{(0,n]}(\{1\}_{j+1})\\
&<\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r-1}{r-1-j}\frac{(\zeta_{(0,n]}(1))^{j+1}}{(j+1)!}\quad(\text{since } y_1^{*j+1}=(j+1)!\cdot y_1^j+\cdots)\\
&<\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r-1}{r-1-j}(\zeta_{(0,n]}(1))^r\\
&<2^{r-1}(1+\ln(n))^r.
\end{aligned}
$$

引理的证明至此完成。 □

引理 4.5. 设 $\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ 是一个可容许多重指标。设 $M>>1$ 为一个固定整数，且 $n\in\mathbb{Z}$，若 $M+n>0$，则有

$$
\left|\zeta_{(0,n+M)}(k_1,\ldots,k_r)-\zeta(k_1,\ldots,k_r)\right|<2r\frac{(1+\ln(n+M))^{r-1}}{n+M}.
$$

证明. 通过初等计算可得

$$
\begin{aligned}
&\left|\zeta(k_1,\ldots,k_r)-\zeta_{(0,n+M)}(k_1,\ldots,k_r)\right|\\
&=\left|\zeta_{(0,+\infty)}(k_1,\ldots,k_r)-\zeta_{(0,n+M)}(k_1,\ldots,k_r)\right|\\
&=\left|\sum_{j=0}^{r}\zeta_{(0,n+M)}(k_1,\ldots,k_j)\zeta_{[n+M,+\infty)}(k_{j+1},\ldots,k_r)-\zeta_{(n,n+M)}(k_1,\ldots,k_r)\right|\\
&=\sum_{j=0}^{r-1}\zeta_{(0,n+M)}(k_1,\ldots,k_j)\zeta_{[n+M,+\infty)}(k_{j+1},\ldots,k_r)\\
&\leqslant\sum_{j=0}^{r-1}\zeta_{(0,n+M)}(\{1\}_j)\zeta_{[n+M,+\infty)}(\{1\}_{r-j-1},2)\\
&<\sum_{j=0}^{r-1}(\zeta_{(0,n+M)}(1))^j\zeta_{[n+M,+\infty)}(\{1\}_{r-j-1},2)\\
&<\sum_{j=0}^{r-1}(1+\ln(n+M))^j\cdot\frac{2}{n+M}\\
&<2r\frac{(1+\ln(n+M))^{r-1}}{n+M}.
\end{aligned}
$$

因此，所需结果得证。 □

引理 4.6。令 $\boldsymbol{k}=(k_j、\ldots、k_1)$ 为一个正多重指标，$s\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 且 $q\in\mathbb{Z}_{>1}$。令 $M>>1$为一个固定整数，则有

$$
\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta^{\star}_{(0,n]}(k_j,\ldots,k_1)(\zeta_{(0,n+M)}(1))^s}{n^q}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta^{\star}_{(0,n]}(k_j,\ldots,k_1)(\zeta_{(0,M)}(1))^s}{n^q}\right|
$$

$$< c \cdot \frac{\ln^{j+s}(M)}{M},$$

其中常数 c 与 M无关。

证明。 首先，我们有

$$\begin{aligned}
|(\zeta_{(0,n+M)}(1))^s - (\zeta_{(0,M)}(1))^s| &= (\zeta_{(0,M)}(1) + \zeta_{[M,n+M)}(1))^s - (\zeta_{(0,M)}(1))^s \\
&= \sum_{l=1}^{s} \binom{s}{l} (\zeta_{(0,M)}(1))^{s-l} (\zeta_{[M,n+M)}(1))^l \\
&< \sum_{l=1}^{s} \binom{s}{l} (1+\ln(M))^{s-l} \ln^l \left(1 + \frac{n}{M-1}\right) \\
&< \sum_{l=1}^{s} \binom{s}{l} 2^{s-l} \ln^{s-l}(M) \ln^l \left(1 + \frac{n}{M-1}\right)
\end{aligned}$$

根据引理 4.4，我们知道 $\zeta^{\star}_{(0,n]}(k_j, \ldots, k_1) < 2^{j-1}(1+\ln(n))^j$。因此，待估计的和可以表示为以下各项的线性组合

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^j(n) \ln^l \left(1 + \frac{n}{M-1}\right)}{n^q},$$

注意到 $q > 1$，我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^j(n) \ln^l \left(1 + \frac{n}{M-1}\right)}{n^q} \\
&< \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^j(n) \ln^l \left(1 + \frac{n}{M-1}\right)}{n^2} \\
&= \sum_{n=1}^{M} \frac{\ln^j(n) \ln^l \left(1 + \frac{n}{M-1}\right)}{n^2} + \sum_{n=M+1}^{+\infty} \frac{\ln^j(n) \ln^l \left(1 + \frac{n}{M-1}\right)}{n^2} \\
&< \frac{1}{(M-1)^l} \sum_{n=1}^{M} n^{l-2} \ln^j(n) + \sum_{n=M+1}^{+\infty} \frac{\ln^j(n) \ln^l(1+n)}{n^2} \\
&< c_1 \frac{\ln^j(M)}{M} + 2^l \sum_{n=M+1}^{+\infty} \frac{\ln^{j+l}(n)}{n^2} \\
&< c_1 \frac{\ln^j(M)}{M} + 2^l \int_{M}^{+\infty} \frac{\ln^{j+l}(x)}{x^2} dx \\
&< c_1 \frac{\ln^j(M)}{M} + 2^l c_2 \frac{\ln^{j+l}(M)}{M} \\
&< c \frac{\ln^{j+l}(M)}{M}.
\end{aligned}$$

至此，引理的证明完成。 □

定理 4.7。 设 $\boldsymbol{k}$ 为正多重指标，且 $q \in \mathbb{Z}_{>1}$。设 M 为充分大的正实数，则有

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta^{\star}_{(0,n]}(k_j,\ldots,k_1)\zeta_{(0,n+M)}(k_{j+1},\ldots,k_r)}{n^q}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta^{\star}_{(0,n]}(k_j,\ldots,k_1)\zeta_*^{T=\zeta_{(0,M)}(1)}(k_{j+1},\ldots,k_r)}{n^q}\right|\\&<c\frac{\ln^r(M)}{M},\end{aligned}$$

其中常数 c 与 M无关。

证明。 众所周知，$(\mathbb{Q}\langle Y\rangle,*)\cong(\mathbb{Q}\langle Y\rangle^0,*)[y_1]$（更详细的描述请参见 [5]第 1 章第 7 节）。因此，我们有

$$y_{k_{j+1}}y_{k_{j+2}}\cdots y_{k_r}=w_0*y_1^{*s}+w_1*y_1^{*(s-1)}+\cdots+w_{s-1}*y_1+w_s,$$

其中 $w_s,w_{s-1},\cdots,w_1,w_0$均为可容许词。我们得到

$$\begin{aligned}\zeta_{(0,n+M)}(k_{j+1},k_{j+2},\ldots,k_r)=&\zeta_{(0,n+M)}(w_0)\cdot(\zeta_{(0,n+M)}(1))^s+\zeta_{(0,n+M)}(w_1)\cdot(\zeta_{(0,n+M)}(1))^{s-1}\\&+\cdots+\zeta_{(0,n+M)}(w_s)\end{aligned}$$

因此，我们只需考虑 $\zeta_{(0,n+M)}(w_i)\cdot(\zeta_{(0,n+M)}(1))^{s-i},\ i=0,\cdots,s$。由引理 4.5 和引理 4.6 可得

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta^{\star}_{(0,n]}(k_j,\ldots,k_1)\zeta_{(0,n+M)}(w_i)(\zeta_{(0,n+M)}(1))^{s-i})}{n^q}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta^{\star}_{(0,n]}(k_j,\ldots,k_1)\zeta(w_i)(\zeta_{(0,M)}(1))^{s-i}}{n^q}\right|\\&\leqslant\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta^{\star}_{(0,n]}(k_j,\ldots,k_1)\zeta_{(0,n+M)}(w_i)(\zeta_{(0,n+M)}(1))^{s-i})}{n^q}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta^{\star}_{(0,n]}(k_j,\ldots,k_1)\zeta_{(0,n+M)}(w_i)(\zeta_{(0,M)}(1))^{s-i}}{n^q}\right|\\&\quad+\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta^{\star}_{(0,n]}(k_j,\ldots,k_1)\zeta_{(0,n+M)}(w_i)(\zeta_{(0,M)}(1))^{s-i})}{n^q}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta^{\star}_{(0,n]}(k_j,\ldots,k_1)\zeta(w_i)(\zeta_{(0,M)}(1))^{s-i}}{n^q}\right|\\&<\zeta(w_i)\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta^{\star}_{(0,n]}(k_j,\ldots,k_1)(\zeta_{(0,n+M)}(1))^{s-i})}{n^q}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta^{\star}_{(0,n]}(k_j,\ldots,k_1)(\zeta_{(0,M)}(1))^{s-i}}{n^q}\right|\\&\quad+(\zeta_{(0,M)}(1))^{s-i}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta^{\star}_{(0,n]}(k_j,\ldots,k_1)|\zeta_{(0,n+M)}(w_i)-\zeta(w_i)|}{n^q}\\&<c_1\cdot\zeta(w_i)\frac{\ln^{j+s-i}(M)}{M}+c_i\frac{\ln^{r-j-1}(M)}{M}\\&<c\frac{\ln^r(M)}{M},\end{aligned}$$

因此，我们得到所需结论。 □

引理 4.8。 设 $\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_r)(k_r>1)$ 为一个可容许多重指标，且 $q\in\mathbb{Z}_{>1}$。设$M>>1$ 为固定整数，则有

$$\left|\sum_{-M<n<0}\frac{\zeta_{(n,0)}(k_1,\ldots,k_j)}{n^q}\zeta_{(0,n+M)}(k_{j+1},\ldots,k_r)-\sum_{n<0}\frac{\zeta_{(n,0)}(k_1,\ldots,k_j)}{n^q}\zeta(k_{j+1},\ldots,k_r)\right|<c\frac{\ln^{r-1}(M)}{M},$$

其中 $j=0$、1、$\cdots r$，常数 c 与 M 无关。

证明。若 $j=r$，显然成立。对于 $j=0,1,\cdots,r-1$，由于

$$\begin{aligned}&\sum_{-M<n<0}\frac{\zeta_{(n,0)}(k_1,\ldots,k_j)}{n^q}\zeta_{(0,n+M)}(k_{j+1},\ldots,k_r)\\&=(-1)^{q+k_1+\cdots+k_j}\sum_{0<n<M}\frac{\zeta_{(0,n)}(k_j,\ldots,k_1)\cdot\zeta_{(0,M-n)}(k_{j+1},\ldots,k_r)}{n^q},\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{0<n<M}\frac{\zeta_{(0,n)}(k_j,\ldots,k_1)\cdot\zeta_{(0,M-n)}(k_{j+1},\ldots,k_r)}{n^q}-\sum_{0<n<M}\frac{\zeta_{(0,n)}(k_j,\ldots,k_1)\cdot\zeta(k_{j+1},\ldots,k_r)}{n^q}\right|\\&<2r\sum_{0<n<M}\frac{\zeta_{(0,n)}(k_j,\ldots,k_1)}{n^q}\cdot\frac{(1+\ln(M-n))^{r-j-1}}{M-n}\qquad\text{(by Lemma 4.5)}\\&<r2^r\sum_{0<n<M}\frac{(1+\ln(n)))^j}{n^2}\cdot\frac{(1+\ln(M-n))^{r-j-1}}{M-n}\qquad\text{(by Lemma 4.4)}\\&=r2^r\left(\frac{(1+\ln(M-1))^{r-j-1}}{M-1}+\frac{(1+\ln(2))^j}{2^2}\cdot\frac{(1+\ln(M-2))^{r-j-1}}{M-2}\right)\\&\quad+r2^r\sum_{2<n<M-2}\frac{(1+\ln(n)))^j}{n^2}\cdot\frac{(1+\ln(M-n))^{r-j-1}}{M-n}\\&\quad+r2^r\left(\frac{(1+\ln(M-2))^j}{(M-2)^2}\cdot\frac{(1+\ln(2))^{r-j-1}}{2}+\frac{(1+\ln(M-1))^j}{(M-1)^2}\right)\\&<c_1\frac{\ln^{r-1}(M)}{M}+r4^r\sum_{2<n<M-2}\frac{\ln^j(n)\ln^{r-j-1}(M-n)}{n^2(M-n)}\\&=c_1\frac{\ln^{r-1}(M)}{M}+r4^r\sum_{2<n\leqslant\lfloor M/2\rfloor}\frac{\ln^j(n)\ln^{r-j-1}(M-n)}{n^2(M-n)}+r4^r\sum_{\lfloor M/2\rfloor<n<M-2}\frac{\ln^j(n)\ln^{r-j-1}(M-n)}{n^2(M-n)}\\&<c_1\frac{\ln^{r-1}(M)}{M}+c_2\frac{\ln^{r-j-1}(M)}{M}\sum_{2<n\leqslant\lfloor M/2\rfloor}\frac{\ln^j(n)}{n^2}+c_3\sum_{\lfloor M/2\rfloor<n<M-2}\frac{\ln^j(n)}{n^2}\\&<c_1\frac{\ln^{r-1}(M)}{M}+c_2\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln^j(n)}{n^2}\right)\frac{\ln^{r-j-1}(M)}{M}+c_3\int_{M/2}^{M}\frac{\ln^j(x)}{x^2}\mathrm{d}x\\&<c'\frac{\ln^{r-1}(M)}{M},\end{aligned}$$

最后，很容易看出

$$\left|\sum_{n\leqslant -M}\frac{\zeta_{(n,0)}(k_1,\ldots,k_j)}{n^q}\zeta(k_{j+1},\ldots,k_r)\right|<c''\frac{\ln^{r-1}(M)}{M}.$$

证明完毕。 □

引理 4.9. 设 $\boldsymbol{k}=(k_1,\ .....,\ k_r)$ 是一个正多重指标，且 $q\in\mathbb{Z}_{>1}$。设 $M>>1$ 为一个固定整数，则有

$$\left|\sum_{-M<n<0}\frac{\zeta_{(n,0)}(\boldsymbol{k})}{n^q}(\zeta_{(0,n+M)}(1))^s-\sum_{n<0}\frac{\zeta_{(n,0)}(\boldsymbol{k})}{n^q}(\zeta_{(0,M)}(1))^s\right|<c\frac{\ln^{r+s}(M)}{\sqrt{M}}.$$

其中常数 c 与 M无关。

证明。由于

$$(\zeta_{(0,M+n)}(1))^s-(\zeta_{(0,M)}(1))^s=\sum_{i=1}^{s}(-1)^i\binom{s}{i}(\zeta_{(0,M)}(1))^{s-i}(\zeta_{[M+n,M)}(1))^i,$$

and

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{-M<n<0}\frac{\zeta_{(n,0)}(\boldsymbol{k})}{n^q}(\zeta_{[M+n,M)}(1))^i\right|\\
&\leqslant\sum_{0<n<M}\frac{\zeta_{(0,n)}(\{1\}_r)}{n^2}(\zeta_{[M-n,M)}(1))^i\\
&<\sum_{0<n<M}\frac{(\zeta_{(0,n)}(1))^r}{n^2}(\zeta_{[M-n,M)}(1))^i\\
&<c_1\frac{\ln^{r+i}(M)}{M}+c_2\sum_{2<n<M-2}\frac{\ln^r(n)}{n^2}\ln^i\left(\frac{M-1}{M-1-n}\right)\\
&<c_1\frac{\ln^{r+i}(M)}{M}+c_2\sum_{2<n\leqslant\sqrt{M}}\frac{\ln^r(n)}{n^2}\ln^i\left(\frac{M-1}{M-1-n}\right)+c_2\sum_{\sqrt{M}<n<M-2}\frac{\ln^r(n)}{n^2}\ln^i\left(\frac{M-1}{M-1-n}\right)\\
&<c_1\frac{\ln^{r+i}(M)}{M}+c_2\ln^i\left(\frac{M-1}{M-1-\sqrt{M}}\right)\sum_{2<n\leqslant\sqrt{M}}\frac{\ln^r(n)}{n^2}+c_2\ln^i(M-1)\sum_{\sqrt{M}<n<M-2}\frac{\ln^r(n)}{n^2}\\
&<c_1\frac{\ln^{r+i}(M)}{M}+c_2'\ln^i\left(\frac{M-1}{M-1-\sqrt{M}}\right)+c_2\ln^i(M-1)\int_{\sqrt{M}}^{+\infty}\frac{\ln^r(x)}{x^2}dx\\
&<c_1\frac{\ln^{r+i}(M)}{M}+c_2'\ln^i\left(\frac{M-1}{M-1-\sqrt{M}}\right)+c_2''\frac{\ln^{i+r}(M)}{\sqrt{M}}\\
&<c_3\frac{\ln^{r+s}(M)}{\sqrt{M}}.
\end{aligned}$$

最后，很容易看出

$$\left|\sum_{n\leqslant-M}\frac{\zeta_{(n,0)}(\boldsymbol{k})}{n^q}(\zeta_{(0,M)}(1))^s\right|<c_3'\frac{\ln^{r+s}(M)}{M}.$$

证明完毕。 □

定理 4.10。令 $\boldsymbol{k}$ 为正多重指标，$q\in\mathbb{Z}_{>1}$。令 M 为充分大的正实数，则有

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{-M<n<0}\frac{\zeta_{(n,0)}(k_1,\ldots,k_j)\zeta_{(0,n+M)}(\boldsymbol{k})}{n^q}-\sum_{n<0}\frac{\zeta_{(n,0)}(k_1,\ldots,k_j)\zeta_*^{T=\zeta_{(0,M)}(1)}(\boldsymbol{k})}{n^q}\right|\\
&<c\frac{\ln^{r+s}(M)}{\sqrt{M}},
\end{aligned}$$

其中常数 c 与 M无关。

证明。 设 $\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_l)$ 为正多重指标，类似于定理 4.7 中的论证，我们也有

$$y_{k_1}y_{k_2}\cdots y_{k_r}=w_0*y_1^{*s}+w_1*y_1^{*(s-1)}+\cdots+w_{s-1}*y_1+w_s,$$

其中 w_s、w_{s-1}、$\cdots$、w_1、w_0 均为可容许词。由引理 4.8 和 4.9 可得

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{0<n<M}\frac{\zeta_{(0,n)}(k_j,\ldots,k_1)\zeta_{(0,M-n)}(w_i)(\zeta_{(0,M-n)}(1))^{s-i})}{n^q}-\sum_{0<n<M}\frac{\zeta_{(0,n)}(k_j,\ldots,k_1)\zeta(w_i)(\zeta_{(0,M)}(1))^{s-i}}{n^q}\right|\\
\leqslant&\left|\sum_{0<n<M}\frac{\zeta_{(0,n)}(k_j,\ldots,k_1)\zeta_{(0,M-n)}(w_i)(\zeta_{(0,M-n)}(1))^{s-i}}{n^q}-\sum_{0<n<M}\frac{\zeta_{(0,n)}(k_j,\ldots,k_1)\zeta(w_i)(\zeta_{(0,M-n)}(1))^{s-i}}{n^q}\right|\\
&+\left|\sum_{0<n<M}\frac{\zeta_{(0,n)}(k_j,\ldots,k_1)\zeta(w_i)(\zeta_{(0,M-n)}(1))^{s-i})}{n^q}-\sum_{0<n<M}\frac{\zeta_{(0,n)}(k_j,\ldots,k_1)\zeta(w_i)(\zeta_{(0,M)}(1))^{s-i}}{n^q}\right|\\
\leqslant&(\zeta_{(0,M)}(1))^{s-i}\left|\sum_{0<n<M}\frac{\zeta_{(0,n)}(k_j,\ldots,k_1)\zeta_{(0,M-n)}(w_i)}{n^q}-\sum_{0<n<M}\frac{\zeta_{(0,n)}(k_j,\ldots,k_1)\zeta(w_i)}{n^q}\right|\\
&+\left|\sum_{0<n<M}\frac{\zeta_{(0,n)}(k_j,\ldots,k_1)\zeta(w_i)(\zeta_{(0,M-n)}(1))^{s-i})}{n^q}-\sum_{0<n<M}\frac{\zeta_{(0,n)}(k_j,\ldots,k_1)\zeta(w_i)(\zeta_{(0,M)}(1))^{s-i}}{n^q}\right|\\
<&\,c_1\frac{\ln^{s-i+r}(M)}{M}+c_2\frac{\ln^{r+s-i}(M)}{\sqrt{M}}\\
<&\,c\frac{\ln^{r+s}(M)}{\sqrt{M}}.
\end{aligned}$$

因此，我们得到了所需的结论。 □

引理 4.11。 设 $\boldsymbol{k}=(k_1、\ldots、k_r)$ $k_r>1$）为正多重指标，且 $k\in\mathbb{Z}_{>1}$。设 $M>>1$为固定整数，则有

$$\left|\sum_{n\leqslant -M}\frac{\zeta_{(n,n+M)}(k_1,\ldots,k_r)}{n^k}\right|<2^r(r+2)\cdot\frac{\ln^r(M)}{M}.$$

证明。 通过直接计算可得

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n\leqslant -M}\frac{\zeta_{(n,n+M)}(k_1,\ldots,k_r)}{n^k}\right|&=\left|(-1)^{q+|\boldsymbol{k}|}\sum_{n\geqslant M}\frac{\zeta_{(n-M,n)}(k_r,\ldots,k_1)}{n^k}\right|\ \text{(by reflection)}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta_{(0,n+M)}(k_r,\ldots,k_1)}{(n+M)^k}\\
&\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta_{(0,n+M)}(\{1\}_r)}{(n+M)^2}\\
&<\frac{1}{r!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta_{(0,n+M)}(1))^r}{(n+M)^2}\\
&<\frac{1}{r!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(1+\int_1^{n+M}\frac{1}{x}dx\right)^r}{(n+M)^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&< \frac{2^r}{r!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^r(n+M)}{(n+M)^2}\\
&< \frac{2^r}{r!}\sum_{n=M}^{\infty}\frac{\ln^r(n)}{n^2}\\
&< 2^r(r+2)\cdot\frac{\ln^r(M)}{M}.
\end{aligned}
$$

因此，我们完成了该引理的证明。 □

基于上述定理和引理的结果，我们现在可以给出多重 ζ 值双重正则化的奇偶公式。

定理 4.12. （积和正则化）对于 $q\in\mathbb{Z}_{>1}$ 和 $\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_r)\in(\mathbb{Z}_{>0})^r$，我们有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\zeta^{\star}(k_j,\ldots,k_1,q)\zeta_*^T(k_{j+1},\ldots,k_r)\\
&-2\sum_{2k+m=q}\left(\sum_{|\boldsymbol{n}|=m}\prod_{l=1}^{r}\binom{-k_l}{n_l}\zeta_*^T(k_1+n_1,\ldots,k_r+n_r)\right)\zeta(2k)\\
&+\sum_{j=0}^{r}(-1)^{q+k_1+\cdots+k_j}\zeta(k_j,\ldots,k_1,q)\zeta_*^T(k_{j+1},\ldots,k_r)\\
&-2\sum_{j=1}^{r}(-1)^{q+|\boldsymbol{k}_{[1,j)}|}\sum_{2k+m=k_j}\left(\begin{array}{c}\displaystyle\sum_{|\boldsymbol{n}|=m}\binom{-q}{n_j}\prod_{l\neq j}\binom{-k_l}{n_l}\zeta_*^T(k_{j+1}+n_{j+1},\ldots,k_r+n_r)\\ \times(-1)^{|\boldsymbol{n}_{[1,j]}|}\zeta(k_{j-1}+n_{j-1},\ldots,k_1+n_1,q+n_j)\end{array}\right)\zeta(2k)=0,
\end{aligned}
$$

其中 $\boldsymbol{n}=(n_1,\ldots,n_r)\in(\mathbb{Z}_{\geqslant 0})^r$ 和 $\zeta_*^T(\boldsymbol{k})$ 表示积和正则化。

证明。设 $T=\zeta_{(0,M)}(1)$，根据推论 4.3，我们只需考虑以下四种情况。

情况 1。由定理 4.7 可知，当 $M\to+\infty$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta^{\star}_{(0,n]}(k_j,\ldots,k_1)\zeta_{(0,n+M)}(k_{j+1},\ldots,k_r)}{n^q}\\
&=\zeta^{\star}(k_j,\ldots,k_1,q)\zeta_*^T(k_{j+1},\ldots,k_r)+O\left(\frac{\ln^{t_1}(M)}{M}\right)
\end{aligned}
$$

对于某个 $t_1\in\mathbb{Z}_{>0}$。

第 2 部分。根据多重ζ值的积和正则化，我们有

$$
\zeta_{(0,M)}(k_1+n_1,\ldots,k_r+n_r)=\zeta_*^T(k_1+n_1,\ldots,k_r+n_r).
$$

第 3 部分。由定理 4.10 可知，当 $M\to+\infty$

$$
\sum_{-M<n<0}\frac{\zeta_{(n,0)}(k_1+n_1,\ldots,k_{j-1}+n_{j-1})}{n^{q+n_j}}\cdot\zeta_{(0,n+M)}(k_{j+1}+n_{j+1},\ldots,k_r+n_r)
$$

$$= (-1)^{q+|k_{[1,j)}|+|n_{[1,j]}|}\zeta(k_{j-1}+n_{j-1},\dots,k_1+n_1,q+n_j)\cdot\zeta_*^T(k_{j+1}+n_{j+1},\dots,k_r+n_r)$$
$$+O\left(\frac{\ln^{t_2}(M)}{\sqrt{M}}\right)$$

对于某个 $t_2\in\mathbb{Z}_{>0}$。

第4部分。最后，根据引理 4.11，当 $M\to+\infty$ 时，我们有

$$\sum_{n\leqslant -M}\frac{\zeta_{(n,n+M)}(k_1,\dots,k_r)}{n^q}=O\left(\frac{\ln^{t_3}(M)}{M}\right)$$

对于某个 $t_3\in\mathbb{Z}_{>0}$。

结合以上四部分，我们得到所需的结论。 □

类似地，我们也有洗牌正则化。

定理 4。 **13.**（洗牌正则化）对于 $q\in\mathbb{Z}_{>1}$ 和 $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_r)\in(\mathbb{Z}_{>0})^r$，我们有 ve

$$\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\zeta^\star(k_j,\dots,k_1,q)\zeta_{ш}^T(k_{j+1},\dots,k_r)$$
$$-2\sum_{2k+m=q}\left(\sum_{|\boldsymbol{n}|=m}\prod_{l=1}^{r}\binom{-k_l}{n_l}\zeta_{ш}^T(k_1+n_1,\dots,k_r+n_r)\right)\zeta(2k)$$
$$+\sum_{j=0}^{r}(-1)^{q+k_1+\dots+k_j}\zeta(k_j,\dots,k_1,q)\zeta_{ш}^T(k_{j+1},\dots,k_r)$$
$$-2\sum_{j=1}^{r}(-1)^{q+|\boldsymbol{k}_{[1,j)}|}\sum_{2k+m=k_j}\left(\begin{array}{c}\displaystyle\sum_{|\boldsymbol{n}|=m}\binom{-q}{n_j}\prod_{l\neq j}\binom{-k_l}{n_l}\zeta_{ш}^T(k_{j+1}+n_{j+1},\dots,k_r+n_r)\\ \times(-1)^{|\boldsymbol{n}_{[1,j]}|}\zeta(k_{j-1}+n_{j-1},\dots,k_1+n_1,q+n_j)\end{array}\right)\zeta(2k)=0,$$

其中，$\boldsymbol{n}=(n_1,\dots,n_r)\in(\mathbb{Z}_{\geqslant 0})^r$ 和 $\zeta_{ш}^T(\boldsymbol{k})$ 表示洗牌正则化。

证明。对于正多重指标 $\boldsymbol{k}$，Ihara、Kaneko 和 Zagier [12] 证明了以下著名的正则化双洗牌定理:

$$\rho(\zeta_*^T(\boldsymbol{k}))=\zeta_{ш}^T(\boldsymbol{k}).$$

将映射 ρ 应用于定理 4.12 中的公式，即可得到此结论。 □

例4.14。在定理4.13中令 $r=1$，可得以下众所周知的结果（参见 [10,定理 3.1]）。

$$\zeta(q)\zeta_*^T(k_1)-\zeta^\star(k_1,q)+(-1)^q\zeta(q)\zeta_*^T(k_1)+(-1)^{q+k_1}\zeta(k_1,q)$$
$$-2\sum_{2k+m=q}\binom{-k_1}{m}\zeta_*^T(k_1+m)\zeta(2k)-2(-1)^q\sum_{2k+m=k_1}(-1)^m\binom{-q}{m}\zeta(q+m)\zeta(2k)=0$$

推论4.15。设 $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_r)$ 为可容许多重指标，则有

$$((-1)^{k_1+\dots+k_r}-(-1)^r)\zeta(k_1,\dots,k_r)\equiv 0\ (\text{mod products}).$$

如果 $k_1+\dots+k_r\not\equiv r$(模 2)，那么 $\zeta(k_1,\dots,k_r)$ 可以表示为较低深度的多重ζ值。

证明。 这一结果源自定理 4.12。 □

类似地，通过计算围道积分 (3.5) 的留数，并应用与上文所述类似的正则化过程，可以推导出某些交错多重ζ值和多重多对数的正则化所满足的奇偶公式（需要解析延拓）。鼓励读者自行尝试。

本文所提出的方法也可用于研究多重ζ值相关变体的奇偶公式，例如 Hoffman 的多重 t-值的任意分圆版本。在下一节中，我们将给出分圆多重ζ值双重 shuffle 正则化的奇偶公式，其推导方法与上述两个定理的证明类似。由于推导基本遵循相同的步骤，此处省略细节。鼓励感兴趣的读者自行推演这些步骤。

需要强调的是，在他们的论文 [7], 中，本文第一作者和 Hoffman 采用了 Goncharov 论文 [11] 中的截断级数方法，通过定义截断多重 t-值并研究其生成函数的函数方程，建立了正则化多重 t-值的对称性定理 [15] （还可以推导出分圆多重 t-值更一般的对称性结果）。通过采用类似的反粒子关系（见 [30]），也可以类似地得到正则化多重 t-值的奇偶定理。此外，我们认为，Goncharov 论文 [11]中提出的截断级数方法可以扩展到研究交错多重 M-值（AMMVs） [28]的对称性或奇偶性结果。我们计划在后续论文中继续开展这项研究。

5 分圆多重ζ值的奇偶定理

在最后一节中，我们将前几节得到的结论推广到分圆多重ζ值的情形。由于证明完全类似，我们仅陈述结果而略去证明。

定义 5.1。 对于正多重指标 $\boldsymbol{k}=(k_1,\ \ldots\ldots,\ k_r)$ 和 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ \ldots\ldots,\ x_r)$（$x_i\in\mathbb{C}$），令$m_1$, $m_2\in\mathbb{Z}\cup\{-\infty,+\infty\}$ 满足 $m_1<m_2$。我们定义以下记号

$$\mathrm{Li}_{(m_1,m_2)}(\boldsymbol{k};\boldsymbol{x};s):=\sum_{m_1<n_1<\cdots<n_r<m_2}\frac{x_1^{n_1}\cdots x_r^{n_r}}{(n_1+s)^{k_1}\cdots(n_r+s)^{k_r}},$$
$$\mathrm{Li}_{(m_1,m_2]}(\boldsymbol{k};\boldsymbol{x};s):=\sum_{m_1<n_1<\cdots<n_r\leqslant m_2}\frac{x_1^{n_1}\cdots x_r^{n_r}}{(n_1+s)^{k_1}\cdots(n_r+s)^{k_r}}.$$

类似地，我们也定义以下记号

$$\mathrm{Li}^{\star}_{(m_1,m_2)}(\boldsymbol{k};\boldsymbol{x};s):=\sum_{m_1<n_1\leqslant\cdots\leqslant n_r<m_2}\frac{x_1^{n_1}\cdots x_r^{n_r}}{(n_1+s)^{k_1}\cdots(n_r+s)^{k_r}},$$
$$\mathrm{Li}^{\star}_{(m_1,m_2]}(\boldsymbol{k};\boldsymbol{x};s):=\sum_{m_1<n_1\leqslant\cdots\leqslant n_r\leqslant m_2}\frac{x_1^{n_1}\cdots x_r^{n_r}}{(n_1+s)^{k_1}\cdots(n_r+s)^{k_r}}.$$

为确保级数的收敛性，当 $m_2=+\infty$ （分别地， $m_1=-\infty$）时，我们要求 $k_r>1$ （分别地，$k_1>1$）。

特别地，对于 $\boldsymbol{k}:=(k_1,\ldots,k_r)\in(\mathbb{Z}_{>0})^r$，当 $s\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_{<0}$ 时，多重赫尔维茨 ζ 函数 定义为

$$\zeta(\boldsymbol{k};s):=\mathrm{Li}_{(0,+\infty)}(\boldsymbol{k};\{1\}_r;s)=\sum_{0<n_1<\cdots<n_r}\frac{1}{(n_1+s)^{k_1}\cdots(n_r+s)^{k_r}},\tag{5.1}$$

以及多变量多重多对数函数定义为

$$\mathrm{Li}(\boldsymbol{k};\boldsymbol{x}):=\mathrm{Li}_{(0,+\infty)}(\boldsymbol{k};\boldsymbol{x};0)=\sum_{0<n_1<\cdots<n_r}\frac{x_1^{n_1}\cdots x_r^{n_r}}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}.$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_r)\in\mathbb{C}^r,|x_i\cdots x_r|<1,1\leqslant i\leqslant n$。多重多对数函数可解析延拓为 $\mathbb{C}^r$ 上的多值亚纯函数（见 [33]）。一般而言，设 $\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_r)\in(\mathbb{Z}_{>0})^r$ 和 $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\ldots,\mu_r)$，其中 $\mu_1,\ldots,\mu_r$ 是 N 次单位根。我们可以得到 N 级的着色多重 ζ 值，其定义为

$$\mathrm{Li}(\boldsymbol{k};\boldsymbol{\mu})=\sum_{0<n_1<\cdots<n_r}\frac{\mu_1^{n_1}\cdots\mu_r^{n_r}}{n_1^{k_1}\ldots n_r^{k_r}}\in\mathbb{C},\tag{5.2}$$

当 $(k_r,\mu_r)\neq(1,1)$ 时它们收敛（见 [31] 和 [34, 第 15] 章）；此时我们称 $(\boldsymbol{k};\mu)$为可容许的。

命题 5.1。设 m_1、$m_2\in\mathbb{Z}\cup\{-\infty,+\infty\}$、$m_1<m_2$和 $n\in\mathbb{Z}$，则有以下恒等式

(1)（平移）

$$\mathrm{Li}_{(m_1,m_2)}(k_1,\ldots,k_r;x_1,\ldots,x_r;s)=(x_1\cdots x_r)^{-n}\,\mathrm{Li}_{(m_1+n,m_2+n)}(k_1,\ldots,k_r;x_1,\ldots,x_r;s-n).$$

(2)（分解）若 $m_1<n<m_2$，则有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Li}_{(m_1,m_2)}(k_1,\ldots,k_r;x_1,\ldots,x_r;s)\\
&=\sum_{j=0}^{r}\mathrm{Li}_{(m_1,n]}(k_1,\ldots,k_j;x_1,\ldots,x_j;s)\,\mathrm{Li}_{(n,m_2)}(k_{j+1},\ldots,k_r;x_{j+1},\ldots,x_r;s)\\
&=\sum_{j=0}^{r}\mathrm{Li}_{(m_1,n)}(k_1,\ldots,k_j;x_1,\ldots,x_j;s)\,\mathrm{Li}_{(n,m_2)}(k_{j+1},\ldots,k_r;x_{j+1},\ldots,x_r;s)\\
&\quad+\sum_{j=1}^{r}\frac{x_j^n}{(s+n)^{k_j}}\,\mathrm{Li}_{(m_1,n)}(k_1,\ldots,k_{j-1};x_1,\ldots,x_{j-1};s)\,\mathrm{Li}_{(n,m_2)}(k_{j+1},\ldots,k_r;x_{j+1},\ldots,x_r;s).
\end{aligned}$$

(3)（反射）

$$\mathrm{Li}_{(m_1,m_2)}(k_1,\ldots,k_r;x_1,\ldots,x_r;s)=(-1)^{|\boldsymbol{k}|}\,\mathrm{Li}_{(-m_2,-m_1)}(k_r,\ldots,k_1;x_r^{-1},\ldots,x_1^{-1};-s).$$

(4)（反 *antipode* 恒等式）

$$\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\,\mathrm{Li}^{\star}_{(m_1,m_2)}(k_j,\ldots,k_1;x_j,\ldots,x_1;s)\,\mathrm{Li}_{(m_1,m_2)}(k_{j+1},\ldots,k_r;x_{j+1},\ldots,x_r;s)=0.$$

(5)（截断）若 $0 < m_1 < m_2$，则有

$$\begin{aligned}&\mathrm{Li}_{(m_1,m_2)}(k_1,\dots,k_r;x_1,\dots,x_r;s)\\&=\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\,\mathrm{Li}^{\star}_{(0,m_1]}(k_j,\dots,k_1;x_j,\dots,x_1;s)\cdot\mathrm{Li}_{(0,m_2)}(k_{j+1},k_{j+2},\dots,k_r;x_{j+1},\dots,x_r;s).\end{aligned}$$

(6)（展开）如果 $m_1 < m_2 \leqslant 0$ 或 $0 \leqslant m_1 < m_2$，则有

$$\begin{aligned}&\mathrm{Li}_{(m_1,m_2)}(k_1,\dots,k_r;x_1,\dots,x_r;s)\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{|\boldsymbol{n}|=m}\prod_{l=1}^{r}\binom{-k_l}{n_l}\mathrm{Li}_{(m_1,m_2)}(k_1+n_1,\dots,k_r+n_r;x_1,\dots,x_r)\right)s^m,\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{n}=(n_1,\dots,n_r)\in(\mathbb{Z}_{\geqslant 0})^r$ 且 $|s|<1$。

我们得到，$\mathrm{Li}_{(m_1,m_2)}(\boldsymbol{k};\boldsymbol{x};s)$ 在整数点处有如下洛朗展开或泰勒展开。

定理 5.2. 设 $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_r)$ 是一个正多重指标，$\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_r)$。设 $m_1,m_2\in\mathbb{Z}\cup\{-\infty,+\infty\}$，$m_1<m_2$。若 $n\in\mathbb{Z}_{\geqslant -m_1}\cup\mathbb{Z}_{\leqslant -m_2}$ 且 $|s-n|<1$，则有

$$\mathrm{Li}_{(m_1,m_2)}(\boldsymbol{k};\boldsymbol{x};s)=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{|\boldsymbol{n}|=m}\prod_{l=1}^{r}\binom{-k_l}{n_l}\cdot(x_1\cdots x_r)^{-n}\,\mathrm{Li}_{(n+m_1,n+m_2)}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{n};\boldsymbol{x})\right)(s-n)^m,$$

其中 $\boldsymbol{n}:=(n_1,\dots,n_r)\in(\mathbb{Z}_{\geqslant 0})^r$ 且 $|\boldsymbol{n}|:=n_1+\cdots+n_r$。

特别地，若 $n=0$ 且 $|s|<1$，则

$$\mathrm{Li}_{(m_1,m_2)}(\boldsymbol{k};\boldsymbol{x};s)=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{|\boldsymbol{n}|=m}\prod_{l=1}^{r}\binom{-k_l}{n_l}\mathrm{Li}_{(m_1,m_2)}(\boldsymbol{k};\boldsymbol{x})\right)s^m. \tag{5.3}$$

定理 5.3。设 $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_r)$ 为正多重指标，$\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_r)$。设 $m_1,m_2\in\mathbb{Z}\cup\{-\infty,+\infty\}$，$m_1<m_2$。若 $-m_2<n<-m_1$，且 $|s-n|<1$，则有

$$\mathrm{Li}_{(m_1,m_2)}(\boldsymbol{k};\boldsymbol{x};s)=(x_1\cdots x_r)^{-n}\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m(s-n)^m+\sum_{j=1}^{r}\sum_{m=0}^{\infty}b_{m,j}(s-n)^{m-k_j}\right), \tag{5.4}$$

其中

$$\begin{aligned}a_m&:=\sum_{|\boldsymbol{n}|=m}\prod_{l=1}^{r}\binom{-k_l}{n_l}\sum_{j=0}^{r}\mathrm{Li}_{(n+m_1,0)}(\boldsymbol{k}_{[1,j]}+\boldsymbol{n}_{[1,j]};\boldsymbol{x}_{[1,j]})\,\mathrm{Li}_{(0,n+m_2)}(\boldsymbol{k}_{(j,r]};\boldsymbol{x}_{(j,r]}),\\b_{m,j}&:=\sum_{|\boldsymbol{n}|-n_j=m}\prod_{l\neq j}\binom{-k_l}{n_l}\mathrm{Li}_{(n+m_1,0)}(\boldsymbol{k}_{[1,j)}+\boldsymbol{n}_{[1,j)};\boldsymbol{x}_{[1,j)})\,\mathrm{Li}_{(0,n+m_2)}(\boldsymbol{k}_{(j,r]}+\boldsymbol{n}_{(j,r]};\boldsymbol{x}_{(j,r]})\end{aligned}$$

以及 $\boldsymbol{n}:=(n_1、\dots\dots、n_r)\in(\mathbb{Z}_{\geqslant 0})^r$。$\boldsymbol{k}_{[1,j]}$、$\boldsymbol{k}_{(j,r]}$、$\boldsymbol{k}_{[1,j)}$ 的定义与定义 *2.1* 类似。我们有以下结果。

从现在起，我们始终假设 m_1、$m_2\in\mathbb{Z}\cup\{-\infty,+\infty\}$、$m_1<m_2$、$\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots\ldots,k_r)$ 是一个正多重指标，并且 $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\ldots\ldots,\mu_r)$，其中 μ_1、$\cdots$、μ_r 是 N 次单位根。

通过考虑围道积分

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{C_R}\frac{\pi\cot(\pi s)\operatorname{Li}_{(m_1,m_2)}(\boldsymbol{k};\boldsymbol{\mu};s)}{s^q}ds=0 \tag{5.5}$$

并利用定理 5.2 和 5.3 中的级数展开来计算其留数，再应用类似的正则化过程，我们得到分圆多重ζ值正则化的以下奇偶公式。

定理 5.4. *(*积和正则化*)* 对于 $q\in\mathbb{Z}_{>0}$和 $\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_r)\in(\mathbb{Z}_{>0})^r$，$\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\ldots,\mu_r)$，若 $(q,\mu_1\cdots\mu_r)\neq(1,1)$，则有

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\operatorname{Li}^{\star}(\overleftarrow{\boldsymbol{k}_{[1,j]}},q;\overleftarrow{\boldsymbol{\mu}_{[1,j]}},(\mu_1\cdots\mu_r)^{-1})\operatorname{Li}_*^T(\boldsymbol{k}_{(j,r]};\boldsymbol{\mu}_{(j,r]})\\
&-2\sum_{2k+m=q}\left(\sum_{|\boldsymbol{n}|=m}\prod_{l=1}^{r}\binom{-k_l}{n_l}\operatorname{Li}_*^T(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{n};\boldsymbol{\mu})\right)\zeta(2k)\\
&+(-1)^{q+|\boldsymbol{k}_{[1,j]}|}\sum_{j=0}^{r}\operatorname{Li}(\overleftarrow{\boldsymbol{k}_{[1,j]}},q;\overleftarrow{\boldsymbol{\mu}_{[1,j]}},\mu_1\cdots\mu_r)\operatorname{Li}_*^T(\boldsymbol{k}_{(j,r]};\boldsymbol{\mu}_{(j,r]})\\
&\quad-2\sum_{j=1}^{r}(-1)^{q+|\boldsymbol{k}_{[1,j)}|}\sum_{2k+m=k_j}\left(\begin{array}{c}\displaystyle\sum_{|\boldsymbol{n}|=m}\binom{-q}{n_j}\prod_{l\neq j}\binom{-k_l}{n_l}\operatorname{Li}_*^T(\boldsymbol{k}_{(j,r]}+\boldsymbol{n}_{(j,r]};\boldsymbol{\mu}_{(j,r]})\\ \times(-1)^{|\boldsymbol{n}_{[1,j]}|}\operatorname{Li}(\overleftarrow{\boldsymbol{k}_{[1,j)}}+\overleftarrow{\boldsymbol{n}_{[1,j)}},q+n_j;\overleftarrow{\boldsymbol{\mu}_{[1,j)}},\mu_1\cdots\mu_r)\end{array}\right)\zeta(2k)\\
&=0,
\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{n}=(n_1,\ldots,n_r)\in(\mathbb{Z}_{\geqslant 0})^r$。

类似地，我们也有洗牌正则化（分圆多重ζ值的正则化双洗牌定理见 [34, 定理 13.3.9]）。

定理 5.5。（洗牌正则化）对于 $q\in\mathbb{Z}_{>0}$和 $\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_r)\in(\mathbb{Z}_{>0})^r$，$\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\ldots,\mu_r)$，且满足 $(q,\mu_1\cdots\mu_r)\neq(1,1)$，有

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\operatorname{Li}^{\star}(\overleftarrow{\boldsymbol{k}_{[1,j]}},q;\overleftarrow{\boldsymbol{\mu}_{[1,j]}},(\mu_1\cdots\mu_r)^{-1})\operatorname{Li}_{\sqcup\!\sqcup}^T(\boldsymbol{k}_{(j,r]};\boldsymbol{\mu}_{(j,r]})\\
&-2\sum_{2k+m=q}\left(\sum_{|\boldsymbol{n}|=m}\prod_{l=1}^{r}\binom{-k_l}{n_l}\operatorname{Li}_{\sqcup\!\sqcup}^T(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{n};\boldsymbol{\mu})\right)\zeta(2k)\\
&+(-1)^{q+|\boldsymbol{k}_{[1,j]}|}\sum_{j=0}^{r}\operatorname{Li}(\overleftarrow{\boldsymbol{k}_{[1,j]}},q;\overleftarrow{\boldsymbol{\mu}_{[1,j]}},\mu_1\cdots\mu_r)\operatorname{Li}_{\sqcup\!\sqcup}^T(\boldsymbol{k}_{(j,r]};\boldsymbol{\mu}_{(j,r]})\\
&\quad-2\sum_{j=1}^{r}(-1)^{q+|\boldsymbol{k}_{[1,j)}|}\sum_{2k+m=k_j}\left(\begin{array}{c}\displaystyle\sum_{|\boldsymbol{n}|=m}\binom{-q}{n_j}\prod_{l\neq j}\binom{-k_l}{n_l}\operatorname{Li}_{\sqcup\!\sqcup}^T(\boldsymbol{k}_{(j,r]}+\boldsymbol{n}_{(j,r]};\boldsymbol{\mu}_{(j,r]})\\ \times(-1)^{|\boldsymbol{n}_{[1,j]}|}\operatorname{Li}(\overleftarrow{\boldsymbol{k}_{[1,j)}}+\overleftarrow{\boldsymbol{n}_{[1,j)}},q+n_j;\overleftarrow{\boldsymbol{\mu}_{[1,j)}},\mu_1\cdots\mu_r)\end{array}\right)\zeta(2k)
\end{aligned}$$

$= 0,$

其中 $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_r) \in (\mathbb{Z}_{\geqslant 0})^r$。

利益冲突声明。 作者声明，他们没有任何已知的竞争性经济利益或个人关系可能会影响本文所报告的研究工作。

数据可用性。 本文所述研究未使用任何数据。

致谢。 作者谨向 Steven Charlton 致以诚挚谢意，感谢他对本文提出的宝贵意见并与作者进行讨论。Ce Xu 获安徽省自然科学基金面上项目（项目编号：2508085MA014）资助。Ce Xu 衷心感谢南开大学 Chengming Bai 教授邀请其访问陈省身数学研究所，也感谢厦门大学 Shaoyun Yi 教授邀请其访问东南中国天元数学中心（TMSE）。本研究始于这些访问期间。Jia Li 获国家自然科学基金委员会（项目编号：12231001）资助。Jia Li 感谢 Liang Xiao 教授提供宝贵的访问机会，并在此次研究期间给予大力支持和帮助。Jia Li 还感谢北京大学数学科学学院提供舒适的工作环境。

参考文献

[1] J.M. Borwein、D.M. Bradley 和 D.J. Broadhurst， k重 Euler/Zagier 和的求值：任意 k情况下结果汇编，*Electron. J. Combin.* **4**(2)(1997)，R5。[2] J.M. Borwein 和 R. Girgensohn，三重欧拉和的求值，*Electronic J. Combin.***3**(1996)，R23。[3] O. Bouillot，多重正切函数的代数，*J. Algebra* **410**(2014)，第 148-238 页。[4] D.J. Broadhurst 和 D. Kreimer，D.，通过费曼图将多重 ζ 值与正结关联，最多涉及 9 圈，Phys. Lett. B，1997，393(3/4)，第 403-412 页。[5] Jos´e. Ignacio. Burgos Gil 和 Javier. Fres´an，多重 ζ 值：从数到动机，http://javier.fresan.perso.math.cnrs.fr/mzv.pdf。[6] S. Charlton，关于动机多重 t 值、Saha基猜想及交错 MZV 的生成元，*Math. Ann.***392**(2025)，第 1995-2079 页。[7]S. Charlton 和 M.E. Hoffman，多重 t值的对称性结果，*Math. Z.***309**(2025)：75。[8] A. Dixit、S. Sathyanarayana 和 N. Guru Sharan，Mordell-Tornheim ζ函数与 Herglotz-Zagier 型函数的函数方程，*Adv, Math.* **473**(2025)110303。[9] L. Euler，“关于一类特殊级数的思考”，Novi Comm. Acad. Sci. Petropoli- tanae，20 (1775)，140–186[10] P. Flajolet 和 B. Salvy，欧拉和及其围道积分表示，*Experiment.Math.***7**(1)(1998)，第 15-35 页。

[11]A.B. Goncharov，多重多对数与混合 Tate 动机（2001），arXiv:math/0103059。[12] K. Ihara、M. Kaneko 和 D. Zagier，多重ζ值的导子与双重洗牌关系，Compos. Math. 142(2006)，第 307–338 页。[13] M. Hirose，通过多重正切函数得到多重ζ值的显式奇偶定理，Ramanujan J. (2025)67:87。[14] M.E. Hoffman，多重调和级数，Pacific J. Math. 152(1992)，第 275–290 页。[15]M.E. Hoffman，多重ζ值的一种奇数变体，Comm. Number Theory Phys. 13(2019)，第 529–567 页。[16] M. Kaneko 和 S. Yamamoto，多重ζ值的一种新积分—级数恒等式及其正则化，Selecta Math. 24(2018)，第 2499–2521 页。[17] M. Kaneko 和 H. Tsumura，关于二级多重ζ值，Tsukuba J.Math. 44- 2(2020)，第 213–234 页。[18] J. Li，动机多重ζ值的深度结构，Math. Ann. 374(1-2)(2019)，第 179-209 页。[19] J. Li，μ_2、μ_3 和 μ_4的单位分圆多重 ζ 值，Adv. Math. 438(2024)，109466。[20] T. Murakami，关于 Hoffman 最大高度的 t值及多重ζ值的生成元，Math. Ann.，382(2022)，第 421-458 页。[21] E. Panzer，多重多对数的奇偶定理，J. Number Theory 172(2017)，第 93–113 页。[22] H. Rui，Hurwitz 型分圆 Euler 和的围道积分与奇偶性结果，arXiv:2601.00035。[23] I. Todorov，无质量费曼振幅中的多对数与多重 ζ 值。载于《Lie Theory and Its Applications in Physics》；Dobrev, V., 编；Springer：柏林、海德堡，2014；第111卷。[24] H. Tsumura，Euler-Zagier 和的组合关系，Acta Arith. 111(2004)，第 27-42 页。[25] H. Tsumura，关于导子四的多重 L值的奇偶性猜想，Tokyo J. Math. 30(2007)，第 21-40 页。[26] R. Umezawa，多重多对数的显式奇偶定理，arXiv:2508.02040。[27] C. Xu 和 W. Wang，欧拉和的两种变体，Monatsh. Math. 199(2022)，第 431-454 页。[28] C. Xu、L. Yan 和 J. Zhao，交错多重混合值：正则化、特殊值、奇偶性与维数猜想，Indagat. Math. 35(2024)，第 1212-1248 页。[29] C. Xu 和 J. Zhao，具有偶数与奇数求和指标的多重ζ值变体，Math. Zeit. 300(2022)，第 3109-3142 页。

[30] C. Xu 和 J. Zhao，卷积多重ζ值若干变体的显式关系，纯粹与应用数学年鉴**204**（2025年），第 2065–2087 页。[31] H. Yuan 和 J. Zhao，级别为 N 的双重ζ值与双重艾森斯坦级数的双重洗牌关系，伦敦数学学会会刊 **92**（2）（2015年），第 520–546 页。[32] D. Zagier，ζ函数的值及其应用，《第一届欧洲数学大会》，第二卷，Birkhauser，波士顿，**120**（1994年），第 497–512 页。[33] J. Zhao，多重多对数的解析延拓，分析数学 **33** （ 2007 年），第 301–323 页。[34] J. Zhao，多重ζ函数、多重多对数及其特殊值，《数论及其应用丛书》第 12 卷，世界科技出版公司，新泽西州哈肯萨克，2016年。