自对偶黑洞的对偶扭量理论

Tim Adamo,[a] **Bernardo Araneda**[a, b] **和 Sean Seet**[a]

[a]爱丁堡大学数学学院与麦克斯韦数学科学研究所，*EH9 3FD*，英国

[b]马克斯·普朗克引力物理研究所（爱因斯坦研究所），*Am Mühlenberg 1*，*D-14476 Potsdam*，德国

电子邮箱：t.adamo@ed.ac.uk, baraneda@ed.ac.uk, sseet@ed.ac.uk

arXiv:2601.05037v1 [hep-th] 8 Jan 2026

摘要：Taub-NUT 和 Eguchi-Hanson引力瞬子，以及自对偶 Plebański-Demiański 度规，共同构成了一组可自然称为“自对偶黑洞”的欧几里得度规，因为它们源自最一般真空渐近平坦黑洞度规的自对偶切片。这些自对偶黑洞因诸多原因而备受关注，并且著名地可以通过扭量理论的非线性引力子构造加以描述。然而，这种扭量描述的隐式性质掩盖了底层几何的某些特征，尤其是对于最一般的自对偶黑洞而言。本文基于平坦对偶扭量空间中的全纯二次曲面，而非通常与自对偶性相关联的扭量空间，给出了所有渐近平坦自对偶黑洞的一种新构造。值得注意的是，自对偶黑洞的几何——包括其超凯勒结构，以及 Kerr-Schild 和 Gibbons-Hawking 形式——都直接编码在相应的二次曲面中。由此，我们得到了此前未知的自对偶 Plebański-Demiański 度规的单 Kerr–Schild 形式。

目录

1 引言 1

2 自对偶黑洞度量 4

2.1 回顾：Plebański-Demiański 度规 5 2.2 自对偶 Plebański-Demiański 7 2.3 Eguchi-Hanson 9 2.4 自对偶 Taub-NUT 10

3 从对偶扭量二次曲面到自对偶 Kerr-Schild 度量 11

3.1 扭量空间与对偶扭量空间 12 3.2 从自对偶零麦克斯韦场到自对偶 Kerr-Schild 度量 14 3.3 来自对偶扭量二次曲面的自对偶零麦克斯韦场 17 3.4 来自对偶扭量二次曲面的 Gibbons-Hawking 度量 20

4 对偶扭量二次曲面即自对偶黑洞 2 **2**

4.1 双扭量二次曲面的分类 22 4.2 A 情形：自对偶 Taub-NUT 24 4.3 情形 B：Eguchi-Hanson 26 4.4 C情形：自对偶普莱巴尼斯基-德米安斯基 28

5 讨论 **32**

1 引言

天体物理黑洞是极其简单的天体。得益于无毛定理 [1]，它们仅由少数几个荷（质量、自旋和电荷）来表征。此外，它们还具有一个共同的重要特征：在彼得罗夫-皮拉尼-彭罗斯分类中属于 D 型代数特殊时空。这意味着其外尔曲率张量有两个重复的主零方向（参见 [2]）。D型性质是能够将这些度量确定为爱因斯坦方程精确解的根本原因，也与Teukolsky系统 [3] 的显著简洁性密切相关；该系统描述了黑洞时空的线性引力扰动。

理解黑洞度规中的引力散射有诸多重要意义，从引力波天文学到全息原理皆是如此，而这些研究都要求对黑洞中的引力扰动及其动力学进行精细控制。然而，尽管黑洞度规和 Teukolsky 方程十分简洁，要从解析角度处理这一问题仍然非常困难。例如，要考虑黑洞存在时的波–波散射，就需要 Teukolsky

方程的解析解，以及一种实现它们之间动力学作用的机制。通过爱因斯坦–希尔伯特作用量的背景场理论进行这些计算，其标准框架复杂得令人望而却步；因此，现代大多数相关研究都在某种方案中对黑洞背景进行微扰处理（参见 [4, 5]）。

这促使人们寻找描述黑洞及其微扰理论的替代方法，以便更轻松地进行解析计算。一种方法是考虑天体物理黑洞的玩具模型，这类模型既能实现高精度的引力散射计算，又保留了弯曲度规中微扰理论丰富的非线性，因此最终或许能够从中提取关于完整（非玩具）散射问题的信息。近期沿着这一方向开展的一项研究，考察了自对偶或超凯勒度规上的引力散射：这类度规是具有自对偶韦尔曲率张量的真空爱因斯坦方程解。这类解不可能是洛伦兹实的，因此通常采用欧几里得或分裂/双曲号差，以获得实流形。

自对偶爱因斯坦方程具有经典可积性 [6, 7]，因此问题得以简化。自对偶度规及其微扰可用扭量理论 [6, 8–10], 来描述，而其动力学则可（至少在某些情形下）通过以扭量空间为目标空间的二维手征σ模型 [11]实现。这使得人们得以在各种自对偶背景中获得引力子散射振幅的显式公式；即使采用自对偶设定，这些公式也完全超出了传统背景场方法的能力范围 [12–21]。然而，目前仍不清楚如何将这些关于自对偶背景的非凡成果“引导”至洛伦兹实的天体物理背景（如克尔黑洞），从而了解此类背景上的散射。

另一方面，近期研究表明，所有天体物理学中的洛伦兹实黑洞度规，都可以通过考虑闵可夫斯基时空的对偶扭量空间中的全纯二次超曲面的变形来得到；该空间是通常扭量空间的射影对偶 [22]。这一构造利用了这样一个事实：这些度规全都是共形凯勒度规 [23–25], ，这与 D 型性质密切相关，并且与 Teukolsky系统在这些时空 [26–28]上描述微扰的存在具有许多共同的几何基础。这提示了一种研究黑洞及其微扰理论的替代方法，它利用黑洞隐藏的复几何。不过，这一方法尚未实现。

这促使我们寻找一个交汇点，让这两种描述黑洞及其微扰理论的新方法——即自对偶性与对偶扭量二次曲面——能够相遇。前一种方法利用自对偶性，在微扰理论方面取得了显著进展，但与洛伦兹实情形没有明显联系，也没有特别偏好代数 D 型背景。后一种方法展现了 D 型度规的共形凯勒几何，并适用于洛伦兹签名，但在对偶扭量二次曲面中如何实现微扰理论尚不明晰。因此，显而易见，自对偶黑洞 是观察两种方法各自的优势如何发挥作用的理想对象。

在本文中，我们将所有自对偶黑洞新颖地描述为全纯

φic 二次曲面（即二次全纯代数簇），它们位于复射影空间 $\mathbb{P}^3$的一个开子集内。我们对自对偶黑洞的精确定义是：任何可视为四维最一般 D 型黑洞度量——Plebański-Demiański 度规 [29]——之复化的欧几里得实切片的自对偶、里奇平坦（即超凯勒）黎曼度量。自对偶 Taub-NUT 度量 [30]——此前文献 [16, 17, 31] 中曾将其用作史瓦西或克尔黑洞的自对偶类比——是其中一个例子，但 Eguchi-Hanson [32, 33] 度量以及最一般的自对偶 Plebański-Demiański 度量也包含在内。

由于这些是超凯勒度规，它们可通过与自对偶性相关的非线性引力子构造获得扭量描述。自对偶 Taub-NUT 和 Eguchi-Hanson 的情形早已为人所知 [34–37], ，不过 SDPD 的情形似乎研究得较少。我们的目标是对自对偶黑洞度规给出另一种描述，突出其 D 型性质，且无需涉及变形（例如扭量空间复结构的变形），也无需求解伴随线性问题（例如求解全纯扭量曲线）。

度量具有代数 D 型性质，意味着它带有共形凯勒结构 [23]„ 因此该度量存在一个（非恒定的）二价 Killing 自旋量。人们早已知道，这类 Killing 自旋量的存在性由扭量空间中的某些全纯曲面编码：在平直情形下，这意味着一个二价 k Killing 自旋量对应于扭量空间中一个 k 次齐次全纯多项式的零点集（即一个次数为 k 的全纯代数簇） [38]。类似结果也适用于弯曲自对偶四维流形 [35, 39]。因此，人们或许会预期，D 型自对偶黑洞度规在其关联的扭量空间中具有特殊的二次曲面（即二次全纯超曲面）。

相反，我们找到了一个构造所有自对偶黑洞度规的方法，该方法仅利用对偶扭量空间中平直空间的二次曲面。这出于几个原因而非同寻常：首先，支撑该构造的是对偶扭量空间，而不是通常与反自对偶自由度相关联的扭量空间；其次，仅需平直空间的对偶扭量空间，便可得到弯曲的自对偶黑洞度规。此外，与标准的非线性引力子构造相比，该构造要具体得多：度量及其超凯勒几何的所有方面，都可以直接从对偶扭量二次曲面中读取出来。

我们的构造可以表述为一个算法，步骤如下：

1. 设 Q 是复化闵可夫斯基时空 $\mathbb{PT}^*$ 的对偶扭量空间中的一个一般全纯二次曲面，并满足欧几里得实条件。2. 通过彭罗斯变换 [40]， Q 在平直空间上产生一个零自对偶麦克斯韦场 $\varphi_{\dot\alpha\dot\beta}(x)$。3. Tod 的一个非同寻常的定理 [37] 根据这个零自对偶麦克斯韦场构造出一个 Kerr-Schild 超凯勒度量。

通过这种方式，每个对偶扭量二次曲面都会产生一个Kerr-Schild 形式的超凯勒度量。此外，还可以直接利用对偶扭量二次曲面中的要素构造出各种其他几何结构——包括一个二阶Killing旋量、

各种Killing 矢量和张量，以及一组反自对偶二形式。这些结构可用于证明，通过该算法得到的每个度量也都具有Gibbons-Hawking 形式。

因此可以对所有这类对偶扭量二次曲面进行分类，并逐一研究每种情形。我们证明，对偶扭量二次曲面恰好分为三类，且每一类都会导出一种特定形式的 D 型超Kähler 度量。综合以上结果，我们得到主要结论：

定理 1 平直空间的对偶扭量空间中，与欧几里得实条件相容的一般全纯二次曲面，与自对偶黑洞度规之间存在一一对应关系。

具体而言，我们证明，这三类对偶扭量二次曲面分别导出自对偶 Taub-NUT、Eguchi-Hanson 和自对偶 Plebański-Demiański 度量。此外，我们还推论得出，这些自对偶黑洞度规都具有一种（单一的）Kerr-Schild 形式。尽管 Eguchi-Hanson 具有 Kerr-Schild 形式 [36, 37],早已为人所知，但直到最近才有人证明自对偶 Taub-NUT 具有 Kerr-Schild 形式 [41] ；据我们所知，对于自对偶 Plebański-Demiański 度量而言，这是一个全新的结果。

本文结构如下。第 2 节从一般的 Plebański-Demiański D 型解族出发，介绍自对偶黑洞度规。虽然其中大部分内容对专家而言都很熟悉，但我们确实指出了一个此前被忽视的自对偶 Plebański-Demiański 度规的退化情形。第 3 节给出从对偶扭量二次曲面构造超凯勒 Kerr-Schild 度量的算法。我们先概述扭量理论和对偶扭量理论中的必要概念，然后回顾 Tod 如何从平直空间中的零自对偶麦克斯韦场构造超凯勒 Kerr-Schild 度量。接着，我们展示每个对偶扭量二次曲面如何导出这样的零自对偶麦克斯韦场，并证明所得度量总是具有 Gibbons-Hawking 形式（此外还具有 Kerr-Schild 形式）。

第 4 节对所有对偶扭量二次曲面进行分类，表明它们都属于三种“类型”之一，我们将其称为 A、B 和 C 类。随后我们证明，这三类分别对应一种自对偶黑洞度规：A 情形对应自对偶 Taub-NUT，B 类对应 Eguchi-Hanson，C 类对应自对偶 Plebański-Demiański。第 5 节以对未来研究方向的一些猜想作结，尤其着眼于我们最初的动机，即为黑洞微扰理论开发一种新方法。

2 自对偶黑洞度量

洛伦兹签名下，具有双重对齐的麦克斯韦场[1]，（无论是否含宇宙学常数）的爱因斯坦方程所有代数型D解，都由普莱巴尼斯基-德米安斯基（PD）度量族给出 [29, 44]。在最一般的形式下，该族中的度量

[1]值得注意的是，最近发现了爱因斯坦-麦克斯韦方程的新型 D 型解，其中麦克斯韦场并不与该度量的两个主零矢量对齐 [42, 43]。这些解可以解释为处于均匀外部磁场中的克尔黑洞。

由七个参数确定，这些参数的物理意义通常并不明确；不过，在各种极限情形下，它们可分别对应质量、NUT荷、电荷和磁荷、自旋/扭转、加速度以及宇宙学常数。在各种极限情形下，PD族可化约为许多其他知名解（参见 [29, 45, 46]），包括描述天体物理黑洞的Kerr-Newman族 [47, 48], 、Taub-NUT时空 [49, 50]，以及描述一对因果分离的加速黑洞的 C 度规 [51–53]。

当然，作为洛伦兹实度量，除了平直时空、德西特时空和反德西特时空这些平凡情形之外，PD 族不存在自对偶的例子。然而，通过将 PD 度规复化（即将其延拓为全纯复度量），可以得到自对偶解；随后，通过选取适当的实切片，这些解可以被视为非洛伦兹号差（即欧几里得号差或分裂号差）下的实度量。由于洛伦兹 PD 族描述了一般的 D 型黑洞度规，因此将所得度量称为自对偶黑洞似乎很自然，尽管显然它们并不是通常洛伦兹意义下的黑洞度规。

我们将仅关注欧几里得号差下的真空、渐近平坦自对偶黑洞度规。更确切地说：

定义 2.1（自对偶黑洞）如果某个里奇平坦、自对偶黎曼度规（即超凯勒度量）是某个 *Plebański-Demiański*度规族成员的复化的欧几里得实切片，则称其为自对偶黑洞。

本节将概述这些自对偶黑洞，首先简要回顾一般的欧几里得 PD 族。随后，我们将讨论自对偶黑洞的三种不同情形：先介绍最一般的自对偶 Plebański-Demiański 度规，再介绍较为熟悉的 Eguchi-Hanson 和 Taub-NUT 引力瞬子。

2.1 回顾：普莱巴尼斯基-德米安斯基度规

尽管原始的 PD度规族以七个参数表示，但爱因斯坦-麦克斯韦方程实际上将自由参数的数量减至六个（参见[45, 54, 55]）。令宇宙学常数为零后，渐近平坦 PD 族便有五个自由参数。不言而喻，这五个参数与原始 PD 参数化之间的关系极为复杂。

对我们的研究而言，PD 度规最自然的形式为 [54, 56]

$$g = \frac{1}{(p-q)^2}\left[-\mathcal{Q}\,\frac{(\mathrm{d}\tau - p^2\mathrm{d}\phi)^2}{(1-p^2q^2)} + \mathcal{P}\,\frac{(\mathrm{d}\phi - q^2\mathrm{d}\tau)^2}{(1-p^2q^2)} + (1-p^2q^2)\left(\frac{\mathrm{d}p^2}{\mathcal{P}} - \frac{\mathrm{d}q^2}{\mathcal{Q}}\right)\right], \quad (2.1)$$

其中

$$\mathcal{P} = a_0 + a_1\,p + a_2\,p^2 + a_3\,p^3 + a_4\,p^4, \qquad \mathcal{Q} = a_0 + a_1\,q + a_2\,q^2 + a_3\,q^3 + a_4\,q^4, \quad (2.2)$$

而 $a_0 \ldots, a_4$是自由参数。首先，可以将其视为全纯复度规；不过，这种特定形式的 PD 度规天然适用于欧几里得号差。事实上，当坐标 (τ, ϕ, p, q) 为实数，且取值范围满足 $\mathcal{P} > 0$ 和 $\mathcal{Q} < 0$时，很容易看出 (2.1) 是一个实的黎曼度规。

对于 $a_0,\dots,a_4$的任意取值，度规 (2.1) 都是爱因斯坦-麦克斯韦方程的解。此外，当 $a_4 = a_0$时，该解是里奇平坦的；当 $a_4 = a_0$ 和$a_3 = a_1$时，是自对偶的；当 $a_4 = a_0$ 和 $a_3 = a_1 = 0$时，则是平坦的。考察 (2.1)-(2.2) 中唯一非平凡的韦尔标量，可以进一步说明这一点（例如参见 [55,式 (4.24)] [2]）

$$\Psi_2^{\pm} = -\frac{(a_3 \pm a_1)}{2}\left(\frac{p-q}{1\mp pq}\right)^3 + (a_0 - a_4)\left(\frac{p+q}{1\pm pq}\right)\left(\frac{p-q}{1\mp pq}\right)^3 , \tag{2.3}$$

正如 D 型度规所预期的那样。

对于任意 $a_0,...,a_4$，度规 (2.1) 是环面的、共形凯勒的（在两种定向下均如此），其标量曲率为零，并且是渐近局部欧几里得（ALE） [54, 55]。因此，它具有 SU(∞) Toda 表述（参见 [57–59]）：存在坐标 (ψ, x, y, z) 和函数 u, W，以及一个 1- 形式 A，使得几何由以下方程组描述

$$g = W^{-1}\,(\mathrm{d}\psi + A)^2 + W\left[\mathrm{d}z^2 + \mathrm{e}^u\,(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)\right] , \tag{2.4}$$

$$\mathrm{d}A = \left[W_x\,\mathrm{d}z - z^2\,\partial_z\left(\frac{W\,\mathrm{e}^u}{z^2}\right)\mathrm{d}x\right] \wedge \mathrm{d}y\,, \tag{2.5}$$

$$0 = W_{xx} + \partial_z\left[z^2\,\partial_z\left(\frac{W\,\mathrm{e}^u}{z^2}\right)\right] , \tag{2.6}$$

$$0 = u_{xx} + (\mathrm{e}^u)_{zz}\,, \tag{2.7}$$

下标表示偏导数。将 PD 度规 (2.1) 化为 SU(∞) 形式 (2.4) 的变换为 [55]

$$\psi = \frac{\tau+\phi}{2}\,, \qquad y = -\tau + \phi\,, \qquad z = \frac{1-pq}{p-q}\,, \qquad \mathrm{d}x = \frac{(1-p^2)}{\mathcal{P}}\,\mathrm{d}p - \frac{(1-q^2)}{\mathcal{Q}}\,\mathrm{d}q\,,$$
$$\frac{1}{W} = \frac{(1-q^2)^2\,\mathcal{P} - (1-p^2)^2\,\mathcal{Q}}{(p-q)^2\,(1-p^2q^2)}, \qquad \mathrm{e}^u = \frac{-\mathcal{P}\,\mathcal{Q}}{(p-q)^4}\,,$$
$$A = \frac{[(1-q^4)\,\mathcal{P} + (1-p^4)\,\mathcal{Q}]}{[(1-q^2)^2\,\mathcal{P} - (1-p^2)^2\,\mathcal{Q}]}\,\frac{(\mathrm{d}\phi - \mathrm{d}\tau)}{2}\,. \tag{2.8}$$

对于所选定向，共形凯勒结构为

$$\omega = \frac{(\mathrm{d}\tau - p^2\mathrm{d}\phi)\wedge\mathrm{d}q + \mathrm{d}p\wedge(\mathrm{d}\phi - q^2\mathrm{d}\tau)}{(p-q)^2}\,, \qquad \Omega = \frac{p-q}{1-pq}\,, \tag{2.9}$$

这意味着张量场 $J^a{}_b = \omega_{bc}\,g^{ca}$ 是一个可积近复结构，并且相对于度量 $\Omega^2\,g_{ab}$ 的列维-奇维塔联络是平行的。

值得注意的是，基本2-形式 ω 和共形因子 Ω 都与 PD 参数 $a_0,...,a_4$ 无关，这一点颇为令人惊讶。尤其是，这意味着在 PD 的自对偶极限和平直极限下，共形凯勒结构仍然非平凡。

定义 $\rho^2 := \mathrm{e}^u$，方程 (2.7) 意味着存在一个由 $Z_z = \rho_x/\rho$, $Z_x = -\rho\,\rho_z$ 定义的函数 Z。这一对 (ρ, Z) 称为 Weyl-Lewis-Papapetrou 坐标，且

[2]我们的定向约定与 [55], 中的相反，因此此处的 $\Psi_2^{\pm}$ 对应于 [55]中的 $\Psi_2^{\mp}$。

其显式形式为：

$$\rho^2 = \frac{-\mathcal{P}\,\mathcal{Q}}{(p-q)^4}, \qquad Z = -\frac{[2a_0 + a_1\,(p+q) + pq\,(2a_2 + 2a_4\,pq + a_3\,(p+q))]}{2\,(p-q)^2}\,. \tag{2.10}$$

这些不同的结构将在我们探索 PD 族中的自对偶黑洞度规时发挥重要作用。

2.2 自对偶 Plebański-Demiański

给定满足欧几里得实条件的 PD 度规 (2.1) 的一般形式，第一个由定义 2.1 所刻画的自对偶黑洞示例，只需将参数限制为使度规成为真空自对偶度规即可得到。如上所述，这发生在 $a_4 = a_0 \neq 0$ and $a_3 = a_1$ 时，这意味着函数 $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ 可表示为

$$\mathcal{P} = a_0 + a_1\,p + a_2\,p^2 + a_1\,p^3 + a_0\,p^4\,, \qquad \mathcal{Q} = a_0 + a_1\,q + a_2\,q^2 + a_1\,q^3 + a_0\,q^4\,. \tag{2.11}$$

因此，这个 自对偶 *Plebański-Demiański* (SDPD) 度规在此描述中有三个自由参数：a_0, a_1, a_2。

不过，可以说，采用 SU(∞) Toda 表述来考察 SDPD 度规更能阐明问题。在这种情况下，对 $a_4 = a_0$, $a_3 = a_1$ 进行直接计算可得：

$$g_{\mathrm{SDPD}} = \frac{(\mathrm{d}T + \omega)^2}{V} + V\left(\mathrm{d}\rho^2 + \mathrm{d}Z^2 + \rho^2\,\mathrm{d}\varphi^2\right), \tag{2.12}$$

其中 (ρ, Z) 是在自对偶参数化下取值的 (2.10) 中的 Weyl-Lewis-Papapetrou 坐标，且

$$T := \ell^{-1}\,\psi\,, \quad \varphi := \ell\,y\,, \quad \omega := \ell^{-1}\,A\,, \quad V := \ell^{-2}\,W\,, \tag{2.13}$$

对于该量

$$\ell^2 := \frac{8\,a_0^2 + a_1^2 - 4\,a_0\,a_2}{4}\,, \tag{2.14}$$

假设 $\ell \neq 0$。

在这种情况下，方程 (2.5) 化为联系 ω 和 V 的阿贝尔单极方程：$\mathrm{d}\omega = \star_3 \mathrm{d}V$，其中 $\star_3$ 是平坦三维度规 $\mathrm{d}\rho^2 + \mathrm{d}Z^2 + \rho^2\mathrm{d}\varphi^2$ 的霍奇星算子。于是，方程 (2.6) 化为关于 V 的轴对称拉普拉斯方程。因此，我们看到 (2.1) 的自对偶极限由具有如下势的 Gibbons-Hawking 设 ansatz 描述：

$$V_{\mathrm{SDPD}} = \frac{1}{\ell^2}\frac{(p-q)\,(1+pq)}{[(a_2+2a_0)\,(p+q)\,(1+pq) + a_1\,(1+4pq+p^2+q^2+p^2q^2)]}\,. \tag{2.15}$$

照此形式，这个势并不能辨认为 Gibbons-Hawking 度规中通常出现的轴对称拉普拉斯方程的多中心基本解。

为了将其表达为更易于识别的形式，首先将参数重新组合成以下组合：

$$b_\pm^2 := \frac{1}{4}\left[a_1^2 - 2a_0(a_2+2a_0) \pm 2a_0\sqrt{(2a_0+a_2)^2 - 4a_1^2}\right], \tag{2.16a}$$

$$a_\pm := \frac{a_1}{8}\left[a_2 - 6a_0 \pm \sqrt{(2a_0+a_2)^2 - 4a_1^2}\right], \tag{2.16b}$$

$$Z_\pm := \frac{1}{4}\left[a_2 - 2a_0 \pm \sqrt{(2a_0+a_2)^2 - 4a_1^2}\right]. \tag{2.16c}$$

随后可以利用这些量来定义变量

$$r_\pm^2 := \frac{1}{b_\pm^2}\frac{[a_\pm\,(p+q)+b_\pm^2\,(1+pq)]^2}{(p-q)^2}\,, \tag{2.17}$$

可以证明其满足

$$r_\pm^2 = \rho^2 + (Z-Z_\pm)^2\,. \tag{2.18}$$

因此， $r_\pm$ 定义了相对于（2.12）中的平坦三维度规 $\mathrm{d}\rho^2+\mathrm{d}Z^2+\rho^2\mathrm{d}\varphi^2$ 的距离。由此可验证，势（2.15）变为

$$V_{\mathrm{SDPD}} = \frac{m_+}{r_+}+\frac{m_-}{r_-}\,,\qquad \text{where}\qquad m_\pm := \frac{\pm a_\pm}{b_\pm\,\ell^2\,\sqrt{(2a_0+a_2)^2-4a_1^2}}\,. \tag{2.19}$$

因此，由（2.12）和（2.19）给出的 SDPD 度规对应于一个 ALE双中心Gibbons-Hawking超凯勒度量。这是一个相当不平凡的事实，约 25 年前才首次被发现 [60]。注意，在这种形式下，SDPD 度规的三个参数为 m_-、 m_+ 以及两中心之间的相对间距 r_+-r_-。

退化情形：现在，这一分析假设的是两个中心彼此不同的一般情形。两个中心重合的情况可以通过取极限得到

$$Z_+ - Z_- \to 0, \tag{2.20}$$

这对应于 $(2a_0+a_2)^{\,2}-4a_1^2\to 0$。事实上，这是一个退化极限，需要单独处理；据我们所知，文献此前尚未注意到这一点[3]。

定义坐标和参数

$$\begin{aligned} &x_1 := \rho\cos\varphi\,,\qquad x_2 := \rho\sin\varphi\,,\qquad x_3 := Z-\frac{(a_2-2a_0)}{4}\,,\\ &\varepsilon := \frac{\sqrt{(2a_0+a_2)^2-4a_1^2}}{4}\,,\qquad c := \frac{(a_2-6a_0)}{4}\,, \end{aligned} \tag{2.21}$$

SDPD度规变为

$$g_\varepsilon = \frac{1}{V_\varepsilon}\,(\mathrm{d}\psi+A_\varepsilon)^2 + V_\varepsilon\,(\mathrm{d}x_1^2+\mathrm{d}x_2^2+\mathrm{d}x_3^2)\,, \tag{2.22a}$$

$$V_\varepsilon = \frac{m_+(\varepsilon)}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+(x_3-\varepsilon)^2}}+\frac{m_-(\varepsilon)}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+(x_3+\varepsilon)^2}}, \tag{2.22b}$$

其中质量为

$$m_\pm(\varepsilon) = \frac{a_1}{8\ell^2\,b_\pm(\varepsilon)}\left(\frac{\varepsilon\mp c}{\varepsilon}\right) \tag{2.23}$$

[3]对于多中心Gibbons-Hawking度量，两个中心合并的过程由坍缩几何和ALE空间冒泡的现象来描述（参见 [61]）。在 SDPD 的情形下，由于质量取决于分离距离，这种描述并不适用。

其中 $b_\pm^2(\varepsilon) = \frac{a_1^2-2a_0}{(2a_0+a_2)^4} \pm 2a_0\varepsilon$，并强调了所有量对 ε 的依赖。中心合并极限 (2.20) 现在对应于 $\varepsilon \to 0$。

对 V_ε 在 $\varepsilon = 0$ 附近进行泰勒展开，得到

$$V_\varepsilon = \frac{A}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}} + \frac{B\,x_3}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}} + O(\varepsilon^2) \tag{2.24}$$

其中

$$A = \frac{a_0+a_2}{2c^{5/2}\sqrt{2a_0+a_2}}\,, \qquad B = \frac{\sqrt{2a_0+a_2}}{8c^{3/2}}\,. \tag{2.25}$$

因此，在中心合并极限 (2.20)（即 $\varepsilon \to 0$）下，SDPD度规仍保持 Gibbons-Hawking 形式，但势不再对应多中心解：将 (2.24) 的极限 $\varepsilon \to 0$ 用球坐标表示，得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0} V_\varepsilon = \frac{A}{r} - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{B}{r}\right). \tag{2.26}$$

此函数的拉普拉斯算子产生 $-4\pi(A\delta^{(3)}(\mathbf{x})+B\partial_{x_3}\delta^{(3)}(\mathbf{x}))$（其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$）。虽然奇点结构仍是点状的，但现在依赖于角度。

2.3 Eguchi-Hanson

Eguchi-Hanson（EH）度规的标准形式为 [32, 33]

$$g_{\rm EH} = f(r)\,\frac{r^2}{4}\,(\mathrm{d}\psi + \cos\theta\,\mathrm{d}\phi)^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{f(r)} + \frac{r^2}{4}\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2\right), \tag{2.27}$$

其中 $f(r) = 1 - (\frac{a}{r})^4$ 以及 $r > a$, $0 \le \psi \le 2\pi$, $(\theta, \phi) \in S^2$。如 Prasad [62],所示，EH 度规 (2.27) 与质量相等的 ALE 双中心 Gibbons–Hawking 度量等距。从 Gibbons-Hawking 形式出发，最容易看出这一坐标变换

$$g_{\rm EH} = V^{-1}\,(\mathrm{d}\tau + A)^2 + V\left(\mathrm{d}\mathcal{X}^2 + \mathrm{d}\mathcal{Y}^2 + \mathrm{d}\mathcal{Z}^2\right), \tag{2.28}$$

for

$$V = \frac{1}{\mathcal{R}_+} + \frac{1}{\mathcal{R}_-}\,, \qquad A = \left(\frac{\mathcal{Z}_+}{\mathcal{R}_+} + \frac{\mathcal{Z}_-}{\mathcal{R}_-}\right)\mathrm{d}\tan^{-1}\left(\frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{X}}\right), \tag{2.29}$$

其中 $\mathcal{Z}_\pm := \mathcal{Z} \pm \frac{a^2}{8}$ 以及 $\mathcal{R}_\pm := \sqrt{\mathcal{X}^2+\mathcal{Y}^2+\mathcal{Z}_\pm^2}$。容易验证，它们由单极方程 $\mathrm{d}A = \star_3\,\mathrm{d}V$ 联系起来，其中 $\star_3$ 是作用于 $\mathbb{R}^3$ 上平直度规的霍奇星算子，笛卡尔坐标为 $(\mathcal{X},\ \mathcal{Y},\ \mathcal{Z})$。按照 [62],，坐标 $(\psi,\ r,\ \theta,\ \phi)$ 可由下式得到

$$\tau = 2\phi\,, \quad \mathcal{X} = \frac{r^2}{8}\sqrt{f(r)}\sin\theta\cos\psi\,, \quad \mathcal{Y} = \frac{r^2}{8}\sqrt{f(r)}\sin\theta\sin\psi\,, \quad \mathcal{Z} = \frac{r^2}{8}\cos\theta\,. \tag{2.30}$$

在 Gibbons-Hawking 度量 (2.28) 中使用这一坐标变换，可得到 EH度规 的原始形式 (2.27)。

鉴于 SDPD度规 (2.12)-(2.19) 是一个具有不同质量的 ALE 双中心 Gibbons–Hawking 度量，人们很容易认为 EH解只是质量相等时的 SDPD度规 特例。如果确实如此，那么 EH 是自对偶黑洞便显而易见，但也就没有必要将其视为有别于 SDPD 的对象。令人惊讶的是，无法 在保持度量为欧几里得实的同时从 SDPD 得到 EH。因此，尽管 EH 确实是自对偶黑洞（它是通过对 SDPD 进行复化得到的），但作为黎曼度规，它有别于 SDPD。这一点可由以下观察得出：欧几里得PD度规从不 正则 [63], ，而 EH度规 则是一个著名的正则 ALE 引力瞬子。

2.4 自对偶 Taub-NUT

在复PD度规族中，可以考虑宇宙学常数、电荷和磁荷均为零的度规子族——对于剩余参数的某个取值范围，这些度规可以理解为带有加速度和旋转的Taub-NUT时空 [29, 45]。依次将对应于加速度和旋转的参数设为零后，在全纯范畴中便得到通常的Taub-NUT度规；这是一个由质量 M 和NUT荷 N确定的二参数度规族。

当 $N = -\mathrm{i}\ M$时，这个复度规（局部地）成为真空自对偶；在复化的 Newman-Unti-Tamburino [50] 坐标（t、 r、 θ、 ϕ）中，它表示为

$$g_{\mathrm{SDTN}} = -\left(\frac{r-M}{r+M}\right)(\mathrm{d}t + 2\mathrm{i}\,M\,\cos\theta\,\mathrm{d}\phi)^2 + \left(\frac{r+M}{r-M}\right) + \left(r^2 - M^2\right)\,\mathrm{d}\Omega^2\,, \tag{2.31}$$

其中，$\mathrm{d}\Omega^2$ 是（复化的）圆单位球面的通常线元:

$$\mathrm{d}\Omega^2 := \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2\,. \tag{2.32}$$

对于坐标（$\tau = \mathrm{i}\ t$、 r、 θ、 ϕ）以及 $M \in (0、\ \infty)$，该度规存在一个欧几里得实切片；取 $r - M \to r$ 后，欧几里得自对偶Taub-NUT（SDTN）变为 [30]

$$g_{\mathrm{SDTN}} = V^{-1}\,(\mathrm{d}\tau + A)^2 + V\left(\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\Omega^2\right)\,, \tag{2.33}$$

with

$$V = 1 + \frac{2\,M}{r}\,, \qquad A = \cos\theta\,\mathrm{d}\phi\,. \tag{2.34}$$

容易证明，$\mathrm{d}A = \star_3 \mathrm{d}V$，其中 $\star_3$ 是作用在带有度量 $\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\Omega^2$, 的 $\mathbb{R}^3 \setminus 0$ 上的霍奇星算子，因此 SDTN 度规是渐近局部平坦的 Gibbons-Hawking 度量。事实上，该度量在 $\mathbb{R}^4$上给出了全局光滑的引力瞬子，通过对欧几里得时间 $\tau \sim \tau + 8\pi\,M$进行周期性识别，消除了 $\theta = 0,\ \pi$处原本存在的奇点。

也可以直接从欧几里得PD度规得到 SDTN 度规，不过需要经过奇异极限。为此，考虑（2.1）—（2.2）中的一个特例，其中系数 a_0, ……， a_4 用新常数 m、 n、 a、 c 重新参数化为

$$a_0 = \frac{a^2 - n^2}{c^4}\,, \qquad a_1 = \frac{2n}{c^3}\,, \qquad a_2 = \frac{-1}{c^2}\,, \qquad a_3 = \frac{2m}{c^3}\,, \qquad a_4 = \frac{a^2 - n^2}{c^4}\,, \tag{2.35}$$

并通过以下变换将坐标（τ、 ϕ、 p、 q）映射到新坐标系（ψ、 φ、 r、 θ）

$$\psi = \frac{\tau}{c} - \frac{(a^2+n^2)}{c^3}\phi\,, \qquad \varphi = \frac{a}{c^3}\phi\,, \qquad r = \frac{c}{q}\,, \qquad \cos\theta = \frac{cp-n}{a}\,. \tag{2.36}$$

取 $c \to \infty$ 极限后，PD 度规 (2.1)-(2.2) 变为

$$g = \frac{\Delta}{\Sigma}\left[\mathrm{d}\psi + (2n\,\cos\theta + a\,\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\varphi\right]^2 + \frac{\sin^2\theta}{\Sigma}\left[a\,\mathrm{d}\psi - (r^2-a^2-n^2)\,\mathrm{d}\varphi\right]^2 + \Sigma\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{\Delta} + \mathrm{d}\theta^2\right)\,, \tag{2.37}$$

其中 $\Delta = r^2 - 2mr - a^2 + n^2$, $\Sigma = r^2 - (n - a\cos\,\theta)^2$。这是一个由 m, n, a 参数化的三参数（里奇平坦）欧几里得 Kerr-NUT 度规族。

由 (2.3) 可知，该度量的韦尔曲率为

$$\Psi_2^{\pm} = \frac{m \mp n}{[r \mp (n - a\,\cos\theta)]^3}\,. \tag{2.38}$$

令 $a = 0$，得到带有参数$m = M$和 $n = -\mathrm{i}\,N$的两参数 Taub-NUT 度规族。进一步令 $m = -n$，由 (2.38) 可知 $\Psi_2^- = 0$，因此曲率是自对偶的，并得到 SDTN 度规。需要注意的是，虽然无需对 PD 度规 (2.1) 进行复化即可得到 (2.37)，但 $c \to \infty$ 极限是奇异的，因为它会使渐近结构从渐近局部欧几里得变为渐近局部平坦。

由此可知，根据定义 2.1，SDTN 度规是一个自对偶黑洞度规。需要指出的是，尽管 SDTN 是最简单的自对偶黑洞度规（就其在全局上有定义、拓扑平凡且只有一个参数而言），但文献中常将其用作自对偶黑洞的原型（参见 [16, 17, 19, 20, 31]）。这是因为复化 SDTN 度规 (2.31) 也存在分裂号差下的实切片。这个分裂号差 SDTN 度规具有一个零“视界”（度量的正、负号差分量在此处交换符号），视界之后，度量可以延拓至真正的曲率奇点 [31]。尽管在分裂号差下，黑洞通常的因果解释并不适用，但视界和奇点的存在似乎进一步证明了“自对偶黑洞”这一名称的合理性。值得探究 Eguchi-Hanson 或 SDPD 在分裂号差下是否也具有类似特征。

3 从对偶扭量二次曲面到自对偶 Kerr-Schild 度量

自对偶黑洞度规的三类都具有两个重要性质：自对偶性，以及属于代数特殊的 D 型。前者意味着，所有自对偶黑洞都可以通过著名的非线性引力子构造 [6, 8]，用扭量理论来描述。从本质上说，该构造指出，在满足某些技术性假设的情况下，任意自对偶四维流形都与复射影空间 $\mathbb{P}^3$ 的某个开子集的复变形一一对应。不过，第二个性质（代数特殊的 D 型）也有重要的影响。

本节将展示，平坦 空间的对偶扭量空间中的任意全纯二次曲面，都会产生一个具有 Kerr-Schild 形式的自对偶 D 型度量；该度量、其超凯勒结构与共形凯勒结构，以及它向 Gibbons-Hawking 形式的变换，都明确编码在对偶扭量二次曲面的数据中。简要概述扭量空间和对偶扭量空间的一些重要事实后，我们将阐述如何从一般的对偶扭量二次曲面构造自对偶 D 型度量。

3.1 扭量空间与对偶扭量空间

令 $Z^A = (\mu^{\dot\alpha},\ \lambda_\alpha)$ 为复射影空间 $\mathbb{P}^3$ 上的齐次坐标，并定义

$$\mathbb{PT} = \left\{ Z \in \mathbb{P}^3 \,|\, \lambda_\alpha \neq 0 \right\} , \tag{3.1}$$

作为复化平直空间的扭量空间，$\mathbb{M}$（我们的记号约定遵循 [64]）。点 $x^{\alpha\dot\alpha} \in \mathbb{M}$ 由 $\mathbb{PT}$ 中法丛为$\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$ 的全纯有理曲线描述；这些曲线由以下“关联关系”明确给出

$$\mu^{\dot\alpha} = x^{\alpha\dot\alpha}\, \lambda_\alpha \,. \tag{3.2}$$

要得到欧几里得 $\mathbb{R}^4 \subset \mathbb{M}$，需在扭量空间中施加适当的实性条件。具体而言，定义“ 四元数共轭”运算

$$\hat{Z}^A := \left(-\overline{\mu^{\dot 1}},\, \overline{\mu^{\dot 0}},\, -\overline{\lambda_1},\, \overline{\lambda_0} \right) , \tag{3.3}$$

与点 $x \in \mathbb{R}^4$ 对应的扭量直线，是指在该运算下保持不变的直线（参见 [8, 65]）。

非线性引力子构造指出，任何自对偶度规都可以通过对 $\mathbb{PT}$ [6, 8] 的某个开子集进行复变形来编码；具体而言，这归结为对复结构进行哈密顿变形

$$\bar\partial \to \bar\partial + \frac{\partial h}{\partial \mu_{\dot\alpha}} \frac{\partial}{\partial \mu^{\dot\alpha}} \,, \tag{3.4}$$

对于满足可积条件的 $h \in \Omega^{0,1}(\mathbb{PT},\ \mathcal{O}(2))$

$$\bar\partial h + \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial \mu_{\dot\alpha}} \wedge \frac{\partial h}{\partial \mu^{\dot\alpha}} = 0 \,. \tag{3.5}$$

相关自对偶空间中的点由有理曲线给出，这些曲线相对于复结构 (3.4) 是全纯的。它们由截面 $\mu^{\dot\alpha} = F^{\dot\alpha}(x,\ \lambda)$ 定义，具有权重 $+1$，并且是以下偏微分方程的解

$$\bar\partial F^{\dot\alpha} = \frac{\partial h}{\partial \mu_{\dot\alpha}} \,, \tag{3.6}$$

在黎曼球面上。

尽管 Kodaira 定理 [66, 67] 保证了该方程存在一个由 4 个参数构成的解族（对于足够“小”的数据 h），但确定这些全纯曲线的明确形式未必容易。然而，重构自对偶

度规需要明确了解与扭量空间相关的全纯曲线（参见 [10]）。这是可积系统的典型特征，其中可积性所带来的优势通过求解“伴随线性问题”而获得。

自对偶黑洞的第二个统一特征——即它们属于 D 型代数特殊情形——使得另一种描述成为可能。引人注目的是，这种描述所依据的是对偶扭量空间，而不是与自对偶性相关联的扭量空间。早在很久以前，Haslehurst 和 Penrose [68] 以及 Woodhouse [69], 在各种更早期工作的基础上（参见 [35, 70–72]）就注意到了使用对偶扭量理论描述自对偶 D 型度量的可能性。虽然这些构造本质上使用了弯曲对偶扭量空间，但我们的对应版本将只使用平直空间的对偶扭量空间中的简单几何对象；我们将从这些对象中恢复所有自对偶黑洞度规，以及有关其超凯勒几何的详细信息。

如果 $\mathbb{PT}$ 由（3.1）给出的是平直空间的扭量空间，那么对偶扭量空间 就只是射影对偶：

$$\mathbb{PT}^* = \{W_A = (\pi_{\dot\alpha}, \omega^\alpha) \,|\, \pi_{\dot\alpha} \neq 0\} \,, \tag{3.7}$$

其中， W_A 充当对偶扭量空间上的齐次坐标。这个对偶扭量空间通过关联关系与平直空间相关联

$$\omega^\alpha = x^{\alpha\dot\alpha}\, \pi_{\dot\alpha} \,, \tag{3.8}$$

这表明，平直空间中的一点 $x^{\alpha\dot\alpha}$ 对应于 $\mathbb{PT}^*$中线性嵌入的全纯黎曼球面——或称对偶扭量直线。选取$\mathbb{M}$ 中的欧几里得实 $\mathbb{R}^4$ ，同样会诱导出一个类似于 (3.3) 的实结构

$$\hat W_A = \left(-\overline{\pi_{\dot 1}},\, \overline{\pi_{\dot 0}},\, -\overline{\omega^1},\, \overline{\omega^0}\right) \,, \tag{3.9}$$

它保持那些对应于 $\mathbb{R}^4$中各点的对偶扭量直线不变。

可以考虑对偶扭量空间的复变形，并作出与非线性引力子构造中相应假设相似的一些技术性假设，由此得到弯曲的反自对偶四维流形。因此，或许会觉得对偶扭量空间与自对偶黑洞毫无关系并不奇怪。然而，我们将看到，所有自对偶黑洞度量都源自平直 对偶扭量空间中的一个简单几何构造，$\mathbb{PT}^*$。

虽然我们不需要通常与非线性引力子构造相关的复变形理论（无论是在扭量空间还是对偶扭量空间中），但标准扭量工具中有一项确实在我们的构造中发挥重要作用。这就是彭罗斯变换，它是一种利用扭量空间或对偶扭量空间中的解析数据，在平直空间中求解零静质量（z.r.m.）方程的机制 [40, 73]。

我们的构造所需的彭罗斯变换的具体形式如下：

$$\{\text{z.r.m. fields of helicity } h \geq 0 \text{ on flat space}\} \cong H^1(\mathbb{PT}^*, \mathcal{O}(-2-2h)) \,. \tag{3.10}$$

这里，螺旋度为 $h \geq 0$ 的零秩质量场是一个完全对称的、价数为 $2h$ 的带点旋量场 $\varphi_{\dot\alpha_1\cdots\dot\alpha_{2h}}(x)$，它满足

$$\nabla^{\alpha\dot\alpha_1}\varphi_{\dot\alpha_1\cdots\dot\alpha_{2h}} = 0\,. \tag{3.11}$$

(3.10) 表明，这些方程的每个解都来自对偶扭量空间的层上同调，反过来，每个上同调类也对应一个解。我们可以用切赫上同调或 Dolbeault上同调来理解这一点：令 $f \in \check{}H^1(\mathbb{PT}^*, \mathcal{O}(-2-2h))$ 为一个切赫上同调代表元，$\mathrm{f} \in H^{0,1}(\mathbb{PT}^*, \mathcal{O}(-2-2h))$ 为相应的 Dolbeault上同调代表元（根据切赫–Dolbeault 同构）。与这些上同调代表元相关联的零秩质量场由以下积分公式构造：

$$\varphi_{\dot\alpha_1\cdots\dot\alpha_{2h}}(x) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\Gamma\subset X} \mathrm{D}\pi\, \pi_{\dot\alpha_1}\cdots\pi_{\dot\alpha_{2h}}\, f|_X = \int_X \mathrm{D}\pi\wedge\pi_{\dot\alpha_1}\cdots\pi_{\dot\alpha_{2h}}\,\mathrm{f}|_X\,, \tag{3.12}$$

其中，$X \cong \mathbb{P}^1$ 是由 (3.8) 定义、对应于 $x^{\alpha\dot\alpha}$的对偶扭量直线，$f|_X$、$\mathrm{f}|_X$表示上同调代表元在这条直线上的拉回。在切赫公式中，积分沿对偶扭量直线上的实积分路径 Γ 进行，该路径将黎曼球面上$f|_X$ 的极点分隔开。

3.2 从自对偶零麦克斯韦场到自对偶Kerr-Schild度规

度量上的真空自对偶性（或超凯勒）条件，使得我们能够在完全不明确提及扭量理论的情况下进行描述。其中，最著名的或许是 Plebański 的“天球”构造，它通过满足某些非线性偏微分方程 [74] 的标量势，给出了任意（复）超凯勒度量的局部描述。其中一个标量势（通常称为第一Plebański标量）是在特定复结构下超凯勒度量的凯勒势。另一方面，第二 Plebański 标量将超凯勒度量表示为对 $\mathbb{C}^4$ 上平坦超凯勒度规的有限变形。本文将用到的正是这个第二 Plebański 标量。

设 M 是一个光滑四维流形，具有局部坐标 $x^a = (u,\ v,\ w,\ \tilde w)$ 和一个标量函数 $\Theta = \Theta(u,\ v,\ w,\ \tilde w)$。若 Θ 满足所谓的第二天球方程

$$\Theta_{uv} - \Theta_{w\tilde w} + \Theta_{vv}\Theta_{ww} - \Theta_{vw}^2 = 0\,, \tag{3.13}$$

其中下标表示偏导数，随后 Plebański 证明，[74] 张量场

$$g_{ab}\,\mathrm{d}x^a\,\mathrm{d}x^b := 2\,(\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v - \mathrm{d}w\mathrm{d}\tilde w) - 2\left(\Theta_{ww}\,\mathrm{d}u^2 + 2\,\Theta_{wv}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\tilde w + \Theta_{vv}\,\mathrm{d}\tilde w^2\right)\,, \tag{3.14}$$

是 M上的复里奇平坦度规，其 Weyl 张量相对于定向 $\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v\wedge\mathrm{d}w\wedge\mathrm{d}\,\tilde w$是自对偶的。换言之，由于天球方程 (3.13)，度规 (3.14) 自动成为超凯勒度量。此外，M上的每个超凯勒度量在局部都可以用这种势 Θ 来描述。

利用平直空间上的协变常旋量场 o_α，并令其满足 $\nabla_{\alpha\dot\alpha}o_\beta = 0$，其中 $\nabla_{\alpha\dot\alpha}$ 是平直度规的协变导数，即可用抽象旋量指标来表示这一构造。记

$$\tilde\nabla_{\dot\alpha} := o^\alpha\,\nabla_{\alpha\dot\alpha}\,, \tag{3.15}$$

度量的第二 Plebański 形式变为

$$g_{ab} = \eta_{ab} - 2\, o_\alpha\, o_\beta\, \tilde{\nabla}_{\dot\alpha} \tilde{\nabla}_{\dot\beta} \Theta\,, \tag{3.16}$$

对于 η_{ab} 平直度规。同样，第二天球方程（3.13）变为

$$\Box\Theta + \left(\tilde{\nabla}_{\dot\alpha} \tilde{\nabla}_{\dot\beta} \Theta\right) \left(\tilde{\nabla}^{\dot\alpha} \tilde{\nabla}^{\dot\beta} \Theta\right) = 0\,, \tag{3.17}$$

其中 $\Box = \nabla^{\alpha\dot\alpha} \nabla_{\alpha\dot\alpha}$ 是平直空间波算子。正如预期的那样，可以证明，除了 Ricci 平坦之外，度规（3.16）的旋量 Weyl 张量分量还满足 $\Psi_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$, $\Psi_{\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma\dot\delta} \neq 0$——也就是说，该度规是真空自对偶的，或者说是超凯勒的。

因此，给定第二天球方程（3.13）或（3.17）的一个解，就可以自动得到形式为（3.14）或（3.16）的真空自对偶复度规。当然，第二天球方程是一个非线性偏微分方程，其解不应（至少不能天真地认为）容易求得。Tod [37] 提出了一种巧妙的构造方法，可以直接从平直空间中的零自对偶麦克斯韦场生成第二天球方程的解。由此得到的度规不仅是自对偶的，而且还是 Kerr-Schild 度规。

零自对偶麦克斯韦场是在平直空间中的复阿贝尔规范势 $A_{\alpha\dot\alpha}$，其场强满足

$$F_{\alpha\dot\alpha\beta\dot\beta} = \epsilon_{\alpha\beta}\, \varphi_{\dot\alpha\dot\beta}\,, \qquad \nabla^{\alpha\dot\alpha} \varphi_{\dot\alpha\dot\beta} = 0\,, \qquad \varphi^{\dot\alpha\dot\beta}\, \varphi_{\dot\alpha\dot\beta} = 0\,. \tag{3.18}$$

这里的第二个方程，即螺旋度 $+1$z.r.m. 方程，是场强的 Bianchi 恒等式的推论。

令 $\{o_\alpha, \iota_\alpha\}$ 为未点旋量的常量二重标架，其中 o_α 与上文 (3.15) 中用于定义微分算子 $\nabla_{\dot\alpha} = o^\alpha \nabla_{\alpha\dot\alpha}$ 的旋量相同。不失一般性，可将此常量二重标架归一化，使得 $\iota^\alpha\, o_\alpha = 1$。将 $\varphi_{\dot\alpha\dot\beta}$ 的 z.r.m. 与 o_α 收缩，立即得到

$$\tilde{\nabla}^{\dot\alpha} \varphi_{\dot\alpha\dot\beta} = 0\,, \tag{3.19}$$

这意味着局部必定存在一个标量函数 $\Theta(x^a)$，使得

$$\varphi_{\dot\alpha\dot\beta} = \tilde{\nabla}_{\dot\alpha} \tilde{\nabla}_{\dot\beta} \Theta\,. \tag{3.20}$$

很快便会明白，为这个标量采用与第二 Plebański 标量相同的符号是有依据的。

注意，这并不能唯一确定势 Θ。事实上，对于任意满足以下条件的函数 $f(x^a)$，

$$\tilde{\nabla}_{\dot\alpha} \tilde{\nabla}_{\dot\beta} f = 0\,, \tag{3.21}$$

由此可知，平移后的势

$$\Theta \to \Theta' := \Theta + f\,, \tag{3.22}$$

仍将通过 (3.20) 产生相同的零自对偶麦克斯韦场。按照旋量二重标架分解坐标 x^a，便可最容易地理解这一事实的影响：

$$x^{\dot\alpha} := o^\alpha\, x_\alpha{}^{\dot\alpha}\,, \qquad \tilde{x}^{\dot\alpha} := \iota^\alpha\, x_\alpha{}^{\dot\alpha}\,, \tag{3.23}$$

使得 $\tilde{\nabla}_{\dot{\alpha}}\tilde{x}^{\dot{\beta}} = \delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}}$。由此可见，标量势 Θ 的定义中 (3.21)–(3.22) 所含的模糊性，归结为三个未指定的二元函数：

$$f(x^a) = \tilde{x}^{\dot{\beta}}\, g_{\dot{\beta}}(x^{\dot{\alpha}}) + h(x^{\dot{\alpha}})\,, \tag{3.24}$$

对于 $x^{\dot{\alpha}}$的任意函数$g_{\dot{\beta}}$、 h。

因此，给定$\varphi_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$的任意势 Θ，我们可以考虑另一种势 $\Theta' = \Theta + f$，其中 f 为式（3.24）所示形式的任意函数。注意到

$$\Box\Theta' = \Box\Theta + \Box f = \Box\Theta + \iota_\alpha\, \nabla^{\alpha\dot{\beta}} g_{\dot{\beta}}\,, \tag{3.25}$$

显然，总可以选择函数$g_{\dot{\beta}}(x^{\dot{\alpha}})$，使得 $\Box\Theta' = 0$。这种对势 Θ 的“规范”选择与麦克斯韦方程相容，因为将 z.r.m. 方程中的$\varphi_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$与 ι_α 收缩后得到

$$\tilde{\nabla}_{\dot{\beta}}\,\Box\Theta = 0\,, \tag{3.26}$$

特别地，当 $\Box\Theta = 0$时，该式成立。

因此，适当地运用自由度（3.21），结合零条件，可知 Θ满足 (3.18)

$$\Box\Theta = 0 = \left(\tilde{\nabla}_{\dot{\alpha}}\tilde{\nabla}_{\dot{\beta}}\Theta\right)\left(\tilde{\nabla}^{\dot{\alpha}}\tilde{\nabla}^{\dot{\beta}}\Theta\right)\,. \tag{3.27}$$

因此，通过分别令方程中的每一项为零， Θ 便是第二天球方程（3.17）的解。换言之，平直空间中的每个零自对偶麦克斯韦场都定义了第二天球方程的一个解，因而也定义了一个形如（3.16）的真空自对偶度规。

特别是，零自对偶麦克斯韦场给出了自对偶度规

$$g_{ab} = \epsilon_{\alpha\beta}\,\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} - 2\,o_\alpha\,o_\beta\,\varphi_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\,. \tag{3.28}$$

然而，由于 $\varphi_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ 是零的，因此它只有一个退化的主旋量，记作 $\alpha_{\dot{\alpha}}$，并且可以写成

$$\varphi_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \phi\,\alpha_{\dot{\alpha}}\,\alpha_{\dot{\beta}}\,, \tag{3.29}$$

其中 ϕ 是某个整体标量场。特别是，这意味着度规 (3.28) 的非平凡部分

$$-2\,o_\alpha\,o_\beta\,\varphi_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \kappa\,\phi\,o_\alpha\,o_\beta\,\alpha_{\dot{\alpha}}\,\alpha_{\dot{\beta}} \equiv \kappa\,\phi\,k_a\,k_b\,, \tag{3.30}$$

其中 κ 是一个数值常数（始终可以用它吸收迄今为止因我们的约定而产生的因子 -2），而 k_a 是零向量

$$k_{\alpha\dot{\alpha}} := o_\alpha\,\alpha_{\dot{\alpha}}\,. \tag{3.31}$$

这正是度规 (3.28) 满足 *Kerr-Schild* [75, 76] 条件的情形。

这一推理过程可概括如下：

定理 3.1（Tod [37]）设 $\varphi_{\dot\alpha\dot\beta} = \kappa\,\phi\,\alpha_{\dot\alpha}\,\alpha_{\dot\beta}$是平直空间中的零自对偶麦克斯韦场。那么，存在一个标量势 Θ o_α $\varphi_{\dot\alpha\dot\beta}$ =和一个常旋量，使得 $o^\alpha\,o^\beta\,\nabla_{\alpha\dot\alpha}\nabla_{\beta\dot\beta}\Theta$ $\Box\Theta = 0$ 和，且度量

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^{\alpha\dot\alpha}\,\mathrm{d}x^{\alpha\dot\alpha} + o_\alpha\,o_\beta\,\varphi_{\dot\alpha\dot\beta}\,\mathrm{d}x^{\alpha\dot\alpha}\,\mathrm{d}x^{\beta\dot\beta}\,, \tag{3.32}$$

是超凯勒的，并且是 *Kerr-Schild* 型的。

换言之，平直空间中的每个零自对偶麦克斯韦场都会产生一个真空自对偶 Kerr-Schild 度规。

3.3 从对偶扭量二次曲面得到自对偶零麦克斯韦场

现在可以看出，平直空间的对偶扭量空间中的任意全纯二次曲面$\mathbb{PT}^*$，都会产生一个零自对偶麦克斯韦场，进而通过 Tod 构造得到一个自对偶 Kerr-Schild 度规。

定义 3.1（对偶扭量二次曲面）一个对偶扭量二次曲面是一个全纯、非退化的二次超曲面 $\mathbb{PT}^*$

$$\{W \in \mathbb{PT}^* \,|\, Q(W) = 0\}\,, \qquad where\;\; Q(W) = Q^{AB}\,W_A\,W_B\,, \tag{3.33}$$

对应于一个对称 4×4 矩阵 Q^{AB}，该矩阵不能写成 $Q^{AB} = A^{(A}\,B^{B)}$的形式。

这意味着任意对偶扭量二次曲面都对应于一个如下形式的矩阵

$$Q^{AB} = \begin{pmatrix} c^{\dot\alpha\dot\beta} & b^{\dot\alpha}{}_\beta \\ b_\alpha{}^{\dot\beta} & a_{\alpha\beta} \end{pmatrix}\,, \tag{3.34}$$

其中 $a_{\alpha\beta}$、 $b^{\dot\alpha}{}_\beta$、 $c^{\dot\alpha\dot\beta}$ 为对称二阶旋量。

根据这一定义，可以推出若干重要事实，其中一些此前已在略有不同的背景下得到证明（参见 [35, 77]）：

命题 3.1 考虑一个对偶扭量二次曲面，它由形如 (3.34) 的 $Q(W)$ 定义；它确定了以下几何结构：

1. 旋量场：

$$K^{\dot\alpha\dot\beta} = a_{\alpha\beta}\,x^{\alpha\dot\alpha}\,x^{\beta\dot\beta} + 2\,b_\beta{}^{(\dot\alpha}\,x^{|\beta|\dot\beta)} + c^{\dot\alpha\dot\beta}\,, \tag{3.35}$$

是一个二阶*Killing*旋量，满足 $\nabla^{\gamma(\dot\gamma}K^{\dot\alpha\dot\beta)} = 0$。

2. 令 $\xi_{\alpha\dot\alpha} := \frac{2}{3}\nabla_{\alpha\dot\beta}K^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha}$。则 ξ^a 是一个反自对偶 *Killing* 向量（即，ξ^a 是 *Killing* 向量且$\nabla_{\alpha\dot\alpha}\xi_{\beta\dot\beta} \propto \epsilon_{\dot\alpha\dot\beta)}$）。

3. 对称张量场

$$H_{ab} := K_{\dot\alpha\dot\beta}\,a_{\alpha\beta} - \frac{\xi^c\xi_c}{8}\,\epsilon_{\alpha\beta}\,\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\,, \tag{3.36}$$

是一个二阶 *Killing* 张量，$\nabla_{(a}H_{bc)} = 0$。

4. 向量场 $t_a := H_{ab}\,\xi^b$ 是一个与 ξ^a 对易的自对偶 *Killing* 向量。

证明： 注意，由 (3.35) 定义的旋量场 $K^{\dot\alpha\dot\beta}$ 源自二次曲面 Q，其形式为

$$Q(W)|_X = K^{\dot\alpha\dot\beta}\,\pi_{\dot\alpha}\,\pi_{\dot\beta}\,, \tag{3.37}$$

利用关联关系 (3.8) 即可得到。由于 $\pi_{\dot\gamma}\nabla^{\gamma\dot\gamma}Q|_X = 0$，因此立即可知 $\nabla^{\gamma(\dot\gamma}K^{\dot\alpha\dot\beta)} = 0$，从而证明了 (1.)。现在，令

$$\xi_{\alpha\dot\alpha} = \frac{2}{3}\,\nabla_{\alpha\dot\beta}K^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha} = 2\,(b_{\alpha\dot\alpha} + a_{\alpha\gamma}\,x^{\gamma}{}_{\dot\alpha})\,. \tag{3.38}$$

立即可知

$$\nabla_{\alpha\dot\alpha}\xi_{\beta\dot\beta} = 2\,a_{\alpha\beta}\,\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\,, \tag{3.39}$$

它是纯反自对偶的，并且意味着 $\nabla_{(a}\xi_{b)} = 0$，从而证明了 (2.)。

由 (3.39) 可得

$$a_{\alpha\beta}\,\xi^{\beta}_{\dot\alpha} = -\frac{1}{4}\,\nabla_{\alpha\dot\alpha}(\xi_b\xi^b)\,. \tag{3.40}$$

Then

$$\begin{aligned}\nabla_a H_{bc} &= \epsilon_{\dot\alpha(\dot\beta}\,\xi_{\dot\gamma)\alpha}\,a_{\beta\gamma} - \frac{1}{8}\,\nabla_a(\xi_d\xi^d)\,\epsilon_{\beta\gamma}\,\epsilon_{\dot\beta\dot\gamma}\\ &= \frac{1}{2}\left(\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\,\xi_{\dot\gamma\alpha}\,a_{\beta\gamma} + \epsilon_{\dot\alpha\dot\gamma}\,\xi_{\dot\beta\alpha}\,a_{\beta\gamma} + a_{\alpha\delta}\,\xi^{\delta}_{\dot\alpha}\,\epsilon_{\beta\gamma}\,\epsilon_{\dot\beta\dot\gamma}\right)\end{aligned} \tag{3.41}$$

由此可知 $\nabla_{(a}H_{bc)} = 0$，从而证明了 (3.)。最后，注意到这意味着 (3.41)

$$\xi^c\,\nabla_c H_{ab} = a_{\alpha\beta}\,\xi^{\gamma}{}_{(\dot\alpha}\,\xi_{|\gamma|\dot\beta)} + \frac{1}{2}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\,\epsilon_{\alpha\beta}\,\xi^{\delta}{}_{\dot\gamma}\,\xi^{\gamma\dot\gamma}\,a_{\gamma\delta} = 0\,, \tag{3.42}$$

并且，直接计算可得 $\mathcal{L}_\xi H_{ab} = 0$。这些事实与 $\nabla_{(a}H_{bc)} = 0$共同表明，$\nabla_{(a}t_{b)} = 0$，且 $[t,\xi] = 0$。最后，直接计算验证了 $\nabla_a t_b \propto \epsilon_{\alpha\beta}$，因此 t^a 是一个自对偶 Killing 向量。□

请注意，对偶扭量二次曲面的非退化性假设意味着相应的 Killing 旋量 $K^{\dot\alpha\dot\beta}$是非零的；这意味着必定存在旋量 $\alpha_{\dot\alpha}$、$\beta_{\dot\alpha}$满足 $\alpha^{\dot\alpha}\,\beta_{\dot\alpha} \neq 0$，使得

$$K^{\dot\alpha\dot\beta} = \alpha^{(\dot\alpha}\,\beta^{\dot\beta)}\,. \tag{3.43}$$

有了这一分解以及通过命题 3.1 由对偶扭量二次曲面定义的几何对象，我们得到以下关键结果：

命题 3.2 考虑任意由 $Q(W)$ 定义的对偶扭量二次曲面，它在如下意义下是一般的：

$$o^{\alpha}\,\frac{\partial Q}{\partial\omega^{\alpha}} \neq 0\,, \tag{3.44}$$

并令 $K^{\alpha\dot\alpha}$、$\xi^{\alpha\dot\alpha}$ 分别为相应的 *Killing* 旋量和反自对偶 *Killing* 向量。那么，扭量函数

$$f(W) := -\mathrm{i}\,\kappa\left[Q(W)\left(o^{\alpha}\,\frac{\partial Q}{\partial\omega^{\alpha}}\right)^2\right]^{-1}\,, \tag{3.45}$$

是 $\check{H}(\mathbb{PT}^*, \mathcal{O}(-4))$ 中的一个上同调类的代表，其彭罗斯变换为零自对偶麦克斯韦场

$$\varphi_{\dot\alpha\dot\beta} = \kappa\,\phi\,\alpha_{\dot\alpha}\,\alpha_{\dot\beta}\,, \qquad \phi := \frac{-\mathrm{i}}{(\alpha_{\dot\alpha}\,\beta^{\dot\alpha})\,(k_a\,\xi^a)^2}\,, \qquad k_{\alpha\dot\alpha} := o_\alpha\,\alpha_{\dot\beta}\,. \tag{3.46}$$

证明： 二次函数 $Q(W) = Q^{AB}\,W_A\,W_B$ 的定义以及一般性假设 (3.44)，确保由 (3.45) 定义的 $f(W)$ 在 $\mathbb{PT}^*$ 上取值于 $\mathcal{O}(-4)$。通过标准论证也可得出，f 在 $\check{H}^1(\mathbb{PT}^*,\ \mathcal{O}(-4))$ 中定义了一个切赫上同调类。根据对偶扭量彭罗斯变换，这意味着 f 通过积分公式 (3.12) 定义了一个自对偶麦克斯韦场：

$$\varphi_{\dot\alpha\dot\beta}(x) = -\frac{\kappa}{2\pi}\oint_{\Gamma\subset X}\mathrm{D}\pi\ \frac{\pi_{\dot\alpha}\,\pi_{\dot\beta}}{Q\,(o^\alpha\,\frac{\partial Q}{\partial\omega^\alpha})^2}\bigg|_X\,. \tag{3.47}$$

利用 (3.43)，可得

$$Q|_X = K^{\dot\alpha\dot\beta}\,\pi_{\dot\alpha}\,\pi_{\dot\beta} = (\alpha^{\dot\alpha}\,\pi_{\dot\alpha})\,(\beta^{\dot\beta}\,\pi_{\dot\beta})\,, \tag{3.48}$$

因此，我们取积分路径 $\Gamma\subset X$ 为以满足 $\alpha^{\dot\alpha}\pi_{\dot\alpha}=0$ 的点为中心的小圆。此外，还可得

$$o^\alpha\,\frac{\partial Q}{\partial\omega^\alpha}\bigg|_X = 2\left(a_{\alpha\beta}\,x^{\beta\dot\beta} + b^{\dot\beta}{}_\alpha\right)o^\alpha\,\pi_{\dot\beta} = -o_\alpha\,\pi_{\dot\alpha}\,\xi^{\alpha\dot\alpha}\,, \tag{3.49}$$

这是利用命题 3.1 中的定义得到的。

于是，计算 (3.47) 中的围道积分只需进行简单的留数计算：

$$\begin{aligned}\varphi_{\dot\alpha\dot\beta}(x) &= -\frac{\kappa}{2\pi}\oint_\Gamma \mathrm{D}\pi\,\frac{\pi_{\dot\alpha}\,\pi_{\dot\beta}}{(\alpha^{\dot\alpha}\,\pi_{\dot\alpha})\,(\beta^{\dot\beta}\,\pi_{\dot\beta})\,(o_\gamma\,\pi_{\dot\gamma}\,\xi^{\gamma\dot\gamma})^2}\\ &= -\frac{\mathrm{i}\,\kappa\,\alpha_{\dot\alpha}\,\alpha_{\dot\beta}}{(\beta^{\dot\gamma}\,\alpha_{\dot\gamma})\,(k_a\,\xi^a)^2}\,,\end{aligned} \tag{3.50}$$

对于 $k_a = o_\alpha\alpha_{\dot\alpha}$，如所声称的。 □

这里有几点需要说明。首先，注意到主旋量$\alpha_{\dot\alpha}$和 $\beta_{\dot\alpha}$仅在任意 $\nu\in\mathbb{C}^*$下定义到 $\alpha^{\dot\alpha}\to\nu\,\alpha^{\dot\alpha}$、$\beta^{\dot\alpha}\to\nu^{-1}\,\beta^{\dot\alpha}$，而这使 Killing 旋量 $K^{\dot\alpha\dot\beta}$保持不变。此外，所得的零自对偶麦克斯韦场（3.46）在这些缩放变换下也保持不变。将麦克斯韦场（3.46）重新写成如下形式，可以对此作出更明确的说明：

$$\varphi_{\dot\alpha\dot\beta} = \frac{\kappa}{\sqrt{2\,K^{\dot\gamma\dot\delta}\,K_{\dot\gamma\dot\delta}}}\,\frac{\alpha_{\dot\alpha}\,\alpha_{\dot\beta}}{(o_\alpha\,\alpha_{\dot\alpha}\,\xi^{\alpha\dot\alpha})^2}\,, \tag{3.51}$$

其中使用了恒等式 $\mathrm{i}\ \alpha_{\dot\alpha}\beta^{\dot\alpha} = (2K^{\dot\gamma\dot\delta}K_{\dot\gamma\dot\delta})^{1/2}$。

要直接从给定的对偶扭量二次曲面计算 $\alpha^{\dot\alpha}$、$\beta^{\dot\alpha}$，可写为

$$K^{\dot\alpha\dot\beta}\,\pi_{\dot\alpha}\,\pi_{\dot\beta} = K^{\dot0\dot0}\,(\pi_{\dot0})^2 + 2\,K^{\dot0\dot{\mathrm{i}}}\,\pi_{\dot0}\,\pi_{\dot{\mathrm{i}}} + K^{\dot{\mathrm{i}}\dot{\mathrm{i}}}\,(\pi_{\dot{\mathrm{i}}})^2 = (\pi_{\dot0})^2\,K^{\dot{\mathrm{i}}\dot{\mathrm{i}}}\,(\zeta-\zeta_-)\,(\zeta-\zeta_+)\,, \tag{3.52}$$

其中 $\zeta = \frac{\pi_{\mathrm{i}}}{\pi_{\dot{0}}}$和

$$\zeta_{\pm} := \frac{-K^{\dot{0}\mathrm{i}} \pm \sqrt{(K^{\dot{0}\mathrm{i}})^2 - K^{\dot{0}\dot{0}} K^{\mathrm{i}\mathrm{i}}}}{K^{\mathrm{i}\mathrm{i}}} \,. \tag{3.53}$$

于是可以验证 $K^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \alpha^{(\dot{\alpha}}\,\beta^{\dot{\beta})}$ 对于

$$\alpha^{\dot{\alpha}} = \sqrt{K^{\mathrm{i}\mathrm{i}}}\left(o^{\dot{\alpha}} + \zeta_{-}\,\iota^{\dot{\alpha}}\right) , \qquad \beta^{\dot{\alpha}} = \sqrt{K^{\mathrm{i}\mathrm{i}}}\left(o^{\dot{\alpha}} + \zeta_{+}\,\iota^{\dot{\alpha}}\right) , \tag{3.54}$$

从而直接根据二次曲面数据给出主旋量。

3.4 从对偶扭量二次曲面得到 Gibbons-Hawking 度量

既已证明任意对偶扭量二次曲面都会产生一个形如 (3.46) 的零自对偶麦克斯韦场 $\varphi_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$，由 Tod 定理 3.1 可知，任意对偶扭量二次曲面同样会产生一个具有 Kerr-Schild 形式 (3.32) 的复超凯勒度量。为更好地理解这一新度量的结构，先回顾一下：对于一个可定向流形，超凯勒结构等价于一组三个线性无关的反自对偶闭合二形式。对于 $\mathbb{M}$，常数旋量标架 o_α, ι_α 通过以下方式定义一个超凯勒结构

$$\omega^1_{ab} = \mathrm{i}(o_\alpha o_\beta - \iota_\alpha \iota_\beta)\,\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\,, \qquad \omega^2_{ab} = (o_\alpha o_\beta + \iota_\alpha \iota_\beta)\,\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}, \qquad \omega^3_{ab} = 2\mathrm{i}\, o_{(\alpha}\,\iota_{\beta)}\,\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\,. \tag{3.55}$$

相对于平直度规 η_{ab}($\star_\eta \omega^i_{ab} = -\omega^i_{ab}$)，这些二形式均为闭合的（$\mathrm{d}\omega^i = 0$ 对于 $i = 1, 2, 3$）且为反自对偶，其中采用如下约定

$$\star_\eta \omega^i_{ab} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ab}{}^{cd}\,\omega^i_{cd}\,, \qquad \varepsilon_{abcd} = \epsilon_{\alpha\gamma}\,\epsilon_{\beta\delta}\,\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\delta}}\,\epsilon_{\dot{\beta}\dot{\gamma}} - \epsilon_{\alpha\delta}\,\epsilon_{\beta\gamma}\,\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}\,\epsilon_{\dot{\beta}\dot{\delta}}\,. \tag{3.56}$$

然而，相对于由 (3.32) 给出的弯曲度规 g_{ab}，这些二形式并非反自对偶。 g_{ab} 的正确超凯勒结构包含在下述内容中：

命题 3.3 考虑由对偶扭量二次曲面(3.34)定义，并由(3.32)给出的复超凯勒度量 g_{ab} 。则：

1. 令 ω^i_{ab} 由(3.55)定义，则 g_{ab} 的一个超凯勒结构为

$$\Omega^1_{ab} = \omega^1_{ab} + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\,\varphi_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\,\epsilon_{\alpha\beta}\,, \qquad \Omega^2_{ab} = \omega^2_{ab} - \tfrac{1}{2}\,\varphi_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\,\epsilon_{\alpha\beta}, \qquad \Omega^3_{ab} = \omega^3_{ab}. \tag{3.57}$$

2. 由二次曲面定义的向量场 ξ^a 和 t^a 是 g_{ab}的 *Killing* 向量。此外， g_{ab} 具有一个三全纯 *Killing* 向量 χ^a；当 $a_{\alpha\beta} = 0$ 时， $\chi^a = \xi^a$ ；当 $a_{\alpha\beta} \neq 0$时，$\chi^a = t^a$ 。

3. 度量(3.32)可写成 *Gibbons-Hawking* 形式

$$g = V^{-1}\,(\mathrm{d}\psi + A)^2 + V\left[\mathrm{d}\mathcal{X}^2 + \mathrm{d}\mathcal{Y}^2 + \mathrm{d}\mathcal{Z}^2\right] , \tag{3.58}$$

其中， $\partial_\psi = \chi^a \partial_a$ 是第(2)点中的三全纯 *Killing* 向量，而 $\mathcal{X}$、$\mathcal{Y}$、$\mathcal{Z}$是由下式定义的标量场：

$$\mathrm{d}\mathcal{X} = -\chi \lrcorner\, \Omega^1\,, \qquad \mathrm{d}\mathcal{Y} = -\chi \lrcorner\, \Omega^2\,, \qquad \mathrm{d}\mathcal{Z} = -\chi \lrcorner\, \Omega^3\,. \tag{3.59}$$

证明： 我们从第 (1) 点开始。由于 ω^i_{ab}（由 (3.55) 定义）是闭合的，而 $F_{ab}=\varphi_{\dot\alpha\dot\beta}\epsilon_{\alpha\beta}$是自对偶麦克斯韦场，因此也是闭合的（即，根据 Bianchi 恒等式，$\mathrm{d}F=0$），由此可知 $\mathrm{d}\Omega^i=0$。因此，只需检验 $\star_g\Omega^i=-\Omega^i$是否成立，其中 $\star_g$ 是相对于 g_{ab}的霍奇星算子。由于 g_{ab} 与 η_{ab} 相差一个 Kerr-Schild 项，其体积形式与平直度规的体积形式相同，即 ε_{abcd}，如 (3.56) 所示。因此，我们只需计算

$$\star_g\Omega^i_{ab}=\frac{1}{2}\,\varepsilon_{abcd}\,g^{ce}\,g^{df}\,\Omega^i_{ef}\,, \tag{3.60}$$

其中 $g^{ab}=\eta^{ab}-h^{ab}$ 对于

$$h^{ab}=o^\alpha\,o^\beta\,\varphi^{\dot\alpha\dot\beta}\,, \tag{3.61}$$

逆度量的 Kerr–Schild 摄动。

现在通过直接计算来证明 (1)。例如，考虑 Ω^1_{ab}，其余 $i=2,\,3$ 种情形的证明类似。可以证明

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}\,(\eta^{ce}-h^{ce})\,(\eta^{df}-h^{df})\,\omega^1_{ef}=-\omega^1_{ab}-\mathrm{i}\,\varphi_{\dot\alpha\dot\beta}\,\epsilon_{\alpha\beta}\,, \tag{3.62}$$

这里用到了 (3.55) 的显式公式以及恒等式

$$o_\alpha\,\iota_\beta-\iota_\alpha\,o_\beta=\epsilon_{\alpha\beta}\,. \tag{3.63}$$

此外，由于 $F_{ab}=\epsilon_{\alpha\beta}\varphi_{\dot\alpha\dot\beta}$是零且 SD，可得

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}\,(\eta^{ce}-h^{ce})\,(\eta^{df}-h^{df})F_{ef}=\frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}\,\eta^{ce}\,\eta^{df}\,F_{ef}=F_{ab}\,, \tag{3.64}$$

结合 (3.62) 可知 $\star_g\Omega^1_{ab}=-\Omega^1_{ab}$。另外两种情形可用类似方法证明。

现在考虑 (2)。向量 ξ^a 满足 $\mathcal{L}_\xi g_{ab}=\mathcal{L}_\xi h_{ab}$，其中 $h_{ab}=o_\alpha o_\beta\varphi_{\dot\alpha\dot\beta}$。现在，$\mathcal{L}_\xi o_\beta=a_\beta{}^\gamma o_\gamma$且 $\mathcal{L}_\xi\varphi_{\dot\alpha\dot\beta}=\xi^c\nabla_c\varphi_{\dot\alpha\dot\beta}$，因此

$$\mathcal{L}_\xi g_{ab}=o_\alpha\,o_\beta\,\xi^c\nabla_c\varphi_{\dot\alpha\dot\beta}+2\,\varphi_{\dot\alpha\dot\beta}\,a_\alpha{}^\gamma\,o_\gamma\,o_\beta\,. \tag{3.65}$$

利用公式 (3.46) 计算 $\varphi_{\dot\alpha\dot\beta}$可得

$$o_\alpha\,o_\beta\xi^c\nabla_c\varphi_{\dot\alpha\dot\beta}=-2a_\alpha{}^\gamma\,o_\gamma\,o_\beta\,\varphi_{\dot\alpha\dot\beta}\,, \tag{3.66}$$

由此可知 $\mathcal{L}_\xi g_{ab}=0$，因此 ξ^a 是 g_{ab}的 Killing 向量。注意，若$a_{\alpha\beta}=0$，则 $\mathcal{L}_\xi o_\alpha=0$，所以 $\mathcal{L}_\xi\Omega^i=0$适用于 $i=1,\,2,\,3$，因此 ξ^a是三全纯的。然而，若 $a_{\alpha\beta}\neq0$，则 ξ^a并非三全纯。此外，注意当 $a_{\alpha\beta}=0$时，由 (3.36) 可得 $t^a\propto\xi^a$，因此 t^a 不包含新信息。

对于 t^a，简单计算可得 $\mathcal{L}_to_\beta=0$；直接进行更为繁琐的计算则可得 $\mathcal{L}_t\varphi_{\dot\alpha\dot\beta}=0$。因此，$\mathcal{L}_th_{ab}=0$，所以 $\mathcal{L}_tg_{ab}=0$，并且 t^a 是 g_{ab}的 Killing 向量。此外，还可推出 $\mathcal{L}_t\Omega^i=0$，因此 t^a 是三全纯的。

这就确立了（2），意味着 g_{ab} 总是具有一个三全纯 Killing 向量 χ^a。任何具有三全纯 Killing 向量的超凯勒度量必然都允许一种 Gibbons-Hawking 形式（3.58），而相关平直三维空间的坐标

就是相对于超凯勒结构 [78]而言，该 Killing 向量场的动量映射。特别地，这意味着 $\mathbb{R}^3$ 上的平坦坐标恰好由（3.59）给出，从而确立了（3）。□

在实际应用中，我们需要将变形后的 Gibbons-Hawking 坐标 (3.59) 表示为平坦空间坐标的表达式。可以如下求得。未变形的超凯勒结构 (3.55) 通过下式定义了 (3.59) 的平坦空间类比：

$$\mathrm{d}X = -\chi \lrcorner \omega^1 \,, \qquad \mathrm{d}Y = -\chi \lrcorner \omega^2 \,, \qquad \mathrm{d}Z = -\chi \lrcorner \omega^3 \,. \tag{3.67}$$

令 G 为满足下式的标量函数：

$$\nabla_{\alpha\dot\alpha} G = \varphi_{\dot\alpha\dot\beta}\, \chi_\alpha{}^{\dot\beta} \,. \tag{3.68}$$

于是，由 (3.59)、(3.57) 和 (3.67) 可得

$$\mathcal{X} = X - \mathrm{i}\,\frac{G}{2} \,, \qquad \mathcal{Y} = Y + \frac{G}{2} \,, \qquad \mathcal{Z} = Z \,, \tag{3.69}$$

对于变形后的 Gibbons-Hawking 坐标。

当我们要求弯曲度规 g_{ab} 为实且黎曼时，这会立即带来一个显而易见且重要的结果。具体而言，(3.69) 意味着 g_{ab} 必须定义在复化时空的新 实切片上；也就是说，这个实切片不同 于平直度规所用的实切片。这是因为若 $G \neq 0$，(X, Y) 和 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 不可能同时为实数。事实上，注意到

$$\mathcal{X} + \mathrm{i}\mathcal{Y} = X + \mathrm{i}Y \,, \qquad \text{but} \qquad \mathcal{X} - \mathrm{i}\mathcal{Y} = X - \mathrm{i}Y - \mathrm{i}G \,. \tag{3.70}$$

这一事实意味着，定义 g 的实流形的拓扑可能不同于定义 $\mathbb{R}^4$ 的实流形的拓扑。

4 对偶扭量二次曲面是自对偶黑洞

至此，我们已经证明，每个一般的——其含义见（3.44）——对偶扭量二次曲面都会导出一个真空、自对偶（或超凯勒）度量，并且该度量既具有单 Kerr–Schild 形式，也具有 Gibbons-Hawking 形式。本节中，我们对所有能够导出黎曼超凯勒度量的一般对偶扭量二次曲面进行分类，表明它们分为三个不同的类别。随后，我们证明这三个类别恰好对应于第 2 节讨论的三种自对偶黑洞度规。

4.1 对偶扭量二次曲面的分类

我们在第 3 节中看到， $\mathbb{PT}^*$ 中任意一般的对偶扭量二次曲面，其矩阵表示为

$$Q^{AB} = \begin{pmatrix} c^{\dot\alpha\dot\beta} & b^{\dot\alpha}{}_\beta \\ b_\alpha{}^{\dot\beta} & a_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \,, \tag{4.1}$$

通过自对偶零Maxwell场 (3.46)，会导出超凯勒度量 g_{ab} (3.32)。相对于与超凯勒定向相反的定向，这一度量也严格共形凯勒。该共形凯勒结构通过 Killing 旋量 $K^{\dot\alpha\dot\beta}$ 编码在二次曲面中（参见 [35, 39, 79]）。

当自对偶零Maxwell场中的参数 $\kappa \to 0$ 使 g_{ab} 平滑地趋于平直度规 η_{ab} 时，后者仍具有由 Q 定义的非平凡共形凯勒结构（参见 SDPD 的共形凯勒结构 (2.9)，它在平直极限下保持不变）。若要求所得平直度规为欧几里得实，则 $\mathbb{PT}^*$ 继承一个实结构；而要使共形凯勒结构也为实，二次曲面必须 在 $\mathbb{PT}^*$ 的实结构下保持不变。

用 Q^{AB} 在其矩阵分解 (4.1) 中的分量来表示，这意味着 th at

$$\hat a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}\,, \qquad \hat b_\alpha{}^{\dot\beta} = b_\alpha{}^{\dot\beta}\,, \qquad \hat c^{\dot\alpha\dot\beta} = c^{\dot\alpha\dot\beta}\,. \tag{4.2}$$

因此 $a_{\alpha\beta}a^{\alpha\beta} \neq 0$ 和 $c^{\dot\alpha\dot\beta}c_{\dot\alpha\dot\beta} \neq 0$，这使得可以将其分解为主旋量，如下所示

$$a_{\alpha\beta} = 2\mathrm{i}\, a\, o_{(\alpha}\,\iota_{\beta)}\,, \qquad c^{\dot\alpha\dot\beta} = 2\mathrm{i}\, c\, o^{(\dot\alpha}\,\iota^{\dot\beta)}\,, \tag{4.3}$$

其中 $o_\alpha\iota^\alpha = 1 = o_{\dot\alpha}\iota^{\dot\alpha}$。实性条件 (4.2) 可表述为：$\hat{}o_\alpha = \iota_\alpha$、$\hat{}o_{\dot\alpha} = \hat\iota_{\dot\alpha}$ 和 $a,\ c \in \mathbb{R}$。

现在，（复化）平直空间 $\mathbb{M}$ 的原点选择是任意的，因此我们可以将 $x^{\alpha\dot\alpha} = \tilde x^{\alpha\dot\alpha} - x_0^{\alpha\dot\alpha}$平移 $x_0^{\alpha\dot\alpha}$任意常数四矢量。在这一平移下，与对偶扭量二次曲面相关的 Killing 旋量（ 3.35 ）变为

$$K^{\dot\alpha\dot\beta} = a_{\alpha\beta}\,\tilde x^{\alpha\dot\alpha}\,\tilde x^{\beta\dot\beta} + 2\left[2\,b_\beta{}^{(\dot\alpha} - a_{\alpha\beta}\,x_0^{\alpha(\dot\alpha}\right]\tilde x^{\dot\beta)\beta} + c^{\dot\alpha\dot\beta} - 2\,b_\beta{}^{(\dot\alpha}\,x^{\dot\beta)}_0{}^{\beta} + a_{\alpha\beta}\,x_0^{\alpha\dot\alpha}\,x_0^{\beta\dot\beta}\,. \tag{4.4}$$

Usin利用这一自由度，我们看到出现了四种不同的情形，其中只有三种值得关注 .

首先，假设 $a_{\alpha\beta} = 0 = b_\alpha{}^{\dot\beta}$。在这种情况下，无论如何选择原点，Killing 旋量都是常量，$K^{\dot\alpha\dot\beta} = c^{\dot\alpha\dot\beta}$。这意味着对偶扭量二次曲面不满足 (3.44) 中的一般性条件，因为 $o^\alpha \frac{\partial Q}{\partial\omega^\alpha} = 0$，因此无法通过 (3.45) 构造自对偶 Kerr-Schild 度规。此外，由于 Killing 旋量是常量，与之关联的共形凯勒结构实际上是严格凯勒结构；根据 (2.9)，显然它不可能与自对偶黑洞度量相关联。这凸显了一般性条件 (3.44) 的重要性，因此从现在起我们不再考虑这一退化情形。

接下来，假设 $a_{\alpha\beta} = 0$，而 $b_\alpha{}^{\dot\alpha} \neq 0$。那么，通过在 (4.4) 中适当选择 $x_0^{\alpha\dot\alpha}$，可以完全消去 Killing 旋量的零阶（即常数）部分。因此，这种情形对应于如下形式的对偶扭量二次曲面

$$\text{Case A:} \qquad Q^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & b^{\dot\alpha}{}_\beta \\ b_\alpha{}^{\dot\beta} & 0 \end{pmatrix}\,. \tag{4.5}$$

这一情形将在下文第 4.2 节中分析。

若 $a_{\alpha\beta} \neq 0$，则会出现两种不同的情况。通过适当选择 $x_0^{\alpha\dot\alpha}$，可以消去 (4.4) 中的线性项。接下来，这两种情况取决于能否

同时消去 Killing 向量的零阶项。换言之，这两种情况分别由如下形式的对偶扭量二次曲面描述

$$\text{Case B:} \qquad Q^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{\alpha\beta} \end{pmatrix} , \tag{4.6}$$

这将在第 4.3 节中分析，并且

$$\text{Case C:} \qquad Q^{AB} = \begin{pmatrix} c^{\dot\alpha\dot\beta} & 0 \\ 0 & a_{\alpha\beta} \end{pmatrix} , \tag{4.7}$$

这将在第 4.4 节中分析。

A、B 和 C 类构成了对所有一般对偶扭量二次曲面的完备分类，也就是说，所有可能的一般二次曲面都恰好属于这三种情形之一。现在我们将证明，这些情形分别对应一种自对偶黑洞度规。

4.2 A 情形：自对偶 Taub-NUT

我们先来考察由（4.5）描述的 A 情形的对偶扭量二次曲面。在这种情形下，Killing 旋量为

$$K^{\dot\alpha\dot\beta} = 2\, b_\beta{}^{(\dot\alpha}\, x^{|\beta|\dot\beta)} , \tag{4.8}$$

而实条件（4.2）保证我们可以写成

$$b_\alpha{}^{\dot\beta} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(o_\alpha\, o^{\dot\beta} + \iota_\alpha\, \iota^{\dot\beta} \right) . \tag{4.9}$$

经过直接计算可得

$$K^{\dot\alpha\dot\beta}\, K_{\dot\alpha\dot\beta} = 2\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 2\, r^2 , \tag{4.10}$$

而由 (3.53) 定义的根可见为

$$\zeta_\pm = \frac{z \mp r}{x + \mathrm{i}y} . \tag{4.11}$$

由此，主旋量 (3.54)

$$\alpha^{\dot\alpha} = \sqrt{\frac{y - \mathrm{i}x}{2}} \left(o^{\dot\alpha} + \zeta_-\, \iota^{\dot\alpha} \right) , \qquad \beta^{\dot\alpha} = \sqrt{\frac{y - \mathrm{i}x}{2}} \left(o^{\dot\alpha} + \zeta_+\, \iota^{\dot\alpha} \right) , \tag{4.12}$$

很容易确定。

利用公式 (3.51)，现在可以轻松得到与 A 情形所覆盖的对偶扭量二次曲面相关联的零自对偶麦克斯韦场的表达式：

$$\varphi_{\dot\alpha\dot\beta} = \frac{\kappa}{r} \left(o_{\dot\alpha} + \zeta_-\, \iota_{\dot\alpha} \right) \left(o_{\dot\beta} + \zeta_-\, \iota_{\dot\beta} \right) . \tag{4.13}$$

进而，我们可以读出相应的自对偶 Kerr-Schild 度规；在平直坐标系中

$$x^{\alpha\dot\alpha} = \begin{pmatrix} u & w \\ \tilde w & v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \tau - \mathrm{i}z & \mathrm{i}x - y \\ \mathrm{i}x + y & \tau - \mathrm{i}z \end{pmatrix} , \tag{4.14}$$

该度规的非平凡部分为

$$h^{(A)}_{ab}\,\mathrm{d}x^a\,\mathrm{d}x^b = \frac{\kappa}{r}\,(\mathrm{d}u + \zeta_-\,\mathrm{d}w)^2\ . \tag{4.15}$$

换言之，每个 A 型对偶扭量二次曲面都会导出一个形如 (4.15) 的超凯勒 Kerr-Schild 度量。

我们现在注意到如下事实:

命题 4.1 由 *A* 型对偶扭量二次曲面 (4.5)定义的超凯勒度量与自对偶 *Taub-NUT* 度量等距。

证明： 根据命题 3.3，与任意对偶扭量二次曲面相关的超凯勒 Kerr-Schild 度量都可以写成 Gibbons-Hawking 形式 (3.58)。根据同一命题，对于 A 情形（其中 $a_{\alpha\beta} = 0$），该 Gibbons-Hawking 度量的三全纯 Killing 向量将表示为

$$\chi^{\alpha\dot\alpha} \equiv \xi^{\alpha\dot\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(o_\alpha\, o^{\dot\beta} + \iota_\alpha\, \iota^{\dot\beta}\right)\ . \tag{4.16}$$

为了确定该度量的 Gibbons-Hawking 形式，我们还需要求出变形坐标 $(\mathcal{X},\ \mathcal{Y},\ \mathcal{Z})$，以及用它们表示势 V 的表达式。

这些变形坐标由平坦超凯勒结构 (3.55) 的、由 (3.67) 定义的“未变形”坐标 $(X,\ Y,\ Z)$，以及满足 (3.68) 的标量函数 G通过 (3.69) 确定。利用带有 $\chi^a = \xi^a$ 的 (3.67) 和 (3.55)，可得

$$X = x\,, \qquad Y = y\,, \qquad Z = z\,, \tag{4.17}$$

因此，未变形坐标可以视为 $\mathbb{R}^3$ 上的标准笛卡尔坐标。

为确定 G，将 (4.13) 代入 (3.68)，得到微分方程

$$\mathrm{d}G = \frac{\kappa}{4\,r}\left[2\mathrm{i}\,\zeta_-\,\mathrm{d}z + \mathrm{i}\left(1-\zeta_-^2\right)\mathrm{d}x + \left(1+\zeta_-^2\right)\mathrm{d}y\right]\ , \tag{4.18}$$

积分后可得

$$G = \mathrm{i}\,\kappa\,\frac{z+r}{x+\mathrm{i}y}\,, \tag{4.19}$$

利用 (4.11)。随后由 (3.69) 可读出变形的 Gibbons-Hawking 坐标:

$$\mathcal{X} = x + \frac{\kappa}{2}\left(\frac{z+r}{x+\mathrm{i}y}\right), \qquad \mathcal{Y} = y + \frac{\mathrm{i}\,\kappa}{2}\left(\frac{z+r}{x+\mathrm{i}y}\right), \qquad \mathcal{Z} = z\,, \tag{4.20}$$

接下来只需确定势 V。

利用以下事实： $V^{-1} = g_{ab}\xi^a\xi^b$、 $\eta_{ab}\xi^a\xi^b = 1$ 和 $o_\alpha\alpha_{\dot\alpha}\xi^{\alpha\dot\alpha} = 2^{-1/2}$，可得 t

$$V^{-1} = 1 + \frac{\kappa}{2\,r}\,. \tag{4.21}$$

为在变形坐标 (4.20) 中表达这一点，首先定义

$$\mathcal{R} := \sqrt{\mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2 + (\mathcal{Z} - \tfrac{\kappa}{2})^2}\,. \tag{4.22}$$

经过简短计算可得 $\mathcal{R} = r + \frac{\kappa}{2}$，于是 (4.21) 变为

$$V(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}) = 1 - \frac{\kappa}{2\,\mathcal{R}}\,. \tag{4.23}$$

这表明，A 型对偶扭量二次曲面产生的度量与 Gibbons-Hawking 度量 (3.58) 等距，其中 V 由 (4.23) 给出。这是一个渐近局部平坦的单中心解，因此根据与 (2.34) 的比较，它必然是质量为 $M = -\kappa/4$ 的 SDTN 度规。此外，施加正则性条件要求 $M > 0$，这又意味着 $\kappa < 0$.□

由此可得一个简单的

推论 4.1 *SDTN* 度规与由 (4.15) 定义的 *Kerr-Schild* 度规等距

这种 SDTN 的 Kerr-Schild 形式与近期在 [41]中得到的结果一致。

4.3 情形 B：Eguchi-Hanson

现在考虑属于情形 B、由 (4.6) 描述的对偶扭量二次曲面。在这种情况下，Killing 旋量为

$$K^{\dot\alpha\dot\beta} = a_{\alpha\beta}\, x^{\alpha\dot\alpha}\, x^{\beta\dot\beta} = 2\mathrm{i}\, a\, o_{(\alpha}\, \iota_{\beta)}\, x^{\alpha\dot\alpha}\, x^{\beta\dot\beta}\,, \tag{4.24}$$

using 的分解式 (4.3)。由此可以立即辨认出主旋量 rs

$$\alpha^{\dot\alpha} = \sqrt{2\mathrm{i}\, a}\, x^{\alpha\dot\alpha}\, \iota_\alpha\,, \qquad \beta^{\dot\alpha} = \sqrt{2\mathrm{i}\, a}\, x^{\alpha\dot\alpha}\, o_\alpha\,, \tag{4.25}$$

并观察到

$$\alpha^{\dot\alpha} = -\sqrt{2\mathrm{i}\, a}\, v\, \left(o^{\dot\alpha} + \zeta_-\, \iota^{\dot\alpha}\right)\,, \qquad \text{for } \zeta_- := -\frac{\tilde w}{v}\,, \tag{4.26}$$

在平坦坐标 (4.14) 中。接着便可轻易求得相应的零自对偶麦克斯韦场

$$\varphi_{\dot\alpha\dot\beta} = -\frac{\kappa\, v^2}{a^3\, (x^c\, x_c)^3} (o_{\dot\alpha} + \zeta_-\, \iota_{\dot\alpha})\, (o_{\dot\beta} + \zeta_-\, \iota_{\dot\beta})\,. \tag{4.27}$$

这进而表明，B 型对偶扭量二次曲面会导出自对偶 Kerr-Schild 度量，其中

$$h^{(B)}_{ab}\, \mathrm{d}x^a\, \mathrm{d}x^b = -\frac{\kappa\, v^2}{a^3\, (x^c\, x_c)^3}\, (\mathrm{d}u + \zeta_-\, \mathrm{d}w)^2\,, \tag{4.28}$$

是度量的非平凡部分。

命题 4.2 由 *B* 型对偶扭量二次曲面 (4.6)定义的超凯勒度量与 *Eguchi-Hanson* 度量等距。

证明： 与 A 情形一样，我们通过命题 3.3 将度量化为 Gibbons-Hawking 形式。在情形 B 中，该命题意味着，由于 $a_{\alpha\beta} \neq 0$，与超凯勒度量相关联的三全纯 Killing 向量为

$$\chi^a \equiv t^a = H^{ab}\, \xi_b\,. \tag{4.29}$$

在更一般的 C情形中（其中 $a_{\alpha\beta}\neq 0$ 和$c_{\dot\alpha\dot\beta}\neq 0$（但 $b_{\alpha\dot\alpha}=0$）），显式计算会更方便: 计算可得

$$t^{\alpha\dot\alpha}=-2\,a^2\,c^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\,x^{\alpha\dot\beta}\,. \tag{4.30}$$

由于情形 B 中的二次曲面具有 $c_{\dot\alpha\dot\beta}=0$，因此原则上看来，对于这种情形， $t^{\alpha\dot\alpha}$ 会消失。

为避免这个问题，请注意，向量 (4.30) 可以乘以任意常数进行缩放，且缩放后仍是 Killing 向量。特别地，利用 (4.3) $c^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}=\mathrm{i}\;c(o^{\dot\alpha}\iota_{\dot\beta}+\iota^{\dot\alpha}o_{\dot\beta})$，我们可以将 t^a 乘以 $(-2a^2c)^{-1}$ 进行缩放，从而得到三全纯 Killing 向量

$$\chi^{\alpha\dot\alpha}=\mathrm{i}\,(o^{\dot\alpha}\iota_{\dot\beta}+\iota^{\dot\alpha}o_{\dot\beta})\,x^{\alpha\dot\beta}\,, \tag{4.31}$$

正如所期望的，它在情形 B 中处处非零。

现在需要求出变形坐标 $(\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z})$，以及势 V 关于这些坐标的表达式。前者由 (3.69) 给出，因此我们需要求出 (X,Y,Z) 和函数 G。利用 (3.67) 和 (3.55)，以及 χ^a 的表达式 (4.31)，可得未变形坐标:

$$X=uw-v\tilde w\,,\qquad Y=-\mathrm{i}\,(uw+v\tilde w)\,,\qquad Z=uv+w\tilde w\,. \tag{4.32}$$

为计算函数 G，使用 (3.68)、(4.27) 和 (4.31) 可得微分方程

$$\mathrm{d}G=-\mathrm{i}\kappa\,\frac{v(uv+w\tilde w)\,\mathrm{d}\tilde w-2v^2\tilde w\,\mathrm{d}u+2v\tilde w^2\,\mathrm{d}w-\tilde w(uv+w\tilde w)\,\mathrm{d}v}{8\,a^3\,(uv-w\tilde w)^3}\,. \tag{4.33}$$

积分后可得

$$G=-\frac{\mathrm{i}\,\kappa}{8\,a^3}\,\frac{v\,\tilde w}{(uv-w\tilde w)^2}=\frac{\mathrm{i}\,\kappa}{16\,a^3}\,\frac{(X-\mathrm{i}Y)}{(X^2+Y^2+Z^2)}\,, \tag{4.34}$$

这里利用 (4.32) 得到了第二个等号。

定义 $R=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ 并利用 (3.69)，变形后的 Gibbons-Hawking 坐标为

$$\mathcal{X}=X+\frac{\kappa}{32a^3}\,\frac{(X-\mathrm{i}Y)}{R^2}\,,\qquad \mathcal{Y}=Y+\frac{\mathrm{i}\kappa}{32a^3}\,\frac{(X-\mathrm{i}Y)}{R^2}\,,\qquad \mathcal{Z}=Z\,. \tag{4.35}$$

相应的势可由下式得到

$$V^{-1}=g_{ab}\,\chi^a\,\chi^b=2(uv-w\tilde w)+\frac{\kappa}{8\,a^3}\,\frac{(uv+w\tilde w)^2}{(uv-w\tilde w)^3}\,.$$

利用 (4.32)，可得

$$V=\frac{R^3}{2(R^4+\frac{\kappa}{16a^3}\,Z^2)}\,.$$

现在，定义 $Z_0^2:=-\kappa/(16a^3)$ 和

$$\mathcal{R}_\pm:=\sqrt{\mathcal{X}^2+\mathcal{Y}^2+(\mathcal{Z}\pm Z_0)^2}\,. \tag{4.36}$$

利用 (4.35)，经过简单计算可得 $\mathcal{R}_\pm = R \pm Z_0 Z/R$，因此 $\mathcal{R}_+ + \mathcal{R}_- = 2R$ 和 $\mathcal{R}_+\mathcal{R}_- = (R^4 - Z_0^2 Z^2)/R^2$。这意味着 V 的表达式可以改写为

$$V(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\mathcal{R}_+} + \frac{1}{\mathcal{R}_-}\right). \tag{4.37}$$

于是，该度量为式 (3.58)，其中势 V 由式 (4.37) 给出；也就是说，它是一个质量相等的 ALE 双中心 Gibbons–Hawking 度量。与式 (2.28)–(2.29) 对比可知，它必定是 Eguchi-Hanson 度规。□

既然我们已将情形 B 的超凯勒度规识别为 Eguchi-Hanson 度规，现在便可以事后认出，Kerr-Schild 度量 (4.28) 正是已知的 Eguchi-Hanson 度规的 Kerr-Schild 形式 [36, 37]。

4.4 C情形：自对偶 Plebański-Demiański

最后，考虑由 C情形涵盖、并由式 (4.7) 描述的对偶扭量二次曲面。迄今为止，这一情形的分析在技术上最为复杂。利用式 (4.3)，与 C情形相关联的 Killing 旋量为

$$K^{\dot\alpha\dot\beta} = 2\mathrm{i}\left(a\, o_{(\alpha}\,\iota_{\beta)}\, x^{\alpha\dot\alpha}\, x^{\beta\dot\beta} + c\, o^{(\dot\alpha}\,\iota^{\dot\beta)}\right), \tag{4.38}$$

由此可得

$$K^{\dot\alpha\dot\beta}\, K_{\dot\alpha\dot\beta} = 2\left[a^2\,(uv - w\tilde w)^2 - 2\,a\,c\,(uv + w\tilde w) + c^2\right]. \tag{4.39}$$

$K^{\dot\alpha\dot\beta}$ 的主旋量为

$$\alpha^{\dot\alpha} = \sqrt{2\mathrm{i}\,a\,wv}\,(o^{\dot\alpha} + \zeta_-\,\iota^{\dot\alpha}), \qquad \beta^{\dot\alpha} = \sqrt{2\mathrm{i}\,a\,wv}\,(o^{\dot\alpha} + \zeta_+\,\iota^{\dot\alpha}), \tag{4.40}$$

其中根 $\zeta_\pm$ 为

$$\zeta_\pm = \frac{1}{2awv}\left[c - a(uv + w\tilde w) \pm \sqrt{a^2(uv - w\tilde w)^2 - 2ac(uv + w\tilde w) + c^2}\right], \tag{4.41}$$

按 (3.53) 定义。

为计算相应的自对偶零Maxwell场，注意到

$$\xi_{\alpha\dot\alpha} = 4\mathrm{i}\,a\, o_{(\alpha}\,\iota_{\beta)}\, x^{\beta}{}_{\dot\alpha}, \tag{4.42}$$

由此根据 (3.51) 可得,

$$\varphi_{\dot\alpha\dot\beta} = \frac{-\kappa\,(o_{\dot\alpha} + \zeta_-\iota_{\dot\alpha})\,(o_{\dot\beta} + \zeta_-\iota_{\dot\beta})}{8a^2\,(u + \zeta_- w)^2\,\sqrt{a^2(uv - w\tilde w)^2 - 2ac\,(uv + w\tilde w) + c^2}}. \tag{4.43}$$

因此，与 C 型对偶扭量二次曲面相关的 Kerr–Schild 摄动为

$$h^{(C)}_{ab}\,\mathrm{d}x^a\,\mathrm{d}x^b = \frac{-\kappa\,(\mathrm{d}u + \zeta_-\mathrm{d}w)^2}{8a^2\,(u + \zeta_- w)^2\,\sqrt{a^2(uv - w\tilde w)^2 - 2ac\,(uv + w\tilde w) + c^2}}. \tag{4.44}$$

命题 4.3 由 *C* 型对偶扭量二次曲面(4.7)定义的超凯勒度量与自对偶 *Plebański-Demiański*度量等距。

证明：与前面的情形一样，我们首先利用命题 3.3 将度量化为 Gibbons-Hawking 形式。在 C 情形中，与超凯勒度量相关的三全纯 Killing 向量为 (4.30)，或者等价地，将其除以因子 $(-2ac^2)$ 后得到 (4.31)。为简化计算，我们采用较简单的选项，因此三全纯 Killing 向量 $\chi^{\alpha\dot\alpha}$ 由 (4.31) 给出。

为了求出变形的 Gibbons-Hawking 坐标 $(\mathcal{X},\ \mathcal{Y},\ \mathcal{Z})$ 以及 V关于这些坐标的表达式，我们首先需要 $(X,\ Y,\ Z)$ 和函数 G。由于 Killing 向量为 (4.31)，未变形坐标 $(X,\ Y,\ Z)$ 与 Eguchi-Hanson 情形中的相同：

$$X = uw - v\tilde w\,, \qquad Y = -\mathrm{i}(uw + v\tilde w)\,, \qquad Z = uv + w\tilde w\,. \tag{4.45}$$

为了计算 G，我们使用 (3.68)、(4.43) 和 (4.31)；经过简短计算可得微分方程

$$\mathrm{d}G = -\mathrm{i}\kappa\,\frac{(\zeta_- v - \tilde w)\,\mathrm{d}u + (u - \zeta_- w)\,\mathrm{d}\tilde w + \zeta_-(\zeta_- v - \tilde w)\,\mathrm{d}w + \zeta_-(u - \zeta_- w)\,\mathrm{d}v}{8a^2\,(u+\zeta_- w)^2\,\sqrt{a^2\,(uv - w\tilde w)^2 - 2ac\,(uv + w\tilde w) + c^2}}\,. \tag{4.46}$$

尽管这个方程表面上很复杂，但它有一个极其简单的解：

$$G = \frac{\mathrm{i}\,\kappa}{8a^2 c}\,\frac{(\tilde w + \zeta_-\,v)}{(u + \zeta_-\,w)}\,, \tag{4.47}$$

通过直接计算即可验证。

为了将 G 表示为由（4.45）给出的坐标（X、Y、Z）的形式，定义

$$R := \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = uv - w\tilde w\,, \tag{4.48}$$

where 第二个等式使用了（4.45）的显式表达式。于是，根（4.41）变为

$$\begin{aligned}\zeta_\pm =& \frac{-1}{2vw}\left[Z - \tfrac{c}{a} \pm \sqrt{R^2 - \tfrac{2c}{a}Z + (\tfrac{c}{a})^2}\,\right] \\ =& \frac{-1}{2vw}\left[Z - \tfrac{c}{a} \pm \sqrt{X^2 + Y^2 + (Z - \tfrac{c}{a})^2}\,\right].\end{aligned} \tag{4.49}$$

由此可得：

$$\frac{\tilde w + \zeta_- v}{u + \zeta_- w} = \frac{v}{w}\,\frac{\left[2w\tilde w - (Z - \frac{c}{a} - \sqrt{X^2 + Y^2 + (Z - \frac{c}{a})^2}\,)\right]}{\left[2uv - (Z - \frac{c}{a} - \sqrt{X^2 + Y^2 + (Z - \frac{c}{a})^2}\,)\right]}\,. \tag{4.50}$$

现在，利用（4.45）和（4.48），可以直接推出以下恒等式

$$2w\tilde w - Z = -R\,, \qquad 2uv - Z = R\,, \qquad \frac{Z + R}{X + \mathrm{i}Y} = \frac{v}{w}\,, \tag{4.51}$$

从而得到

$$\frac{\tilde w + \zeta_- v}{u + \zeta_- w} = \frac{(Z + R)}{(X + \mathrm{i}Y)}\,\frac{\left[-R + \frac{c}{a} + \sqrt{X^2 + Y^2 + (Z - \frac{c}{a})^2}\right]}{\left[R + \frac{c}{a} + \sqrt{X^2 + Y^2 + (Z - \frac{c}{a})^2}\right]}\,. \tag{4.52}$$

最后，利用另一个恒等式

$$(Z+R)\frac{\left[-R+\frac{c}{a}+\sqrt{X^2+Y^2+(Z-\frac{c}{a})^2}\right]}{\left[R+\frac{c}{a}+\sqrt{X^2+Y^2+(Z-\frac{c}{a})^2}\right]} = Z-\frac{a}{c}R^2+\frac{a}{c}R\sqrt{X^2+Y^2+(Z-\frac{c}{a})^2}\,, \quad (4.53)$$

将其与 (4.47) 中的 (4.52) 结合，得到以下表达式：

$$G=\frac{\mathrm{i}\kappa}{8ac^2}\left[\frac{X^2+Y^2+Z(Z-\frac{c}{a})-\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\sqrt{X^2+Y^2+(Z-\frac{c}{a})^2}}{X+\mathrm{i}Y)}\right], \quad (4.54)$$

关于 G 的未变形坐标。利用（3.69）即可得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{X} &= X-\frac{\kappa}{16ac^2}\left[\frac{X^2+Y^2+Z(Z-\frac{c}{a})-\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\sqrt{X^2+Y^2+(Z-\frac{c}{a})^2}}{(X+\mathrm{i}Y)}\right],\\
\mathcal{Y} &= Y-\frac{\mathrm{i}\kappa}{16ac^2}\left[\frac{X^2+Y^2+Z(Z-\frac{c}{a})-\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\sqrt{X^2+Y^2+(Z-\frac{c}{a})^2}}{(X+\mathrm{i}Y)}\right],\\
\mathcal{Z} &= Z\,,
\end{aligned} \quad (4.55)$$

对于变形的 Gibbons-Hawking 坐标。

为了在这些 Gibbons-Hawking 坐标中得到超凯勒度量，我们接下来需要计算势 $V=(g_{ab}\chi^a\chi^b)^{-1}$，并将其表示为（4.55）的形式。回想弯曲度规为 $g_{ab}=\eta_{ab}+o_\alpha o_\beta\varphi_{\dot\alpha\dot\beta}$，由此可得

$$\begin{aligned}
V^{-1} &= \eta_{ab}\,\chi^a\,\chi^b+o_\alpha o_\beta\,\varphi_{\dot\alpha\dot\beta}\,\chi^{\alpha\dot\alpha}\,\chi^{\beta\dot\beta}\\
&= x_a x^a+\frac{\kappa}{\sqrt{2\,K^{\dot\gamma\dot\delta}\,K_{\dot\gamma\dot\delta}}}\,\frac{(k_a\chi^a)^2}{(k_b\xi^b)^2}\,,
\end{aligned} \quad (4.56)$$

其中在第二行中，我们利用了 $\eta_{ab}\chi^a\chi^b=x_ax^a$，以及恒等式（3.51）和定义 $k_a=o_\alpha\alpha_{\dot\alpha}$。

注意到 k^a 是 Killing 张量 H_{ab}的特征向量后，计算便得以简化：回顾表达式 (3.36)，可得

$$H_{ab}\,k^b=a_{\alpha\beta}\,K_{\dot\alpha\dot\beta}\,o^\beta\,\alpha^{\dot\beta}-\frac{\xi^c\xi_c}{8}\,k_a \quad (4.57)$$

$$=\left(\frac{\mathrm{i}\,a}{2}\,\alpha_{\dot\alpha}\,\beta^{\dot\alpha}-\frac{\xi^c\xi_c}{8}\right)k_a, \quad (4.58)$$

其中在第二行中，我们用到了 $a_{\alpha\beta}o^\beta=-\mathrm{i}ao_\alpha$ and $K_{\dot\alpha\dot\beta}\alpha^{\dot\beta}=-\frac{1}{2}\alpha_{\dot\beta}\beta^{\dot\beta}\alpha_{\dot\alpha}$。由于 $K^{\dot\alpha\dot\beta}=\alpha^{(\dot\alpha}\beta^{\dot\beta)}$，因此可得 $K^{\dot\alpha\dot\beta}K_{\dot\alpha\dot\beta}=-\frac{1}{2}(\alpha_{\dot\alpha}\beta^{\dot\alpha})^2$,，所以 $\sqrt{2K^{\dot\alpha\dot\beta}K_{\dot\alpha\dot\beta}}=\mathrm{i}\alpha_{\dot\alpha}\beta^{\dot\alpha}$。定义

$$P:=\sqrt{X^2+Y^2+(Z-\tfrac{c}{a})^2}, \quad (4.59)$$

因此可得 $\mathrm{i}\alpha_{\dot\alpha}\beta^{\dot\alpha} = \sqrt{2K^{\dot\alpha\dot\beta}K_{\dot\alpha\dot\beta}} = 2aP$。

使用 $\xi^c\xi_c = 4a^2x^cx_c = 8a^2R$ ——其中 R 在 (4.48) 中定义——即可得到

$$H_{ab}\,k^b = a^2\,(P-R)\,k_a\,. \tag{4.60}$$

因此，由于 $\chi_a = \frac{-1}{2a^2c}t_a = \frac{-1}{2a^2c}H_{ab}\xi^b$，有

$$k_a\,\chi^a = \frac{-1}{2a^2c}\,H_{ab}\,\xi^b\,k^a = \frac{-1}{2c}\,(P-R)\,k_a\,\xi^a\,.$$

将其代入 (4.56)，并再次利用 $\sqrt{2K^{\dot\alpha\dot\beta}K_{\dot\alpha\dot\beta}} = 2aP$，得到

$$V^{-1} = 2R + \frac{\kappa}{8ac^2}\,\frac{(P-R)^2}{P}\,, \tag{4.61}$$

标量势的倒数。

为了继续推导，方便起见，定义参数

$$\varepsilon := \sqrt{c^2 - \frac{\kappa}{4a}}\,, \tag{4.62}$$

并暂且假设 $c^2 \neq \frac{\kappa}{4a}$ ——也就是说，$\varepsilon \neq 0$。令

$$\mathcal{R}_\pm := \sqrt{\mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2 + (\mathcal{Z} - \tfrac{(c\mp\varepsilon)}{2a})^2}\,, \tag{4.63}$$

可以验证

$$\mathcal{R}_\pm = \frac{1}{2}\left[(P+R) \mp \frac{\varepsilon}{c}\,(P-R)\right]\,. \tag{4.64}$$

利用 $\kappa = 4a(c^2-\varepsilon^2)$，现在我们来计算：

$$\begin{aligned}
V &= \frac{8ac^2\,P}{16ac^2\,PR + \kappa\,(P-R)^2} \\
&= \frac{8c^2\,P}{4ac^2\,[(P+R)^2 - (P-R)^2] + 4a\,(c^2-\varepsilon^2)\,(P-R)^2} \\
&= \frac{2c^2\,P}{c^2\,(P+R)^2 - \varepsilon^2\,(P-R)^2} \\
&= \frac{2c^2\,P}{[c\,(P+R) + \varepsilon\,(P-R)]\,[c\,(P+R) - \varepsilon\,(P-R)]} \\
&= \frac{c}{2\varepsilon}\left(\frac{(\varepsilon-c)\,[c\,(P+R) - \varepsilon\,(P-R)] + (\varepsilon+c)\,[c\,(P+R) + \varepsilon\,(P-R)]\}}{[c\,(P+R) + \varepsilon\,(P-R)]\,[c\,(P+R) - \varepsilon\,(P-R)]}\right) \\
&= \frac{\mu_+}{\mathcal{R}_+} + \frac{\mu_-}{\mathcal{R}_-}
\end{aligned} \tag{4.65}$$

其中

$$\mu_\pm := \frac{\varepsilon \pm c}{4\varepsilon}. \tag{4.66}$$

由于假设了 $\varepsilon \neq 0$，因此该势对应于一个具有不同质量的渐近局部欧几里得双中心 Gibbons-Hawking 度规。根据第 2.2 节中的构造，它必定与自对偶 Plebański-Demiański 度规的非退化情形等距。注意，正如 SDPD 的两个质量（2.23）所要求的，$\mu_{\pm}$ 并非相互独立，而是都由 ε 和 c控制。

最后，考虑上述公式中的退化极限 $\varepsilon \to 0$ ：就对偶扭量二次曲面而言，这意味着 $c^2 = \frac{\kappa}{4a}$。由 (4.63) 和 (4.66) 可知，在此极限下，中心重合（$\mathcal{R}_+ \to \mathcal{R}_-$），而质量发散。这恰好就是第 2.2 节所研究的 SDPD 退化情形的行为，正如所要求的那样。□

这一结果的一个出人意料的推论如下：

推论 4.2 *SDPD* 度规与由 (4.44) 定义的 *Kerr-Schild* 度量等距。

据我们所知，SDPD 度规具有单 Kerr–Schild 形式这一事实此前尚未被发现。事实上，鉴于该度规用 Plebański-Demiański、SU(∞) Toda，甚至 Gibbons-Hawking 坐标表示时的复杂程度，这似乎相当令人惊讶。

5 讨论

在本文中，我们证明了所有自对偶黑洞及其几何性质，都完全编码于来自平直时空的数据之中；为此，我们发展了一种完全依赖于欧几里得四维空间的对偶 扭量空间的构造。在更技术性的表述中，我们证明，给定复射影三维空间（的某个开子集）中的一个全纯二次簇（即对偶扭量二次曲面），便可显式构造出一个超凯勒度规；该度规同时关于相反定向严格共形凯勒。该过程还生成了解的所有对称性与“隐藏”对称性（Killing 旋量、Killing 张量和环面结构）。此外，我们还对所有这类对偶扭量二次曲面进行了分类，表明只有三种非平凡情形可能出现，分别对应于自对偶 Taub-NUT、Eguchi-Hanson 和自对偶 Plebański-Demiański 度规。值得强调的是这样一个引人注目的事实：整个弯曲几何都由一个平直空间结构所捕获，从而绕开了非线性引力子构造的标准变形方法，以及在扭量空间中寻找一族新的全纯曲线这一相关的、极具非平凡性的问题 [6, 8, 10]。

我们构造的一个直接推论是，所有自对偶黑洞都可以用单 Kerr–Schild 形式描述，相应的零向量和标量场的显式表达式则由对偶扭量二次曲面编码。此前，人们已知 Eguchi-Hanson 和自对偶 Taub-NUT 的情形具有这一特征；而这一特征同样适用于自对偶 Plebański-Demiański，不仅是一个新发现，考虑到度量 (2.1) 的复杂性，也尤其值得注意。此外，在所有情形中，这一特征都源自一个统一的框架，并由此清晰地展现了其几何起源。

本文所建立的框架完全适用于这样一种情形：对于固定的定向，仅存在一个复结构。这一点对于其未来

在自对偶性之外的应用至关重要。事实上，非自对偶的天体物理黑洞的一个关键特征是，对于固定的定向，它们只有一个复结构 [23, 24], ；相比之下，自对偶背景中则存在一个由复结构构成的二维球面。这一耐人寻味的事实似乎解释了黑洞微扰的许多非凡性质，例如 Teukolsky系统的特殊几何，以及微扰时空中存在 α曲面这一事实 [22, 26, 27]。后者是扭量构造的标志性特征；然而，鉴于背景是非自对偶的，标准扭量理论并不适用于这种情形。相反，支配该系统的是一个二维 （而非三维）扭量空间 [80, 81], ，而这一结构恰恰是本文所考察的那类（对偶）扭量二次曲面。

由此可见，非自对偶黑洞的微扰理论与扭量二次曲面密切相关，尽管标准扭量理论中那些极为强大的工具究竟应如何修改才能应用于这种情形，至今仍不清楚。本文中的构造由此提供了一个理想框架，可用于精确理解并发展引力微扰理论两种不同方法之间的联系：一种基于自对偶空间变形的标准扭量理论，另一种则基于与扭量二次曲面相关联的 Teukolsky系统。前者与许多令人振奋的进展有关，例如量子场论中与软展开相关的手征代数的存在 [82–84], ；而后者则构成了分析黑洞稳定性和引力波物理的基础（参见 [85–89]）。两种方法之间必然存在这种联系的一个具体理由是，所有自对偶空间的引力微扰都可以通过标准扭量构造生成 [9], ；与此同时，所有这类微扰也都被认为源自 Teukolsky方程的解。特别是，一个直接而引人入胜的问题是，如何理解已知的无限维对称代数在 Teukolsky系统中的体现。这些问题必将为未来研究开辟富有成效的方向。

致谢

我们感谢 James Lucietti 与我们进行了几次富有帮助的交流。作者获得了英国皇家学会大学研究奖学金（TA）、Simons 天体全息合作项目 CH-00001550-11（TA 和 SS）、ERC巩固者/UKRI前沿资助 TwistorQFT EP/Z000157/1（TA 和 BA），以及 STFC综合资助 ST/X000494/1（TA）的支持。

参考文献

[1] P. T. Chrusciel、J. Lopes Costa 和 M. Heusler，《定常黑洞：唯一性与 d *Beyond*，《*Living Rev. Rel.*》**15** (2012) 7, [arXiv:1205.6112]。[2] R. Penrose and W. Rindler，旋量与时空，第2卷。剑桥大学出版社，1988年。[3] S. A. Teukolsky，旋转黑洞的微扰。*1.* 引力、电磁和中微子场微扰的基本方程，《天体物理学杂志》**185 (1973)** 635–647。

[4] *D. A. Kosower*、*R. Monteiro* 和 *D. O'Connell*，《*SAGEX* 散射振幅综述》第*14*章：来自散射振幅的经典引力，《*J. Phys. A*》*55 (2022)*，第*44*期443015, [*arXiv:2203.*13025].[5] *A. Buonanno*、*M. Khalil*、*D. O'Connell*、*R. Roiban*、*M. P. Solon* 和 *M. Zeng*，《*Snowmass* 白皮书：引力波与散射振幅》，载于 *Snowmass 2021*，*2022*年*4*月。*arXiv:2204.05194*。[6] *R. Penrose*，《非线性引力子与曲率扭量理论》，*Gen. Rel. Grav. 7 (1976) 31–52*。[7] *C. P. Boyer* 和 *J. F. Plebanski*，《自对偶爱因斯坦空间的无限层级守恒定律与非线性叠加原理》，《数学物理杂志》*26 (1985) 229–234*。[8] *M. F. Atiyah*、*N. J. Hitchin* 和 *I. M. Singer*，《四维黎曼几何中的自对偶性》，*Proc. Roy. Soc. Lond. A 362 (1978) 425–461*。[9] *N. J. Hitchin*，《自对偶空间上的线性场方程》，*Proc. Roy. Soc. Lond. A 370 (1980) 173–191*。[10] *S. G. Gindikin*，《超凯勒度量的构造》，*Funct. Anal. Appl. 20 (1986) 238–240*。[11] *T. Adamo*、*L. Mason* 和 *A. Sharma*，《用于四元数几何与引力子散射的扭量*σ*模型》，*Adv. Theor. Math. Phys. 27 (2023)*，第*3*期 *623*–681, [*arXiv:2103.*16984].[12] *T. Adamo*、*L. Mason* 和 *A. Sharma*，《手征强场中的胶子与引力子*MHV*散射》，《物理评论快报》*125 (2020)*，第 4 041602, [*arXiv:2003.*13501].[13] *T. Adamo*、*L. Mason* 和 *A. Sharma*，《自对偶辐射时空中的引力子散射》，《经典与量子引力》*40 (2023)*，第 9 095002, [*arXiv:2203.*02238].[14] *R. Bittleston*、*S. Heuveline* 和 *D. Skinner*，《*Eguchi–Hanson*空间上自对偶引力的天体手征代数》，*JHEP 09 (2023)* 008, [*arXiv:2305.*09451].[15] *T. Adamo*、*W. Bu* 和 *B. Zhu*，《自对偶辐射背景上散射的红外结构》，*JHEP 06 (2024)* 076, [*arXiv:2309.*01810].[16] *T. Adamo*、*G. Bogna*、*L. Mason* 和 *A. Sharma*，《自对偶 *Taub-NUT*上的散射》，《经典与量子引力》*41 (2024)*，第 1 015030, [*arXiv:2309.*03834].[17] *A. Guevara* 和 *U. Kol*，《作为氢原子的自对偶黑洞》，*arXiv:2311.07933*。[18] *G. Bogna* 和 *S. Heuveline*，《迈向自对偶黑洞的天体手征代数》，*arXiv:2408.14324*。[19] *A. Guevara*、*U. Kol* 和 *H. Tran*，《精确黑洞散射振幅》，*arXiv:2412.19627*。[20] *T. Adamo*、*G. Bogna*、*L. Mason* 和 *A. Sharma*，《自对偶黑洞上的引力子散射》，*arXiv:2507.18605*。[21] *A. Guevara* 和 *U. Kol*，《新的近极端黑洞与*Love*对称性》，*arXiv:2511.18637*。[22] *B. Araneda*，《扭量二次曲面与黑洞》，*Phys. Rev. D 108 (2023)*，第*4*期 *044040*，[*arXiv:2212.*10491].[23] *E. J. Flaherty*，《*D*型时空的可积结构》，*Phys. Lett. A 46 (1974)*，第*6*期 *391–392*。

[24] *E. J. Flaherty*，《相对论中的厄米几何与凯勒几何》，《物理学讲义》第*46*卷。施普林格出版社，*1976*年。[25] *S. Aksteiner* 和 *B. Araneda*，《黑洞与引力瞬子的凯勒几何》，*Phys. Rev. Lett. 130 (2023)*，第 16 161502, [*arXiv:2207.*10039].[26] *B. Araneda*，《共形不变性、复结构与 *Teukolsky* 联络》，《经典与量子引力》*35 (2018)*，第 17 175001, [*arXiv:1805.*11600].[27] *B. Araneda*，《二维扭量流形与 *Teukolsky* 算子》，《数学物理通讯》*110 (2020)*，第*10*期 *2603*–2638, [*arXiv:1907.*02507].[28] *B. Araneda*，《共形几何与半可积时空》，*Adv. Theor. Math. Phys. 27 (2023)*，第*6*期 *1591*–1663, [*arXiv:2110.*06167].[29] *J. F. Plebanski* 和 *M. Demianski*，《广义相对论中的旋转、带电且均匀加速的质量》，《物理学年刊》*98 (1976) 98–127*。[30] *S. W. Hawking*，《引力瞬子》，*Phys. Lett. A 60 (1977) 81*。[31] *E. Crawley*、*A. Guevara*、*E. Himwich* 和 *A. Strominger*，《天球全息中的自对偶黑洞》，*JHEP 09 (2023)* 109, [*arXiv:2302.*06661].[32] *T. Eguchi* 和 *A. J. Hanson*，《欧几里得引力的渐近平坦自对偶解》，《物理快报 *B*》*74 (1978) 249–251*。[33] *T. Eguchi* 和 *A. J. Hanson*，《欧几里得引力的自对偶解》，《物理学年刊》*120 (1979) 82*。[34] *N. J. Hitchin*，《多边形与引力子》，《剑桥哲学学会数学论文集》*85 (1979) 465–476*。[35] *K. P. Tod* 和 *R. S. Ward*，《具有自对偶 *Killing* 向量的自对偶度规》，*Proc. Roy. Soc. Lond. A 368 (1979) 411–427*。[36] *G. A. J. Sparling* 和 *K. P. Tod*，《一个 H 空间的例子》，《数学物理杂志》*22 (1981) 331–332*。[37] *K. P. Tod*，《自对偶 *Kerr–Schild* 度规与零 *Maxwell* 场》，《数学物理杂志》*23 (1982)*，第*6*期 *1147–1148*。[38] *R. Penrose*，《扭量代数》，《数学物理杂志》*8 (1967) 345*。[39] *M. Pontecorvo*，《反自对偶厄米曲面的扭量空间》，《美国数学会汇刊》*331 (1992) 653–661*。[40] *R. Penrose*，《零静质量方程的解》，《数学物理杂志》*10 (1969) 38–39*。[41] *J.-H. Kim*，《*Taub-NUT* 瞬子的单 *Kerr–Schild* 度量》，*Phys. Rev. D 111 (2025)*，第*2*期 *L*021703, [*arXiv:2405.*09518].[42] *J. Podolsky* 和 *H. Ovcharenko*，《均匀磁场中的克尔黑洞：一个精确解》，*arXiv:2507.05199*。[43] *H. Ovcharenko* 和 *J. Podolský*，《具有非对齐电磁场的新型旋转带电黑洞》，*Phys. Rev. D 112 (2025)*，第 6 064076, [*arXiv:2508.*04850].[44] *R. Debever*，《关于爱因斯坦–麦克斯韦方程的 *D* 型膨胀解》，《比利时数学学会通报》*23 (1971) 360—376*。[45] *J. B. Griffiths* 和 *J. Podolsky*，《重新审视 *Plebanski-Demianski* 解族》，《国际现代物理学杂志 *D* 辑》*15 (2006) 335*–370, [*gr-qc*/0511091]。

[46] *H. Ovcharenko*、*J. Podolsky* 和 *M. Astorino*，《重新审视 *D* 型黑洞：联系其各种度规形式》，*Phys. Rev. D 111 (2025)*，第 2 024038, [*arXiv:2409.*02308].[47] *R. P. Kerr*，《作为代数特殊度规实例的旋转质量引力场》，《物理评论快报》*11 (1963) 237–238*。[48] *E. T. Newman*、*E. Couch*、*K. Chinnapared*、*A. Exton*、*A. Prakash* 和 *R. Torrence*，《旋转带电质量的度规》，《数学物理杂志》*6 (1965) 918–919*。[49] *A. H. Taub*，《允许三参数运动群的真空时空》，《数学年刊》*53 (1951) 472–490*。[50] *E. Newman*、*L. Tamburino* 和 *T. Unti*，《史瓦西度规的真空空间推广》，《数学物理杂志》*4 (1963) 915*。[51] *H. Weyl*，《引力理论》，《物理学年鉴》*54 (1917) 117–145*。[52] *W. Kinnersley* 和 *M. Walker*，《广义相对论中的均匀加速带电质量》，*Phys. Rev. D 2 (1970) 1359–1370*。[53] *J. B. Griffiths*、*P. Krtous* 和 *J. Podolsky*，《阐释 *C* 度规》，《经典与量子引力》*23 (2006) 6745*–6766, [*gr-qc/*0609056].[54] *Y. Chen* 和 *E. Teo*，《真空爱因斯坦方程的五参数解族》，*Phys. Rev. D 91 (2015)*，第 12 124005, [*arXiv:1504.*01235].[55] *B. Araneda*，《广义引力瞬子的隐藏对称性》，《亨利·庞加莱年刊》*26 (2025)*，第*11*期 *4021*–4049, [*arXiv:2309.*05617].[56] *A. S. Lapedes* 和 *M. J. Perry*，《*D* 型引力瞬子》，*Phys. Rev. D 24 (1981) 1478*。[57] *I. Bakas*，《扩展共形对称性的大 *N* 极限》，《物理快报 *B*》*228 (1989) 57*。[58] *Q.-H. Park*，《自对偶引力作为二维非线性 N 模型的大 σ 极限》，《物理快报 *B*》*238 (1990) 287–290*。[59] *K. P. Tod*，《*SU(∞) Toda* 场方程与特殊四维度规》，载于《几何与物理会议：量子不变量与低维拓扑》，第*307–312*页，*1995*年*7*月。[60] *P.-Y. Casteill*、*E. Ivanov* 和 *G. Valent*，《由调和超空间得到的 *U(1) × U(1)* 四元数度规》，《核物理*B*》*627 (2002) 403*–444, [*hep-th/*0110280].[61] *S. Sun* 和 *R. Zhang*，《超凯勒四维流形的塌缩几何及其应用》，《数学学报》*232 (2024) 325*—-424, [*arXiv:2108.*12991].[62] *M. K. Prasad*，《*Eguchi-Hanson* 度规与双中心 *Gibbons-Hawking* 度规的等价性》，《物理快报 *B*》*83 (1979) 310–310*。[63] *B. Araneda* 和 *J. Lucietti*，《所有环面厄米 *ALE* 引力瞬子》，*arXiv:2510.09291*。[64] *T. Adamo*，《扭量理论讲义》，*PoS Modave2017 (2018)* 003, [*arXiv:1712.*02196].[65] *N. M. J. Woodhouse*，《扭量理论的实方法》，《经典与量子引力》*2 (1985) 257–291*。[66] *K. Kodaira*，《复流形中紧子流形解析族的特征系统完备性定理》，《数学年刊》*75 (1962) 146–162*。[67] *K. Kodaira*，《复流形中紧子流形的稳定性》，《美国数学杂志》*85 (1963) 79–94*。

[68] L. Haslehurst 和 R. Penrose，最一般的（*2,2*）自对偶真空：一种 *googly* 方法 ，《扭量通讯》**34** （1992）1–4。[69] N. Woodhouse，对上一篇文章的评论，《扭量通讯》**34** （1992）5–8。[70] R. Penrose，关于曲时空扭量理论和 *googly* 现象的评述，《扭量通讯》**16**（1983）7–10。[71] R. S. Ward，定常轴对称时空：一种新方法，*Gen. Rel. Grav.* **15**（1983）105–109。[72] R. Penrose，相对上同调、*googly* 现象与 i 的变形，《扭量通讯》**17**（1984）7–8。[73] M. G. Eastwood、R. Penrose 和 R. O. Wells，上同调与无质量场，*Commun*

.

《物理学杂志》**78** (1981) 305–351.[74] J. F. Plebanski，复爱因斯坦方程的一些解，《数学物理杂志》**16** (1975)2395–2402.[75] R. P. Kerr 和 A. Schild，再版：一类新的真空解，爱因斯坦

n

场方程，《*Gen. Rel. Grav.*》*41*（*2009*），第 *10* 期，*2485–2499*。[76] *G. C. Debney*、*R. P. Kerr* 和 *A. Schild*，爱因斯坦方程与爱因斯坦-麦克斯韦方程的解，《数学物理杂志》*10*（*1969*）*1842*。[77] *B. Araneda*，超凯勒瞬子、对称性与平直空间，《*Rev. Math. Phys.*》*37*（*2025*），第 03 2450033, [期，*arXiv:2312.*16136]。[78] *G. W. Gibbons* 和 *S. W. Hawking*，引力多重瞬子，《物理快报 *B*》*78*（*1978*）*430*。[79] *M. Dunajski* 和 *P. Tod*，共形于凯勒度量的四维度量，《剑桥哲学学会数学论文集》*148*（*2010*） 485, [*arXiv:0901.*2261]。[80] *T. N. Bailey*，无剪切合同的叶空间、多极展开与 *Robinson* 定理，《数学物理杂志》*32*（*1991*），第 *6* 期，*1465–1469*。[81] *T. N. Bailey*，复化共形近厄米结构与共形不变的 *eth* 和 *thorn* 算子，《经典与量子引力》*8*（*1991*），第 *1* 期，*1*。[82] *A. Guevara*、*E. Himwich*、*M. Pate* 和 *A. Strominger*，规范理论与引力的全息对称代数，*JHEP 11*（*2021*） 152, [*arXiv:2103.*03961]。[83] *A. Strominger*，$w_{1+\infty}$ 代数与天球：软引力子、光子和胶子对称性的无限塔，《物理评论快报》*127*（*2021*），第 *22* 期，*221601*，[*arXiv:2105.*14346]。[84] *T. Adamo*、*L. Mason* 和 *A. Sharma*，来自扭量空间的天球 $w_{1+\infty}$ 对称性，*SIGMA 18*（*2022*） 016, [*arXiv:2110.*06066]。[85] *M. Dafermos* 和 *I. Rodnianski*，关于黑洞与线性波的讲义，《*Clay Math. Proc*

.

17(2013) 97–205, [arXiv:0811.0354].[86] M. Dafermos、G. Holzegel 和 I. Rodnianski，施瓦西解对引力扰动的线性稳定性，*Acta Mat.* **222** (2019)，第 1 期，1–214，[arXiv:1601.06467].[87] L. Andersson、T. Bäckdahl 和 P.Blue，黑洞时空的几何，arXiv:1610.03540。

[88] M. Dafermos、G. Holzegel 和 I. Rodnianski，在 *Kerr* 时空上 *Teukolsky* 方程的有界性与衰减 *I*：情形 $|a| \ll M$，《偏微分方程年刊》**5 (2019)** 2，[arXiv:1711.07944]。

[89] L. Andersson、T. Bäckdahl、P. Blue 和 S. Ma，*Kerr* 时空上线性化引力的稳定性，《偏微分方程年刊》 **11** （2025年），第 1 11, [arXiv:1903.03859]。