arXiv:2601.05041v1 [math.DG] 8 Jan 2026

广义爱因斯坦方程的初值问题

Oskar Schiller

2026年1月9日

目录

1 摘要 **2**

2 引言 **2**2.1 记号与约定 .8

3：爱因斯坦-物质系统初值问题的适用技术：预备知识 **9**3.1 具有度量主符号的拟线性双曲型偏微分方程 . . . . . 93.2 DeTurck 规范条件 .103.3 全局双曲子集的并与交 .11

4 广义爱因斯坦方程 **12****5 广义爱因斯坦方程的初值问题** **14**

5.1 初值表述 .155.2 爱因斯坦框架 .175.3 规范条件与双曲约化 .235.4 设定初值. 265.5 整体双曲发展的存在性 .315.6 局部几何唯一性.335.7 最大全局双曲发展.36

A. 波动方程的结果 **39**
A.1 非线性波动方程 .39A.2 非齐次线性张量波动方程 .40

B 超曲面上形式的（协）微分分解 **43**

1 摘要

我们讨论 Hitchin 广义几何中爱因斯坦方程的初值问题，针对闭散度的情形（这对应于 II 型十维超引力 NS-NS 扇区玻色部分中的运动方程），并建立最大整体双曲发展（MGHD）的存在性。定义在维数为 $n+1$ 的流形上的动力场包括时空度量、一个称为膨胀子函数的标量场，以及一个称为 B-场的二形式。我们发展出洛伦兹规范的推广，将其应用于 B-场（并结合一个适当的、破缺微分同胚不变性的规范条件）后，可将该系统化为主符号由（动力学）度量给出的波动方程。给定初始数据，我们构造一个满足规范条件的发展。我们证明，所有其他发展都通过一个微分同胚与该发展相关（在适当意义下），从而确立几何唯一性。随后，MGHD 的存在性由 Choquet-Bruhat 和 Geroch 的著名结果得到。

在证明发展解的存在性和几何唯一性时，我们采用 Ringström 针对与标量场耦合的爱因斯坦方程所详细发展的方法。在一个预备章节中，我们提出一种不依赖于对物质所作特定假设的表述，从而可以轻松地将其应用于其他系统。

硕士学科分类：35Q76（爱因斯坦方程）；53D18（Hitchin 意义下的广义几何）。

K关键词：爱因斯坦方程、广义几何、初值问题、超引力 ty

2 引言

在广义几何中，广义爱因斯坦方程（GEE）是爱因斯坦方程在传统半黎曼几何中的自然类比。因此，研究它们是否导出一个适定的初值问题（IVP）是很自然的。此外，[1]已证明，在 恰当的 散度这一特殊情形下，GEE 等价于 II 型十维超引力中 NS-NS 扇区的玻色部分，这也为将其表述为初值问题提供了额外的动机。

本文结构如下。在第3节中，我们给出一些初步结果，这些结果通常有助于建立爱因斯坦-物质系统初值问题的适定性。这些结果曾由 Ringström 提出（某些情况下是隐含地提出），见 [2],。该研究（除其他内容外）关注与标量场耦合的爱因斯坦方程的初值问题适定性。我们在研究广义爱因斯坦方程的初值问题时采用了其中的方法。

在第 4 节中，我们给出从广义几何中得到的广义爱因斯坦方程。对于闭散度，它们是关于洛伦兹度量 g、闭三形式 H以及称为膨胀子一形式（或简称膨胀子）的闭一形式 ξ 的以下方程组，参见（4.4）：

$$\mathrm{d}^*H = -i_\xi H, \qquad \mathrm{Rc} = \frac{H^2}{4} - \nabla\xi, \qquad \frac{|H|^2}{6} = \mathrm{d}^*\xi + |\xi|^2 .$$

注意，我们也将这个系统称为弦框架广义爱因斯坦方程（与爱因斯坦框架广义爱因斯坦方程相对）。我们常使用二形式势 B 表示 H，以及标量势 ϕ表示 ξ。闭散度也称为闭膨胀子，因为它意味着 $\mathrm{d}\xi = 0$。

在第 5.1 节中，我们将阐述如何仿照 [2]，将广义爱因斯坦方程表述为一个初值问题。我们引入以下初始数据的概念（参见定义 5.3）。

定义 2.1。（以场表示的）初始数据 是指 $n+1$ 维（弦框架）广义爱因斯坦方程的一组数据 $(\Sigma,\ g_0,\ k,\ H_0^{\parallel},\ h_0,\ \xi_0^{\parallel},\ x_0)$，其中包含一个 n 维黎曼流形 $(\Sigma,\ g_\Sigma)$，以及定义在 Σ 上的以下对象：

(1) 一个对称的 (0，2) 阶张量 k,

(2) 一个闭三形式 $H_0^{\parallel}$ 和一个二形式 h_0,

(3) 一个闭一形式 $\xi_0^{\parallel}$ 和一个实值函数 x_0。

所有这些都满足约束方程(5.4)。

约束方程之所以得名，是因为它们约束了初始数据空间；它们必然由来自广义爱因斯坦方程发展过程的初始数据所满足。事后看来，我们发现它们实际上足以保证初始数据存在一个发展（参见定理2.4）。

Ringström 的方法如下。首先，将初始超曲面嵌入一个合适的环境空间。接下来，证明对于超曲面上的每一点，在一种具有适当唯一性性质的规范下，都可以在环境空间的一个开坐标邻域上构造初始数据的整体双曲发展。最后，将这些局部发展拼接起来，得到整个初始超曲面的发展。通过与这一发展进行局部比较，可以确立几何唯一性，因为它是在一种赋予其某种唯一性的规范下构造的。

要在坐标片上得到局部发展，需要诸如[2, 推论 9。16]（为求完整起见，我们在本文中将其作为定理 A.4列出。）该定理保证，对于向量值函数 $u\colon\ \mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^{n+1}$ 的拟线性双曲偏微分方程系统，存在唯一的最大解，其形式为

$$g[u]^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu u = f[u] \tag{2.1}$$

给定紧支初始数据。注意，f 和 g 属于特定的函数类，其自变量由点 $(t,\ x)\ \in\ \mathrm{R}^{n+1}$ 以及该点处的解 u 和其一阶导数组成；采用记号 $g[u]\ (t,\ x)\ =g\ (t,\ x,\ u\ (t,\ x)\ \partial_0 u\ (t,\ x)\ \ldots\ldots,\ \partial_n u\ (t,\ x))$，$f$也类似。

备注 2.2。据本文作者所知，[2] 是首部对采用这一方法建立适定性作出全面而严格表述的著作。[1] 正因如此，并且由于我们所研究的系统的目标正是建立基本的适定性结果，我们认为有必要遵循 Ringström 的工作。原则上，将其推广到其他物质系统是直接的。如果希望讨论任意一种与爱因斯坦方程耦合的物质模型，那么只需检查：在某个局部坐标邻域内，该系统具有适用于局部存在唯一性结果（例如定理 A.4）的形式。此后，证明的其余部分预计仍然成立。[2] 然而，这并不显然，因为 [2] 关注的是与标量场耦合的爱因斯坦方程这一特定情形，而我们考虑的是不同的物质模型。此外，由于 GEE 只有在经过局部定义的

[1]本文作者认为，这种策略能够奏效早已是众所周知的事。[3,第5.4节],中也有类似的评论，而 Ringström 本人在 [2]的引言中也将其奠基性工作称为阐述性著作。[2]其他方法也应具备这种适应性。例如，[3, 第 5.1 节], 中就有类似的说法，而 DeTurck 似乎也在 [4, 定理 5 下方的评论中指出了这一点5]。

共形变换（变换到爱因斯坦框架）后才具有良好的形式，这使得在 [2] 中全局定义的背景度量在我们的设定下只能局部定义。

在第5.2 节和5.3节中，我们将展示如何在局部将广义爱因斯坦方程与一个采用 (2.1) 形式坐标的系统联系起来。这需要对度量进行共形变换，这一过程称为采用爱因斯坦框架，随后构造一个采用 (2.1) 形式坐标的系统。

爱因斯坦框架将在第5.2节说明。度量的共形变换为 $\tilde{g} := e^{-2\kappa\phi} g$，其中 $\kappa = \frac{1}{d-2}$ 且 $d = n+1$ 是时空维数。请注意，共形因子是相对于膨胀子 ϕ 的势 ξ定义的。因此，一般而言，不存在全局的爱因斯坦框架选择；任意两个爱因斯坦框架选择在一个单连通集合上都可通过共形因子为常数的共形变换相互关联。经过共形变换的广义爱因斯坦方程称为爱因斯坦框架广义爱因斯坦方程。其形式为

$$\begin{aligned} \tilde{\mathrm{d}}^* H &= -\frac{4}{d-2} \tilde{\iota}_\xi H \\ \tilde{\mathrm{Rc}} &= \frac{1}{d-2}\left[\xi \otimes \xi - \frac{e^{-4\kappa\phi}}{6} |H|^2_{\tilde{g}}\, \tilde{g}\right] + e^{-4\kappa\phi} \frac{H^{2,\tilde{g}}}{4} \\ \tilde{\Box}\phi &= -\frac{e^{-4\kappa\phi}}{6} |H|^2_{\tilde{g}} \end{aligned} \tag{2.2}$$

定义中带波浪号的对象使用爱因斯坦框架度量 $\tilde{g}$。（关于记号的精确定义，参见命题 5.7。）

在第 5.3 节中，我们对爱因斯坦框架广义爱因斯坦方程进行双曲约化，并构造了一个坐标形式为（2.1）的系统。重要的是，只要满足 DeTurck 规范条件和广义洛伦兹规范条件——这是我们提出的一种新规范条件——所构造的系统就等价于爱因斯坦框架广义爱因斯坦方程。请注意，在该处及下文中，为避免记号过于繁复，我们省略爱因斯坦框架变量上的波浪号。

DeTurck 规范条件 通过将度量与背景度量进行比较，打破微分同胚不变性 $\bar{g}$ [4]。与波规范不同，它是一种不依赖于特定坐标选择的几何条件。它可表述为

$$0 = \mathcal{D}_\mu = g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} (\Gamma^\nu_{\alpha\beta} - \bar{\Gamma}^\nu_{\alpha\beta}),$$

其中 $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$ 和 $\bar{\Gamma}^\nu_{\alpha\beta}$ 分别表示任意坐标下 g 和 $\bar{g}$ 的克里斯托费尔符号（注意，该表达式定义了一个良定义的余向量）。实施 DeTurck 规范后，可以在里奇张量的局部表达式中，将度量的特定项替换为相应的背景度量项，从而将里奇张量转化为双曲算子 Rc。更准确地说，$\mathrm{Rc} = \mathrm{Rc} + \nabla_{(\mu} \mathcal{D}_{\nu)}$。我们指出，DeTurck 规范条件和波规范都可以视为“带源函数的波规范”的特例；该规范由 Friedrich 在 [5]中提出，并在 [3]中以更现代的语境加以介绍。

广义洛伦兹规范 是将洛伦兹规范推广到高阶形式的一种几何推广，其借鉴了 DeTurck 规范条件的思想。请记住，（通常的）洛伦兹规范是施加于麦克斯韦场 A（即爱因斯坦-麦克斯韦理论中场强张量的一形式势）上的条件。它可表述为 $\nabla^\mu A_\mu = 0$，并可用于将爱因斯坦–麦克斯韦系统转化为主符号由度量给出的波动方程 [6, §10.1.]。广义洛伦兹规范是施加于

B场（相对于给定背景场 $\bar{H} \in \Omega^3_{\mathrm{cl}}(M)$ 的 H 动力学部分的二形式势，即 $H = \bar{H} + \mathrm{d}B$）上的条件。它可表述为

$$0 = \left[\mathrm{d}\mathrm{d}^*_{g,\bar{g}} B\right]_{\mu\nu} = -g^{\lambda\kappa}\nabla_{[\mu}\bar{\nabla}_{|\lambda} B_{\kappa|\nu]} = 0$$

¯与 ∇ 背景度量的 Levi-Civita联络 $\bar{g}$，而指标记法$[\mu|\lambda\kappa|\nu]$ 表示对 μ 和 ν进行反对称化。它要求修正后的ˆ霍奇波算子 $\Box_{\mathrm{Hd}} = -\mathrm{d}^*\mathrm{d} - \mathrm{d}\mathrm{d}^*_{\bar{g}}$在 B 上的作用$\bar{g}$ 与余恰波算子 $-\mathrm{d}^*\mathrm{d}$一致。我们在备注 5.13中比较通常的洛伦兹规范与广义洛伦兹规范，并指出广义洛伦兹规范是将洛伦兹规范推广到高阶形式的一种自然方式。

备注 2.3。 我们简要谈谈 [7] Choquet-Bruhat 关于建立 11 维超引力柯西问题适定性的工作 $N = 1$ 。该理论是一个与我们研究的系统相关、但并不等同的系统。值得注意的是，它包含所谓的“三指标光子”A，以及与之类似的 B-场（因此可称为双指标光子）。在 [7], 坐标依赖的洛伦兹规范推广形式 $\partial^\lambda A_{\lambda\mu\nu} = 0$ 被施加于 A局部调和坐标中。

ˆ ˆ使用上述修正算子 Rc 和 $\Box_{\mathrm{Hd}}$，我们得到修正系统（参见（5.12））

$$\begin{aligned}
\hat{\Box}_{\mathrm{Hd}} B &= \mathrm{d}^*\bar{H} + \frac{4}{d-2} i_\xi H, \\
\hat{\mathrm{Rc}} &= \frac{1}{d-2}\left[\xi\otimes\xi - \frac{e^{-4\kappa\phi}}{6}|H|^2_g\, g\right] + e^{-4\kappa\phi}\frac{H^{2,g}}{4}, \\
\Box\phi &= -\frac{e^{-4\kappa\phi}}{6}|H|^2_g .
\end{aligned} \tag{2.3}$$

¯ ¯其中，$H = H + \mathrm{d}B$ 具有闭三形式 H 和 H 以及一个二形式 B。在命题5.12中，我们证明该系统的主符号由（逆）度量给出。

广义爱因斯坦方程的一种变体	弦框架	爱因斯坦框架	修正爱因斯坦框架
相关性	研究主题	辅助	度规主符号
动力学对象	g, H, ξ	$\tilde{g}, H, \phi$	$\tilde{g}, B, \phi$
定义	全局地	相对于.....局部地 选择 ϕ	相对于.....局部地 选择 ϕ、 $\bar{g}$， 以及 $\bar{H}$
与 弦框架	恒等式	$\tilde{g} = \exp(-2\kappa\phi)g$	等价于爱因斯坦框架 如果实现了规范

表1：此表展示了与本研究相关的广义爱因斯坦方程的三个版本及其主要性质。按照惯例，g 表示弦框架度量， $\tilde{g}$ 表示爱因斯坦框架度量， H 表示闭三形式， ξ 表示闭一形式（膨胀子）， ϕ¯表示实值函数（膨胀子势）， $\bar{g}$ 表示“背景”度量， H 表示闭的“背景”三形式。

在第 5.4 节中，我们为修正系统（2.3）中的动力场 g、 B 和 ϕ 设定初值。请注意，定义 2.1 中的初始数据形式化概念，并不能完全确定 $g|_\Sigma$ 和 $B|_\Sigma$ 在初始超曲面上的限制——该形式化概念不包括 $g|_\Sigma$ 和 $B|_\Sigma$ 中不受微分同胚或 B-场变换不变的分量，其中这些变换在 M 上的作用为恒等变换 $T\Sigma \oplus T^*\Sigma$,

即规范依赖分量。受 [2], 启发，我们在引理 5.15 和 5.16 中找到了几何条件，能够唯一刻画 g 和 B 的初值。此外，我们在引理 5.18 中证明，引理 5.15 和 5.16中的条件，以及 DeTurck 规范条件和广义洛伦兹规范条件，在爱因斯坦框架改变时保持不变。这一点至关重要，因为对于非恰当的膨胀子，不存在全局的爱因斯坦框架选择，因此在不同爱因斯坦框架中定义的发展必须彼此兼容。

在第 5.5 节中，我们证明了对于任意弦框架初始数据，弦框架发展存在。借助引理 5.19 和 5.20，我们证明了弦框架 GEE 在局部（空间上）的存在性与唯一性结果。唯一性结果利用了局部弦框架发展源自规范固定的爱因斯坦框架发展这一事实。遵循 [2], 的拼接过程，我们得到本文的一项主要结果（参见定理 5.21）：

定理 2.4。 设 $(\Sigma,\ g_0,\ k,\ H_0,\ h_0,\ \xi_0,\ x_0)$ 为弦框架 *GEE*（*4.4*）的初始数据。则存在该数据的一个整体双曲弦框架发展。

在第 5.6 节中，我们证明整体双曲发展的几何唯一性。也就是说，我们证明任意两个发展都是某个共同发展的延拓。为此，我们在命题 5.23 中证明，给定任意一个初始数据的爱因斯坦框架发展$(M,\ \tilde{g},\ H,\ \phi)$，都可以通过规范变换，在局部实现 DeTurck规范、广义洛伦兹规范以及引理5.15 和 5.16中的几何初始条件。由此便可将$(M,\ \tilde{g},\ H,\ \phi)$ 与构造定理 2.4 中弦框架发展时所用的局部爱因斯坦框架发展进行比较。再次遵循 [2], ，我们得到本文的另一项主要结果（参见定理 5.24）：

定理 *2.5.* 设 $(\Sigma, g_0, k, H_0, h_0, \xi_0, x_0)$ 是弦框架方程 *(4.4)* 的初始数据。记 (D, g, H, ξ) 为按定理 *5.21* 所构造的整体双曲发展，$D \subset M = R \times \Sigma$。假设另有一个发展 (M', g', H', ξ')，其嵌入为 $i\colon \Sigma \to M'$。

那么，存在 Σ 的一个管状邻域 $\tilde{D} \subset D$，以及一个光滑的保时间定向微分同胚 $\psi\colon \tilde{D} \to \psi(\tilde{D}) \subset M'$，满足 $\psi|_\Sigma = i$，并联系这两个解，即 $\psi^* g' = g$, $\psi^* H' = H$，且 $\psi^* \xi' = \xi$。

最后，在第 5.7 节中，我们介绍 Choquet-Bruhat 和 Geroch 提出的著名结果 [8]。该结果证明，对于任意爱因斯坦-物质系统，只要它们存在初始数据的局部发展，且解在几何意义上唯一，就存在最大整体双曲发展。由此以及定理 2.4 和 2.5，我们得到最大整体双曲发展的存在性（参见定理 5.26）。

定理2.6。 设 *I* 为弦框架 *GEE* 的初始数据。那么存在 *I* 的弦系 *MGHD*。它在微分同胚意义下唯一。

一般爱因斯坦-物质系统的柯西问题。 可以将具有闭散度的广义爱因斯坦方程理解为一个爱因斯坦-物质系统，其中物质由以下各项给出： H 以及 ξ。爱因斯坦-物质方程解的存在性与唯一性一直受到广泛研究，并且在对物质施加各种良态假设的条件下已得到确立。下文将简要概述相关文献，介绍在不同方法中获得适定性的途径，并为我们在第 5.2-5.6 节中的工作提供背景。

通常，需要对物质作出“行为良好”的假设，以保证两个性质。首先，能量-动量张量必须无散，这是

仅由物质方程导致的（即无需要求能量-动量张量等于爱因斯坦张量）。这一假设确保，将爱因斯坦方程转化为双曲型系统时所选的规范条件（例如 DeTurck规范）在爱因斯坦方程对初始数据的发展过程中得以保持，参见引理 3.3。我们将在第5.2 节看到，广义爱因斯坦方程只有在对系统进行共形变换后（物理学上称为变换到爱因斯坦框架）才满足这一要求。爱因斯坦框架要求为膨胀子选取一个势， $\phi \quad \xi = \mathrm{d}\phi$，因此只能在局部实现。其次，在适当的规范下，爱因斯坦-物质耦合系统必须构成一个双曲型系统，并且其初值问题在某种意义下局部行为良好。有了这两个性质，就可以采用成熟的方法构造初始数据的发展，证明任意两个发展都是某个共同发展的延拓，从而得出最大整体双曲发展的存在性。

关于爱因斯坦-物质系统柯西问题，最著名的处理方法之一见于霍金和埃利斯 [9, 第 7 节。7]我们不会采用这种方法，但希望说明其核心思想和难点。从根本上说，霍金和埃利斯通过不动点论证（基于 Choquet-Bruhat 的开创性工作）证明解的存在性和唯一性 [10] 。给定环境时空中某个超曲面上的初始数据，该论证涉及度量空间上的映射 α: $g_0 \mapsto g_1$ 其中 g_1 定义如下。以 g_0 为背景求解物质方程，然后求出一个满足给定应力-能量张量的线性化爱因斯坦方程的解 h ，最后令 $g_1 = g_0 + h$。霍金和埃利斯证明 α 是压缩映射，从而得到爱因斯坦-物质方程的唯一解。

霍金和埃利斯的方法对物质方程提出的主要要求是：给定背景度量时，物质方程具有良定义的柯西问题，并且在背景度量改变时具有良好的稳定性。这两项性质在我们的设定中都应当很容易证明。复杂之处在于额外要求应力-能量张量是物质场、其一阶协变导数以及度量的多项式。根据命题5.9，我们知道，在爱因斯坦框架中，与 H 和ϕ 相关联的能量-动量张量不满足这一要求。不过，这似乎纯粹是一个技术问题。在此采用这种方法更实质性的问题是，它针对整个环境时空上的方程，而我们只知道广义爱因斯坦方程在局部定义的爱因斯坦框架中表现良好。因此，我们放弃 [9] 中介绍的方法，转而采用 Ringström 在 [2]中介绍的方法。

我们简要指出，也可以在 ADM形式主义 中得到适定性结果。关于该形式体系中一般爱因斯坦-物质系统的柯西问题的全面论述，可见 [11]。

致谢。我衷心感谢 Hans Ringström 对其研究提出的深刻见解。我也感谢 UNED 马德里数学系为我提供博士访问职位。尤其是在访问期间，以及此后，我都受益于 Miguel Pino Carmona 和 Carlos Shahbazi 的支持与讨论；他们在解析范畴中、但针对任意号差，取得了类似的结果 [12]。最后，我非常感谢 Vicente Cortés 提出的诸多宝贵意见、给予我的指导以及全方位的支持。

2.1 记号与约定

(M, g) 表示一个 $d = n + 1$ 维洛伦兹流形。令 $\kappa = \frac{1}{d-2}$。我们称定向时间的洛伦兹流形为时空。我们称由时空 (M, g)、闭三形式 $H \in \Omega^3(M)$ 和函数 $\phi \in C^\infty(M)$ 构成的元组 (M, g, H, ϕ) 为超引力时空。我们将 Beltrami 波算子记为 $\Box = \nabla^\mu \nabla_\mu$，将霍奇波算子记为 $\Box_{\mathrm{Hd}} = -\mathrm{d}^*\mathrm{d} - \mathrm{d}\mathrm{d}^*$。对于向量场 X，我们将内积记为 i_X，因此对于一形式 ξ，有 $i_X(\xi) = \xi(X)$。为方便起见，我们也用 i_ξ 表示与向量场 $\xi^\sharp$ 的内积，其中 $\xi^\sharp$ 是将给定一形式 ξ 升指标后得到的。

在使用指标时，我们始终采用爱因斯坦求和约定。希腊指标 α，β，μ，ν，……取值为 0，……，n，其中假定 0 对应类时方向。拉丁指标 a，b，i，j，……取值为 1，……，n，并假定对应类空方向。

我们用圆括号表示归一化对称化，用方括号表示归一化反对称化。因此，例如，度量的李导数可写为 $L_X g_{\mu\nu} = 2\nabla_{(\mu} X_{\nu)}$。不使用指标时，我们分别用上标“sym”和“antisym”表示相同的运算。因此，$L_X g = 2[\nabla X^\flat]^{\mathrm{sym}}$其中 $\flat\colon\ T^*M \to TM$ 由 g诱导的音乐同构。

给定一个半黎曼超曲面 Σ，位于 (M, g) 中，其单位法向量为 N，我们将 p-形式 $A \in \Omega^p(M)$ 的限制分解为切向部分和法向部分。切向部分 $A^\parallel \in \Omega^p(\Sigma)$ 是 A 在 $T\Sigma$ 上的限制，而法向部分 $A^\perp \in \Omega^{p-1}(\Sigma)$ 是 $i_N A$ 在 $T\Sigma$ 上的限制。特别地，$A = A^\parallel + \varepsilon\, N^\flat \wedge A^\perp$，其中 $N^\flat = g(N, \cdot)$ 和$\varepsilon = g(N, N)$。

在这种情形下，有时需要将受限的外微分$\mathrm{d}A|_\Sigma$ 分解为来自 A 的平行部分和法向部分以及 $\nabla_N A$的贡献。记 k 为 Σ上的第二基本形式，可得以下贡献（参见引理B.2）

$$\left(k \cdot A^\parallel\right)_{i_1 \ldots i_p} := (-1)^p p\, k^j_{[i_1} A^\parallel_{i_2 \ldots i_p] j}$$

这里，$\cdot$ 表示自同态在 p-形式空间上的自然李代数作用（为方便起见，我们也用字母 k 表示魏因加滕映射，即由第二基本形式升高一个指标后得到的自同态）。

3 预备知识：适用于爱因斯坦-物质系统初值问题的技术

我们在此介绍 [2]Ringström 的著作中与任意爱因斯坦物质系统相关的部分。本节所呈现的所有结果都主要基于[2], 其中大多数结果仅在 [2]中隐含地得到确立。详细证明请参阅本书作者即将完成的博士论文 [13]。

3.1 具有度规主符号的拟线性双曲型偏微分方程

本节陈述一项关于解的存在性与唯一性的结果，该结果适用于主符号由某个洛伦兹度量的逆给出的拟线性双曲型偏微分方程，其中该度量属于动力学的一部分；前提是非线性项满足一项较弱的良态性假设。在适当的规范下，许多重要的爱因斯坦-物质系统都属于此类，参见注5.1。

设 $M = \mathbb{R} \times \Sigma$为一个光滑流形 Σ。记 $L(M) \subset \mathrm{Sym}^2(TM)$为具有洛伦兹号差的非退化对称二阶张量丛，记 E' 为张量丛$\mathcal{T}M$的一个向量子丛，并令 $E = L(M) \times E'$。取任意一点 $p \in \Sigma$以及 p的一个坐标邻域(U_Σ, x^m)，并在$U = \mathbb{R} \times U_\Sigma$上定义坐标 $x^\mu = (x^0 = t, x^m)$。于是，我们在 U 上研究偏微分方程

$$g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu u - f[u] = 0, \qquad u = (g, u') \in \Gamma(E|_U) \tag{3.1}$$

其中 $f \in C^\infty(L_n \times \mathbb{R}^{N' + (n+1)^{N+n+1}}, \mathbb{R}^N)$ 满足 $N' =$秩为 E', $N = N' + (n+1)^2$,, 且 L_n为 $n+1$ 维洛伦兹矩阵空间。我们采用以下记号

$$f[u](t,x) \coloneqq f(t, x, g_{\mu\nu}, u'_j, \partial_\mu u_j).$$

最后，我们作出如下假设：

$$f[u](t,x) = F(g_{\mu\nu}, u'_j, \partial_\mu u_j, \partial^\alpha B_l(t,x))$$

对于某些“背景场” $B \in C^\infty(M, \mathbb{R}^K)$, $K \in \mathbb{N}_0$,, 以及一个取值于 $\mathbb{R}^N$ 的光滑函数F，其依赖的变量如所示（$\alpha \in \mathbb{N}_0^{n+1}$表示次数不超过$k \in \mathbb{N}_0$的多重指标 $|\alpha| \leq k$），使得 $F(g_{\mu\nu}, 0, \ldots\ldots, 0) = 0$。

以下命题推广了[2, 定理 14 的证明中2]隐含证明的一个结果。证明参见 [13, 命题 5.1]。

命题 3.1。设 U_0, $U_1 \in C^\infty$（U_Σ, E）为方程（*3.1*）的初始数据。记 $U_0 =$（g_0, U_0'），（g_0）$_{\mu\nu}$取值于典范洛伦兹矩阵空间 $\mathcal{C}_n$。

那么，对于 p 的每个开邻域 $O \subset U$，都存在 p 的一个开邻域 $W \subset O$，使得方程 *(3.1)* 在其上存在一个整体双曲发展 $u = (g, u')$，其初始数据是在 $W \cap \Sigma$ 上由限制 U_0 和 U_1 给出的（即，$u = (g, u')$ 满足 *(3.1)*，(W, g) 是整体双曲的，并且我们还有 $U_0|_{W\cap\Sigma} = u|_{W\cap\Sigma}$ 以及 $U_1|_{W\cap\Sigma} = \partial_\mu u|_{W\cap\Sigma}$）。$W$ 可以选取得使分量矩阵 $(g_{\mu\nu})_{\mu\nu}$ 取值于典范洛伦兹矩阵空间 $\mathcal{C}_n$，特别是使 *grad* t 在 W 上为类时。

局部解的唯一性。我们希望讨论类型为（5.1）的方程的局部解的唯一性，而命题 3.1保证了此类解的存在。

我们着重讨论以下情形。设

$$f \in C^\infty(L_n \times \mathbb{R}^{N'+(n+1)N+n+1}, \mathbb{R}^N),$$

其中 $N\prime \in \mathbb{N}_0$ 和 $N = N' + (n+1)^2$。记 $\Sigma = \{0\} \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$。对于 $i = 1, 2$，设 $W_i \subset O_i \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 为开子集，使得 $W_1 \cap W_2 \cap \Sigma \neq \emptyset$，并记 $\Sigma_i := W_i \cap \Sigma$。令 $g_i \colon O_i \to \mathcal{C}_n$ 为一个洛伦兹度量，并令 $u_i' \colon O_i \to \mathbb{R}^{N'}$, $i = 1, 2$，使得在 W_i 上，$u_i = (g_i, u_i')$ 满足

$$g_i^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu u_i = f[u_i]$$

进一步假设 O_i 关于 g_i 是凸的，并且 Σ_i 在 (W_i, g_i) 中是类空柯西的。

下面的命题确立了所需意义下的局部唯一性。其依据是 [2, 定理 14 的证明。2]。证明参见 [13, 命题 5.5。]。

命题 3.2. 假设 W_i 是紧的，且包含于 O_i, $i = 1, 2$。假设 $u_1 = u_2$ 和 梯度 u_1 = 梯度 u_2 在 $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ 上成立。那么 $u_1 = u_2$ 在整个交集 $W_1 \cap W_2$ 上成立。

3.2 DeTurck 规范条件

本节回顾 DeTurck 规范具有良好的传播性质，并且可以通过施加一个微分同胚在局部实现该规范。我们关注 DeTurck 规范条件，因为它将爱因斯坦真空方程写成拟线性双曲型偏微分方程系统，其主符号由度量给出，详见第 3.1节。

DeTurck 规范具有良好的传播性质。 令 $\mathcal{D} \in \Gamma(T^*M)$ (之后将在 (5.9) 中给出)，并假设修正的里奇张量 $\hat{\mathrm{Rc}}_{\mu\nu} = \mathrm{Rc}_{\mu\nu} + \nabla_{(\mu}\mathcal{D}_{\nu)}$ (之后如 (5.10) 所示) 满足以下“爱因斯坦方程”：

$$\hat{\mathrm{Rc}} - \frac{\mathrm{tr}_g \hat{\mathrm{Rc}}}{2} g = T$$

其中，T 是任意无散二阶张量。我们将 $\mathcal{D} = 0$ 称为*DeTurck* 规范条件。

在此情形下，基于 [2, 第 14 章。1] 的论证表明，若初始超曲面 $\mathcal{D}$ 和 $\nabla\mathcal{D}$ 在初始超曲面的子集 Ω 上 Σ 初始时为零，则 $\mathcal{D}$ 在柯西发展 $D(\Omega)$ 上为零，另见 [13, 引理 5.6。]。

引理 3.3。 设 (M, g) 是一个具有类空柯西超曲面 Σ 的整体双曲洛伦兹流形。设 $\bar{g}$ 是 M 上的另一个洛伦兹度量，即背景度量。假设 $\hat{\mathrm{Rc}} - \frac{1}{2}\mathrm{tr}_g \hat{\mathrm{Rc}} = T$，其中 T 是一个 $(0, 2)$-张量，且满足 $\mathrm{div}\, T = 0$。假设在 $\Omega \subset \Sigma$ 上，$D = 0$ 且 $\nabla D = 0$。那么，$D = 0$ 在整个柯西发展 $D(\Omega)$ 上成立。

实现 DeTurck 规范。 实现 DeTurck 规范的微分同胚的存在性是一个经典结果 [5,截面 2], 另见 [2, 定理 14 的证明。3].

给定一个洛伦兹流形（M, g）和一个背景度量 $\bar{g}$，DeTurck 规范条件为

$$0 = \mathcal{D}_\mu[g, \bar{g}] = g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} (\Gamma^\nu_{\alpha\beta} - \bar{\Gamma}^\nu_{\alpha\beta}).$$

注意，右端与坐标无关，因此定义了一个良定的余向量 $\mathcal{D}$。如果所指的度量明确，我们也记作 $\mathcal{D} = \mathcal{D}[g] = \mathcal{D}[g, \bar{g}]$。我们将在第5.3 节讨论这一规范条件，特别是在注5.11中。

以下结果已在 [2, 定理 14 的证明中隐含地确立。3]证明参见 [13, 命题 5.9。]

命题 3.4。 设$(M, \bar{g})$ 和(M', g) 是光滑时空，且 Σ 是一个光滑类空超曲面 M，它也嵌入于 M'，嵌入映射为 $i\colon \Sigma \hookrightarrow M$。记 N和 N' 分别为 Σ 和 $i(\Sigma)$上的未来指向单位法向量。那么，对于所有 $p \in i(\Sigma)$，存在邻域 $p \in W \subset M'$和 $i^{-1}(p) \in W \subset M$以及一个微分同胚$f\colon W \to W'$，使得

(i) f^*g相对于 $\bar{g}$处于 ***DeTurck***规范，即 $D[f^*g] = 0$，且

(ii) $f_* N_q = N'_{i(q)}$ *for all* $q \in W_\Sigma := W \cap \Sigma$, *and*

(iii) $f_*|_{TW_\Sigma} = i_*$。

3.3 全局双曲子集的并与交

这里证明两个在拼接局部解（定理 5.21）和局部规范变换（定理 5.24）中所用的小型辅助结果。

下述引理已在 [2, 定理 14 的证明中隐含地得到。2]。证明参见 [13, 引理 5.10。]。

引理 3.5。 设 (M, g) 为一个洛伦兹流形， $\Sigma \subset M$ 为一个类空超曲面，且$t\colon M \to \mathbb{R}$ 为一个光滑函数，满足 $\operatorname{grad} t$ 处处为类时，并且 $\Sigma = t^{-1}(0)$。对于某个指标集 I中的所有 i，设 $W_i \subset M$ 为一个开子集，使得 $(W_i, g|_{W_i})$ 是整体双曲的，并以 $W_i \cap \Sigma$为柯西超曲面。那么， $D = \bigcup_i W_i$ 是整体双曲的，并以 $D \cap \Sigma$为柯西超曲面。

与下述结果类似的结论已在 [2, 定理 14 的证明3]中得出。证明参见 [13, 引理 5.11]。

引理 3.6。 设(M, g) 是整体双曲的，且具有柯西超曲面 Σ。设 U 和 V是整体双曲子集，满足 $U \cap V \neq \emptyset$，并且 $U_\Sigma = U \cap \Sigma$ 和 $V_\Sigma = V \cap \Sigma$ 分别是 U 和 V中的柯西超曲面。

于是， $U \cap V$是整体双曲的，其柯西超曲面为 $U_\Sigma \cap V_\Sigma$。特别地，等距映射 $f\colon (U \cap V, g) \to (M', g')$ 由其微分在 $U_\Sigma \cap V_\Sigma$上的限制唯一确定。

4 广义爱因斯坦方程

本节讨论广义爱因斯坦方程（GEE）。本文不着重于用广义几何描述这些方程，而是以自然定义在流形 M 上的对象来表述这些方程。有兴趣的读者可参阅[14, 15, 16, 17, 18]。

设 (M, g) 是一个洛伦兹流形，$H \in \Omega^3_{\mathrm{cl}}(M)$ 是一个闭三形式，$X \in \Gamma(TM)$ 是一个向量场，$\xi \in \Gamma(T^*M)$ 是一个一形式。记 $H^2 \in \mathrm{Sym}^2(M)$ 为由 $H \otimes H$ 与度量 g 作两次非平凡压缩所得的对称二阶张量，更确切地说，$H^2_{\mu\nu} = g^{\kappa\lambda} g^{\rho\pi} H_{\mu\kappa\rho} H_{\nu\lambda\pi}$。

定义 4.1. 若 [18, Corollary 4.7]，则称五元组 (M, g, H, X, ξ) 为广义里奇平坦。

$$4\,\mathrm{Rc} = H^2 - 4[\nabla\xi]^{\mathrm{sym}}, \qquad \mathrm{d}^*H = 2[\nabla X^\flat]^{\mathrm{antisym}} - i_\xi H \tag{4.1}$$

此外，若 [18, Corollary 4.4]，则称五元组 (M, g, H, X, ξ) 为广义标量平坦。

$$\mathrm{Sc} = \frac{|H|^2}{12} + 2\mathrm{d}^*\xi + |X|_g^2 + |\xi|_g^2 .$$

最后，若该五元组同时满足广义里奇平坦和广义标量平坦，则称 (M, g, H, X, ξ) 为广义爱因斯坦（弦框架）。

注 4.2。在广义几何中，GEE 指由一对 $(\mathcal{G}, \mathrm{div})$ 所满足的方程，其中这对对象由正合 Courant 代数丛上的广义度量 $\mathcal{G}$ 和散度算子 div 组成。在我们的框架中，度量 g 和三形式 H 编码了广义度量，而“广义向量” $X + \xi$ 编码了散度算子，另见 [15,命题 2.38. 和 §2.4]。我们注意到，在 X 和 ξ 的定义中引入了一个常规因子。如 [15] 所述，写作 $\mathrm{div} = \mathrm{div}^{\mathcal{G}} - \langle e, \cdot \rangle$，我们令 $e = 2(X + \xi)$，而在 [15] 中采用的约定是 $e = X + \xi$。这与[18]采用的约定一致。

注 4.3。请注意，广义里奇平坦性一般并不意味着广义标量平坦。

注 4.4。与 [15, 命题 3.30], 中给出的广义里奇平坦条件相比，我们的版本不包含相容性方程 $L_X g = 0$ 和 $\mathrm{d}\xi = i_X H$。它们确保散度算子与广义度量相容，即等价于广义向量场 $X + \xi$ 是无穷小等距变换 [15, 引理 3.32。]。请注意，相容性方程可由我们的假设（4.2）推出。关于广义几何文献中所采用的不同曲率概念的深入论述见 [19]。

F关于初值问题的讨论，我们仅关注以下情况 f

$$X = 0 \qquad \text{and} \qquad \mathrm{d}\xi = 0 \tag{4.2}$$

如注释 4.2所述，在广义几何中，广义向量 $X + \xi \in \Gamma(TM \oplus T^*M)$ 由广义度量与散度算子组成的一对数据导出。条件（4.2）是否成立仅取决于散度算子的选择（不过，ξ 的具体选择取决于广义度量）。因此，我们称

条件（4.2）也称为**散度算子是闭的**[3]。若存在函数 $\xi = \mathrm{d}\phi$，则称其为恰当的，其中函数为 $\phi \in C^\infty(M)$。恰当情形因三个原因而尤为重要。

(1) 对于恰散度，广义爱因斯坦方程可以由变分原理推导出来。具体而言，将广义爱因斯坦-希尔伯特作用量定义为广义标量曲率的积分（测度由散度算子定义），然后在广义度量和恰散度算子构成的空间上进行变分[15,§ 3.7]。

(2) 在恰散度的情形下，$\xi = \mathrm{d}\phi$ 对于某个 $\phi \in C^\infty(M)$，已知广义爱因斯坦方程对应于超引力 II 型十维理论中 NS-NS 扇区玻色部分的运动方程 [1]。在这一对应关系下，函数 ϕ 承担膨胀子这一物理场的角色。

(3) 与超引力的对应关系使我们能够借用物理学文献中广为人知的一个技巧：进入爱因斯坦框架。这是对度量和膨胀子 ϕ进行共形变换。该技巧对我们的分析至关重要，因为只有在爱因斯坦框架中，我们才能看到偏微分方程是某种我们熟悉且能够处理的波动方程。我们将在第 5.2节中对此作进一步说明。

上述理由 (1) 和 (3) 说明了为何在稍微更一般的情形下，即闭膨胀子 ξ 的情形下进行研究是可行的。这是因为在这两种情形中，只需在局部存在势 $\xi = \mathrm{d}\phi$。对于理由 (1)，这是因为只需在局部定义广义爱因斯坦-希尔伯特作用量，就能通过变分得到广义爱因斯坦方程（它们是局部方程）。对于理由 (3)，这是因为我们只会在局部使用爱因斯坦框架。

我们想稍微改写一下广义爱因斯坦方程。由 (4.1) 可得

$$\mathrm{Sc} = \frac{|H|^2}{4} + \mathrm{d}^*\xi. \tag{4.3}$$

因此，$\mathcal{R}c = 0$ 和 $\mathcal{S} = 0$ 合起来等价于

$$\mathrm{d}^*H = -i_\xi H, \qquad \mathrm{Rc} = \frac{H^2}{4} - \nabla\xi, \qquad \frac{|H|^2}{6} = \mathrm{d}^*\xi + |\xi|^2 . \tag{4.4}$$

我们将第一个方程称为 H**场方程**，将第二个方程称为***Ricci***方程，将第三个方程称为**膨胀子方程**。记 $H = H + \mathrm{d}B$ 为一个闭三形式 H 和一个二形式 B，我们也将第一个方程称为 B**场方程**。

[3]注意，这一术语取自 [15, 定义 3。40], 其中，由广义度量和散度算子组成的一对若满足 (4.2)，就称为闭的。

5 广义爱因斯坦方程的初值问题

在求解初值问题时，我们紧密遵循 [2], ，该文证明了耦合标量场的爱因斯坦方程存在最大全局双曲发展（MGHD）。值得注意的是 [2] 还全面介绍了所需的数学理论，因此也是本文的主要参考来源。

证明 [2] 中最大整体双曲发展的存在性，关键在于：在局部适当的坐标片上，爱因斯坦方程可化为一个关于向量值函数 $u\colon \mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^N$, $1\le n\in\mathbb{N}$ 的偏微分方程系统，经过一些修改后，其形式为

$$\begin{aligned} g[u]^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu u &= f[u],\\ u(T_0,\cdot) &= U_0,\\ \partial_t u(T_0,\cdot) &= U_1, \end{aligned} \tag{5.1}$$

其中 $T_0\in\mathbb{R}$, $g\in C^\infty(\mathbb{R}^{N+(n+1)N+n+1},\mathcal{C}_n)$ 是所谓的 C^∞ $(N,\ n)$-可容许度量 ($\mathcal{C}_n$表示典范洛伦兹矩阵空间), $f\in C^\infty(\mathbb{R}^{N+(n+1)N+n+1},\ \mathbb{R}^N)$ 是所谓的C^∞ $(N,\ n)$-容许非线性项，而 $U_0,\ U_1\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^N)$ 是初始数据。我们采用如下记号

$$g[u](t,x) \coloneqq g(t,x,u(t,x),\partial_0 u(t,x),\ldots,\partial_n u(t,x))$$

并且对 f也类似。我们在附录A.1中给出了这两种 C^∞ (N,n)-容许性的定义。对我们而言最重要的是 [2, 推论 9.16。] （为求完整起见，我们也将其作为定理A.4列于本文中）：偏微分方程系统（5.1）存在唯一的最大解。

注5.1。众所周知，在局部范围内并采用适当的规范，真空爱因斯坦方程[6, 定理 7.1。],爱因斯坦-麦克斯韦方程 [6, §10.1。], 以及与标量场耦合的爱因斯坦方程 [2, §14] 都具有（5.1）的形式。本文相当一部分内容将用于证明，事实上，广义爱因斯坦方程在局部也具有这种形式。

显然，方程（5.1）是二阶的。要将广义爱因斯坦方程视为二阶系统，我们必须使用势 B 和 ϕ ，它们分别描述 H 和 ξ的动力学。对于膨胀子，我们在局部写作 $\xi=\mathrm{d}\phi$。对于三形式 $\bar{}$ $\bar{}$，我们采用另一种方法，引入一个“背景场” H ，并将 $H=H+$分解为$\mathrm{d}B$。于是， B 便是动力学对象，也就是说，它的发展将通过求解运动方程来定义 $\bar{}$；而背景场 H 则编码全局数据，即上同调类 $[H]$。请注意，我们考虑的所有发展都定义在 Σ_0 的一个管状邻域 D 上：$=\{0\}\times\Sigma$ 在 $M=\mathbb{R}\times\Sigma$中。特别地， Σ 将是流形 D的变形收缩，这意味着 H 在 Σ上的初值决定了上同调类 $[H]$。这种方法提供了一个简单的几何条件，可唯一确定 B-场的初值，从而能够直接得到解的局部唯一性：通过选择背景场使得初始时 $\bar{H}\big|_\Sigma=H|_\Sigma$，可以要求 $B|_\Sigma=0$。

$\bar{}$代入 $H=H+\mathrm{d}B$ 和 $\xi=\mathrm{d}\phi$ 到广义爱因斯坦方程（4.4）中，我们得到以下系统

$$\mathrm{d}^*\mathrm{d}B=-\mathrm{d}^*\bar{H}-i_\xi H,\qquad \mathrm{Rc}=\frac{H^2}{4}-\nabla^2\phi,\qquad \Box\phi=-\frac{|H|^2}{6}+|\xi|^2, \tag{5.2}$$

其中我们使用了 $\Box\phi=\nabla^\mu\nabla_\mu\phi=-\mathrm{d}^*\mathrm{d}\phi$。

注意，乍看之下，系统（5.2）并不具有（5.1）的形式。在里奇方程中，有两个问题，第三个问题出现在 B-场方程中。

第一个问题源于二阶项 $\nabla^2\phi$。这使方程在局部不具备所需的形式，因为向量值函数 u 必须涵盖所有动力学对象 $g_{\mu\nu}$， $B_{\mu\nu}$ 和 ϕ，也就是说，大致为 [4]

$$u = (g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \phi)$$

可以通过对度量进行共形变换来解决这个问题：

$$\tilde{g} := e^{-2\phi/(d-2)} g$$

经过这一共形变换后，里奇张量吸收了 $\nabla^2\phi$ 项。接着，将 $(\tilde{g}_{\mu\nu}$， $B_{\mu\nu}$， $\phi)$ 视为动力学变量，问题便迎刃而解。在物理学文献中，这被称为“采用爱因斯坦框架”。这一名称源于只有在该“框架”中，能量-动量才在壳外守恒；也就是说，无须施加里奇方程，仅凭膨胀子和 B 场方程，便有

$$\operatorname{div}_{\tilde{g}} T[\tilde{g}, B, \phi] = 0$$

其中， T 是能量-动量张量。我们将在第 5.2 节讨论这一点。

另外两个问题也类似：在 Ricci 和 B-场方程中，作用于度量或 B-场的相应微分算子，在局部并非 $g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$ +低阶导数的形式。DeTurck规范（以及其他规范）正是为了解决这一问题而发展出来的。借鉴 DeTurck 规范和洛伦兹规范，我们引入一个规范条件，使 B-场方程也能达到同样的效果。我们将在第 5.3 节介绍这两个规范条件。

5.1 初值表述

我们的目标是证明广义爱因斯坦方程（4.4）的初值问题具有良好的性质。也就是说，我们希望证明，对于方程的每一种初始数据选取，都存在唯一的发展。因此，首先我们必须弄清楚方程（4.4）的初始数据由什么构成。

真空爱因斯坦方程的初始数据已有充分的理解（例如参见 [2, §14.2。]）。它由一个黎曼流形 $(\Sigma,\ g_\Sigma)$ 以及其上的一个对称二阶张量 k 构成于 Σ （代表第二基本形式），并且这些数据都满足约束方程（参见 [2,另见命题 13。3]）

$$\begin{aligned} \mathrm{Sc}_\Sigma + (\operatorname{tr} k)^2 - |k|^2 &= 0 \\ \operatorname{div}_\Sigma k - \nabla^\Sigma \operatorname{tr} k &= 0 \end{aligned}$$

其中， ∇^Σ 表示 g_Σ的LC联络，Sc_Σ 表示其标量曲率，而$\operatorname{div}_\Sigma k$ 表示 $\nabla^\Sigma k$ 的前两个指标与 g_Σ 作压缩映射。该组数据的发展是一个半黎曼嵌入 $\iota\colon (\Sigma,\ g_\Sigma) \to (M,\ g)$，嵌入到满足爱因斯坦方程的洛伦兹流形$(M,\ g)$中。如果$(M,\ g)$是整体双曲的，则称该发展为整体双曲。

对于 GEE，借助 H 和 ξ，我们还有两个额外的场，其初始数据必须确定初值。注意， H 和 ξ 的运动方程为

[4]当然，这并不能在$\mathbf{R}^{n+1}$上定义一个良好的函数，因为要讨论各分量，就必须使用坐标图。不过，目前为了讨论偏微分方程的形式，我们暂且忽略这个技术细节。

一阶的。因此，我们期望（4.4）的初始数据还应包括定义在 Σ上的以下对象：一个闭三形式 $H_0^{\|}$ 、一个二形式 h_0、一个闭一形式 $\xi_0^{\|}$ 以及一个实值函数 x_0。这些数据的发展随后是一个黎曼嵌入ι: $(\Sigma, g_\Sigma) \to (M, g)$，嵌入到一个洛伦兹流形 (M, g) 中，并伴随一个闭三形式$H \in \Omega^3_{\mathrm{cl}}(M)$和一个闭一形式 $\xi \in \Omega^1_{\mathrm{cl}}(M)$，使得广义爱因斯坦方程均得到满足，并且在$\iota(\Sigma)$上

$$\iota^* H = H_0^{\|}, \qquad \iota^*[H(N)] = h_0, \qquad \iota^* \xi = \xi_0^{\|}, \qquad \iota^*[\xi(N)] = x_0. \tag{5.3}$$

在广义几何的形式体系中，可以证明，对于如下对象的元组（Σ、 g_Σ、 k、 $H_0^{\|}$、 h_0、 $\xi_0^{\|}$、 x_0），若其具有发展，则必然有 [17, 推论 5.22。]

$$\begin{aligned} \mathrm{Sc}_\Sigma + (\operatorname{tr} k)^2 - |k|^2 &= \frac{\left|H_0^{\|}\right|^2}{12} + \frac{|h_0|^2}{4} + 2(\mathrm{d}^\Sigma)^* \xi_0^{\|} + 2(\operatorname{tr} k) x_0 + \left|\xi_0^{\|}\right|^2 - x_0^2 \\ \operatorname{div}_\Sigma k - \mathrm{d}^\Sigma \operatorname{tr} k &= \frac{1}{4} C(h_0, H_0^{\|}) - \mathrm{d}^\Sigma x_0 + i_{\xi_0^{\|}} k \\ 0 &= \left((\mathrm{d}^\Sigma)^* + i_{\xi_0^{\|}} \right) h_0 \end{aligned} \tag{5.4}$$

在此，我们用 $C(h_0, H_0^{\|})$ 表示由 h_0和 $H_0^{\|}$按如下方式缩并指标得到的一形式：

$$C_i(h_0, H_0^{\|}) = g_\Sigma^{kl} g_\Sigma^{mn} (h_0)_{km} (H_0^{\|})_{lni}$$

方程（5.4）是 GEE 的（弦框架）约束方程。

注 5.2。 除了从 [17], 中确立的广义 Gauß 方程和 Codazzi 方程得到这些约束方程外，还可以从更为直观的角度得到它们。在 GEE（4.4）中，里奇方程已知会产生约束方程，而这些方程正是（5.4）中的前两个方程。 H-场方程是一个形式上的波动方程，我们看到它们会在定理 A.7 中产生一个约束方程。这就是（5.4）中的第三个方程。

我们在以下两个定义中形式化广义爱因斯坦方程的初始数据、约束方程和初值问题的概念。这些定义基于 [2, 定义 14。1]中与标量场耦合的爱因斯坦方程的类似定义。

定义 5.3。初始数据（以场表示）对于4.4式中的弦框架广义爱因斯坦方程，位于 $n+1$维，其为一个组元 $(\Sigma, g_0, k, H_0^{\|}, h_0, \xi_0^{\|}, x_0)$，由一个 n维黎曼流形(Σ, g_Σ)以及定义在 Σ上的以下对象组成：

(1) 一个对称的 (0,2) 阶张量 k,

(2) 一个闭三形式 $H_0^{\|}$ 和一个二形式 h_0,

(3) 一个闭一形式 $\xi_0^{\|}$ 和一个实值函数 x_0。

所有这些对象均满足约束方程(5.4)。

定义 5.4. 设 $(\Sigma, g_0, k, H_0^{\|}, h_0, \phi_0, \phi_1)$ 为初始数据。那么，初值问题（IVP）就是求出初始数据的一个（弦框架）发展，即一个满足（弦框架）广义爱因斯坦方程的超引力时空 (M, g, H, ϕ)，以及一个黎曼嵌入 i: $(\Sigma, g_0) \to (M, g)$，使得 k 对应于 $i(\Sigma)$ 上的第二基本形式，并且 H 和 ϕ通过关系式 (5.3) 在 Σ 上诱导出给定的初始数据。若发展 (M, g, H, ϕ) 中的 $i(\Sigma)$ 是 (M, g) 的柯西超曲面，则称该发展为整体双曲的。

¯给定一个背景三形式 H，并在局部范围内工作时，我们可以通过势 B 和 ϕ来表示场 H 和ξ：

$$H = \bar{H} + \mathrm{d}B, \qquad \xi = \mathrm{d}\phi. \tag{5.5}$$

注意， ϕ 的初始数据由 $\phi_0 = \phi|_\Sigma$ 和 $\phi_1 = N(\phi)$ 描述。成立的是 $\xi_0^{\|} = \mathrm{d}^\Sigma\phi_0$和 $x_0 = \phi_1$。

为了用势 B来讨论初始数据，我们考虑以下

引理 5.5. 令 $H = \mathrm{d}B$。此外，将 B 和 $\nabla_N B$ 表示为 Σ 上的自然对象：

$$B|_\Sigma = B_0^{\|} - N^\flat \wedge b_0, \qquad \nabla_N B|_\Sigma = B_1^{\|} - N^\flat \wedge b_1 \tag{5.6}$$

其中 $B_0^{\|}, B_1^{\|} \in \Omega^2(\Sigma)$ 和 $b_0, b_1 \in \Omega^1(\Sigma)$。于是，取 $H_0^{\|}$ 和 h_0 如（5.3）所示，

$$H_0^{\|} = \mathrm{d}^\Sigma B_0^{\|}, \qquad h_0 = B_1^{\|} - \mathrm{d}^\Sigma b_0 - k \cdot B_0^{\|}.$$

这里，$\cdot$ 是端同态在微分形式上的自然作用。

证明。可得

$$\mathrm{d}B = \mathrm{d}^\Sigma B_0^{\|} - N^\flat \wedge \left[B_1^{\|} - \mathrm{d}^\Sigma b_0 - k \cdot B_0^{\|}\right].$$

作为引理 B.2 的特例。 □

我们在下面的注记中概述这一陈述的含义。

注记 5.6. 在分解（5.6）中，只有 $B_0^{\|}$ 的初值以及差$B_1^{\|} - \mathrm{d}^\Sigma b_0$ 受到 H初值的约束。注意，对于在类空超曲面上诱导的初始数据，总可以通过在 M 上进行闭 B-场变换，使得 $b_0 = 0$，参见引理 5.22。在此假设下，初始数据恰好约束 $B_0^{\|}$ 和$B_1^{\|}$ ——前者可加上一个闭二形式，后者则唯一确定（但取决于这一自由度）。

由前面的讨论可知，以势（部分地）表述的初始数据与以场表述的初始数据的区别在于，将 $(H_0^{\|}, h_0^{\|})$ 替换为 $(B_0^{\|}, B_1^{\|})$和/或将 $(\xi_0^{\|}, x_0)$ 替换为 (ϕ_0, ϕ_1)，并要求满足（5.5），使约束方程（5.4）成立。

5.2 爱因斯坦框架

请注意， $\nabla^2\phi$项在（5.2）中会产生不合适的二阶导数；若要将系统理解为（5.1）的形式，就必须处理这些导数。本节讨论爱因斯坦框架中的广义爱因斯坦方程，并说明在此框架下不会出现这类不合适的导数。此外，我们还将看到，仅由 B场方程和膨胀子方程即可推出该框架中的能量-动量张量无散。

我们强调，爱因斯坦框架（对于非恰当的膨胀子）只能在局部获得，方法是写成 $\xi = \mathrm{d}\phi$。因此，在初值问题的语境下，应将我们在此讨论的超引力时空视为所考虑的发展中的一个适当小子集。

爱因斯坦框架是通过以下命题所述的共形变换实现的。

命题 5.7. 设 (M,g,H,ϕ) 是一个维数为 $d=n+1$ 的超引力时空。记$\xi=\mathrm{d}\phi$。定义 $\kappa=\frac{1}{d-2}$ 爱因斯坦框架度量为 $\tilde{g}:=e^{-2\kappa\phi}g$。则，广义里奇平坦性与标量平坦性（4.4）等价于

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{d}}^*H&=-\frac{4}{d-2}\tilde{\imath}_\xi H\\ \tilde{\mathrm{Rc}}&=\frac{1}{d-2}\left[\xi\otimes\xi-\frac{e^{-4\kappa\phi}}{6}|H|^2_{\tilde{g}}\,\tilde{g}\right]+e^{-4\kappa\phi}\frac{H^{2,\tilde{g}}}{4}\\ \tilde{\Box}\phi&=-\frac{e^{-4\kappa\phi}}{6}|H|^2_{\tilde{g}}\end{aligned}\tag{5.7}$$

其中，$\tilde{\imath}_\alpha H=H(\alpha^\sharp)$，音乐同构 $\tilde{\sharp}$ 来自爱因斯坦框架度量 $\tilde{g}$。此外，$\tilde{\Box}=\tilde{\nabla}^\mu\tilde{\nabla}_\mu$，且 $H^{2,\tilde{g}}\in$ 对称化$^2(M)$ 表示与 $\tilde{g}$缩并得到的对称二阶张量，即 $H^{2,\tilde{g}}_{\mu\nu}=\tilde{g}^{\kappa\lambda}\tilde{g}^{\omega\pi}H_{\mu\kappa\omega}H_{\nu\lambda\pi}=e^{4\kappa\phi}H^2_{\mu\nu}$。

证明。（4.4）与（5.7）等价，这可通过简单计算得出，并利用以下关于共形变换的著名恒等式 $\tilde{g}=e^{2\varphi}g$:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{Rc}}&=\mathrm{Rc}-(d-2)(\nabla^2\varphi-\mathrm{d}\varphi\otimes\mathrm{d}\varphi)-(\Box\varphi+(d-2)\,|\mathrm{d}\varphi|^2_g)g,\\ \tilde{\nabla}\alpha&=\nabla\alpha+\langle\alpha,\mathrm{d}\varphi\rangle_g\,g-(\mathrm{d}\varphi\otimes\alpha+\alpha\otimes\mathrm{d}\varphi),\\ e^{2\varphi}\tilde{\mathrm{d}}^*\omega&=\mathrm{d}^*\omega-(d-2p)i_{\mathrm{d}\varphi}\omega.\end{aligned}$$

其中，α 表示任意一形式，而 ω 是一个 p-形式。代入 $\varphi=-\kappa\phi$后，得到

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{Rc}}&=\mathrm{Rc}+(\nabla^2\phi+\frac{1}{d-2}\mathrm{d}\phi\otimes\mathrm{d}\phi)+\frac{1}{d-2}(\Box\phi-|\mathrm{d}\phi|^2_g)g,\\ \tilde{\nabla}\alpha&=\nabla\alpha-\frac{1}{d-2}[\,\langle\alpha,\mathrm{d}\phi\rangle_{\tilde{g}}\,\tilde{g}-(\mathrm{d}\phi\otimes\alpha+\alpha\otimes\mathrm{d}\phi)],\\ \tilde{\mathrm{d}}^*\omega&=e^{2\kappa\phi}\mathrm{d}^*\omega+\frac{d-2p}{d-2}\tilde{\imath}_{\mathrm{d}\phi}\omega.\end{aligned}$$

我们从第一个方程开始。

$$\begin{aligned}&&\mathrm{d}^*H&=-i_\xi H\\ \iff&&e^{-2\kappa\phi}\left(\tilde{\mathrm{d}}^*H-\frac{d-6}{d-2}\tilde{\imath}_\xi H\right)&=-i_\xi H\\ \iff&&\tilde{\mathrm{d}}^*H&=\frac{-4}{d-2}\tilde{\imath}_{\mathrm{d}\phi}H\end{aligned}$$

注意到膨胀子方程可表述为 $\Box\phi-|\mathrm{d}\phi|^2_g=-\frac{|H|^2}{6}$，我们继续讨论第二个方程。

$$\begin{aligned}&&4\,\mathrm{Rc}&=H^2-4\nabla\xi\\ \iff&&\tilde{\mathrm{Rc}}&=\frac{1}{d-2}\left[\mathrm{d}\phi\otimes\mathrm{d}\phi+\left(\Box\phi-|\mathrm{d}\phi|^2_g\right)g\right]+\frac{H^2}{4}\\ \iff&&\tilde{\mathrm{Rc}}&=\frac{1}{d-2}\left[\mathrm{d}\phi\otimes\mathrm{d}\phi-\frac{|H|^2_g}{6}\,g\right]+\frac{H^2}{4}\\ \iff&&\tilde{\mathrm{Rc}}&=\frac{1}{d-2}\left[\xi\otimes\xi-e^{-4\kappa\phi}\frac{|H|^2_{\tilde{g}}}{6}\,\tilde{g}\right]+e^{-4\kappa\phi}\frac{H^{2,\tilde{g}}}{4}\end{aligned}$$

最后，我们计算

$$\begin{aligned}\tilde{\Box}\phi &= \mathrm{tr}_{\tilde{g}}\left(\tilde{\nabla}^2\phi\right) = \mathrm{tr}_{\tilde{g}}\left(\tilde{\nabla}\mathrm{d}\phi\right)\\ &= \mathrm{tr}_{\tilde{g}}\left(\nabla^2\phi - \frac{1}{d-2}\left[\,|\mathrm{d}\phi|^2_{\tilde{g}}\,\tilde{g} - 2\,\mathrm{d}\phi\otimes\mathrm{d}\phi\right]\right)\\ &= e^{2\kappa\phi}\left(\Box\phi - |\mathrm{d}\phi|^2_g\right)\\ &= -e^{-4\kappa\phi}\frac{|H|^2_{\tilde{g}}}{6}.\end{aligned}$$

我们已经完成。 □

接下来讨论爱因斯坦框架广义爱因斯坦方程的初值问题表述。爱因斯坦框架初始数据（针对场和势）以及爱因斯坦框架发展的概念，直接类似于定义 *5.3*和*5.4*中所发展的弦框架中的相应概念。请注意，必须为膨胀子引入一个势，才能定义爱因斯坦框架。接下来需要建立爱因斯坦框架约束方程，以及联系弦框架与爱因斯坦框架初始数据的变换。我们先从后者开始。

引理 5.8。设(M, g, H, ϕ)，$H = H + \mathrm{d}B$，是一个具有类空超曲面 Σ 的超引力时空，该超曲面上诱导出初始数据 $(g_0, k, H_0, h_0, \phi_0, \phi_1)$。记 N 为 Σ上的未来指向单位法向量。那么，经过共形变换 $\tilde{g} = e^{-2\kappa\phi}g$,$\kappa = \frac{1}{d-2}$（对应于从弦框架到爱因斯坦框架的变换）后，超引力时空$(\tilde{g}, H, \phi)$ 诱导出的初始数据$(\tilde{g}_0, k, H_0, h_0, \phi_0, \phi_1)$ 为

$$\begin{aligned}\tilde{g}_0 &= e^{-2\kappa\phi}g_0, \qquad & \tilde{k} &= e^{-\kappa\phi}[k - \kappa N(\phi)g_0],\\ \tilde{H}_0 &= H_0, & \tilde{h}_0 &= e^{\kappa\phi}h_0\\ \tilde{\phi}_0 &= \phi_0, & \tilde{\phi}_1 &= e^{\kappa\phi}\phi_1\end{aligned}$$

此外，二形式 $B \in \Omega^2(M)$ 在分解中的分量 B_0、B_1、b_0 和 b_1

$$B|_\Sigma = B_0 - N^\flat \wedge b_0, \qquad \nabla_N B|_\Sigma = B_1 - N^\flat \wedge b_1 \tag{5.8}$$

变换为

$$\begin{aligned}\tilde{B}_0 &= B_0, \qquad & \tilde{B}_1 &= e^{\kappa\phi}[B_1 + 2\kappa N(\phi)B_0 - \kappa b_0 \wedge \mathrm{d}^\Sigma\phi],\\ \tilde{b}_0 &= e^{\kappa\phi}b_0, & \tilde{b}_1 &= e^{2\kappa\phi}\left[b_1 - 2\kappa N(\phi)b_0 + \kappa i_{\mathrm{d}^\Sigma\phi}B_0\right].\end{aligned}$$

~ ~ ~证明。 $\tilde{g}_0, H_0$ 和 ϕ_0 的公式显然成立。分别将关于 g 和 $\tilde{g}$ 的 Σ 上的未来指向单位法向量记为 N 和 $\tilde{N}$。于是 $\tilde{N} = e^{\kappa\phi}N$。~ ~ h_0 和 ϕ_1 的公式可直接得出。此外，

$$\begin{aligned}\tilde{k} &= [\tilde{\nabla}_{\tilde{g}}\tilde{N}]^\parallel = [\tilde{\nabla}(e^{-\kappa\phi}gN)]^\parallel = e^{-\kappa\phi}\left[\tilde{\nabla}gN - \kappa\mathrm{d}\phi\otimes gN\right]\Big|_{T\Sigma}\\ &= e^{-\kappa\phi}\left[\nabla gN - \kappa\left\langle gN, \mathrm{d}\phi\right\rangle_g g + \kappa(\mathrm{d}\phi\otimes gN + gN\otimes\mathrm{d}\phi) - \kappa\mathrm{d}\phi\otimes gN\right]\Big|_{T\Sigma}\\ &= e^{-\kappa\phi}\left[k - \kappa N(\phi)g_0\right].\end{aligned}$$

~现在来讨论 B 场分量如何变换。同样，显然有 $B_0 = B_0$ 和$\tilde{b}_0 = e^{\kappa\phi}b_0$。此外，

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{N}}B = e^{\kappa\phi}\tilde{\nabla}_N B = e^{\kappa\phi}\left[\nabla_N B + 2\kappa N(\phi)B - \kappa(i_N B)\wedge\mathrm{d}\phi - \kappa(gN)\wedge(i_{\mathrm{d}\phi}B)\right].$$

由此可得

$$\begin{aligned}\tilde{B}_1 &= \tilde{\nabla}_{\tilde{N}} B\Big|_{T\Sigma} = e^{\kappa\phi}[B_1 + 2\kappa N(\phi) B_0 - \kappa b_0 \wedge \mathrm{d}^{\Sigma}\phi],\\ \tilde{b}_1 &= [\tilde{\nabla}_{\tilde{N}} B](\tilde{N}) = e^{+2\kappa\phi}\left[b_1 + 3\kappa N(\phi) b_0 + \kappa i_{\mathrm{d}\phi} B - \kappa b_0(\mathrm{grad}_g\,\phi) g N\right]\\ &= e^{2\kappa\phi}\left[b_1 + 2\kappa N(\phi) b_0 + \kappa i_{\mathrm{d}^{\Sigma}\phi} B_0\right],\end{aligned}$$

如所声称。 □

接下来，我们计算爱因斯坦框架中的能量-动量张量，并验证仅由 B-场方程和膨胀子方程即可推出该张量确实无散。本节余下部分中，为简化记号，我们省略共形变换后的度量上方的波浪号。

命题 5.9。 设 (M, g, H, ϕ) $\xi = \mathrm{d}\phi$, 是一个满足爱因斯坦框架广义爱因斯坦方程（5.7）的超引力时空。则，能量-动量张量 $T = \mathrm{Rc} - \mathrm{Sc}_2\, g$ 由下式给出

$$T = \frac{1}{d-2}\left[\xi\otimes\xi - \frac{|\xi|^2}{2} g\right] + \frac{e^{-4\kappa\phi}}{4}\left[H^2 - \frac{|H|^2}{6}\, g\right]$$

此外，仅假设 H-场方程和式（5.7）中的膨胀子方程成立，能量-动量张量即为无散。

证明。 我们计算

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{d-2}\left[\xi\otimes\xi - \frac{1}{6} e^{-4\kappa\phi}\,|H|_g^2\; g\right] + e^{-4\kappa\phi}\frac{H^2}{4}\\ &\quad - \frac{1}{2(d-2)} g\,\mathrm{tr}\left[\xi\otimes\xi - \frac{1}{6} e^{-4\kappa\phi}\,|H|_g^2\; g\right] - \frac{e^{-4\kappa\phi}}{8}\, g\,\mathrm{tr}\,(H^2)\\ &= \frac{1}{d-2}\left[\xi\otimes\xi - \frac{1}{6} e^{-4\kappa\phi}\,|H|_g^2\; g\right] + e^{-4\kappa\phi}\frac{H^2}{4}\\ &\quad - \frac{1}{2(d-2)} g\left[\,|\xi|^2 - \frac{d}{6} e^{-4\kappa\phi}\,|H|^2\,\right] - \frac{1}{8}\, g\, e^{-4\kappa\phi}\,|H|^2\\ &= \frac{1}{d-2}\left[\xi\otimes\xi - \frac{|\xi|^2}{2} g\right] + e^{-4\kappa\phi}\frac{H^2}{4} + \left(\frac{d-2}{12(d-2)} - \frac{1}{8}\right) e^{-4\kappa\phi}\,|H|^2\; g\\ &= \frac{1}{d-2}\left[\xi\otimes\xi - \frac{|\xi|^2}{2} g\right] + e^{-4\kappa\phi}\frac{H^2}{4} - \frac{1}{24} e^{-4\kappa\phi}\,|H|^2\; g.\end{aligned}$$

此外，

$$
\begin{aligned}
&\nabla^\mu T_{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2(d-2)}\nabla^\mu\left[2\xi_\mu\xi_\nu - \xi^\lambda\xi_\lambda g_{\mu\nu}\right] \\
&\quad + \frac{1}{4}\nabla^\mu(e^{-4\kappa\phi}H_\mu{}^{\lambda\kappa}H_{\nu\lambda\kappa}) - \frac{1}{24}\nabla_\nu(e^{-4\kappa\phi}\left|H\right|^2) \\
&= \frac{1}{2(d-2)}\Big[2(\nabla^\mu\xi_\mu)\xi_\nu \underbrace{+2\xi_\mu(\nabla^\mu\xi_\nu) - 2(\nabla_\nu\xi^\lambda)\xi_\lambda}_{=0}\Big] \\
&\quad + \frac{e^{-4\kappa\phi}}{4}\Big\{-4\kappa(\nabla^\mu\phi)H_\mu{}^{\lambda\kappa}H_{\nu\lambda\kappa} - \mathrm{d}^*H^{\lambda\kappa}H_{\nu\lambda\kappa} + H_\mu{}^{\lambda\kappa}\,\nabla^\mu H_{\nu\lambda\kappa} \\
&\quad \frac{2\kappa}{3}(\nabla_\nu\phi)\left|H\right|^2 - \frac{1}{6}\nabla_\nu\left|H\right|^2\Big\} \\
&\overset{(D)}{=} \frac{e^{-4\kappa\phi}}{6(d-2)}\Big\{-\left|H\right|^2\,\xi_\nu - 6\xi^\mu H_\mu{}^{\lambda\kappa}H_{\nu\lambda\kappa} + \xi_\nu\left|H\right|^2\Big\} \\
&\quad + \frac{e^{-4\kappa\phi}}{4}\left\{-\mathrm{d}^*H^{\lambda\kappa}H_{\nu\lambda\kappa} + H_\mu{}^{\lambda\kappa}\,\nabla^\mu H_{\nu\lambda\kappa} - \frac{1}{6}\nabla_\nu\left|H\right|^2\right\} \\
&\overset{(H)}{=} -\frac{e^{-4\kappa\phi}}{d-2}\xi^\mu H_\mu{}^{\lambda\kappa}H_{\nu\lambda\kappa} \\
&\quad + \frac{e^{-4\kappa\phi}}{4}\left\{\frac{4}{d-2}\xi^\mu H_\mu{}^{\lambda\kappa}H_{\nu\lambda\kappa} + H^{\mu\lambda\kappa}\nabla_\mu H_{\nu\lambda\kappa} - \frac{1}{3}H^{\mu\lambda\kappa}(\nabla_\nu H_{\mu\lambda\kappa})\right\} \\
&= \frac{e^{-4\kappa\phi}}{4}\left\{H^{\mu\lambda\kappa}\,\nabla_\mu H_{\nu\lambda\kappa} - \frac{1}{3}H^{\mu\lambda\kappa}\mathrm{d}H_{\nu\mu\lambda\kappa} - H^{\mu\lambda\kappa}\nabla_{[\mu}H_{\lambda\kappa]\nu}\right\} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

下划线括号处的等式用到了 ξ 的闭性。记号 (H) 和 (D) 分别表示我们用到了 H-场方程和膨胀子方程。最后一个等式用到了 H 的闭性。

□

最后，为完整起见，我们给出爱因斯坦框架约束方程。

命题 5.10。 爱因斯坦框架约束方程为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Sc}_\Sigma + (\operatorname{tr} k)^2 - |k|^2 &= \frac{1}{d-2}\left[\left|\mathrm{d}^\Sigma\phi_0\right|^2 + \phi_1^2\right] + \frac{e^{-4\kappa\phi_0}}{12}\left[\left|H_0\right|^2 + 3\left|h_0\right|^2\right], \\
\operatorname{div}_\Sigma k - \operatorname{tr} k &= \frac{1}{d-2}\phi_1\mathrm{d}\phi_0 + \frac{e^{-4\kappa\phi_0}}{4}C(h_0, H_0), \\
0 &= \left[(\mathrm{d}^\Sigma)^* + \frac{4}{d-2}i_{\mathrm{d}^\Sigma\phi_0}\right]h_0.
\end{aligned}
$$

其中， $C(h_0,\ H_0)$ 是通过压缩 h_0 和 $H_0^{\|}$ 得到的一形式，如 (5.4) 下方所述。

证明。 直接从爱因斯坦框架广义爱因斯坦方程（5.7）推导这些方程，比将引理 5.8中建立的初始数据变换规则应用于弦框架约束方程（5.4）更有效。

（5.4）中的第一个约束方程等价于[5] $G(N,N)=T(N,N)$，利用 $G(N,N)=\frac{1}{2}[\mathrm{Sc}_\Sigma+(\mathrm{tr}\ k)^2-|k|^2]$。注意到

$$\begin{aligned}T(N,N)&=\frac{1}{d-2}\left[\xi\otimes\xi-\frac{|\xi|^2}{2}g\right](N,N)+\frac{e^{-4\kappa\phi}}{4}\left[H^2-\frac{|H|^2}{6}g\right](N,N)\\&=\frac{1}{d-2}\left[(\phi_1)^2+\frac{\left|\mathrm{d}^\Sigma\phi_0\right|^2-\phi_1^2}{2}\right]+\frac{e^{-4\kappa\phi_0}}{4}\left[|h_0|^2+\frac{|H_0|^2-3\,|h_0|^2}{6}\right]\\&=\frac{1}{2(d-2)}\left[\left|\mathrm{d}^\Sigma\phi_0\right|^2+\phi_1^2\right]+\frac{e^{-4\kappa\phi_0}}{24}\left[|H_0|^2+3\,|h_0|^2\right],\end{aligned}$$

由此得到第一个爱因斯坦框架约束方程。同样，我们注意到，式（5.4）中的第二个约束等价于 $G(N,X)=T(N,X)$ 当 $X\in\Gamma(T\Sigma)$时，利用$G(N,X)=(\mathrm{div}_\Sigma k)(X)-X(\mathrm{tr}\ k)$。我们注意到

$$\begin{aligned}T(N,X)&=\frac{1}{d-2}\left[\xi\otimes\xi-\frac{|\xi|^2}{2}g\right](N,X)+\frac{e^{-4\kappa\phi}}{4}\left[H^2-\frac{|H|^2}{6}g\right](N,X)\\&=\frac{1}{d-2}\phi_1\mathrm{d}\phi_0(X)+\frac{e^{-4\kappa\phi_0}}{4}C(h_0,H_0)(X)\end{aligned}$$

并得到第二个约束方程。最后，式（5.4）中的第三个弦框架约束等价于 $i_N\mathrm{d}{}^*H=-\frac{4}{d-2}i_Ni_\xi H$（请与命题5.7中的第一个方程比较）。由引理B.2，我们得到约束方程

$$-(\mathrm{d}^\Sigma)^*h_0=\frac{4}{d-2}i_{\mathrm{d}^\Sigma\phi_0}h_0.$$

□

[5]注意，弦框架方程 $G[g]=T[g,B,\phi]$ 与爱因斯坦框架方程 $G[\tilde g]=\tilde T[\tilde g,B,\phi]$ 逐分量等价，因为 $\tilde T$由方程 $G[\tilde g]-G[g]=\tilde T[\tilde g,B,\phi]-T[g,B,\phi]$定义。假设膨胀子方程成立，我们在命题 5.9中计算了 $\tilde T$的一个等价表达式。

5.3 规范条件与双曲约化

在本节中，设 (M, g, H, ϕ) $\xi = \mathrm{d}\phi$，是一个满足爱因斯坦框架广义爱因斯坦方程（5.7）的超引力时空。注意，为了简化记号，本节中我们省略波浪号。记 $H = \bar{H} + \mathrm{d}B$ 为某个闭 $\bar{H} \in \Omega^3_{\mathrm{cl}}(M)$ 和一个二形式 $B \in \Omega^2(M)$。再次强调，一般而言，只有在为膨胀子 $\xi = \mathrm{d}\phi$选择一个势之后，才能在局部采用爱因斯坦框架。因此，我们应当将此处考虑的超引力时空视为某个发展的一个小子集。

柯西问题适定性的关键在于运动方程（5.7） g， B 和 ϕ的良好性质。正如前文所述，我们希望将它们理解为（5.1）的形式。本节将构造能够实现这一点的规范条件。

广义爱因斯坦方程在广义微分同胚（微分同胚与 B场变换的组合）下保持不变。实施规范条件意味着打破这种不变性。为此，我们引入一个背景度量[6]。（从概念上说，应当在利用 DeTurck 规范打破微分同胚不变性之后，才固定背景场 H 。）目前，只需取 $M = \mathbb{R} \times \Sigma$上的任意洛伦兹度量 $\bar{g}$ 即可。定义

$$A^{\mu}_{\alpha\beta} \coloneqq (\nabla - \bar{\nabla})^{\mu}_{\alpha\beta} \in \Omega^1(\mathrm{End}\, TM)$$

其中， ∇ 和 $\bar{\nabla}$ 分别表示 g 和 $\bar{g}$ 的列维-奇维塔联络。注意，在局部坐标中

$$A^{\mu}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} - \bar{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta}$$

记作

$$\Gamma_{\mu} \coloneqq g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}, \qquad F_{\mu} \coloneqq g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \bar{\Gamma}^{\nu}_{\alpha\beta}$$

可以验证

$$\mathrm{Rc}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \partial_{\beta} g_{\mu\nu} + \partial_{(\mu} \Gamma_{\nu)} + \text{lower order}$$

现在可以明显看出如何修改里奇张量。按照 [2, 第 14 章。1], 我们定义$\mathcal{D}_{\nu} \in \Gamma(T^*M)$ 为

$$\mathcal{D}_{\nu} \coloneqq -g_{\nu\mu} g^{\alpha\beta} A^{\mu}_{\alpha\beta} = F_{\nu} - \Gamma_{\nu} \tag{5.9}$$

然后

$$\hat{\mathrm{Rc}}_{\mu\nu} = \mathrm{Rc}_{\mu\nu} + \nabla_{(\mu} \mathcal{D}_{\nu)} = \mathrm{Rc}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} L_{\mathcal{D}} g_{\mu\nu},$$

其中， $L_{\mathcal{D}}$表示沿向量场 $g^{\mu\nu}\mathcal{D}_{\nu}$方向的李导数。引用 [2,式 (14.3)], , 可知

$$\hat{\mathrm{Rc}}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \partial_{\beta} g_{\mu\nu} + \nabla_{(\mu} F_{\nu)} + g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} [\Gamma_{\alpha\gamma\mu} \Gamma_{\beta\delta\nu} + \Gamma_{\alpha\gamma\mu} \Gamma_{\beta\nu\delta} + \Gamma_{\alpha\gamma\nu} \Gamma_{\beta\mu\delta}] \tag{5.10}$$

，其中 $\Gamma_{\alpha\beta\gamma} \coloneqq g_{\beta\mu} \Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma}$，即 Rc 确实是一个形如 $g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}+$ 低阶项的双曲微分算子。

[6]更准确地说，我们引入了一个背景联络 $\bar{\nabla}$，因为度量本身不会出现在规范条件中。不过，我们可以假设该联络是某个度量的 Levi-Civita联络。

注 5.11. 我们在这一形式体系中施加的规范条件是 $\mathcal{D} = 0$，在这种情况下 $\hat{\mathrm{Rc}} = \mathrm{Rc}$。为突出 $\mathcal{D}$ 对动力学度规 g 和背景度量 $\bar{g}$ 的依赖性，我们记作 $\mathcal{D} = \mathcal{D}[g, \bar{g}]$。那么，当然有微分同胚不变性 $f^*(\mathcal{D}[g, \bar{g}]) = \mathcal{D}[f^*g, f^*\bar{g}]$。然而，将背景度量视为固定时，我们也记作 $\mathcal{D}[g] = \mathcal{D}[g, \bar{g}]$。那么，条件 $\mathcal{D} = 0$ 会破坏微分同胚不变性，因为一般来说

$$f^*(\mathcal{D}[g]) = \mathcal{D}[f^*g, f^*\bar{g}] \neq \mathcal{D}[f^*g, \bar{g}] = \mathcal{D}[f^*g].$$

受我们修改里奇张量的做法启发，我们来考察算子 $\mathrm{d}^*\mathrm{d}$。作用于 B，并将所有不含 $g_{\mu\nu}$ 或 $B_{\mu\nu}$二阶导数的项统称为“低阶项”，可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^*\mathrm{d}B_{\mu\nu} &= -3\nabla^\lambda \nabla_{[\lambda} B_{\mu\nu]} \\
&= -3\nabla^\lambda \partial_{[\lambda} B_{\mu\nu]} \\
&= -3\partial^\lambda \partial_{[\lambda} B_{\mu\nu]} + \text{lower order} \\
&= -\partial^\lambda \partial_\lambda B_{\mu\nu} - 2\partial^\lambda \partial_{[\mu} B_{\nu]\lambda} + \text{lower order} \\
&= -\partial^\lambda \partial_\lambda B_{\mu\nu} - 2\partial_{[\mu}(\partial^\lambda B_{\nu]\lambda}) + \text{lower order}.
\end{aligned}$$

我们记 $\partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu$。

第二项恰好包含 B-场中那些有问题的二阶导数，因为它们使算子不具有 (5.1) 的形式。注意，这些项等于

$$\mathrm{d}\mathrm{d}^* B = 2\nabla_{[\mu} \nabla^\lambda B_{\nu]\lambda}$$

度量的二阶导数阶项。然而，我们不能将这些项加入方程，因为这只会使方程以另一种方式偏离所需的形式 (5.1)。幸运的是，我们还有另一个度量可用：$\bar{g}$。我们并不在意它的二阶导数进入方程。因此，我们将其确定为想要用来修改 B-场方程的量

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_\nu &\coloneqq \mathrm{d}^*_{g,\bar{g}} B_\nu \coloneqq -g^{\kappa\lambda}\bar{\nabla}_\kappa B_{\lambda\nu} \in \Gamma(T^*M) \\
&= \mathrm{d}^* B_\nu + \mathcal{D}^\mu B_{\mu\nu} + g^{\kappa\lambda} A^\mu_{\kappa\nu} B_{\lambda\mu}.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

为了突出$\mathcal{C}$ 对 g、B 和 $\bar{g}$ 的依赖性，我们有时写作$\mathcal{C} = \mathcal{C}[g, B]$，甚至写作$\mathcal{C} = \mathcal{C}[g, B, \bar{g}]$。

最后，将（5.7）代入

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rc} &\longrightarrow \hat{\mathrm{Rc}}, \\
\mathrm{d}^*\mathrm{d}B &\longrightarrow \mathrm{d}^*\mathrm{d}B + \mathrm{d}\mathcal{C} =: -\hat{\Box}_{\mathrm{Hd}} B,
\end{aligned}$$

我们得到修正系统

$$\begin{aligned}
\hat{\Box}_{\mathrm{Hd}} B &= \mathrm{d}^* \bar{H} + \frac{4}{d-2} i_\xi H \\
\hat{\mathrm{Rc}} &= \frac{1}{d-2}\left[\xi \otimes \xi - \frac{e^{-4\kappa\phi}}{6} |H|^2_g \, g\right] + e^{-4\kappa\phi}\frac{H^{2,g}}{4} \\
\Box\phi &= -\frac{e^{-4\kappa\phi}}{6} |H|^2_g
\end{aligned} \tag{5.12}$$

其中 $\bar{H} = H + \mathrm{d}B$, $\xi = \mathrm{d}\phi$。

命题5.12。 修正爱因斯坦框架广义爱因斯坦方程（5.12）构成一个拟线性双曲系统，其主符号为 $g^{\mu\nu}$。此外，将该系统写成局部坐标形式 $g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu - f[u] = 0$其中 $u = (g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \phi)$，可见非线性项 $f[u](t, x)$在以下各表达式于 (t, x)处均取零时也为零：

- $\partial_\alpha g_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$, $\partial_\alpha B_{\mu\nu}$, ϕ, *and* $\partial_\alpha\phi$,
- $\bar{H}_{\mu\nu\lambda}$, $\partial_\alpha\bar{H}_{\mu\nu\lambda}$, $\partial_\alpha\bar{g}_{\mu\nu}$, *and* $\partial_\alpha\partial_\beta\bar{g}_{\mu\nu}$.

特别地，修正的广义爱因斯坦方程（5.12）具有（3.1）所要求的形式，因此局部存在唯一性结果命题 3.1适用于此。

证明。 下文中，我们将对主符号和非线性的要求称为方程“具有正确的形式”。对于里奇方程，从局部坐标下修正的里奇张量 $\hat{}\mathrm{Rc}$ 的表达式（5.10）可以看出其具有正确的形式。对于膨胀子方程，其正确形式可由达朗贝尔算子的局部表达式推出 $\Box\phi = g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi - g^{\lambda\kappa}\Gamma^\alpha_{\lambda\kappa}\partial_\alpha\phi$。最后，对于 B场方程，我们计算得

$$\begin{aligned}\hat{\Box}_{\mathrm{Hd}}B_{\mu\nu} = {}& \partial^\lambda\partial_\lambda B_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha\partial_\alpha B_{\mu\nu} + 2g^{\lambda\kappa}\partial_{[\mu}(\bar{\Gamma}^\alpha_{\nu]\lambda}B_{\alpha\kappa} + B_{\nu]\alpha}\bar{\Gamma}^\alpha_{\lambda\kappa}) - 2g^{\lambda\kappa}B_{\beta\kappa}\Gamma^\alpha_{\lambda[\mu}\bar{\Gamma}^\beta_{\nu]\alpha} \\ & - 4g^{\lambda\kappa}B_{\beta[\mu}\Gamma^\alpha_{\nu]\lambda}\bar{\Gamma}^\beta_{\alpha\kappa} + 2g^{\lambda\kappa}\Gamma^\beta_{\kappa[\mu}\partial_{|\lambda|}B_{\nu]\beta} - 2g^{\lambda\kappa}B_{\alpha\beta}\Gamma^\beta_{\kappa[\mu}\bar{\Gamma}^\alpha_{\nu]\lambda},\end{aligned}$$

其中我们记 $\partial^\lambda := g^{\lambda\kappa}\partial_\kappa$。由此可见其具有正确的形式。 □

最后，修正系统必须与未修正系统一致，即 $\mathrm{d}\mathcal{C} = 0$，因为我们真正感兴趣的是求解后者。（出于同样的原因，我们还将有 $\mathcal{D} = 0$。）因此，我们所采用的规范可以理解为

$$0 = \mathrm{d}\mathcal{C} = \mathrm{d}\mathrm{d}^*_{g,\bar{g}}B \tag{5.13}$$

我们将此条件称为广义洛伦兹规范。请注意，它破坏了方程在闭 B场变换下的不变性，因为$\mathrm{d}\mathcal{C}[g, B] \neq \mathrm{d}\mathcal{C}[g, B + \beta]$ 对于 β一个闭二形式。我们在引理5.22 中证明，总能借助闭 B场变换来实现$\mathrm{d}\mathcal{C} = 0$ 。

注记5.13。我们可以将广义洛伦兹规范（5.13）与洛伦兹规范$\mathrm{d}^*A = 0$ 作比较；在研究[7] A 中爱因斯坦–麦克斯韦系统的柯西问题时，电磁场势 [6]。对于一形式，可以计算得 $\mathrm{d}^*A = -\partial^\mu A_\mu + \Gamma^\mu A_\mu$。也就是说，差值 $\mathrm{d}^*_{g,\bar{g}}A - \mathrm{d}^*A$ 由$\mathcal{D}^\mu A_\mu$给出。由于研究柯西问题时也必须实现规范$\mathcal{D} = 0$ ，因此也可以将洛伦兹规范等价地表述为 $\mathrm{d}^*_{g,\bar{g}}A = 0$。注意到对于 0-形式，闭意味着为常数，因此我们看到，对于一形式，广义洛伦兹规范 $\mathrm{d}\mathrm{d}^*_{g,\bar{g}}A = 0$ 是对洛伦兹规范的一种温和推广。

现在我们证明，通过研究修正系统（5.7），可以得到原系统的解（5.12）。回顾引理3.3 的假设可知，$\mathcal{D}$ 在初始超曲面 Ω 的任意子集 Σ 上 $\mathcal{D} = 0$ 且 $\nabla\mathcal{D} = 0$时，该子集的整个柯西发展上均为零。然而，这一结果并不能直接应用于修正的广义爱因斯坦方程（5.12）的解。虽然根据命题 5.9 ，在假设 T 场方程和膨胀子方程成立时，爱因斯坦框架中得到的能量-动量张量 H是无散的，但原则上，在转而采用修正系统（5.12）后，这一性质不再成立，因为此时 H场方程也经过了修正。解决办法是先在适当条件下证明$\mathrm{d}\mathcal{C}$ 这一修正项 H在场方程中为零。

[7]在本注释中，我们暂且不考虑字母 A 已被对象 $A = \nabla - \bar{\nabla}$ 占用这一事实。

命题 5.14。 设 (M, g, H, ϕ)， $H = H + \mathrm{d}B$, $\xi = \mathrm{d}\phi$ 是满足（5.12）的整体双曲超引力时空。设 $\bar{g}$ 是 M上的任意洛伦兹度量，并按（$\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{C}$ ）和（5.9）及（5.11）分别定义。

于是，假设 $D = 0$，且在某个子集 $\Omega \subset \Sigma$ 上有 $\nabla D = \mathrm{d}\mathcal{C} = 0$，则在整个柯西发展 $D(\Omega)$ 上有 $D = 0$ 和$\mathrm{d}\mathcal{C} = 0$ 。

证明。我们首先推导$\mathcal{C}$的无源波动方程。对修正后的 B-场方程取余微分：

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{d}^* \left[\mathrm{d}^* H + \mathrm{d}\mathcal{C} + \frac{4}{d-2} i_\xi H \right] \\ &= \mathrm{d}^*\mathrm{d}\mathcal{C} - \frac{4}{d-2} i_\xi \mathrm{d}^* H \\ &= \mathrm{d}^*\mathrm{d}\mathcal{C} + \frac{4}{d-2} i_\xi \left(\mathrm{d}\mathcal{C} + \frac{4}{d-2} i_\xi H \right) \\ &= \mathrm{d}^*\mathrm{d}\mathcal{C} + \frac{4}{d-2} i_\xi \mathrm{d}\mathcal{C} \end{aligned} \tag{5.14}$$

这里，我们利用了 H 的反对称性，从而得出 $i_\xi i_\xi H = 0$ 以及

$$\mathrm{d}^*(i_\xi H)_\nu = -\nabla^\mu [(\nabla^\lambda \phi) H_{\lambda\mu\nu}] = (\nabla^\lambda \phi) \nabla^\mu H_{\mu\lambda\nu} = -(i_\xi \mathrm{d}^* H)_\nu .$$

我们注意到（5.14）确实没有源项。因此，根据定理A.7，必有$\mathrm{d}\mathcal{C} = 0$ 在 $D(\Omega) = M$。

最后，张量 $T = \hat{\mathrm{Rc}} - \frac{1}{2}\mathrm{tr}g\, \hat{\mathrm{Rc}}$ 与命题5.9 中爱因斯坦框架下得到的能量动量张量一致。由（现在实际上未作修正的）H-场方程和膨胀子方程可知，$\mathrm{div}\, T = 0$。因此，根据引理3.3， $D = 0$ 在 $D(\Omega)$。 □

5.4 设定初值

本节为修正系统 (5.12) 设定初值。这意味着，给定爱因斯坦框架广义爱因斯坦方程 (5.7) 的初始数据 $\mathrm{I} = (\Sigma, g_0, k, H_0, h_0, \phi_0, \phi_1)$ 后，我们构造一个流形 M ，使其上可以进行发展；该流形配备背景度量 $\bar{g}_{\mathcal{I}}$、背景场 $\bar{H}_{\mathcal{I}} \in \Omega^3_{\mathrm{cl}}(M)$，并在初始超曲面 Σ 上赋予度量g、 B-场、膨胀子 ϕ 及其各自的一阶导数，使得 $_H = H_{\mathcal{I}} + \mathrm{d}B$ 在 Σ 上由 (M, g, H, ϕ) 诱导的初始数据能够重现给定的初始数据。我们再次省略爱因斯坦框架中各对象上的波浪号。（在后续各节重新使用波浪号时，我们会对此作出说明。）

我们在记号中着重体现背景场对初始数据的依赖性。这是因为爱因斯坦框架初始数据只能局部存在，且取决于膨胀子势的选择；这与 [2] 中讨论的与标量场耦合的爱因斯坦方程情形不同，在后者中，存在定义良好的全局初始数据和背景场。

注意，我们并没有直接为 B-场提供初始数据，而只有其外微分 $\mathrm{d}B$ 的初始数据。然而，在讨论解的唯一性时，有必要更好地控制 B，因此我们人为地引入与对 $\mathrm{d}B$ 的要求相兼容的二形式 B_0， $B_1 \in \Omega^2(\Sigma)$，并要求 $B^{\|} = B_0$ 以及 $(\nabla_N B)^{\|} - \mathrm{d}^\Sigma(B(N)) = B_1$，其中 N 是 Σ 上的单位法向量。通过这些附加要求，我们可以确定 g、 B 和 ϕ 的初值中的大部分自由度。

然而，在指定 g 和 B 的法向分量及其法向导数时，仍会出现一些无法由初始数据确定的自由度。对于

度量，这一点例如见 [2, 第 14 章。2]。原因是，诱导初始数据在对 M 施加微分同胚作用时保持不变，只要这些微分同胚在 Σ上限制为恒等变换。指定 g 的法向分量及其法向导数的自由度，可用于指定单位法向量，并使 $\mathrm{D} = 0$ 在初始时刻成立。对于 B场，诱导初始数据甚至在闭 B场变换的作用下也保持不变，只要这些变换在 Σ上的广义切丛上限制为恒等变换。也就是说，我们可以向 B 加上任意满足 $\beta^{\|} = 0$的闭二形式 $\beta \in \Omega^2(M)$。我们利用这一自由度，使 $B(N) = 0$ 和 $\mathrm{C}^{\|} = 0$ 在 Σ上成立。

至关重要的是，我们设置初始数据的方式是几何性的，并不依赖于坐标的选择。遵循 [2], 这一点，我们可以将仅定义在 Σ中点的小邻域内的发展拼接起来，因为这会使这些发展在初始超曲面上（两者均有定义的地方）一致。更进一步，我们必须独立于爱因斯坦框架的选择来设置初始数据，以便将定义在不同爱因斯坦框架中的发展拼接起来。请注意，在同一个连通集合上定义的、对应于给定膨胀子 ξ 的两个膨胀子势 ϕ 和 ϕ' 相差一个常数。

我们来定义背景流形和背景场。令 $M = \mathrm{R} \times \Sigma$，并将 $\Sigma \cong \{0\} \times \Sigma$视为同一对象。用 $t\colon \mathrm{R} \to \Sigma$ 表示由投影到第一个因子得到的坐标。我们将背景场定义为

$$\bar{g}_{\mathcal{I}} := -e^{-2\kappa\phi_0}\mathrm{d}t^2 + g_0, \qquad \bar{H}_{\mathcal{I}} := H_0 + \mathrm{d}t \wedge h_0 + t\,\mathrm{d}^{\Sigma}h_0 \tag{5.15}$$

其中可以验证 $H_{\mathcal{I}}$ 确实是闭的。

在 [2, 第14章2], 中，通过施加以下引理所述的要求，确定了 g 和 ϕ 的初值——但第一项条件中的因子 $e^{\kappa\phi_0}$ 除外。需要这个因子，以确保这些条件在爱因斯坦框架改变时保持不变。

引理 5.15。 g、 ϕ及其一阶时间导数的初值由以下要求唯一确定（且不存在超定）。

(1) $e^{\kappa\phi_0}\partial_t$ 在 Σ上与单位法向量 N 一致。

(2) g在 Σ上诱导初始数据（g_0、 k），即 $g^{\|} = g_0$和 $2k = L_N g$。

(3) ϕ在 Σ上诱导初始数据（ϕ_0、 ϕ_1），即 $\phi|_{\Sigma} = \phi_0$和 $N\,(\phi) = \phi_1$。

(4) 初始时， g满足*DeTurck*规范，即$D[g, \bar{g}_{\mathcal{I}}]|_{\Sigma} = 0$。

证明。 为了更明确地讨论这一点，选取一个坐标图 (U_Σ, x^m)，并将其扩展为 $\mathrm{R} \times U_\Sigma$ 上的坐标 $(x^0 = t, x^m)$。我们用这些坐标指定 U_Σ 上的度量 g 及其一阶导数。 g 的空间部分由 (2) 确定：

$$g_{mn}|_{t=0} = (g_0)_{mn} \tag{5.16}$$

条件 (1) 等价于

$$g_{00}|_{t=0} = -e^{-2\kappa\phi_0}, \qquad g_{0n}|_{t=0} = 0. \tag{5.17}$$

由第二基本形式的公式 $K_{mn} = \frac{1}{2}\,|g_{00}|^{-1/2}\,g_{mn,0}$可立即看出，（2）等价于

$$g_{mn,0}|_{t=0} = 2e^{-\kappa\phi_0}k_{mn} \tag{5.18}$$

还需确定 $g_{00,0}$ 和 $g_{0k,0}$，我们将看到它们的值由（4）确定。我们对 $t=0$ 进行如下辅助计算：

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{00} &= \frac{1}{2}g^{00}g_{00,0} = -\frac{1}{2}e^{2\kappa\phi_0}g_{00,0},\\
\Gamma^k_{00} &= -\frac{1}{2}g^{kl}(g_{00,l}-2g_{0l,0}) = g^{kl}(-\kappa e^{-2\kappa\phi_0}\partial_l\phi + g_{0l,0}),\\
\Gamma^0_{mn} &= \frac{1}{g_{00}}g(\nabla_m\partial_n,\partial_0) = -e^{\kappa\phi_0}g(\nabla_m\partial_n,N) = e^{\kappa\phi_0}k_{mn},\\
\Gamma^k_{mn} &= -\frac{1}{2}g^{kl}(g_{mn,l}-g_{lm,n}-g_{nl,m}) = (\Gamma^\Sigma)^k_{mn}.
\end{aligned}$$

在此，$(\Gamma^\Sigma)^k_{mn}$ 表示关于 g_0 的克里斯托费尔符号。由此可得

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &= g_{00}g^{\alpha\beta}\Gamma^0_{\alpha\beta} = \Gamma^0_{00} - e^{-\kappa\phi_0}\mathrm{tr}\,k = -\frac{1}{2}e^{2\kappa\phi_0}g_{00,0} - e^{-\kappa\phi_0}\mathrm{tr}\,k,\\
\Gamma_l &= g_{lk}g^{\alpha\beta}\Gamma^k_{\alpha\beta} = \Gamma^\Sigma_l + g_{lk}g^{00}\Gamma^k_{00} = \Gamma^\Sigma_l + \kappa\partial_l\phi_0 - e^{2\kappa\phi_0}g_{0l,0}.
\end{aligned}$$

在此，Γ^Σ_l表示关于 g_0 的缩并克里斯托费尔符号。我们看到，通过要求 $0=\mathcal{D}_\mu = F_\mu - \Gamma_\mu$，即可轻松实现初始时刻的条件

$$\begin{aligned}
g_{00,0}|_{t=0} &= -2e^{-2\kappa\phi_0}[F_0 + e^{-\kappa\phi_0}\mathrm{tr}\,k]\Big|_{t=0},\\
g_{0k,0}|_{t=0} &= e^{-2\kappa\phi_0}\left[\Gamma^\Sigma_k - F_k + \kappa\partial_l\phi_0\right]\Big|_{t=0}.
\end{aligned}$$

注意到(3)唯一确定了 ϕ 的初值及其一阶时间导数，即可完成证明。

□

我们将 ∇ 记为 g 的 Levi-Civita联络，将 $N=e^{\kappa\phi_0}\partial_t$ 记为 Σ 上的单位法向量。我们将 $B_0, B_1 \in \Omega^2(\Sigma)$ 记为 B-场的初始数据。注意，$\bar{H}_\mathcal{I}$ 诱导出初始数据 (H_0, h_0)，因此，对 B 的初始要求为 $\mathrm{d}B=0$。于是，我们可以采用现成的规范选择 $B_0=B_1=0$。

引理 5.16。 B 及其一阶导数的初值由以下要求唯一确定（且不存在超定）：

(1) B 诱导初始数据(B_0, B_1)，即 $B^\parallel = B_0$ 和$(\nabla_N B)^\parallel = B_1$。

(2) 初始时，B 没有法向分量，即 $B(N)=0$。

(3) 初始时，B 满足$(\mathcal{C}[g,B,\bar{g}_\mathcal{I}])^\parallel = 0$。

最后，在 $B_0=B_1=0$的情况下，只需要求 B 及其时间导数在初始时均为零，即可满足这些要求。

证明。 按照(1)写为

$$B|_{t=0} = B_0 - N^\flat\wedge b_0, \qquad \nabla_N B|_{t=0} = B_1 - N^\flat\wedge b_1.$$

条件 (2) 得出 $b_0=0$。剩下要确定 b_1。根据定义，考虑$\mathcal{C}$ (5.11) 和引理 B.2

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}^\parallel &= (\mathrm{d}^*_{g,\bar{g}_\mathcal{I}}B)^\parallel = (\mathrm{d}^*B)^\parallel + E[B]\\
&= (\mathrm{d}^\Sigma)^*B_0^\parallel + b_1 + E[B]
\end{aligned}$$

其中 $E[B]$ 是关于 B 齐次且线性的某个余向量值表达式。为使$\mathcal{C}^{\|}$ 初始时为零，我们因此设

$$b_1 = -(\mathrm{d}^{\Sigma})^* B_0^{\|} - E[B].$$

最后，考虑特殊情形 $B_0 = B_1 = 0$，我们得到 $B|_{t=0} = \nabla_N B|_{t=0} = 0$。 □

引理5.15 和5.16 的要求没有留下任何自由度需要指定。然而，由于约束方程，我们得到如下

引理 5.17。设$\mathcal{I} = (\Sigma,\ g_0,\ k,\ H_0,\ h_0,\ \phi_0,\ \phi_1)$ 是爱因斯坦框架系统（*5.7*）的初始数据。假设我们能找到初始数据在修正系统（$(M,\ g,\ H,\ \phi)$ 下的发展*5.12*），并且满足引理*5.15* 和*5.16*的假设。那么在初始时刻有

$$\nabla\mathcal{D}|_{\Sigma} = 0, \qquad \mathrm{d}\mathcal{C}|_{\Sigma} = 0.$$

证明。由于我们假设初始数据满足约束方程，因此在 Σ 上有

$$G_{0m} = T_{0m}, \qquad G_{mn} = T_{mn}, \qquad \mathrm{d}^*\mathrm{d}B_{0n} = -\mathrm{d}^*(\bar{H}_{\mathcal{I}})_{0n} - \frac{4}{d-2}\xi^{\lambda}H_{\lambda 0n}$$

记$\hat{}\ G_{\mu\nu} = \hat{}\mathrm{Rc}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\mathrm{tr}^{g}\hat{}\mathrm{Rc})g_{\mu\nu}$。由于我们假设$(M,\ g,\ H,\ \phi)$ 是修正系统（5.12）的解，我们可以得出，在 Σ

$$0 = \hat{G}_{0m} - T_{0m} = \hat{G}_{0m} - G_{0m} = \nabla_{(0}\mathcal{D}_{m)} - \frac{1}{2}g_{0m}\nabla^{\lambda}\mathcal{D}_{\lambda} = \frac{1}{2}\partial_0\mathcal{D}_m$$

其中，最后一个等式是由 $\partial_t|_{\Sigma}$ 与 Σ法向，且起初满足 $\mathcal{D}|_{\Sigma} = 0$得出的。此外，在 Σ上

$$0 = \hat{G}_{mn} - T_{mn} = \hat{G}_{mn} - G_{mn} = \nabla_{(m}\mathcal{D}_{n)} - \frac{1}{2}g_{mn}\nabla^{\lambda}\mathcal{D}_{\lambda} = -\frac{1}{2}g_{mn}g^{00}\partial_0\mathcal{D}_0$$

其中，在最后一个等式中，我们再次利用了起初 $\mathcal{D} = 0$。因此，$\nabla\mathcal{D}|_{\Sigma} = 0$。通过类似的论证，我们看到在 Σ上

$$0 = \hat{\Box}_{\mathrm{Hd}}B_{0n} + \mathrm{d}^*\mathrm{d}B_{0n} = -(i_{\partial_t}\mathrm{d}\mathcal{C})_n$$

由所要求的 $\mathcal{C}^{\|} = 0$ （参见引理 5.16），可得

$$(\mathrm{d}\mathcal{C})^{\|} = 0.$$

综上，$\mathrm{d}\mathcal{C}|_{\Sigma} = 0$，如所声称。 □

最后，我们通过检验所构造的对象在爱因斯坦框架改变时确实保持不变，来结束对初始数据的讨论。

引理 5.18. 设 $I = (g_0, k, H_0, h_0, \phi_0, \phi_1)$ 是爱因斯坦框架中的初始数据，并且 $\bar{g}_{\mathcal{I}}$和 $H_{\mathcal{I}}$。设 (g, H, ϕ)，$H = H_{\mathcal{I}} + \mathrm{d}B$，是一个超引力时空。考虑由 $c \in \mathbb{R}$ 给出的爱因斯坦框架变换

$$(g', B', \phi') := (e^{-2\kappa c}g, B, \phi + c)$$
$$\mathcal{I}' = (g_0', k', H_0', h_0', \phi_0', \phi_1') := (e^{-2\kappa c}g_0, e^{-\kappa c}k, H_0, e^{\kappa c}h_0, \phi_0 + c, e^{\kappa c}\phi_1).$$

那么，以下结论成立。

(i) $D[g', \bar{g}_{\mathcal{I}'}] = D[g, \bar{g}_{\mathcal{I}}]$。特别地，*DeTurck* 规范条件 $D = 0$ 在爱因斯坦框架变换下保持不变。

(ii) $C[g', B', \bar{g}_{\mathcal{I}'}] = e^{2\kappa c} C[g, B, \bar{g}_{\mathcal{I}}]$。特别地，广义洛伦兹规范条件$\mathrm{d}C = 0$ 在爱因斯坦框架的变换下保持不变。

(iii) 如果$(g,\ B,\ \phi)$ 相对于*5.15*引理中的条件$\mathcal{I}$成立，则$(g',\ B',\ \phi')$相对于$\mathcal{I}'$满足这些条件。

(iv) 如果$(g,\ B,\ \phi)$ 相对于*5.16*引理中的条件$\mathcal{I}$成立，则$(g',\ B',\ \phi')$相对于$\mathcal{I}'$满足这些条件。

证明。首先注意到

$$\bar{g}_{\mathcal{I}'} = e^{-2\kappa c} \bar{g}_{\mathcal{I}}, \qquad \bar{H}_{\mathcal{I}'} = \bar{H}_{\mathcal{I}}.$$

(i) 和 (ii)： 回顾一下，具有常数共形因子的共形变换不会改变相应的 LC联络。这些断言分别由5.9式和5.11式中$\mathcal{D}$ 和$\mathcal{C}$的定义推出。

(iii)： 我们验证g'、 B'、 ϕ')满足条件 (1–4)。条件 (4) 由断言 (i) 得出。条件 (2) 和 (3) 由引理5.8得出。最后，条件 (1) 要求 $N' = e^{\kappa\phi_0'}\partial_t$，其中 N' 是 Σ 关于 g'的单位法向量。这是成立的，因为正交性在共形变换下保持不变，并且由$(g$、 B、 $\phi)$的条件 (1) 可知

$$g'(e^{\kappa\phi_0'}\partial_t, e^{\kappa\phi_0'}\partial_t) = g(e^{\kappa\phi_0}\partial_t, e^{\kappa\phi_0}\partial_t) = g(N, N) = -1,$$

其中， N 表示 Σ 关于 g的单位法向量。

(iv)： 我们检验 $(g'$、 B'、 $\phi')$ 是否满足条件 (1–3)。条件 (1) 由引理5.8得出。条件 (3) 由断言 (ii) 得出。最后，(2) 由 $B' = B$ and$N\prime = e^{\kappa c} N$ 得出。

□

5.5 整体双曲发展的存在性

在本节中，我们证明弦框架（4.4）下，GEE 的初始数据存在整体双曲发展。对于与标量场耦合的爱因斯坦方程，相应的结果例如可见于 [2, 定理 14.2。], 我们将紧密遵循其中确立的证明策略。为尽量减少重复并突出我们的贡献，我们将在前置的第 3 节中陈述 [2, 定理 14.2。] 证明中确立的结果。

根据命题 5.12，我们知道修正爱因斯坦框架广义爱因斯坦方程在局部具有命题3.1 所要求的形式，因此可以应用该命题。命题 3.1 指出，在任意点 $p \in \Sigma$的某个邻域内，修正爱因斯坦框架广义爱因斯坦方程存在一个解。我们应用该命题，得到弦框架广义爱因斯坦方程的以下局部存在性结果。请注意，该结果还保留了与所得到的弦框架发展相关联的规范固定爱因斯坦框架发展。这有助于将各个解拼接起来，因为我们只能很好地控制修正爱因斯坦框架广义爱因斯坦方程的解。

引理 5.19。 设 $I = (g_0, k, H_0, h_0, \xi_0, x_0)$ 是 Σ上的弦框架初始数据。设 $U_\Sigma \subset \Sigma$是 $p \in \Sigma$ 的一个坐标邻域，其坐标为 $(x^1, ..., x^n)$，并在 $U = \mathbb{R} \times U_\Sigma$上定义坐标$(x^0 = t, x^1, ..., x^n)$。

那么，对于每个开邻域 $O \subset U$ （属于 p），都存在一个开邻域$W \subset O$ （属于 p），在该邻域上，弦框架 *GEE*（*4.4*）存在一个以 $(g$、H、$\xi)$ 为初始数据的整体双曲发展，初始数据定义在 $W \cap \Sigma$上。此外，可以假设该发展满足以下性质。

(1) 存在一个膨胀子势 ϕ，$\xi = \mathrm{d}\phi$，因而存在与之关联的爱因斯坦框架~发展 $(\tilde{g}$、H、$\phi)$ 以及爱因斯坦框架初始数据 $\mathcal{I}$。还存在一个 B-场¯势，$H = H_{\bar{\mathcal{I}}} + \mathrm{d}B$。这些势满足规范条件 $\mathcal{D}[\tilde{g}, \bar{g}] = 0$和 $\mathrm{d}\mathcal{C}[\tilde{g}, B, \bar{g}] = 0$，以及引理 *5.15* 和*5.16* 中的初始条件，并且 B 满足初始消失条件。

(2) 分量矩阵 $(\tilde{g}_{\mu\nu})_{\mu\nu}$（或等价地 $(g_{\mu\nu})_{\mu\nu}$）取值于典范洛伦兹矩阵空间 C_n。于是，特别地，梯度 t 在 W上是类时的。

证明。取 p 的一个开可缩坐标邻域 $V_\Sigma \subset \Sigma$，使得我们可以将 $\xi_0 =$ 写成某个 $\phi_0 \in C^\infty$（V_Σ）的 $\mathrm{d}^\Sigma\phi_0$。我们将 $(g_0, k, H_0, h_0, \phi_0, \phi_1)$~ ~ ~ ~ ~作为初始数据，其中 $\phi_1 = x_0$。根据引理 5.8 中的公式，将这些数据变换为爱因斯坦框架初始数据 $\mathrm{I} = (\tilde{g}_0, k, H_0, h_0, \phi_0, \phi_1)$。根据公式 (5.15)，在 $\mathrm{R} \times V_\Sigma$ 上定义背景场 $\bar{g}_{\bar{\mathcal{I}}}$¯和 $H_{\bar{\mathcal{I}}}$。由命题5.12，我们可以应用命题 3.1，得到在修正爱因斯坦框架系统 (5.12) 下、相对于背景场$H_{\bar{\mathcal{I}}}$ 和 $\bar{g}_{\bar{\mathcal{I}}}$ 的爱因斯坦框架初始数据的整体双曲发展 $(W, \tilde{g}, B, \phi)$。注意，命题 3.1 允许我们对该发展施加以下条件：第一，分量矩阵 $(\tilde{g}_{\mu\nu})_{\mu\nu}$ 取值于典范洛伦兹矩阵空间 C_n；第二，它在 $W \cap \Sigma$ 上满足引理 5.15 和 5.16 中的初始条件，并且 B 场满足初始消失条件。特别地，$\mathrm{D}[\tilde{g}, \bar{g}]|_{W\cap\Sigma} = 0$。

根据构造，发展 $(\tilde{g}, B, \phi)$ 满足引理 5.17 的适用条件。由此可得 $\nabla\mathrm{D}[\tilde{g}, \bar{g}]|_{W\cap\Sigma} = 0$ and $\mathrm{dC}[\tilde{g}, B, \bar{g}]|_{W\cap\Sigma} = 0$。根据命题 5.14，我们看到，¯规范条件 $\mathrm{D} = 0$ and $\mathrm{dC} = 0$ 已在 W 上实现。因此，当 $H = H_{\bar{\mathcal{I}}} + \mathrm{d}B$ 时，$(W, \tilde{g}, H, \phi)$ 满足未经修改的爱因斯坦框架系统 (5.7)。注意到共形变换保持全局双曲性，我们看到，将 $(\tilde{g}, H, \phi)$ 变换到弦框架，可得到所需的发展 (g, H, ξ)，其中 $\xi = \mathrm{d}\phi$。 □

下一个引理是针对我们所考虑情形的一个局部唯一性结果，它建立在 [2, 定理 14.2 的证明中（隐含地）确立的一个局部唯一性结果之上。], 该结果在预备章节3.1 中以命题 3.2 的形式给出。

引理 *5.20.* 设 I 是 Σ 上的弦框架初始数据。对于 $i = 1, 2$，设 $W_i \subset O_i \subset M = \mathbf{R} \times \Sigma$ 为开子集，满足 $W_1 \cap W_2 \cap \Sigma \neq \emptyset$ 是单连通的，并记 $\Sigma_i := W_i \cap \Sigma$。假设我们在 O_i 上有适配于 Σ 的坐标。还假设在 W_i 上，我们有初始数据的弦框架发展 (g_i, H_i, ξ_i)，且满足引理 *5.19* 中的条件 *(1)* 和 *(2)*。记相应的势为 ϕ_i 和 B_i，相应的爱因斯坦框架度量为 $\tilde{g}_i$；假设 $(\tilde{g}_i, B_i, \phi_i)$ 可光滑延拓至 O_i，并假设 O_i 关于 $\tilde{g}_i$ 是凸的，且 Σ_i 是 $(W_i, \tilde{g}_i)$ 中的类空柯西曲面。最后假设 W_i 是紧的，且包含于 O_i, $i = 1, 2$。

然后在整个交集 $W_1 \cap W_2$ 上，$(g_1、H_1、\xi_1) = (g_2、H_2、\xi_2)$。

证明。根据假设，$\xi_1|_{\Sigma_1\cap\Sigma_2} = \xi_2|_{\Sigma_1\cap\Sigma_2}$。我们定义 $c = [\phi_1 - \phi_2]|_{\Sigma_1\cap\Sigma_2}$。于是 $\mathrm{d}^{\Sigma}c = [\xi_1 - \xi_2]|_{\Sigma_1\cap\Sigma_2} = 0$，因此我们可以将 c 视为一个实数。我们令 $\hat{}\,\phi_1 = \phi_1$ 和 $\hat{}\,\phi_2 = \phi_2 + c$，并将与解 $(g_i、B_i、\hat{}\,\phi_i)$ 相关的爱因斯坦框架度量记为 $\hat{}\,g_i$。

由于初始条件在爱因斯坦框架的变换下保持不变（见引理 5.15 和 5.16 以及引理 5.18），我们看到，$(\hat{}\,g_1、B_1、\phi_1)$ 和 $(\hat{}\,g_2、B_2、\phi_2)$ 在 $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ 上取相同的初值。由于规范条件 $\mathrm{D} = 0$ 和 $\mathrm{dC} = 0$ 在爱因斯坦框架的变换下保持不变（见引理 5.18），$(\hat{}\,g_1、B_1、\hat{}\,\phi_1)$ 和 $(\hat{}\,g_2、B_2、\hat{}\,\phi_2)$ 都是修正的广义爱因斯坦方程（5.12）的解。由于具有常数共形因子的共形变换保持测地线不变，$(O_2、\hat{}\,g_2)$ 是凸的。因此，我们可以应用命题 3.2。结论成立。 □

基于这些结果，我们在当前设定下证明整体双曲发展的存在性，再次沿用 [2,定理14.2]的思路。

定理 5.21。设 $(\Sigma, g_0, k, H_0, h_0, \xi_0, x_0)$ 是弦框架 *GEE*（*4.4*）的初始数据。那么，该数据存在一个整体双曲弦框架发展。

证明。由引理 5.19可知，在每个点 $p \in \Sigma$ 的邻域内，我们都可以构造一个局部弦框架发展，并关联一个爱因斯坦框架发展；该发展满足初始条件和规范条件，从而被唯一确定，且其度量值取自$\mathcal{C}_n$。为将局部解拼接起来，我们为每个点 $p \in \Sigma$ 关联多个邻域，从而满足引理 5.20的设定。

首先，设 (U_p^{Σ}, x_p^m) 是 p 在 Σ中的一个坐标邻域，从而得到 $\mathbf{R} \times U_p^{\Sigma} \subset M$上的坐标 x_p^{μ}，其中 $x_p^0 = t$。然后，按照引理 5.19 的构造，我们选取 $W'_p \subset \mathbf{R} \times U_p^{\Sigma}$，其弦框架发展为 (g_p, H_p, ξ_p)，关联的爱因斯坦框架发展为 $(\tilde{g}_p, H_p, \phi_p)$。特别地，我们要求该发展满足引理 5.19 中的附加要求 (1) 和 (2)。我们选取相对于 $\tilde{g}_p$为凸的 $O_p \subset W'_p$。最后，我们选取一个开子集 $W_p \subset O_p$，使其满足以下性质：第一，其紧闭包包含于 O_p中；第二，$(W_p, \tilde{g}_p)$ 以 $\Sigma_p := W_p \cap \Sigma$ 为柯西超曲面；第三，$(\Sigma_q)_{q\in\Sigma}$是 Σ的一个良开覆盖，且其中任意两个成员的交集均为单连通。

根据上述局部数据，可以拼接出定义在 D 上的发展：$= \cup_{p\in\Sigma} W_p$。根据假设，对于所有 $\Sigma_p \cap \Sigma_q$，p都是单连通的，$q \in \Sigma$，且引理 5.19 中的条件 (1) 和 (2) 均成立。因此，由引理 5.20 可知，构造出的解在 $W_p \cap W_q$ 上一致。由此得到定义良好的弦框架解 (g, H, ξ)，定义在 D 上。根据引理 3.5，由于对所有 $p \in \Sigma$，局部发展 (W_p, g_p) 都是整体双曲的，且 g_p 取值

属于 $\mathcal{C}^n$，$(D,\ g)$ 是整体双曲的，其柯西超曲面为 Σ。因此，取嵌入 $i\colon \Sigma, \to M$ 由 $p \mapsto (0,\ p)$ 给出，可知 $(g,\ H,\ \xi)$ 是初始数据 $(g_0,\ k,\ H_0,\ h_0,\ \xi_0,\ x_0)$ 在 Σ 上的整体双曲弦框架发展。 □

5.6 局部几何唯一性

在本节中，我们遵循 [2, 定理 143]的证明策略，证明弦框架发展的局部几何唯一性。也就是说，我们证明任意两个发展都是某个共同发展的延拓。证明依赖于将任意给定的发展$(M',\ g',\ H',\ \xi')$ 与定理 $(D,\ g,\ H,\ \xi)$ 中构造的发展进行比较 5.21。

在 D 上构造发展时，会在局部爱因斯坦框架中定义¯ ¯背景场 $\bar{g}$ 和 H（参见（5.15））， 并将 $H = H + \mathrm{d}B$分解。关键在于，$(g,\ B,\ \phi)$ 的构造使其满足规范条件 $\mathcal{D} = 0$和 $\mathrm{d}\mathcal{C} = 0$，因此是修正系统（5.12）的解。根据命题 3.2，我们知道该系统的解具有局部唯一性。因此，思路是通过微分同胚 f 将 $(M',\ g',\ H',\ \phi')$ 与 $(D,\ g,\ H,\ \phi)$ 在局部关联起来： $D \supset W \to W\prime \subset M\prime$，然后分解 $f^*H' = \bar{H} + \mathrm{d}\,\hat{}B'$，使得

$$(\hat{g}', \hat{B}', \hat{\phi}') = (f^*g, \hat{B}', f^*\phi)$$

满足规范条件 $\mathcal{D}[\hat{}g',\ \bar{g}] = 0$ 以及 $\mathrm{d}\mathcal{C}[\hat{}g',\ \hat{}B',\ \bar{g}] = 0$。那么，根据前述唯一性，我们可以得出结论：这两个解重合。最后一步是将局部微分同胚组合成一个整体微分同胚。

在进行完整构造之前，我们先关注微分同胚f 以及上述分解 $f^*H' = \bar{H} + \mathrm{d}\,\hat{}B'$ 的存在性。

回顾命题3.4，我们可以在局部找到一个微分同胚 f，使其满足德图克规范条件 $\mathcal{D}[f^*g, \bar{g}]$，以及引理 5.15中讨论的度量初始条件。现在我们为 B-场证明一个类似的结果。也就是说，我们证明，通过闭的 B-场变换，可以使任意给定的 B-场满足广义洛伦兹规范 $\mathrm{d}\mathcal{C} = 0$，以及引理 5.16中的初始条件。

引理 *5.22.* 设 (M, g) 是一个全局双曲光滑时空，$B \in \Omega^2(M)$ 是一个二形式，且 Σ 是一个光滑类空超曲面。记 Σ 上的未来指向单位法向量为 N。设 $\bar{g}$ 是 M 上的另一个洛伦兹度量，即背景度量。设 $B_0 \in \Omega^2(\Sigma)$ 是 Σ 上的一个二形式，满足 $d^{\Sigma}(B^{\|} - B_0) = 0$，并记 $B_1 = (dB)(N) - k \cdot B_0 \in \Omega^2(\Sigma)$。

那么，存在一个闭二形式 $\beta \in \Omega^2_{\mathrm{cl}}(M)$ 使得规范变换后的量 $\hat{}B = B + \beta$ 满足广义洛伦兹规范 $\mathrm{d}\mathcal{C}[g, \hat{}B] = 0$ 以及引理*5.16*中的初始条件。

证明。 令 $\beta \in \Omega^2_{\mathrm{cl}}(M)$

$$\hat{B} := B + \beta, \qquad \hat{\mathcal{C}} := -\mathrm{d}^*_{g,\bar{g}}\hat{B}$$

那么，$\mathrm{d}\mathcal{C} = 0$ 等价于

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{d}\mathrm{d}^*_{g,\bar{g}}\hat{B} &= \mathrm{d}\mathrm{d}^*_{g,\bar{g}}B + \mathrm{d}\mathrm{d}^*_{g,\bar{g}}\beta \\ &= \mathrm{d}\mathrm{d}^*\beta + \mathrm{d}[F(\beta)] + \mathrm{d}\mathrm{d}^*_{g,\bar{g}}B \end{aligned} \tag{5.19}$$

其中 $F \in \Gamma(\mathrm{Hom}(\Lambda^2 T^*M, T^*M))$，明确地说 $F(\beta) = (\mathrm{d}^*_{g,\bar{g}} - \mathrm{d}^*)\beta$。我们声称，若定义 β 为定理A.6所给出的下列方程的一个解，则可得到方程 (5.19) 的一个解：

$$0 = \Box_{\mathrm{Hd}}\beta - \mathrm{d}[F(\beta)] - \mathrm{d}\mathrm{d}^*_{g,\bar{g}}B$$

假设我们能够为 β 设定初始条件，使得 $\mathrm{d}\beta = 0$ 作用于 Σ。对该方程取外微分，便得到

$$0 = -\mathrm{d}\mathrm{d}^*\mathrm{d}\beta = \Box_{\mathrm{Hd}}\mathrm{d}\beta$$

根据定理 A.6，$\mathrm{d}\beta \equiv 0$ 在全局范围内，因此确实 β 满足 5.19。

最后，我们注意到，根据引理 5.16，B 的初值及其时间导数由陈述中的要求唯一确定。因此，β也同样如此。尚需检查这与条件 $\mathrm{d}\beta = 0$一致。显然，$(\mathrm{d}\beta)^{\parallel} = \mathrm{d}^{\Sigma}(\hat{B} - B)^{\parallel} = 0$。此外，根据引理 B.2 以及 B_1的定义，

$$(\mathrm{d}\hat{B})(N) = B_1 + k \cdot B_0 = (\mathrm{d}B)(N),$$

因此也有 $(\mathrm{d}\beta)(N) = 0$。 □

结合命题 3.4 和引理5.22，我们可以证明，对于超曲面 Σ 上的任意给定初始数据，其爱因斯坦框架发展在局部可与 $M = \mathbb{R} \times \Sigma$ 上的一个解相关联，该解具有由（5.15）定义的背景场，并满足规范条件$\mathcal{D} = 0$ 和 $\mathrm{d}\mathcal{C} = 0$，以及引理 5.15 和 5.16中的初始数据条件。

命题 5.23. *设 $I = (\Sigma, \tilde{g}_0, k, H_0, h_0, \phi_0, \phi_1)$ 是爱因斯坦框架广义爱因斯坦方程 (4.4) 的初始数据。设 $(M', \tilde{g}', H', \phi')$ 是任意一个爱因斯坦框架发展。用 $i\colon \Sigma \to M'$ 表示相应的嵌入。此外，用 $M = \mathbb{R} \times \Sigma$ 表示，并用 $\bar{g} = \bar{g}_{\tilde{I}}$ 和 $H = H_{\tilde{I}}$ 表示在 (5.15) 中定义的背景场。*

那么，对于每个 $p \in \Sigma$，都存在邻域 $p \in W \subset M$ 和 $i(p) \in W' \subset M'$，以及一个微分同胚 $f\colon W \to W'$，使得对于 $\hat{g}' = f^*\tilde{g}'$、$\hat{H}' = f^*H'$ 和 $\hat{\phi}' = f^*\phi'$，可以将 $\hat{H}' = \bar{H} + \mathrm{d}\hat{B}'$ 分解为……，从而规范条件 $\mathcal{D}[\hat{g}', \bar{g}] = 0$ 和 $\mathrm{d}\mathcal{C}[\hat{g}', \hat{B}', \bar{g}] = 0$ 成立，并且满足引理 5.15 和 5.16 中的初始条件，以及 B-场的初始消失条件。

证明。取 $p \in \Sigma$ 和一个微分同胚 $f\colon W \to W'$，使得 $\mathcal{D}[f^*\tilde{g}', \bar{g}] = 0$，其中 $p \in W \subset M$。根据命题 3.4，这样的微分同胚存在，并且可以选取为满足 $f_*\partial_t = N'$ 和 $f_*|_{TW_\Sigma} = i_*$，其中我们令 $W_\Sigma = W \cap \Sigma$，并将 N'记为 $i(\Sigma)$ 上的未来指向的单位法向量。通过限制，我们可以假设 $(W', \tilde{g}')$ 是具有柯西超曲面 $W' \cap \Sigma$ 的整体双曲流形。

令 $\hat{g}' = f^*\tilde{g}'$、$\hat{H}' = f^*H'$ 和 $\hat{\phi}' = f^*\phi'$。注意，数据 $(\tilde{g}', H', \phi')$ 在 f 下的拉回在 $f^{-1} \circ i(W_\Sigma) = W_\Sigma$ 上诱导出初始数据 $(\tilde{g}_0, \tilde{k}, H_0, h_0, \phi_0, \phi_1)$ 在 $i^* \circ (f^{-1})^* = \mathrm{id}_{TW_\Sigma}$ 下的拉回，因此就是初始数据本身。由于同样有 $f_*N = N'$，我们看到 $(\hat{g}', \hat{\phi}')$ 满足引理 5.15 中的条件。

我们希望定义一个二形式 $\hat{B}'$，使其满足规范条件 $\mathrm{d}\mathcal{C}[\hat{g}', \hat{B}'] = 0$ 并满足引理 5.16 中的初始条件。首先注意到，由于 $W \subset M$，H 定义在 W上。我们可以假设 W 是可缩的，因此所有闭形式都是恰当的。于是，我们可以找到一个二形式 $B' \in \Omega^2(W)$，使得 $\hat{H}' = \bar{H} + \mathrm{d}B'$。$(W', \tilde{g}')$ 的全局双曲性等价于 $(W, \hat{g}')$ 的全局双曲性。因此，根据引理 5.22，我们可以找到一个闭二形式 β'，使得规范变换后的量 $\hat{B}' := B' + \beta'$满足规范条件 $\mathrm{d}\mathcal{C}[\hat{g}', \hat{B}'] = 0$ 并满足引理 5.16 中关于 $B_0 = B_1 = 0$的初始条件。注意，由于 $f_*N = N'$ 以及由 H 和 $\hat{H}'$诱导的初始数据一致，$\hat{H}'\big|_\Sigma = H|_\Sigma$，从而 $\mathrm{d}B'|_\Sigma = 0$，这一选择是允许的。这就完成了证明。 □

最后，我们可以调整 [2, 定理 14。3] 到我们的情形中，并紧密遵循其中所呈现的证明策略。我们通过证明任意发展都是定理5.24中所构造的某个发展的延拓，来说明初始数据的任意两个发展都是某个共同发展的延拓。

定理 *5.24.* 设 $(\Sigma, g_0, k, H_0, h_0, \xi_0, x_0)$ 是弦框架方程 *(4.4)* 的初始数据。记 (D, g, H, ξ) 为按定理 *5.21* 所构造的整体双曲发展，$D \subset M = R \times \Sigma$。假设我们还有另一个发展 (M', g', H', ξ')，其嵌入为 $i\colon \Sigma \to M'$。

那么，存在 Σ 的一个管状邻域 $D \subset D$，以及一个光滑的保时间定向微分同胚 $\psi\colon \tilde{D} \to \psi(\tilde{D}) \subset M'$，满足 $\psi|_\Sigma = i$，从而关联这两个解，即 $\psi^* g' = g$、$\psi^* H' = H$，以及 $\psi^* \xi' = \xi$。

证明。回顾定理 5.21 中的构造：我们为每个点 $p \in \Sigma$ 关联一个坐标邻域 $U_p = \mathbb{R} \times U_p^\Sigma$，其坐标为 $(x_p^0 = t, x_p^m)$；随后关联一个开子集 $W_p' \subset U_p$，在该子集上，弦框架发展对应于一个整体双曲的爱因斯坦框架发展 $(\tilde{g}_p, H_p, \phi_p)$，并满足引理 5.19 中的条件 (1) 和 (2)。特别地，我们在 W_p' 上有背景场 $\bar{g}_p$ 和 H_p。我们还选取了一个 $\tilde{g}_p$-凸子集 $p \in O_p \subset W_p'$，以及一个整体双曲邻域 $(W_p, \tilde{g}_p)$，其紧闭包包含于 O_p 中。

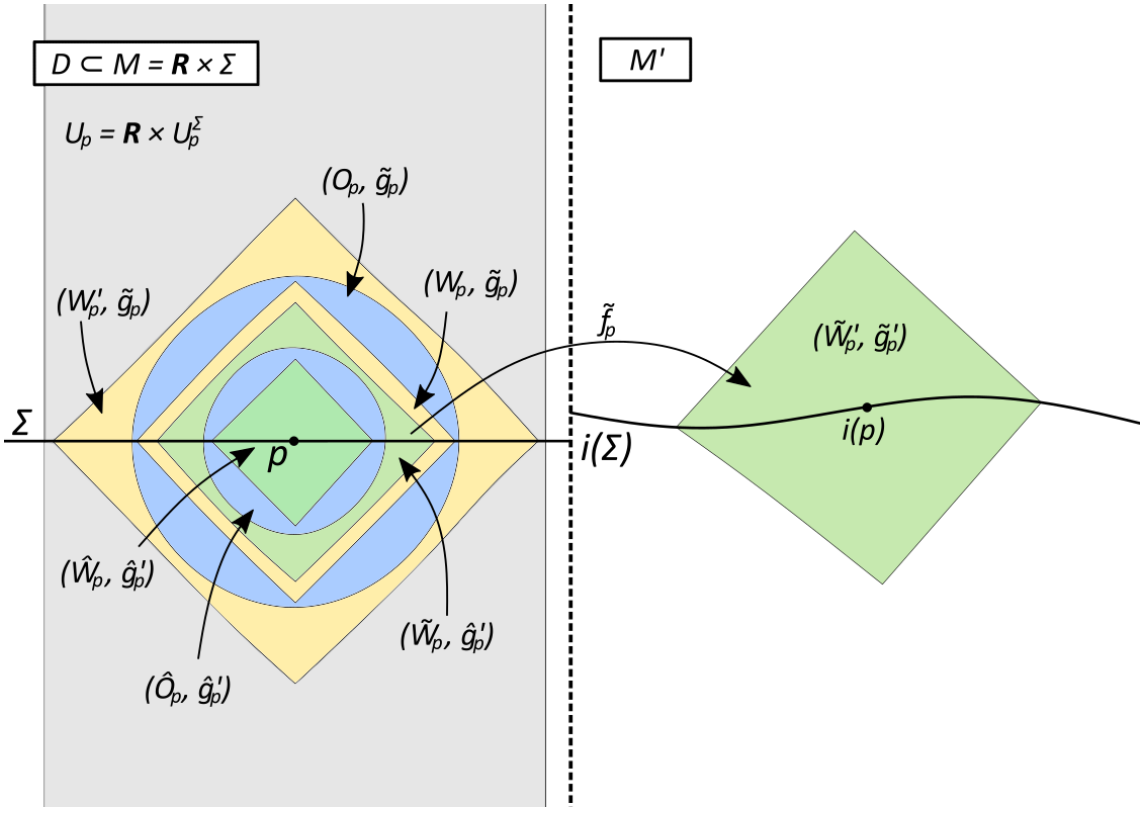

图 1：定理 p 中初始超曲面 Σ 上一点相关数据的示意图。证明 5.24中，左侧是定理 D 中构造的初始数据的规范固定发展5.21。右侧是任意发展 M'。通过一个微分同胚 $\tilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$，在局部 f_p 爱因斯坦框架中比较这两个发展：$W_p \to W_p'$。

我们为每个点 $p \in \Sigma$ 关联额外的数据。我们选取一个微分同胚 $\tilde{f}_p: W_p \to W'_p$，其定义如命题 5.23 所述，并附加要求 $W_p \subset \widehat{W}_p$。我们按照该命题得到规范固定解 $(\widehat{g}'_p, B'_p, \phi'_p)$。我们选取一个 $\widehat{g}'_p$-凸邻域 $\widehat{O}_p \subset \widehat{W}_p$ 和一个子集 $\widehat{W}_p \subset \widehat{O}_p$，使得：第一，$(\widehat{W}_p, \widehat{g}'_p)$ 是整体双曲的，且柯西超曲面为 $W_p \cap \Sigma$；第二，W_p 的紧闭包包含于 $\widehat{O}_p$ 中；第三，$\widehat{g}'_p$ 在 $\widehat{W}_p$ 上取值于 C_n；第四，$\widehat{W}_p \cap \Sigma$ 是单连通的。我们定义 $f_p := \tilde{f}_p\big|_{\widehat{W}_p}$。

根据构造，$(\widehat{W}_p, \tilde{g}_p, B_p, \phi_p)$ 和 $(\widehat{W}_p, \widehat{g}'_p, \widehat{B}'_p, \widehat{\phi}'_p)$ 均满足引理 5.19 中的 (1) 和 (2)。此外，交集 $W_p \cap W_p \cap \Sigma = W_p \cap \Sigma$ 是单连通的。因此，我们可以应用引理 5.20。由此得出 $(g, H, \xi)|_{\widehat{W}_p} = (f_p^* g', f_p^* H', f_p^* \xi')$，所以 f_p 是一个将弦框架解在局部关联起来的等距映射。

为了完成证明，我们必须将这些局部等距拼接起来，得到一个全局等距映射。对于每个 $p \in \Sigma$，我们可以找到一个邻域 $D_p \subset W_p$ 使得 (D_p, g) 是整体双曲的，其柯西超曲面为 $D_p \cap \Sigma$。于是，由引理 3.6，等距映射 f_p 和 f_q 由它们在 $D_p \cap D_q$ 上的取值唯一确定。这些取值一致，因此 $\Sigma \cap D_p \cap D_q$ 上 $f_p|_{\tilde{D}_p \cap \tilde{D}_q} = f_q|_{\tilde{D}_p \cap \tilde{D}_q}$。由此可知，我们可以在 ψ 上定义一个全局等距映射 $D = \bigcup_p D_p$，如所求。

□

5.7 最大全局双曲发展

在著名的著作中 [8], Choquet-Bruhat 和 Geroch 证明，对于爱因斯坦方程，存在一个几何上唯一的整体双曲发展，它延拓了给定初始数据的任何其他发展。[8] 我们如下形式化弦框架 GEE 的最大全局双曲发展的概念（我们改编自 [2, 定义 16.5。]）。

定义 5.25。设 $\mathrm{I} = (\Sigma, g_0, k, H_0, h_0, \xi_0, x_0)$ 为弦框架 GEE 的初始数据。I 的最大全局双曲发展（MGHD）是一个发展 (M, g, H, ξ)，带有嵌入 $i\colon \Sigma \hookrightarrow M$，使得对于任意其他带有嵌入 $i'\colon \Sigma \hookrightarrow M'$ 的整体双曲发展 $(M' g', H', \xi')$，都存在一个映射 $\psi\colon M' \to \psi(M') \subset M$，它是到其像上的保时间定向微分同胚，并将这两个发展联系起来，即 $\psi^* g = g'$，$\psi^* H = H'$，$\psi^* \xi = \xi'$，以及 $\psi \circ i' = i$。

若 (M, g, H, ξ) 和 (M', g', H', ξ') 是给定初始数据的两个发展，且存在定义中所述的映射 ψ，我们也称 (M, g, H, ξ) 是 (M', g', H', ξ') 的延拓。因此，最大整体双曲发展 (M, g, H, ξ) 是其他每个整体双曲发展的延拓。

由最大整体双曲发展的性质可知，它在微分同胚意义下唯一；也就是说，对于两个最大整体双曲发展 (M, g, H, ξ) 和 (M', g', H', ξ')，可以看出，定义 ψ5.25 所给出的任意映射 M 与 M'之间是微分同胚。[2]

文献 [8] 中给出的最大整体双曲发展的显式存在性证明[9] 着重讨论爱因斯坦真空系统。证明前的说明解释了为什么这些结果也适用于一般的爱因斯坦物质系统；这类系统中的解、初始数据、发展和延拓的概念均如（1-4）所述，并满足性质（i-iii）。

[8] 我们指出，[8] 中证明未涉及的许多细节，Ringström 在 [20, § 23] 中针对爱因斯坦–Vlasov–非线性标量场系统作了补充说明。Ringström 的勘误 [20], 中提供了与 [21] 类似的论述，但讨论的是爱因斯坦–非线性标量场系统；该勘误针对他的著作 [2]（该书中关于最大整体双曲发展的存在性证明有误）。Sbierski 给出了一种证明 [22], [9] 它与前述其他证明不同，不依赖佐恩引理。前面脚注中提到的 Ringström 所给出的更详细证明也适用同样的说明。

（1）一个解是一个三元组（M, g, Φ），由一个 $n+1$ 维定向时间的洛伦兹流形（M, g）以及张量丛 T M 的微分同胚不变向量子丛 E 的一个截面 $\Phi \in \Gamma(E)$ 组成，并且满足一组微分同胚不变条件（爱因斯坦-物质方程）。（2）初始数据是一个四元组（Σ, g_0, k, Φ_0），由一个 n 维黎曼流形（Σ, g_0）、一个对称二阶张量 k，以及张量丛 T Σ 的微分同胚不变向量子丛的一个截面 $\Phi_0 \in \Gamma(E_0)$ 组成，并满足给定的一组微分同胚不变约束条件。[10]（i）一个解（M, g, Φ）会在每个类空超曲面 Σ 上自然地诱导一组初始数据 I $= (\Sigma, g_0, k, \Phi_0)$，其中 g_0 是继承的黎曼度量，k 是超曲面 Σ 上的第二基本形式。自然性意味着，若 $\psi\colon M' \to M$ 是一个微分同胚，且 $i\colon \Sigma \hookrightarrow M$ 是与 I 关联的嵌入，则（$M', \psi^* g, \psi^* \Phi$）会在 $\psi(i(\Sigma))$ 上诱导初始数据（$\psi(i(\Sigma)), (\psi \circ i)_* g_0, (\psi \circ i)_* k, (\psi \circ i)_* \Phi_0$）。（3）初始数据（$\Sigma, g_0, k, \Phi_0$）的发展是一个解（$M, g, \Phi$）以及一个黎曼嵌入 $i\colon \Sigma \hookrightarrow M$，使得将诱导于 $i(\Sigma)$ 上的初始数据沿 i 拉回后，得到初始数据（Σ, g_0, k, Φ_0）。（4）给定初始数据 I，若存在映射$\psi\colon M' \to \psi(M') \subset M$，它是到其像上的保时间定向微分同胚，且满足 $\psi^* g = g'$、$\psi^* \Phi = \Phi'$ 和 $\psi \circ i' = i$，则称带嵌入 i 的 I 的发展（M, g, Φ）是带嵌入 i' 的另一发展（M', g', Φ'）的延拓。

(ii) 每组初始数据都存在一个整体双曲发展。

(iii) 给定初始数据的任意两个发展，都是某个共同发展的延拓。

我们看到，弦框架解、弦框架初始数据（见定义5.3）、弦框架发展（见定义5.4）以及延拓（见上文）的概念，都符合模板（1-4）。在我们的设定中，性质（i）显然成立，而性质（ii）和（iii）分别对应定理5.21 和5.24。因此，

定理 5.26。设 I 是弦框架 *GEE* 的初始数据。那么，I 存在一个弦系 *MGHD*。此发展在微分同胚意义下唯一。

[10]约束条件不必采用特定形式；其目的是编码那些保证性质（ii）成立所必需且充分的条件。

A 波动方程的结果

这里总结对称双曲型偏微分方程（也称波动方程）的相关结果，这些结果将用于研究广义爱因斯坦方程的初值问题。

A.1 非线性波动方程

本节给出讨论非线性波动方程及其主要结果所需的恰当定义。具体而言，我们讨论如下形式的偏微分方程组（5.1）。回顾一下，这是关于一个向量值函数 $u\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^N$的偏微分方程组，其中$n$，$N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$。

在$\mathbb{R}^{n+1}$上工作时，我们采用以下典范洛伦兹矩阵的概念，参见 [2,定义 8.4。]。

定义 A.1. 设 $A \in \mathrm{Sym}^2(n+1)$ 是一个对称矩阵。若 $A_{00} < 0$ 且 (A_{ij}) 正定，则称 A 为典范洛伦兹矩阵 。我们用$\mathcal{C}_n$表示典范洛伦兹矩阵空间。最后，给定 $a = (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3_{>0}$，用$\mathcal{C}_{n,a}$ 表示满足 $A_{00} < -a_0$、$(A_{ij}) > a_1$ 且 $\|A\|_1 > a_2$ 的典范洛伦兹矩阵空间，其中$\|\cdot\|_1$ 表示 $\mathbb{R}^{(n+1)^2}$ 上的 1-范数。

可以证明，典范洛伦兹矩阵 A 有 n 个正特征值和一个负特征值 [2, 引理 8.3.]。

现在更具体地回顾一下，(5.1) 是如下偏微分方程系统：

$$\begin{aligned} g[u]^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu u &= f[u], \\ u(T_0,\cdot) &= U_0, \\ \partial_t u(T_0,\cdot) &= U_1. \end{aligned} \tag{A.1}$$

其中，T_0 某个实数，U_0，$U_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, N)$ 紧支初始数据，一个 d

$$g \in C^\infty(\mathbb{R}^{N+(n+1)N+n+1}, \mathcal{C}_n), \qquad f \in C^\infty(\mathbb{R}^{N+(n+1)N+n+1}, \mathbb{R}^N)$$

分别是 C^∞ (N, n)-可容许度量和 C^∞ (N, n)-可容许非线性项。此外，我们采用了记号

$$\begin{aligned} g[u](t,x) &:= g(t,x,u(t,x),\partial_0 u(t,x),\ldots,\partial_n u(t,x)), \\ f[u](t,x) &:= g(t,x,u(t,x),\partial_0 u(t,x),\ldots,\partial_n u(t,x)). \end{aligned}$$

特别地，$g[u] \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, \mathcal{C}_n)$ 和 $f[u] \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^N)$。

现在我们来解释两种 C^∞ (N, n)-容许性的概念，参见 [2, 定义 9.1 和 9.4。]。

定义 A.2. 设 $g \in C^\infty(\mathbb{R}^{N+(n+1)N+n+1},\mathcal{C}_n)$。若对所有紧区间 $I \subset \mathbb{R}$

(i) 存在 $a \in \mathbb{R}^3_{>0}$，使得 $g(t,\cdot) \in \mathcal{C}_{n,a}$ 对所有 $t \in I$ 均成立，并且

(ii) 对所有多重指标 $\alpha \in \mathbb{N}_0^{N+(n+1)N+n+1}$，存在连续且单调递增的函数 $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得

$$\|\partial^\alpha g(t,x,\xi)\| \leq h(\|\xi\|), \qquad t \in I, x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^{N+(n+1)N},$$

其中 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^k$ 上的最大范数，其中适用的 k。

定义 A.3。 令 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{N+(n+1)N+n+1}, \mathrm{R}^N)$。我们称 f 一个 $C^\infty(N,n)$-容许非线性项，如果

(i) $f[0]$ 具有局部 x-紧支撑，即对于所有 $t \in \mathrm{R}$， $f[0](t)$ 都具有紧支撑，并且

(ii) 对于所有紧区间 $I \subset \mathrm{R}$ 以及所有多重指标 $\alpha \in \mathrm{N}_0^{N+(n+1)N+n+1}$，存在一个连续且单调递增的函数 $h\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}$，使得

$$\|\partial^\alpha f(t,x,\xi)\| \le h(\|\xi\|), \qquad t \in I, x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^{N+(n+1)N},$$

其中 $\|\cdot\|$ 是 R^k 上的最大范数，适用于相应的 k。

现在我们可以引用 [2, 推论 9.16。], 这对我们来说是关于非线性波动方程的主要定理。它几乎逐字表述如下。

定理 *A.4.* 考虑系统 *(5.1)*，其中 $T_0 \in R$， $g \in C^\infty(R^{N+(n+1)N+n+1}, C_n)$ 是一个 $C^\infty(N,n)$-可容许度量，$f \in C^\infty(R^{N+(n+1)N+n+1}, R^N)$ 是一个 $C^\infty(N,n)$-容许非线性项，而 $U_0, U_1 \in C_0^\infty(R^n, N)$ 是初始数据。

那么存在 $T_1 < T_0 < T_2$ 以及唯一解 $U \in C^\infty[(T_1,T_2) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N]$ 满足 *(5.1)*。该解具有局部 x-紧支撑。此外， T_2 可以选取为使得 $T_2 = \infty$或者

$$\lim_{\tau \to T_2-} \sup_{T_0 \le t \le \tau} \sum_{|\alpha|+j \le 2} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left|\partial^\alpha \partial_t^j u(t,x)\right| = \infty.$$

关于 T_1 的陈述类似。

A.2 非齐次线性张量波动方程

给定流形 M 上的一个固定光滑洛伦兹度量 g，我们经常会讨论张量波动方程。为讨论这些方程，采用以下定义较为方便

定义 A.5. 给定张量 $A \in \Gamma(T_s^r M)$，我们用 $r \ge l$, $s \ge k$ 定义如下映射：

$$A\colon \Gamma(T_l^k M) \longrightarrow \Gamma(T_{s-k}^{r-l} M), \qquad A(B)^{\alpha_1\dots\alpha_{r-l}}_{\beta_1\dots\beta_{s-k}} := A^{\gamma_1\dots\gamma_l\alpha_1\dots\alpha_{r-l}}_{\delta_1\dots\delta_k\beta_1\dots\beta_{s-k}} B^{\delta_1\dots\delta_k}_{\gamma_1\dots\gamma_l}.$$

若 $l < r$ 且 $s < k$，我们还设 $A(B) := B(A)$。

此外，给定度量 g和两个张量 $A \in \Gamma(T_s M)$、 $B \in \Gamma(T_l M)$，不失一般性地，设 $s \ge l$，我们记

$$\langle A, B\rangle_{\beta_1\dots\beta_{s-l}} \equiv \langle B, A\rangle_{\beta_1\dots\beta_{s-l}} := B^{\gamma_1\dots\gamma_l} A_{\gamma_1\dots\gamma_l\beta_1\dots\beta_{s-l}} \in \Gamma(T_{s-l} M).$$

我们所用的张量波动方程的主要结果如下。它结合了 [2,定理 12.17 和推论 12。12]。

定理 A.6. 设(M,g) 是一个整体双曲时空，其类空柯西超曲面为 $i\colon S, \to M$. 假设 $B \in T_{r+s}^{r+s+1}(M)$， $C \in T_{r+s}^{r+s}(M)$， $E \in T_s^r(M)$. 给定光滑张量场 $A_0, A_1 \in T_s^r(M)$，存在唯一的光滑张量场 $A \in T_s^r(M)$满足初值问题

$$\begin{aligned} \Box_g A + B(\nabla A) + C(A) &= E, \\ i^* A &= i^* A_0, \\ i^*(\nabla_N A) &= i^* A_1, \end{aligned} \tag{A.2}$$

其中 $\Box_g = \nabla^\lambda \nabla_\lambda$ 和 N 是 S的未来指向法向量。

此外，若 $E \equiv 0$，且 $i^* A_0 = i^* A_1 = 0$ 于 $\Omega \subset S$ 上成立，则 $A = 0$ 于柯西发展 $D(\Omega)$ 上成立。

¯假设 $H = \mathrm{d}B$，则 B-场必须满足方程（参见（5.7），其中 $H = 0$）

$$\mathrm{d}^* \mathrm{d} B = -\frac{4}{d-2} i_{\xi^\sharp} \mathrm{d} B$$

对于某个闭一形式 $\xi \in \Omega^1_{\mathrm{cl}}(M)$。这看起来几乎像上文的张量波动方程，但有两点不同：

(i) 贝尔特拉米波算子 $\Box_g$ 被余恰波算子 $\mathrm{d}^*\mathrm{d}B$ 取代。

(ii) 该方程仅取决于 $\mathrm{d}B$。

尤其由于第二点，我们预期该偏微分方程的唯一性行为与张量波动方程（A.2）有根本不同：对于此类方程的任意一个解 B 以及任意闭一形式 $b \in \Omega^1_{\mathrm{cl}}(M)$， $B + b$ 同样也是一个解。在物理学中，这被称为 B场具有“规范自由度”。

我们将满足 (i) 和 (ii) 的方程称为余恰波动方程。这类方程描述一个 p-形式 $A \in \Omega^p(M)$，可表述为

$$\mathrm{d}^* \mathrm{d} A + B(\mathrm{d}A) = E, \tag{A.3}$$

其中 $B \in \Gamma(\mathrm{Hom}(\Lambda^{p+1} T^*M,\ \Lambda^p T^*M))$，且 $E \in \Omega^p(M)$ 是余闭的，即 $\mathrm{d}^* E = 0$。

本节将在 [13, A 节3]中更详细地研究这类偏微分方程。特别是，受洛伦兹规范的启发，本节旨在寻找一组始终存在余闭解的方程。我们在 [13, A 节3] 中发现，只需施加以下条件即可：

(iii) 对方程施加余微分，得到一个与原方程成正比的方程。

请注意，该条件取决于用于定义余微分的洛伦兹度量的选取。在 [13, 引理 A.10], 中发现，任何满足条件 (iii) 的余恰当波动方程都可表述为

$$\mathrm{d}^* \mathrm{d} A + \langle B, \mathrm{d}A \rangle + \langle \beta, \mathrm{d}A \rangle = E, \tag{A.4}$$

其中 $\beta \in \Omega^1_{\mathrm{cl}}(M)$ 是闭的， $B \in \Omega^{2p+1}(M)$ 和 $E \in \Omega^p(M)$ 满足

$$\mathrm{d}^* E = -\langle \beta, E \rangle , \qquad \mathrm{d}^* B = -\langle \beta, B \rangle .$$

请注意，弦框架和爱因斯坦框架 B场方程（具有任意背景）¯场 H 具有这种形式，参见（4.4）和（5.7）。（请注意，在弦框架中 $\beta = \xi$ 而在爱因斯坦框架中 $\beta = \frac{4}{d-2}\xi$。）这或许有助于阐明 B场方程及其与度量和膨胀子的耦合。

中介绍的余恰波动方程主要结果 [13] 是定理 A.11。我们将在此重述该定理，并用它说明广义洛伦兹规范具有良好的传播性质，参见命题 5.14。

定理 A.7。 设(M, g) 是一个具有类空柯西超曲面 $i\colon S,\to M$ 的整体双曲时空。设 $\beta \in \Omega^1_{\mathrm{cl}}(M)$ 闭， $B \in \Omega^{2p+1}(M)$ 且 $E \in \Omega^p(M)$ 满足

$$\mathrm{d}^* E = -\langle \beta, E\rangle\,, \qquad \mathrm{d}^* B = -\langle \beta, B\rangle\,.$$

令 $A_0 \in \Omega^p(M)$ 为光滑的 p-形式；即初始数据。考虑以下偏微分方程组：

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^*\mathrm{d}A + \langle B, \mathrm{d}A\rangle + \langle \beta, \mathrm{d}A\rangle &= E, \\ i^*\mathrm{d}A &= i^*\mathrm{d}A_0. \end{aligned} \tag{A.5}$$

其中， N 是指向 S未来的法向量。

当且仅当 A_0 在 S 上满足约束方程

$$i_N\left[\mathrm{d}^*\mathrm{d}A_0 + \langle B, \mathrm{d}A_0\rangle + \langle \beta, \mathrm{d}A_0\rangle - E\right] = 0$$

是否存在一个光滑的 p形式 $A \in \Omega^p(M)$ 满足方程（A.5）的初值问题。在这种情况下，解在相差一个闭 p形式的意义下唯一，并且存在余闭解。后者由其在 i^*A 上的初值 S唯一确定。

B 超曲面上形式的（余）微分分解

这里汇总一些关于形式及其微分和余微分在超曲面上的切向部分与法向部分分解的平凡结果。我们采用抽象指标记法，以便方便且明确地表示压缩映射。提醒一下，希腊指标表示任意分量，而拉丁指标表示张量平行投影到类空超曲面上的分量，通常记为 Σ。

引理 B.1. 设 $A_{\mu_1\dots\mu_k}$ 是洛伦兹流形(M,g) 上的一个 k-形式，该流形带有类空超曲面(Σ,g_Σ)。记 $N=\partial_0$ 为 Σ上的一个（局部）单位法向量，记 ∇ 和 D 分别为 M 和 Σ 上的 *LC* 联络。则在 Σ 上

$$\nabla_m A_{0m_2\dots m_k}=D_m A^{\perp}_{m_2\dots m_k}-k^l_m A_{lm_2\dots m_k},$$

其中 $A^\perp=A(N)\in\Omega^{k-1}(\Sigma)$。

证明。
$$[(\nabla A)(N)]^{\parallel}=[\nabla(A(N))-A(\nabla N)]^{\parallel}=D(A^\perp)-A(k).$$

□

引理 B.2. 设 A 是洛伦兹流形(M,g) 上的一个 p-形式，该流形带有类空超曲面(Σ,g_Σ)。设 N为 Σ 上的一个（局部）单位法向量。记 $i\colon \Sigma\hookrightarrow M$为包含映射，并记 M 和 Σ上的外微分分别为 d 和 d^Σ 。此外，记

$$A=A_0=A_0^{\parallel}-N^\flat\wedge A_0^\perp,\qquad \nabla_N A=A_1=A_1^{\parallel}-N^\flat\wedge A_1^\perp$$

则在 Σ 上

$$\begin{aligned}\mathrm{d}A&=\mathrm{d}^\Sigma A_0^{\parallel}-N^\flat\wedge\left[A_1^{\parallel}-\mathrm{d}^\Sigma A_0^\perp+k\cdot A_0^{\parallel}\right],\\ \mathrm{d}^*A&=(\mathrm{d}^\Sigma)^*A_0^{\parallel}+A_1^\perp+A_0^\perp\mathrm{tr}\,k+k\cdot A_0^\perp-N^\flat\wedge[-(\mathrm{d}^\Sigma)^*A_0^\perp].\end{aligned}$$

证明。分别以 ∇和 D 表示 M 和 Σ上的列维-奇维塔联络。一，

$$\begin{aligned}\mathrm{d}A_{m_1\dots m_{p+1}}&=(p+1)\nabla_{[m_1}A_{m_2\dots m_{p+1}]}=(p+1)\partial_{[m_1}A_{m_2\dots m_{p+1}]}=D_{[m_1}A_{m_2\dots m_{p+1}]}\\&=\mathrm{d}^\Sigma A_{m_1\dots m_{p+1}}.\end{aligned}$$

Two,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}A_{0m_1\dots m_p}&=(p+1)\nabla_{[0}A_{m_1\dots m_p]}\\&=\nabla_0A_{m_1\dots m_p}-p\nabla_{[m_1}A_{|0|m_2\dots m_p]}\\&=\nabla_NA_{m_1\dots m_p}-\mathrm{d}^\Sigma(i_NA)^{\parallel}_{m_1\dots m_p}-(-1)^ppk^l_{[m_1}A_{m_2\dots m_p]l}\\&=(A_1^{\parallel})_{m_1\dots m_p}-\mathrm{d}^\Sigma(A_0)^\perp_{m_1\dots m_p}-k\cdot(A_0)_{m_1\dots m_p}.\end{aligned}$$

三,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^* A_{m_2\ldots m_p} &= -\nabla^\lambda A_{\lambda m_2\ldots m_p} \\
&= \nabla_0 A_{0m_2\ldots m_p} - \nabla^l A_{lm_2\ldots m_p} \\
&= (A_1^\perp)_{m_2\ldots m_p} + (\mathrm{d}^\Sigma)^*(A_0^\parallel)_{m_2\ldots m_p} + k^l_l A_{0m_2\ldots m_p} \\
&\quad + k^l_{m_2} A_{l0m_3\ldots m_p} + \ldots + k^l_{m_p} A_{lm_2\ldots m_p 0} \\
&= (A_1^\perp)_{m_2\ldots m_p} + (\mathrm{d}^\Sigma)^*(A_0^\parallel)_{m_2\ldots m_p} - \mathrm{tr}\, k\, (A_0^\perp)_{m_2\ldots m_p} \\
&\quad + (-1)^{p-1} k^l_{[m_2} A^\perp_{m_3\ldots m_p]l} \\
&= (A_1^\perp)_{m_2\ldots m_p} + (\mathrm{d}^\Sigma)^*(A_0^\parallel)_{m_2\ldots m_p} + \mathrm{tr}\, k\, (A_0^\perp)_{m_2\ldots m_p} \\
&\quad + (k\cdot A_0^\perp)_{m_2\ldots m_p}.
\end{aligned}$$

四、

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^* A_{0m_3\ldots m_p} &= -\nabla^\lambda A_{\lambda 0 m_3\ldots m_p} \\
&= \nabla^l A_{0lm_3\ldots m_p} \\
&= D^l A_{0lm_3\ldots m_p} + k^{ln} A_{lnm_3\ldots m_p} \\
&= -(\mathrm{d}^\Sigma)^*(A_0^\perp)_{m_3\ldots m_p}.
\end{aligned}$$

□

参考文献

[1] Andre Coimbra、Charles Strickland-Constable 和 Daniel Waldram。将超引力视为广义几何 I：II 型理论。《高能物理杂志》，2011(11):1–35，2011。doi:10.1007/JHEP11(2011)091.[2] Hans Ringström。《广义相对论中的柯西问题》。欧洲数学学会—ESI 数学与物理讲座，2009。doi:10.4171/053.[3] Helmut Friedrich 和 Alan Rendall。爱因斯坦方程的柯西问题。载于 Bernd G. Schmidt（编），《爱因斯坦场方程及其物理意义》，第127–223页。施普林格柏林海德堡，2000。doi:10.1007/3-540-46580-4_2.[4] Dennis M DeTurck。具有给定里奇曲率的洛伦兹度量的柯西问题。《组合数学》，48(3):327–349，1983。网址：http://eudml.org/doc/89597.[5] Helmut Friedrich。论爱因斯坦规范场方程及其他规范场方程的双曲性。《数学物理通讯》，100(4):525–543，1985。doi:10.1007/BF01217728.[6] Yvonne Choquet-Bruhat。《广义相对论与爱因斯坦方程》。牛津大学出版社，2009。doi:10.1093/acprof:oso/9780199230723.001.0001.[7] Yvonne Choquet-Bruhat。扩展超引力中的柯西问题，n=1,d=11。《数学物理通讯》，97(4):541–552，1985。doi:10.1007/BF01221216.[8] Yvonne Choquet-Bruhat 和 Robert Geroch。广义相对论中柯西问题的整体方面。《数学物理通讯》，14:329–335，1969。doi:10.1007/BF01645389.[9] Stephen W Hawking 和 George FR Ellis。《时空的大尺度结构》。剑桥大学出版社，2023。doi:10.1017/CBO9780511524646.[10] Yvonne Foures-Bruhat。某些非线性偏微分方程组的存在性定理。《数学学报》，88(1):141–225，1952。doi:10.1007/BF02392131.[11] Arthur E Fischer 和 Jerrold E Marsden。初值问题与广义相对论的动力学表述。《广义相对论：爱因斯坦百年纪念综述》，第138–211页，1979。网址：www.cds.caltech.edu/~marsden/bib/1979/05-FiMa1979/.[12] Severin Bunk、Miguel Pino 和 C. S. Shahbazi。从gerbe上梯度广义里奇孤子的柯西问题，2025。doi:10.48550/arXiv.2510.25888.[13] Oskar Schiller。广义爱因斯坦方程的初值问题。博士论文，进行中。[14] Mario Garcia-Fernandez。广义几何中的里奇流、Killing旋量与T对偶。《数学进展》，350:1059–1108，2019。doi:10.1016/j.aim.2019.04.038。

[15] Mario Garcia-Fernandez 和 Jeffrey Streets。《广义里奇流》。美国数学会，2020 年。doi:10.1090/ulect/076。[16] Jeffrey Streets、Charles Strickland-Constable 和 Fridrich Valach。Courant 代数丛上的里奇流。《当代数学通讯》，第 2550037 页，2025 年。 doi:10.1142/S0219199725500373。[17] Vicente Cortés 和 Oskar Schiller。外部广义几何。 doi:10.48550/arXiv.2507.12362。[18] Vicente Cortés、Matas Mackevicius、Thomas Mohaupt 和 Oskar Schiller。典范广义列维-奇维塔联络及其曲率。 doi:10.48550/arXiv.2507.17604。[19] Gil R. Cavalcanti、Jaime Pedregal 和 Roberto Rubio。论广义里奇曲率的等价性。《美国数学会会刊》，153(6):2639–2648，2025 年。 doi:10.1090/proc/17165。[20] Hans Ringström。《宇宙的拓扑与未来稳定性》。牛津大学出版社，2013 年。 doi:10.1093/acprof:oso/9780199680290.001.0001。[21] Hans Ringström。《广义相对论中的柯西问题》一书的勘误表，2011 年。网址： https://people.kth.se/~hansr/errata_book.pdf。[22] Jan Sbierski。论爱因斯坦方程极大柯西发展的存在性：去佐恩化。《亨利·庞加莱年刊》，17(2):301–329，2016 年。 doi:10.1007/s00023-015-0401-5。O. Schiller：oskar.schiller@uni-hamburg.de

德国汉堡市 20146，Bundesstr. 55，汉堡大学数学系。