arXiv:2601.05043v1 [math.FA] 8 Jan 2026

# 因子分解后的 Fueter-Sce 映射在切片超全纯柯西核中的应用

ANTONINO DE MARTINO 和 STEFANO PINTON

Abstract. Fueter-Sce 定理是超复分析中最重要的结果之一，它提供了一个两步过程，可从单变量全纯函数构造轴向单生成函数。第一步，将所谓的切片算子作用于单变量全纯函数，从而得到切片超全纯函数类。第二步

通过逐点微分算子 $\Delta^{\frac{n-1}{2}}_{n+1}$，其中 $n$ 为奇数，称为 Fueter-Sce映射。Fueter–Sce 定理的重要性还在于，它引出了与其生成的函数类相对应的两种谱理论。

多年来，研究者一直在探讨 Fueter-Sce 映射的分解，以确定切片超全纯函数与轴向单生成函数之间出现的中间空间。迄今为止，人们只考虑了 Fueter–Sce映射的某些分解。本文旨在确定 Fueter–Sce映射最一般的分解，并将这些微分算子应用于切片超全纯函数的柯西核。

**AMS 分类：**

**关键词：** Fueter-Sce 映射定理、 $S$谱上的精细结构、切片超全纯函数

## 1. Introduction

在文献中，单个复变量的全纯函数这一概念可以通过两种不同的方式推广到高维。一种方法是研究多复变数函数所满足的柯西-黎曼方程组，由此形成多复变数理论。

另一种方法是考察取值于四元数或克利福德代数中的函数。在这一框架下，出现了两种核心理论：切片超全纯函数理论（[22]）和单值函数理论（[7, 24]）。这两种超复分析理论存在显著差异。例如，多项式是切片超全纯的，却不是单值的。尽管存在这一根本区别，切片超全纯函数理论与单值函数理论仍通过 Fueter–Sce 延拓定理建立了联系，参见 [20, 32, 41]。

这一构造分为两个步骤。第一步，通过切片算子 $T_{FS1}$ ，将单个复变量的全纯函数空间 $\mathcal{O}(\Pi)$ 扩展为切片超全纯函数空间 $\mathcal{SH}(U_\Pi)$，其中 $\Pi \subset \mathbb{C}$ 是一个开对称集， $U_\Pi \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是相应的诱导域。

第二步，将定义于奇数 $n$情形下的 Fueter-Sce 算子 $\Delta^2_{n+1}$ 应用于 $\mathcal{SH}(U_\Pi)$，从而得到轴向单生成函数空间 $\mathcal{AM}(U_\Pi)$。整个过程可概括为

$$\mathcal{O}(\Pi) \xrightarrow{T_{FS1}} \mathcal{SH}(U_\Pi) \xrightarrow{\Delta^{\frac{n-1}{2}}_{n+1}} \mathcal{AM}(U_\Pi).$$

Fueter-Sce 定理的一个重要结果是，分别在切片超全纯函数和轴向单值函数的框架下建立了两种谱理论。

过去几年中，作者们一直在研究以狄拉克算子表示的 Fueter-Sce映射的分解。这项研究始于 [10, 29, 30] ，当时考察的是四元数情形（$n = 3$）。在 $[11]_{,^{n-1}}$中，作者们分析了 $\Delta_{n+1}^{2}$ 的分解，研究对象为 $n = 5$。最近，在 [9], 中，研究重点转向了 Fueter-Sce映射的主要分解。这些分解所诱导的不同函数族及相应的函数演算，催生了精细结构这一概念；综述参见 [13, 25]。

本文旨在确定算子 $\Delta$最一般的分解 $\frac{n-1}{}$
$_{n+1}^{2}$ 关于狄拉克算子及其共轭的形式，并将由这些分解得到的算子应用于切片超全纯柯西核。

本文结构：第 1 节为引言。第 2 节回顾切片超全纯分析的主要概念以及单生成情形。第 3 节首先概述前人研究的 Fueter-Sce 映射的分解及其在切片超全纯柯西核中的应用。本节的第二部分将 Fueter–Sce 映射最一般的分解应用于切片超全纯柯西核，并指出，对于某些特定的参数取值，这些应用会得到其他研究中已出现的积分变换核。最后，第 4 节给出一些总结性评述。

## 2. 预备知识

本文所采用的框架是实克利福德代数 $\mathbb{R}_n$，它由 $n$虚单位$e_1, \ldots, e_n$ 生成，并满足关系式 $e_ie_j + e_je_i = -2\delta_{ij}$。克利福德代数 $\mathbb{R}_n$ 中的元素具有形式 $\sum_A e_A x_A$，其中 $A = (i_1, \ldots, i_r) \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$， $i_1 < \cdots < i_r$ 是一个多重指标，$e_A = e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_r}$，且 $e_\emptyset = 1$。

若 $|A| = i_1 + \cdots + i_r$，则形如 $\sum_{A:\ |A|=k} e_A x_A$且满足 $k > 0$的元素称为 $k$-向量。注意， $\mathbb{R}_1$ 与复数代数 $\mathbb{C}$重合，而 $\mathbb{R}_2$ 对应于记作 $\mathbb{H}$的实四元数代数。当 $n > 1$时，克利福德代数 $\mathbb{R}_n$ 是非交换的；当 $n > 2$ 时，它们还包含零因子（见 [33]）。

元素 $(x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$ 可通过映射与克利福德代数中的一个一向量对应

$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \underline{x} = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n,$$

而元素 $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ 可与如下形式的副向量对应

$$x = x_0 + \underline{x} = x_0 + \sum_{j=1}^{n} x_j e_j.$$

$x$ 的实部 $x_0$ 也记作 Re$(x)$。 $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ 的范数为 $|x|^2 = x_0^2 + \ldots . x_n^2$。符号 $\mathbb{S}$ 表示 $\mathbb{R}^n$中由单位一向量构成的 $(n-1)$ 维球面，即

$$\mathbb{S} = \left\{ \underline{x} = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \,:\, x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \right\}.$$

我们注意到，任意 ny 元素 $I \in \mathbb{S}$ 满足 $I^2 = -1$。因此，可以考虑实向量空间 e

$$\mathbb{C}_I = \mathbb{R} + I\mathbb{R} = \{u + Iv \,:\, u, v \in \mathbb{R}\}.$$

对于每个 $I \in \mathbb{S}$，集合 $\mathbb{C}_I$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的二维实子空间，且同构于复平面。给定一个元素 $x = x_0 + x \in \mathbb{R}^{n+1}$，若 $x \neq 0$，我们定义 $J_x = \frac{x}{|x|}$。然后，对于这样的元素 $x$，我们引入集合

$$[x] := \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \,:\, y = x_0 + J|\underline{x}|,\ J \in \mathbb{S}\},$$

它是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的一个 $(n-1)$ 维球面。

**定义 2.1**。设 $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$。如果对于每个 $x \in U$， $U$ $[x] \in U$，则称其为轴对称的。

**定义 2.2**（切片柯西域）。 轴对称开集 $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 称为**切片柯西域**，如果对于每个 $I \in \mathbb{S}$, $U \cap \mathbb{C}_I$ 是 $\mathbb{C}_I$ 中的柯西域。更确切地说，如果对于每个 $I \in \mathbb{S}$, $U \cap \mathbb{C}_I$ 的边界 $\partial(U \cap \mathbb{C}_I)$ 是 $\mathbb{C}_I$ 中有限条两两不相交、分段连续可微的若尔当曲线之并，则 $U$ 是切片柯西域。

**定义 2.3**（切片超全纯函数）。 设 $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 为一个轴对称集合，并设

$$\mathcal{U} := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u + \mathbb{S}v \subset U\}.$$

一个函数 $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ 称为左（分别为右）切片函数，如果它具有如下形式

$$f(x) = \alpha(u, v) + I\beta(u, v) \quad （分别为 \ f(x) = \alpha(u, v) + \beta(u, v)I），\ \text{for} \quad x = u + Iv \in U, \tag{2.1}$$

其中函数 $\alpha, \beta : \mathcal{U} \to \mathbb{R}_n$ 满足所谓的偶奇条件:

$$\alpha(u, v) = \alpha(u, -v), \qquad \beta(u, v) = -\beta(u, -v), \qquad \forall (u, v) \in \mathcal{U}. \tag{2.2}$$

此外，若 $\alpha$ 和 $\beta$ 满足柯西-黎曼方程

$$\partial_u \alpha(u, v) - \partial_v \beta(u, v) = 0, \qquad \partial_v \alpha(u, v) + \partial_u \beta(u, v) = 0,$$

则称 $f$ 为左（分别为右）切片超全纯函数。

**定义 2.4.** 设 $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 为一个轴对称开集。

- 我们用 $\mathcal{SH}_L(U)$（分别为 $\mathcal{SH}_R(U)$）表示定义在 $U$上的左（分别为右）切片超全纯函数集合。若无歧义，我们简写为 $\mathcal{SH}(U)$。
- 形如 (2.1) 且满足 $\alpha$ 和 $\beta$ 为实值函数的切片超全纯函数称为本征切片超全纯函数，这类函数的集合记为 $\mathcal{N}(U)$。

**注记 2.5**。 本征切片超全纯函数的集合与左、右切片超全纯函数的集合相同。因此，提到 $\mathcal{N}(U)$ 时，我们不区分左、右两种情形。

一个众所周知的切片超全纯函数例子是切片超全纯柯西核，它在本文中发挥着基础性作用，见 [16, 21]。

**命题2.6**（柯西核级数）。 设 $s, \ x \in \mathbb{R}^{n+1}$ 使得 $|x| < |s|$ 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n s^{-1-n} = -(x^2 - 2xs_0 + |s|^2)^{-1}(x - \bar{s})$$

*and*

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^{-1-n} x^n = -(x - \bar{s})(x^2 - 2xs_0 + |s|^2)^{-1}.$$

柯西核级数的和可以用两种等价的方式表示。

**命题2.7**。 设 $x$ 和 $s \in \mathbb{R}^{n+1}$ 满足 $x \notin [s]$。我们有

$$-(x^2 - 2xs_0 + |s|^2)^{-1}(x - \bar{s}) = (s - \bar{x})(s^2 - 2x_0 s + |x|^2)^{-1}$$

*and*

$$(s^2 - 2x_0 s + |x|^2)^{-1}(s - \bar{x}) = -(x - \bar{s})(x^2 - 2xs_0 + |s|^2)^{-1}.$$

这些事实证明了以下定义的合理性

**定义2.8**。 设 $x$,$s \in \mathbb{R}^{n+1}$ 满足 $x \notin [x]$。

- 我们称 $S_L^{-1}(s, x)$（分别地，$S_R^{-1}(s, x)$）写成 $I$ 的形式，当且仅当

$$S_L^{-1}(s, x) = -(x^2 - 2xs_0 + |s|^2)^{-1}(x - \bar{s}), \qquad \big(\text{resp.} \quad S_R^{-1}(s, x) = -(x - \bar{s})(x^2 - 2xs_0 + |s|^2)^{-1}\big)$$

• 我们称 $S_L^{-1}(s,x)$（分别地，$S_R^{-1}(s,x)$）写成 $II$ 的形式，当且仅当

$$S_L^{-1}(s,x) = (s-\bar{x})(s^2-2x_0s+|x|^2)^{-1}, \qquad \left(\text{resp.} \quad S_R^{-1}(s,x) = (s^2-2x_0s+|x|^2)^{-1}(s-\bar{x})\right).$$

**注记 2.9**。 在本文中，以下多项式起着至关重要的作用：

$$\mathcal{Q}_{c,s}(x) = s^2 - 2x_0s + |x|^2, \qquad s, x \in \mathbb{R}^{n+1},$$

以及其逆，定义为 $s$， $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ 其中 $x \notin [s]$,

$$\mathcal{Q}_{c,s}^{-1}(x) = \left(s^2 - 2x_0s + |x|^2\right)^{-1}. \tag{2.3}$$

函数 $\mathcal{Q}_{c\,s,}^{-1}(x)$ 出现在柯西核的第二种表示中，通常称为交换伪柯西核。

**定理 2.10** （切片超全纯函数的柯西公式，参见 [16, 21]）。 设$U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 为有界切片柯西域，令 $I \in \mathbb{S}$ 并设 $ds_I = ds$ （$-I$）。若 $f$ 是在包含 $U$ 的集合上的左（相应地）切片超全纯函数，则对任意 $x \in U$，有

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_I)} S_L^{-1}(s,x)ds_I f(s), \qquad \left(resp.\ f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_I)} f(s)ds_I S_R^{-1}(s,x)\right).$$

在超复分析的背景下，我们现在引入另一类相关函数：

**定义 2.11.** 设 $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 为一个轴对称域。若函数 $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ 属于 $\mathcal{C}^1$ 类，且属于狄拉克算子$D$的核，则称其为左（分别为右）轴向单生成函数：

$$Df(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_0} + \sum_{i=1}^{n} e_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right) f(x) = 0 \qquad \left(\text{resp. } f(x)D = \frac{\partial}{\partial x_0}f(x) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}f(x)e_i = 0\right),$$

此外，若它还具有轴向形式，即它是一个左（分别为右）函数

$$f(x) = A(u,v) + \underline{\omega}B(u,v), \qquad (\text{ resp. } f(x) = A(u,v) + B(u,v)\underline{\omega}), \quad \underline{\omega} \in \mathbb{S},$$

其中 $A$ 和 $B$ 是取值于 $\mathbb{R}^{n+1}$的函数，并满足奇偶条件 (2.2)。我们用 $\mathcal{AM}_L(U)$（分别用 $\mathcal{AM}_R(U)$）表示这类函数。当不会引起混淆时，我们用 $\mathcal{AM}(U)$表示这类函数。

**注 2.12.** 狄拉克算子的共轭为

$$\overline{D} = \frac{\partial}{\partial x_0} - \sum_{i=1}^{n} e_i\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

轴向单生成函数与切片超全纯函数之间的联系由 Fueter-Sce 定理给出，见 [20, 41]。

**定理 2.13** (Fueter-Sce 映射定理)。 设 $n$ 为奇数，并令 $h_n = \frac{n-1}{2}$。我们假设 ——

$$f_0(z) = \alpha(u,v) + i\beta(u,v)$$

是在上半平面内的域 $\Pi$ 中定义的一个复变量全纯函数。考虑

$$U_\Pi := \{x = x_0 + \underline{x} : (x_0, |\underline{x}|) \in \Pi\},$$

这是由 $\Pi$ 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中诱导的开集。算子 $T_{FS1}$（称为切片算子）定义为

$$f(x) = T_{FS1}(f_0) := \alpha(x_0,|\underline{x}|) + \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|}\beta(x_0,|\underline{x}|), \qquad x \in U_\Pi,$$

并映射全纯　全纯函数到切片超全纯函数。此外，算子

$$T_{FS2} := \Delta_{n+1}^{h_n}$$

将切片超全纯函数映射为轴向单值函数。事实上，函数

$$\breve{f}(x) := \Delta_{n+1}^{h_n}\left(\alpha(x_0,|\underline{x}|) + \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|}\beta(x_0,|\underline{x}|)\right), \qquad x \in U_\Pi,$$

$\breve{}$属于狄拉克算子的核，即 $Df(x) = 0$.

**备注 2.14**。上述定理最初于 1934年针对四元数建立，参见 [32]。20 世纪 50 年代末，该定理被推广到奇数维情形下的克利福德代数，参见 [41]（英文译本参见 [20]）。1997年，Fueter-Sce 定理进一步推广到任意维数。在这一推广中，算子 $\Delta_{n+1}^{h_n}$ 被视为通过傅里叶变换定义的分数阶算子，参见 [39, 40]。此外， [26, 27, 28] 中还介绍了 Fueter–Sce 定理与柯西-柯瓦列夫斯卡娅延拓之间的联系。

**备注 2.15**。在定理 2.13 中，假设之一是全纯函数仅定义在复上半平面上。然而，这一条件可以放宽。具体而言，可以考虑如下形式的函数

$$f(x) = \alpha(u,v) + I\beta(u,v), \qquad \text{for } x = u + Iv \in U,$$

其中函数 $\alpha, \beta : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^{n+1}$ 满足奇偶条件 (2.2)。

从锥复变量的全纯函数到轴向单生成函数的扩张过程（由 Fueter–Sce映射定理给出，并经过切片超全纯函数）可示意如下:

$$\mathcal{O}(\Pi) \xrightarrow{T_{FS1}} \mathcal{SH}(U_\Pi) \xrightarrow{T_{F2}=\Delta_4} \mathcal{AM}(U_\Pi). \tag{2.4}$$

在 [23], 中，作者将算子 $T_{FS2} := \Delta_{n+1}^{h_n}$ 应用于切片超全纯柯西核，从而得到以下结果。

**定理 2.16**。设 $n$ 为奇数集合 $h_n = {}^{n-1}_{2}$，并考虑 $x, \not{s} \in \mathbb{R}^{n+1}$，使得 $s \notin [x]$，并回忆 $\mathcal{Q}_c^{-1},_s(x)$ 在(2.3)中定义。那么，将算子 $T_{FS2} := \Delta_{n+1}^{h_n}$ 应用于形式为 $II$ 的左（分别为右）切片超全纯柯西核，可得

$$\Delta_{n+1}^{h_n} S_L^{-1}(s,x) = F_L^n(s,x) = \gamma_n(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}^{-h_n-1}(x),$$

$$\left(resp.\ \Delta_{n+1}^{h_n} S_R^{-1}(s,x) = F_R^n(s,x) = \gamma_n \mathcal{Q}_{c,s}^{-h_n-1}(x)(s-\bar{x})\right),$$

其中 $\gamma_n := 4^{h_n} h_n!\ (-h_n)_{h_n}$。

结合上述定理和切片超全纯函数的柯西定理，可以得到 Fueter-Sce 映射定理的积分形式，参见 [23]。

**定理 2.17**（Fueter-Sce 映射定理的积分形式）。设 $n$ 为奇数，且 $h_n = {}^{n-1}_{2}$。设 $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 为有界切片柯西域，令 $I \in \mathbb{S}$ 并设 $ds_I = -Ids$。若 $f$ 是在包含 $\bar{U}$的集合上的左（分别为右）切片超全纯函数，则 $\breve{f}(x) = \Delta_{n+1}^{h_n} f(x)$ 是左（分别为右）轴向单值函数，并且对任意 $x \in U$，它具有如下积分表示

$$\breve{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_I)} F_L^n(s,x)ds_I f(s) \quad \left(resp.\ \breve{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_I)} f(s)ds_I F_R^n(s,x)\right).$$

**Re注 2.18**。 对于 $\alpha$， $\beta > 0$ 符号 $(-\alpha)_\beta$ 有如下解释：

$$(-\alpha)_\beta = (-1)^\beta(\alpha - \beta + 1)_\beta = (-1)^\beta \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}.$$

Fueter-Sce 映射定理最重要的应用之一，在于它能够针对其生成的两类超全纯函数，分别导出两种不同的谱理论。运用切片超全纯函数的柯西公式（见定理 2.10），可得到 $S$函数演算，该演算以 $S$谱为基础构建，见[21]。基于 $S$谱的四元数算子谱理论，最初受到 Birkhoff 和冯·诺伊曼关于四元数量子力学的研究启发（见 [6]），并于 2006 年迎来重大突破：当时引入了 $S$谱及相关的$S$预解算子。这些概念对该理论的发展起到了关键作用，促成了广泛的应用，包括分数阶扩散问题（见 [14, 15, 18, 19]）、Schur 分析（见 [2]），以及对特征算子函数的研究及其在线性系统理论中的应用（见 [3]）。

反过来，轴向单生成函数的柯西公式导出了由 McIntosh 及其合作者提出并发展的单整泛函演算，见 [34, 35], ；该演算依赖于一种不同的谱概念：单整谱。

定义单整泛函演算的另一种方式，是通过 Fueter-Sce 映射定理的积分形式，见定理 2.17。这引出了所谓的 $F$-泛函演算，见 [17]。其构造总结如下图：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{SH}(U) & & \mathcal{AM}(U) \\ \downarrow & & \\ \text{切片柯西公式 } T_{FS2}=\Delta & \xrightarrow[n]{h \quad n+1} & \text{Fueter } -\text{Sce 积分形式定理} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S \text{ –函数演算} & & F \text{ –函数演算} \end{array} \tag{2.5}$$

**备注 2.19.** 在上图中，我们省略了记号 $\Omega_\Pi$，因为我们只关注从 $\mathcal{SH}(U)$ 到 $\mathcal{AM}(U)$ 的映射 $T_{FS2} = \Delta_{n+1}^{h_n}$。因此，下文中我们将考虑轴对称开集，并用 $U$ 表示。

## 3. Factorizations of the Fueter-Sce map

按照 Riesz–Dunford泛函演算，参见 [31], ，预解方程会导出乘积法则，因此自然会促使我们在 $F$-函数演算的框架下寻找类似的预解方程。 [17] 研究了这一问题，更一般地， [8, 12]也对此进行了研究。值得注意的是， $F$-函数演算的情况更为微妙，因为它是通过积分变换定义的。以下概念在我们的研究中发挥着关键作用，因为它对于确立 $F$-函数演算的乘积法则至关重要，参见 [9]。

**定义 3.1.** 我们将 $S$-谱上的精细结构称为由第二个 Fueter–Sce 映射的因子分解所诱导的函数集合及其相应的函数演算。

Fueter–Sce映射的因子分解研究始于四元数情形。在这种情形下，首先考虑的因子分解为 $\Delta_4 = DD$. 由此得到方案 (2.4) 的如下改进：

$$\mathcal{SH}_L(U) \xrightarrow{D} \mathcal{AH}_L(U) \xrightarrow{\overline{D}} \mathcal{AM}_L(U), \tag{3.1}$$

其中

$$\mathcal{AH}_L(U) := D\left(\mathcal{SH}_L(U)\right) = \{Df \mid f \in \mathcal{SH}_L(U)\},$$

是轴向调和函数的集合。在 [10, 定理 4.1], 中，将算子 $D$ 作用于左切片超全纯柯西核的第二种形式，得到以下结果:

$$D(S_L^{-1}(s,q)) = -2\mathcal{Q}_{c,s}^{-1}(q), \qquad s \notin [q], \tag{3.2}$$

其中 $q = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_1e_2$ 是一个四元数。

在 [29, 30], 中，考虑了因子分解 $\Delta_4 = DD$ 。由此得到以下图示:

$$\mathcal{SH}_L(U) \xrightarrow{\overline{D}} \mathcal{AP}_2^L(U) \xrightarrow{D} \mathcal{AM}_L(U), \tag{3.3}$$

其中

$$\mathcal{AP}_2^L(U) := \overline{D}\big(\mathcal{SH}_L(U)\big) = \{\overline{D}f \mid f \in \mathcal{SH}_L(U)\},$$

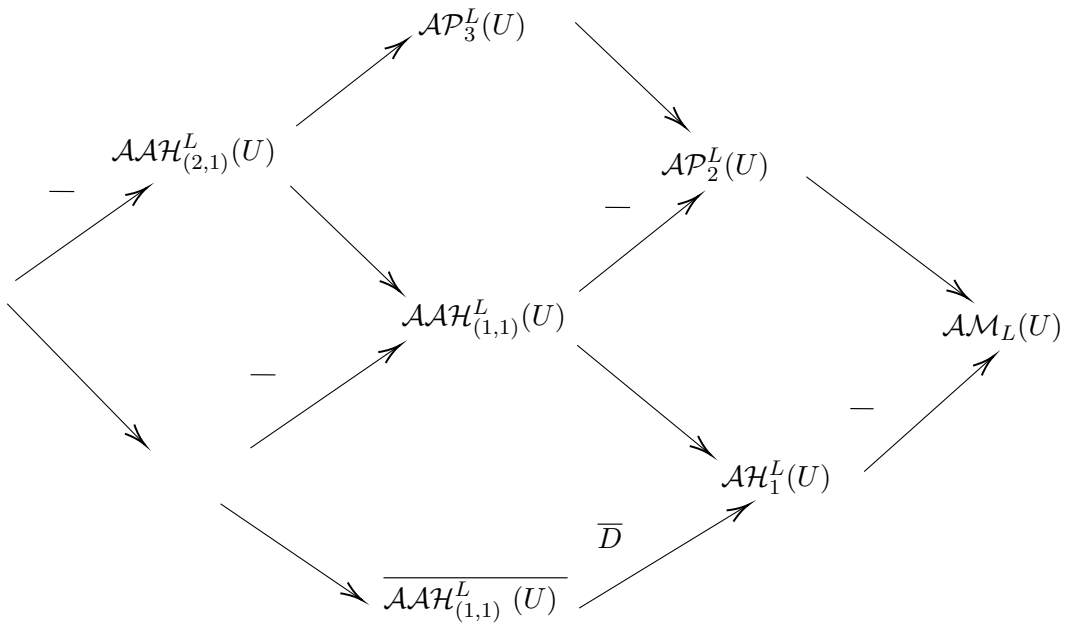
是 2 阶轴向多解析函数的集合。将共轭 Fueter 算子作用于左切片超全纯柯西核的第二种形式，得到

$$\overline{D}\big(S_L^{-1}(s,q)\big) = -F_L^3(s,q)s + q_0F_L^3(s,q), \qquad s \notin [q], \tag{3.4}$$

参见 [29, 定理 4.1]。在 [11] 中，我们开始专门考虑 Clifford 情形，具体而言是情形 $n = 5$。在这种情况下，考虑了以下 Fueter-Sce 映射的分解（即 $\Delta_6^2$）

$$D, \quad \Delta_6, \quad \Delta_6 D, \quad \overline{D}, \quad \overline{D}^2, \quad D^2, \quad \Delta_6\overline{D}. \tag{3.5}$$

这些内容可概括为下图




其中

$$\mathcal{AP}_{3-\ell}^L(U) = \{\Delta_6^\ell\overline{D}^{2-\ell}f \mid f \in \mathcal{SH}_L(U)\}, \qquad \ell = 0, 1,$$

是 2 阶和 3 阶轴向多解析函数的集合，

$$\mathcal{AH}_{3-\ell}^L(U) = \{D\Delta_6^{\ell-1}f \mid f \in \mathcal{SH}_L(U)\}, \qquad \ell = 1, 2,$$

是轴向调和函数和双调和函数的集合，

$$\mathcal{AAH}^L_{(2-\gamma,1)}(U) = \{D^\gamma \overline{D} f \mid f \in \mathcal{SH}_L(U)\}, \qquad \gamma = 0, 1, \quad \overline{\mathcal{AAH}^L_{(1,1)}(U)} := \{D^2 f \mid f \in \mathcal{SH}_L(U)\},$$

是类型为（$2-\gamma$，1）的轴向解析调和函数和类型为（1，1）的轴向反解析调和函数的集合。对于 $s$， $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ 满足 $s \notin [x]$ 的情形，(3.5) 中算子作用于左切片超全纯柯西核的第二种形式，得到

$$D(S_L^{-1}(s,x)) = -4\mathcal{Q}_{c,s}^{-1}(x), \qquad \Delta_6 D(S_L^{-1}(s,x)) = 16\mathcal{Q}_{c,s}^{-2}(x), \tag{3.6}$$

参见 [11, 定理 6.10 和定理 6.12],

$$\Delta_6(S_L^{-1}(s,x)) = 8(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}^{-2}(x), \qquad \overline{D}(S_L^{-1}(s,x)) = 4(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}^{-2}(x)(s-x_0) + 2\mathcal{Q}_{c,s}^{-1}(x)$$
$$D^2(S_L^{-1}(s,x)) = 16\mathcal{Q}_{c,s}^{-2}(x)(s-x_0) - 8(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}^{-2}(x). \tag{3.7}$$

参见 [11, 定理 6.11、定理 6.13 和定理 6.15]

$$\Delta_6 \overline{D}(S_L^{-1}(s,x)) = -64(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}^{-3}(x)(s-x_0), \qquad \overline{D}^2(S^{-1}(s,x)) = 32(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}^{-3}(x)(s-x_0)^3, \tag{3.8}$$

参见 [11, 定理 6.13 和定理 6.14]。在 [9], 中，我们研究了 Clifford情形下针对奇数 $n$ 的 Fueter-Sce 映射的最一般分解。特别地，我们证明了，对 ${}_{n-1}\Delta^{\,2}_{n+1}$ 进行适当的分解可得出方案 (2.4) 的如下细化：

$$\mathcal{SH}_L(U) \xrightarrow{D\Delta_{n+1}^{m-1}} \mathcal{APH}^L_{h_n-m+1}(U) \xrightarrow{\overline{D}\Delta_{n+1}^{h_n-m}} \mathcal{AM}_L(U), \qquad 1 \le m \le h_n, \tag{3.9}$$

其中

$$\mathcal{APH}^L_{h_n-m+1}(U) = \{D\Delta_{n+1}^{m-1} f \ : \ f \in \mathcal{SH}_L(U)\},$$

是阶数为 $h_n - m + 1$ 的轴向多重调和函数集合。在 [9, 定理 4.16], 中，作者证明了应用算子 $D\Delta_{n+1}^{m-1}$ 可得：

$$D\Delta_{n+1}^{m-1}(S_L^{-1}(s,x)) = \sigma_{n,m}\mathcal{Q}_{c,s}^{-m}(x), \qquad s \notin [x], \tag{3.10}$$

其中 $\sigma_{n,\ m} = 2^{2m-1}(m-1)!(-h_n)_m$。Fueter-Sce映射的另一个有趣的因子分解导出了以下方案

$$\mathcal{SH}_L(U) \xrightarrow{\Delta_{n+1}^{m}} \mathcal{AAH}^L_{1,h_n-m}(U) \xrightarrow{\Delta_{n+1}^{h_n-m}} \mathcal{AM}_L(U), \quad 1 \le m \le h_n - 1 \tag{3.11}$$

其中

$$\mathcal{AAH}^L_{(h_n-m,1)}(U) = \{\Delta_{n+1}^m f(x) \ : \ f \in \mathcal{SH}_L(U)\}.$$

是阶数为 $(h_n - m,\ 1)$ 的轴向解析调和函数集合。在这种情况下，将算子 $\Delta_{n+1}^m$ 应用于切片超全纯柯西核的第二种形式，可得

$$\Delta_{n+1}^m(S_L^{-1}(s,x)) = \gamma_m(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1}(x), \qquad s \notin [x], \tag{3.12}$$

${}_{n-1}$其中 $\gamma_m = 4^m m!(-h_n)_m$。算子 $\Delta^{\,2}_{n+1}$ 的其他可能分解可得 (2.4) 的以下因子分解：

$$\mathcal{SH}_L(U) \xrightarrow{\overline{D}^{h_n-m}\Delta_{n+1}^{\ell}} \mathcal{AP}^L_{h_n-m+1}(U) \xrightarrow{D^{h_n-m}} \mathcal{AM}_L(U), \quad 0 \le \ell \le h_n - 1, \tag{3.13}$$

其中

$$\mathcal{AP}^L_{h_n-m+1}(U) = \{\Delta_{n+1}^m \overline{D}^{h_n-m} f \ : \ f \in \mathcal{SH}_L(U)\}$$

是阶数为 $h_n - m + 1$ 的轴向多解析函数集合。在这种情况下，将算子 $\Delta_{n+1}^m D^{h_n-m}$ 应用于切片超全纯柯西核的第二种形式，得到

$$\Delta_{n+1}^m \overline{D}^{h_n-m}(S_L^{-1}(s,x)) = \frac{(-1)^{h_n-\ell}}{(h_n-\ell)!} F_L^n(s,x)(s-x_0)^{h_n-\ell}, \qquad s \notin [x], \tag{3.14}$$

参见 [9, 定理 8.10]。

**注 3.2**。 分解式 (3.9) 和 (3.11) 已在 [9] 中用于推导 Clifford 情形下$F$-函数演算的乘积公式。

**注 3.3**。 多调和函数、多解析函数和 Clifford 函数类在文献中得到了广泛研究。具体而言，多调和函数已在[4]中得到探讨。多解析函数最初是在弹性理论背景下研究的（参见 [38]），随后在 [5] 中对这一类函数进行了严谨研究。此外， [1] 将多解析函数理论应用于信号分析。G. Laville 和 I. Ramadanoff 引入并研究的解析调和函数类（参见 [36, 37]）被命名为 Clifford 函数。

本文旨在确定 Fueter–Sce映射尽可能一般的因子分解，并研究其在左切片超全纯柯西核第二种形式中的应用。一般而言，Fueter–Sce映射可用狄拉克算子及其共轭表示如下：

$$\Delta_{n+1}^{\frac{n-1}{2}} = \underbrace{D \cdots D}_{n-1 \text{ times}} \ \underbrace{\overline{D} \cdots \overline{D}}_{n-1 \text{ times}}. \tag{3.15}$$

因此，我们有两种可能的分解：

- 如果在 (3.15) 中考虑的共轭 Dirac 算子多于狄拉克算子，则得到如下因子分解

$$\overline{D}^{\beta} \Delta_{n+1}^m, \qquad m \in \mathbb{N}, \quad \beta + m \leq h_n. \tag{3.16}$$

- 另一方面，如果在 (3.15) 中考虑的狄拉克算子多于共轭 Dirac 算子，则得到如下因子分解

$$D^{\beta} \Delta_{n+1}^m, \qquad m \in \mathbb{N}, \quad \beta + m \leq h_n. \tag{3.17}$$

现在，我们希望将算子 (3.16) 和 (3.17) 应用于切片超全纯柯西核的第二种形式。在此之前，我们需要以下技术结果。

**注 3.4**。 我们仅在左切片超全纯函数的框架下给出了 Fueter-Sce 映射因子分解的结果。不过，类似的结果对于右切片超全纯函数也成立。本文始终只讨论左切片超全纯情形，因为右侧情形的相应结论可通过类似的计算得出。

**引理 3.5**。 设 $n$为奇整数，并令 $h_n = {}^{n-1}_{2}$ 。记 $D$ 为关于变量 $x$的狄拉克算子。对于满足 $s \notin [x]$的 $s, x \in \mathbb{R}^{n+1}$ ，有

$$D\left((s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}^{-m}(x)\right) = -2(h_n - m + 1)\mathcal{Q}_{c,s}^{-m}(x) \tag{3.18}$$

$$D\left(\mathcal{Q}_{c,s}^{-m}(x)\right) = 4m(s-x_0)\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1}(x) - 2m(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1}(x) \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} D\left((s-x_0)^k\mathcal{Q}_{c,s}^{-m}(x)\right) &= 4m(s-x_0)^{k+1}\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1}(x) - 2m(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1}(x)(s-x_0)^k \\ &\quad - k(s-x_0)^{k-1}\mathcal{Q}_{c,s}^{-m}(x) \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} D\left((s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}^{-m}(x)(s-x_0)^k\right) &= 2(m-h_n-1)\mathcal{Q}_{c,s}^{-m}(x)(s-x_0)^k \\ &\quad - k(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}^{-m}(x)(s-x_0)^{k-1} \end{aligned} \tag{3.21}$$

证明。 首先证明 (3.18)。注意到

$$\begin{aligned} D\left((s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}^{-m}(x)\right) &= \partial_{x_0}\left(\left((s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}^{-m}(x)\right)\right) + \sum_{i=1}^{n} e_i\partial_{x_i}\left((s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}^{-m}(x)\right) \\ &= -\mathcal{Q}_{c,s}^{-m}(x) + 2m(s-\bar{x})(s-x_0)\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1}(x) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} e_i\left(e_i\mathcal{Q}_{c,s}^{-m}(x) - 2mx_i(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1}(x)\right) \\ &= (-1-n)\mathcal{Q}_{c,s}^{-m}(x) + 2m\left((s-\bar{x})s - x(s-\bar{x})\right)\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1}(x) \\ &= 2\left(m - \frac{n+1}{2}\right)\mathcal{Q}_{c,s}^{-m}(x) = 2\left(m-h_n-1\right)\mathcal{Q}_{c,s}^{-m}(x). \end{aligned}$$

现在证明 (3.19)。我们有

$$\begin{aligned} D\left(\mathcal{Q}_{c,s}^{-m}(x)\right) &= \partial_{x_0}\left(\mathcal{Q}_{c,s}^{-m}(x)\right) + \sum_{i=1}^{n} e_i\partial_{x_i}\left(\mathcal{Q}_{c,s}^{-m}(x)\right) \\ &= 2m(s-x_0)\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1}(x) - 2\sum_{i=1}^{n} e_i m x_i\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1}(x) \\ &= 2m(s-x)\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1}(x) \\ &= 2m(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1}(x) - 4m\underline{x}\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1}(x) \\ &= 2m(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1}(x) + 4m(s-x_0+x_0-\underline{x}-s)\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1}(x) \\ &= 2m(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1}(x) - 4m(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1}(x) + 4m\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1}(x)(s-x_0) \\ &= 4m\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1}(x)(s-x_0) - 2m(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1}(x). \end{aligned}$$

公式 (3.20) 和 (3.21) 可分别利用莱布尼茨法则由 (3.18) 和 (3.19) 推导得出。事实上，我们有

$$\begin{aligned} D\left(\mathcal{Q}_{c,s}^{-m}(x)(s-x_0)^k\right) &= \partial_{x_0}(\mathcal{Q}_{c,s}^{-m}(x))(s-x_0)^k + \mathcal{Q}_{c,s}^{-m}(x)\partial_{x_0}(s-x_0)^k \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} e_i\partial_{x_i}(\mathcal{Q}_{c,s}^{-m}(x))(s-x_0)^k + e_i\mathcal{Q}_{c,s}(x)\partial_{x_i}((s-x_0)^k) \\ &= D\left(\mathcal{Q}_{c,s}^{-m}(x)\right)(s-x_0)^k + \mathcal{Q}_{c,s}^{-m}(x)D\left((s-x_0)^k\right) \end{aligned}$$

因此，我们得到

$$
\begin{aligned}
&D\left(\mathcal{Q}_{c,s}^{-m}(x)(s-x_0)^k\right) = D\left(\mathcal{Q}_{c,s}^{-m}(x)\right)(s-x_0)^k + \mathcal{Q}_{c,s}^{-m}(x)D\left((s-x_0)^k\right)\\
&= [4m\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1}(x)(s-x_0) - 2m(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1}(x)](s-x_0)^k - k\mathcal{Q}_{c,s}^{-m}(x)(s-x_0)^{k-1}\\
&= 4m\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1}(x)(s-x_0)(s-x_0)^{k+1} - 2m(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1}(x)(s-x_0)^k - k\mathcal{Q}_{c,s}^{-m}(x)(s-x_0)^{k-1}.
\end{aligned}
$$

此外

$$
\begin{aligned}
D\left((s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}^{-m}(x)(s-x_0)^k\right) &= D\left((s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}^{-m}(x)\right)(s-x_0)^k + (s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}^{-m}(x)D\left((s-x_0)^k\right)\\
&= 2(m-h_n-1)\mathcal{Q}_{c,s}^{-m}(x)(s-x_0)^k - k(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}^{-m}(x)(s-x_0)^{k-1}.
\end{aligned}
$$

□

结合上述结果与恒等式 $D+D=2\,\partial_{x_0}$，可得以下结果:

**引理 3.6**。 设 $n$为奇整数，并令 $h_n = {}^{n-1}_{2}$ 。记 $D$ 为关于变量 $x$的狄拉克算子。对于满足 $s \notin [x]$的 $s$、 $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ ，有

$$
\begin{aligned}
\overline{D}\left((s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}^{-\ell}(x)\right) &= 2(h_n-\ell)\mathcal{Q}_{c,s}^{-\ell}(x) + 4\ell(s-\bar{x})(s-x_0)\mathcal{Q}_{c,s}^{-\ell-1}(x)\\
\overline{D}\left(\mathcal{Q}_{c,s}^{-\ell}(x)\right) &= 2\ell(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}^{-\ell-1}(x)\\
\overline{D}\left((s-x_0)^k\mathcal{Q}_{c,s}^{-\ell}(x)\right) &= -k(s-x_0)^{k-1}\mathcal{Q}_{c,s}^{-\ell}(x) + 2\ell(s-\bar{x})(s-x_0)^k\mathcal{Q}_{c,s}^{-\ell-1}(x)\\
\overline{D}\left((s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}^{-\ell}(x)(s-x_0)^k\right) &= 2(h_n-\ell)\mathcal{Q}_{c,s}^{-\ell}(x)(s-x_0)^k + 4\ell(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}^{-\ell-1}(x)(s-x_0)^{k+1}\\
&\quad - k(s-\bar{x})(s-x_0)^{k-1}\mathcal{Q}_{c,s}^{-\ell}(x)
\end{aligned}
$$

现在，我们已具备所有必要工具，可以证明算子 (3.16) 对左切片超全纯柯西核第二种形式的应用。

**定理 3.7**。 设 $n$ 为固定的奇数，且 $h_n := (n-1)/2$。设 $m$、 $\beta \in \mathbb{N}$ 满足$m+\beta \le h_n$。假设 $s$、 $x \in \mathbb{R}^{n+1}$满足 $s \notin [x]$，并记 $D$和 $\Delta_{n+1}$分别为关于变量 $x$作用的狄拉克算子和拉普拉斯算子。令 $\gamma_m = 4^m m!(-h_n)_m$。若 $\beta = 2k_1+1$，其中 $k_1 \in \mathbb{N}$，则有

$$
\begin{aligned}
D^\beta\left(\Delta_{n+1}^m S_L^{-1}(s,x)\right) = \frac{2^\beta(h_n-m)\gamma_m}{m!}\Bigg((s-\bar{x})\sum_{j=0}^{k_1-1} a_{j,k_1,m}^1\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-j-2-k_1}(x)(s-x_0)^{2j+1}\\
-\sum_{j=0}^{k_1} b_{j,k_1,m}^1\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1-k_1-j}(x)(s-x_0)^{2j}\Bigg),
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

其中

$$
a_{j,k_1,m}^1 := 2^{2j+1}(m+k_1+1+j)!(k_1-j-1)!\binom{k_1+j}{2j+1}\binom{h_n-m-k_1-j-2}{h_n-m-2k_1-1}
$$

*and*

$$
b_{j,k_1,m}^1 := 2^{2j}(k_1-j)!(m+k_1+j)!\binom{h_n-m-k_1-j-1}{h_n-m-2k_1-1}\binom{k_1+j}{2j}
$$

如果 $\beta = 2k_2$，其中 $k_2 \in \mathbb{N}$ 我们有

$$D^{\beta}\left(\Delta_{n+1}^{m} S_L^{-1}(s,x)\right) = \frac{2^{\beta}(h_n - m)\gamma_m}{m!}\left((s-\bar{x})\sum_{j=0}^{k_2-1} a_{j,k_2,m}^{2}\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-j-1-k_2}(x)(s-x_0)^{2j}\right.$$
$$\left. - \sum_{j=0}^{k_2-1} b_{j,k_2,m}^{2}\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1-k_2-j}(x)(s-x_0)^{2j+1}\right), \tag{3.23}$$

其中

$$a_{j,k_2,m}^{2} := 2^{2j}(m+k_2+j)!(k_2-j-1)!\binom{k_2+j-1}{2j}\binom{h_n-m-k_2-1-j}{h_n-m-2k_2}$$

*and*

$$b_{j,k_2,m}^{2} := 2^{2j+1}(k_2-j-1)!(m+k_2+j)!\binom{h_n-m-k_2-1-j}{h_n-m-2k_2}\binom{k_2+j}{2j+1}$$

**注释 3.8.** 我们总结了附录中证明定理 3.7 所需的系数 $a_{j,k_1,m}^{1}$, $b_{j,k_1,m}^{1}$, $a_{j,k_1,m}^{2}$, and$b_{j,k_1,m}^{2}$ 的性质。

证明. 我们通过对 $k_1 \in \mathbb{N}_0$, $k_2 \in \mathbb{N}$ 作双重归纳来证明该定理。首先，分别证明 $\beta = 1$ ($k_1 = 0$) 和 $\beta = 2$ ($k_2 = 1$) 满足公式 (3.22) 和 (3.23)。由 (3.12) 和 (3.18) 可得

$$D\left(\Delta_{n+1}^{m} S_L^{-1}(s,x)\right) = \gamma_m D\left((s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1}(x)\right) = -2\gamma_m(h_n-m)\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1}(x),$$

当 $k_1 = 0$ 时，这就是公式 (3.22)，前提是我们将求和 $\sum_{k=0}^{-1}$ 视为零。此外，由 (3.19) 可得

$$\begin{aligned} D^2\left(\Delta_{n+1}^{m} S_L^{-1}(s,x)\right) &= -2\gamma_m(h_n-m)D\left(\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1}(x)\right) \\ &= -2\gamma_m(h_n-m)\left(4(m+1)\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-2}(x)(s-x_0) - 2(m+1)(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-2}(x)\right) \\ &= 2^2\gamma_m(h_n-m)\left((s-\bar{x})(m+1)\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-2}(x) - 2(m+1)\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-2}(x)(s-x_0)\right), \end{aligned}$$

当 $k_2 = 1$ 时，这就是公式 (3.23)。现在我们证明：若公式 (3.22) 和 (3.23) 分别对 $k_1$ 和 $k_2 = k_1 + 1$ 成立，则公式 (3.22) 对 $k_1 + 1$ 成立。由 (3.12) 和归纳假设可得

$$\begin{aligned} D^{2(k_1+1)+1}\left(\Delta_{n+1}^{m} S_L^{-1}(s,x)\right) &= \gamma_m D\left(D^{2k_2}\left(\Delta_{n+1}^{m} S_L^{-1}(s,x)\right)\right) \\ &= \frac{2^{2k_2}(h_n-m)\gamma_m}{m!} D\left((s-\bar{x})\sum_{j=0}^{k_2-1} a_{j,k_2,m}^{2}\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-j-1-k_2}(x)(s-x_0)^{2j}\right. \\ &\left. - \sum_{j=0}^{k_2-1} b_{j,k_2,m}^{2}\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1-k_2-j}(x)(s-x_0)^{2j+1}\right). \end{aligned}$$

我们 分别对两个求和项应用狄拉克算子。由（3.21）可得 e

$$D\left((s-\bar{x})\sum_{j=0}^{k_2-1} a_{j,k_2,m}^{2}\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-j-1-k_2}(x)(s-x_0)^{2j}\right) \tag{3.24}$$
$$= \sum_{j=0}^{k_2-1} -2a_{j,k_2,m}^{2}(h_n-m-j-k_2)\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-j-1-k_2}(x)(s-x_0)^{2j}$$

$$+(s-\bar{x})\sum_{j=0}^{k_2-2}(-2j-2)a_{j+1,k_2,m}^2\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-j-2-k_2}(x)(s-x_0)^{2j+1}$$

wh在最后一个求和中，我们将 $j-1$ 替换为 $j$，并且由（3.20）还可得 e

$$\begin{aligned}
&D\left(\sum_{j=0}^{k_2-1}b_{j,k_2,m}^2\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1-k_2-j}(x)(s-x_0)^{2j+1}\right)\\
&=\sum_{j=1}^{k_2}4(m+k_2+j)b_{j-1,k_2,m}^2\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1-k_2-j}(x)(s-x_0)^{2j} \qquad (3.25)\\
&-(s-\bar{x})\sum_{j=0}^{k_2-1}2(m+k_2+j+1)b_{j,k_2,m}^2\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-2-k_2-j}(x)(s-x_0)^{2j+1}\\
&-\sum_{j=0}^{k_2-1}(2j+1)b_{j,k_2,m}^2\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1-k_2-j}(x)(s-x_0)^{2j}.
\end{aligned}$$

其中，在（3.25）的第一个求和中，我们将指标 $j+1$ 替换为 $j$。现在，我们用（3.25）减去（3.24），并将所得各项分为两组：一组乘以（$s-\bar{x}$），另一组不乘以（$s-\bar{x}$）。因此，我们得到

$$\begin{aligned}
&\gamma_m D\left(D^{2k_2}\left(\Delta_{n+1}^m S_L^{-1}(s,x)\right)\right)=\\
&=\frac{2^{2k_2}(h_n-m)\gamma_m}{m!}\left((s-\bar{x})\sum_{j=0}^{k_2-2}\left((-2j-2)a_{j+1,k_2,m}^2+2(m+k_2+j+1)b_{j,k_2,m}^2\right)\right.\\
&\times\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-2-k_2-j}(x)(s-x_0)^{2j+1}+(s-\bar{x})2(m+2k_2)b_{k_2-1,k_2,m}^2\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1-2k_2}(x)(s-x_0)^{2k_2-1}\\
&-(2a_{0,k_2,m}^2(h_n-m-k_2)-b_{0,k_2,m}^2)\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1-k_2}(x)\\
&-\sum_{j=1}^{k_2-1}\left[2a_{j,k_2,m}^2(h_n-m-j-k_2)+4(m+k_2+j)b_{j-1,k_2,m}^2-(2j+1)b_{j,k_2,m}^2\right]\\
&\left.\times\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1-k_2-j}(x)(s-x_0)^{2j}-4(m+2k_2)b_{k_2-1,k_2,m}^2\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1-2k_2}(x)(s-x_0)^{2k_2}\right).
\end{aligned}$$

根据（A.2）、（A.3）、（A.4）、（A.5）和（A.6）中给出的系数性质，我们有

$$\begin{aligned}
&\gamma_m D\left(D^{2k_2}\left(\Delta_{n+1}^m S_L^{-1}(s,x)\right)\right)=\\
&=\frac{\gamma_m(h_n-m)2^{2k_2+1}}{m!}\left((s-\bar{x})\sum_{j=0}^{k_2-1}a_{j,k_2,m}^1\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-2-k_2-j}(x)(s-x_0)^{2j+1}\right. \qquad (3.26)\\
&\left.-\sum_{j=0}^{k_2}b_{j,k_2,m}^1\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1-j-k_2}(x)(s-x_0)^{2j}\right).
\end{aligned}$$

现在我们注意到，将（3.22）中的 $k_1$ 替换为 $k_2$，便得到与（3.26）相同的式子。由于 $k_2=k_1+1$，我们已经证明了将（3.22）中的 $k_1$ 替换为 $k_1+1$后所得的结论。因此，（3.22）的归纳步骤得证。
现在我们进行第二步，证明如果公式 (3.22) 对 $k_1+1$ 成立，那么公式 (3.23) 对 $k_2=k_1+2$ 成立。根据归纳假设，结合

公式 (3.12) 以及 $k_1 = k_2 - 1$ 这一事实，我们得到

$$D^{\beta}\left(\Delta_{n+1}^{m} S_L^{-1}(s,x)\right) = \gamma_m D^{2(k_2+1)}((s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1}(x)) = \gamma_m D\left(D^{2k_1+3}((s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1}(x))\right)$$
$$= \frac{2^{2k_1+3}(h_n-m)\gamma_m}{m!} D\left((s-\bar{x})\sum_{j=0}^{k_1} a_{j,k_1+1,m}^{1}\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-j-3-k_1}(x)(s-x_0)^{2j+1}\right.$$
$$\left. - \sum_{j=0}^{k_1+1} b_{j,k_1+1,m}^{1}\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-2-k_1-j}(x)(s-x_0)^{2j}\right).$$

我们分别计算作用于这两个求和项上的狄拉克算子。根据（3.21），可得

$$D\left((s-\bar{x})\sum_{j=0}^{k_1} a_{j,k_1+1,m}^{1}\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-j-3-k_1}(x)(s-x_0)^{2j+1}\right)$$
$$= -\sum_{j=0}^{k_1} 2(h_n-m-k_1-2-j)a_{j,k_1+1,m}^{1}\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-j-3-k_1}(x)(s-x_0)^{2j+1} \tag{3.27}$$
$$-(s-\bar{x})\sum_{j=0}^{k_1}(2j+1)a_{j,k_1+1,m}^{1}\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-j-3-k_1}(x)(s-x_0)^{2j}$$

再次根据（3.20），我们得到

$$D\left(\sum_{j=0}^{k_1+1} b_{j,k_1+1,m}^{1}\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-2-k_1-j}(x)(s-x_0)^{2j}\right)$$
$$= \sum_{j=0}^{k_1+1} 4(m+k_1+j+2)b_{j,k_1+1,m}^{1}\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-3-k_1-j}(x)(s-x_0)^{2j+1} \tag{3.28}$$
$$-(s-\bar{x})\sum_{j=0}^{k_1+1} 2(m+k_1+j+2)b_{j,k_1+1,m}^{1}\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-3-k_1-j}(x)(s-x_0)^{2j}$$
$$\left. -\sum_{j=0}^{k_1} 2(j+1)b_{j+1,k_1+1,m}^{1}\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-3-k_1-j}(x)(s-x_0)^{2j+1}\right).$$

其中，在最后一个求和中，我们用 $j$ 替换了 $j-1$。现在，我们将 (3.27) 和 (3.28) 中的各项相加，并将它们分为两组：乘以 $(s-\bar{x})$ 的项和未乘以 $(s-\bar{x})$ 的项。因此，我们得到

$$\gamma_m D\left(D^{2k_1+3}\left(\Delta_{n+1}^{m} S_L^{-1}(s,x)\right)\right) = \frac{2^{2k_1+3}(h_n-m)}{m!}\left((s-\bar{x})\right.$$
$$\times\sum_{j=0}^{k_1}\left(-(2j+1)a_{j,k_1+1,m}^{1} + 2(m+k_1+j+2)b_{j,k_1+1,m}^{1}\right)\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-3-k_1-j}(x)(s-x_0)^{2j} \tag{3.29}$$
$$+(s-\bar{x})2(m+2k_1+3)b_{k_1+1,k_1+1,m}^{1}\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-2k_1-4}(x)(s-x_0)^{2k_1+2}$$
$$-\sum_{j=0}^{k_1}\left(2(h_n-m-k_1-2-j)a_{j,k_1+1,m}^{1} + 4(m+k_1+j+2)b_{j,k_1+1,m}^{1} - 2(j+1)b_{j+1,k_1+1,m}^{1}\right)$$

$\times \mathcal{Q}_{c,s}^{-m-3-k_1-j}(x)(s-x_0)^{2j+1}$

$-4(m+2k_1+3)b^1_{k_1+1,k_1+1,m}\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-4-2k_1}(s-x_0)^{2k_1+3}$.

根据 (A.7)、(A.8)、(A.9) 和 (A.10) 中给出的系数性质，我们得到

$$\gamma_m D\left(D^{2k_1+3}\left(\Delta_{n+1}^m S_L^{-1}(s,x)\right)\right)=\frac{2^{2k_1+4}\gamma_m(h_n-m)}{m!}\left((s-\bar{x})\sum_{j=0}^{k_1+1}a^2_{j,k_1+2,m}\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-3-k_1-j}(x)\right.$$

$$\left.\times(s-x_0)^{2j}-\sum_{j=0}^{k_1+1}b^2_{j,k_1+2,m}\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-3-k_1-j}(x)(s-x_0)^{2j+1}\right). \tag{3.30}$$

由于 $k_1=k_2-1$，我们观察到，将 $k_2$ 替换为 $k_2+1$ 时，(3.30) 与 (3.23) 相同。因此，(3.23) 的归纳步骤得证。□

**注 3.9.** 若在 (3.22) 中令 $\beta=1$，则得到

$$D(\Delta_{n+1}^m S_L^{-1}(s,x))=2^{2m+1}m!(-h_n)_m\,\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1}(x),$$

这与 (3.10) 中的表达式完全相同。

**注 3.10.** 若在定理 3.7 中考虑 $m=h_m$ 的情形，则可得算子 $D^\beta\Delta_{n+1}^{h_n}$ 的作用结果为零。这与 Fueter-Sce 定理一致，因为函数 $S_L^{-1}(s,\ x)$ 在 $x$ 中是切片超全纯的。

运用与定理 3.7 的证明中类似的论证，可以说明算子 (3.17) 作用于切片超全纯柯西核的第二种形式时的结果。

**定理 3.11**。设 $n$ 为一个固定的奇数，且 $h_n:=(n-1)/2$。设 $m$、$\beta\in\mathbb{N}$ 满足$m+\beta\le h_n$。假设 $s$、$x\in\mathbb{R}^{n+1}$满足 $s\notin[x]$，并将关于变量 $x$作用的共轭 ***Dirac*** 算子和拉普拉斯算子分别记为 $D$和 $\Delta_{n+1}$。若 $\beta=2k_1+1$，其中 $k_1\in\mathbb{N}$，则有

$$\overline{D}^\beta\left(\Delta_{n+1}^m S_L^{-1}(s,x)\right)=2^\beta 4^m(-h_n)_m\left((s-\bar{x})\sum_{j=0}^{k_1}\mathbf{a}^1_{j,k_1,m}\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-j-2-k_1}(x)(s-x_0)^{2j+1}\right.$$

$$\left.+\sum_{j=0}^{k_1}\mathbf{b}^1_{j,k_1,m}\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1-k_1-j}(x)(s-x_0)^{2j}\right), \tag{3.31}$$

其中

$$\mathbf{a}^1_{j,k_1,m}:=2^{2j+1}(m+k_1+1+j)!(k_1-j)!\binom{k_1+j+1}{2j+1}\binom{h_n-m-k_1-j-2}{h_n-m-2k_1-2}$$

*and*

$$\mathbf{b}^1_{j,k_1,m}:=2^{2j}(k_1-j+1)!(m+k_1+j)!\binom{h_n-m-k_1-j-1}{h_n-m-2k_1-2}\binom{k_1+j}{2j}.$$

若 $\beta=2k_2$，其中 $k_2\in\mathbb{N}$，则有

$$\overline{D}^\beta\left(\Delta_{n+1}^m S_L^{-1}(s,x)\right)=2^\beta 4^m(-h_n)_m\left((s-\bar{x})\sum_{j=0}^{k_2}\mathbf{a}^2_{j,k_2,m}\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-j-1-k_2}(x)(s-x_0)^{2j}\right.$$

$$\left.+\sum_{j=0}^{k_2-1}\mathbf{b}^2_{j,k_2,m}\mathcal{Q}_{c,s}^{-m-1-k_2-j}(x)(s-x_0)^{2j+1}\right),$$

其中

$$\mathbf{a}^2_{j,k_2,m} := 2^{2j}(m+k_2+j)!(k_2-j)!\binom{k_2+j}{2j}\binom{h_n-m-k_2-1-j}{h_n-m-2k_2-1}$$

*and*

$$\mathbf{b}^2_{j,k_2,m} := 2^{2j+1}(k_2-j)!(m+k_2+j)!\binom{h_n-m-k_2-1-j}{h_n-m-2k_2-1}\binom{k_2+j}{2j+1}$$

**注 3.12.** 如果 $\beta = h_n - m$，我们便恢复了 (3.14) 中的核。我们先考察 $\beta = h_n - m = 2k_1 + 1$ 的情形。在此情形下，当 $0 \le j < k_1$ 时，系数满足以下方程

$$\mathbf{a}^1_{j,k_1,m} := 2^{2j+1}(m+k_1+1+j)!\binom{k_1+j+1}{2j+1}\prod_{\ell=0}^{k_1-j-1}(h_n-m-2k_1-1+\ell) = 0$$

并且，对于 $0 \le j \le k_1$，系数满足以下方程

$$\mathbf{b}^1_{j,k_1,m} := 2^{2j}(m+k_1+j)!\binom{k_1+j}{2j}\prod_{\ell=0}^{k_1-j}(h_n-m-2k_1-1+\ell) = 0$$

这是因为 $\frac{(h_n-m-k_1-j-2)!\,(h_n-m-2k_1-2)!}{h_n-m-2k_1-2)!} = \prod_{\ell=0}^{k_1-j-1}(h_n-m-2k_1-1+\ell)$，并且 $\frac{(h_n-m-k_1-j-1)!\,(h_n-m-2k_1-2)!}{h_n-m-2k_1-2)!} = \prod_{\ell=0}^{k_1-j}(h_n-m-2k_1-1+\ell)$。由于 $a^1_{k_1,\,k_1,\,m} = 2^{h_n-m}h_n!$，由 (3.31) 可得

$$\begin{aligned}
&\overline{D}^{\beta}\left(\Delta^m_{n+1}S_L^{-1}(s,x)\right) = 2^{h_n-m}4^m(-h_n)_m\left(a_{k_1,k_1,m}(s-\bar{x})\mathcal{Q}^{-m-2k_1-2}_{c,s}(x)\right.\\
&\left.+\sum_{j=1}^{k_1-1}\mathbf{a}^1_{j,k_1,m}\mathcal{Q}^{-m-j-2-k_1}_{c,s}(x)(s-x_0)^{2j+1}+\sum_{j=0}^{k_1}\mathbf{b}^1_{j,k_1,m}\mathcal{Q}^{-m-1-k_1-j}_{c,s}(x)(s-x_0)^{2j}\right)\\
&= 2^{2h_n}h_n!(-h_n)_m(s-\bar{x})(s-x_0)^{h_n-m}\mathcal{Q}^{-1-h_n}_{c,s}(x)\\
&= \frac{(-1)^{h_n-\ell}}{(h_n-\ell)!}F^n_L(s,x)(s-x_0)^{h_n-\ell}.
\end{aligned}$$

当 $\beta = h_n - m = 2k_2$ 为偶数时，可用类似的论证。在这种情况下，对于 $0 \le j < k_2$，系数满足以下方程

$$\mathbf{a}^2_{j,k_2,m} := 2^{2j}(m+k_2+j)!\binom{k_2+j}{2j}\prod_{\ell=0}^{k_2-j-1}(h_n-m-2k_2+\ell) = 0,$$

and

$$\mathbf{b}^2_{j,k_2,m} := 2^{2j+1}(m+k_2+j)!\binom{k_2+j}{2j+1}\prod_{\ell=0}^{k_2-j-1}(h_n-m-2k_2+\ell) = 0,$$

因为 $\frac{(h_n-m-k_2-1-j)!\,(h_n-m-2k_2-1)!}{(h_n-m-2k_2-1)!} = \prod_{\ell=0}^{k_2-j-1}(h_n-m-2k_2+\ell)$，$\frac{(h_n-m-k_2-j-1)!\,(h_n-m-2k_2-1)!}{(h_n-m-2k_2-1)!} = \prod_{\ell=0}^{k_2-j-1}(h_n-m-2k_2+\ell)$ 和 $\mathbf{a}^2_{k_2,\,k_2,\,m} = 2^{h_n-m}h_n!$.

## 4. Concluding remarks

在未来的一篇论文中，我们旨在确定对左切片超全纯函数集合应用算子 $D^{\beta}\Delta^m_{n+1}$ 和 $\overline{D}^{\beta}\Delta^m_{n+1}$ 后可以得到哪些函数空间。换言之，我们希望找出函数空间 $X(U)$ 和 $Y(U)$，使得

$$D^{\beta}\Delta^m_{n+1}\big(\mathcal{SH}_L(U)\big) = X(U), \qquad \overline{D}^{\beta}\Delta^m_{n+1}\big(\mathcal{SH}_L(U)\big) = Y(U).$$

结合定理 3.7、3.11 和 2.10，我们可以得到空间 $X(U)$ 和 $Y(U)$ 中函数的积分表示。基于这些表示以及 $S$-谱理论（见[21]），我们旨在为分量彼此可交换的有界算子建立函数演算。这些函数演算将比 [9] 中研究的多调和与多解析函数演算更加一般。

## Appendix A.

在本附录中，我们介绍系数 $a^1_{j,\,k_1,\,m}$, $b^1_{j,\,k_1,\,m}$, $a^2_{j,\,k_1,\,m}$ 和$b^2_{j,\,k_1,\,m}$的主要性质，这些系数已用于定理 3.7 的证明。下面的斯蒂费尔恒等式将起关键作用：

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}. \tag{A.1}$$

**命题 A.1.** 设 $k_2, m \in \mathbb{N}$。对于 $n$ 为奇数的情形，我们令 $h_n = {}^{n-1}_{2}$。那么有 ——

*(1)*

$$2(m+2k_2)b^2_{k_2-1,k_2,m} = 2a^1_{k_2-1,k_2,m} \tag{A.2}$$

*(2)* 对于 $0 \le j \le k_2 - 2$

$$\big((-2j-2)a^2_{j+1,k_2,m} + 2(m+k_2+j+1)b^2_{j,k_2,m}\big) = 2a^1_{j,k_2,m}, \tag{A.3}$$

*(3)*

$$2a^2_{0,k_2,m}(h_n - m - k_2) - b^2_{0,k_2,m} = 2b^1_{0,k_2,m} \tag{A.4}$$

*(4)*

$$2a^2_{j,k_2,m}(h_n - m - j - k_2) + 4(m+k_2+j)b^2_{j-1,k_2,m} - (2j+1)b^2_{j,k_2,m} = 2b^1_{j,k_2,m} \tag{A.5}$$

*(5)*

$$4(m+2k_2)b^2_{k_2-1,k_2,m} = 2b^1_{k_2,k_2,m}. \tag{A.6}$$

证明。 公式 (A.2) 可直接由系数 $a^1_{k_2-1,\,k_2,\,m}$ 和$b^2_{k_2-1,\,k_2,\,m}$的定义得出。现在我们证明公式 (A.3)。根据关系式：

$$(2j+2)\binom{k_2+j}{2j+1} = (k_2-j-1)\binom{k_2+j}{2j+1}$$

并利用斯蒂费尔恒等式（见 (A.1)），可得

$$\begin{aligned}
&\big((-2j-2)a^2_{j+1,k_2,m} + 2(m+k_2+j+1)b^2_{j,k_2,m}\big) = 2^{2j+2}(m+k_2+j+1)!(k_2-j-2)! \\
&\times \left[-(2j+2)\binom{k_2+j}{2j+2}\binom{h_n-m-k_2-2-j}{h_n-m-2k_2} + (k_2-j-1)\binom{h_n-m-k_2-1-j}{h_n-m-2k_2}\binom{k_2+j}{2j+1}\right] \\
&= 2^{2j+2}(k_2-j-1)!(m+k_2+j+1)!\binom{k_2+j}{2j+1}\binom{h_n-m-k_2-j-2}{h_n-m-2k_2-1} \\
&= 2a^1_{j,k_2,m}.
\end{aligned}$$

For公式 (A.4) 可通过使用系数的定义$a^2_{0,k_2,m}$ 以及$b^2_{0,k_2,m}$ ：

$$\begin{aligned}
2a^2_{0,k_2,m}(h_n - m - k_2) - b^2_{0,k_2,m} &= 2(k_2-1)!(m+k_2)!\binom{h_n-m-k_2-1}{h_n-m-2k_2}(h_n-m-k_2) \\
&\quad - 2k_2!(m+k_2)!\binom{h_n-m-k_2-1}{h_n-m-2k_2} = 2b^1_{0,k_2,m}
\end{aligned}$$

为证明公式 (A.5)，我们使用关系式

$$(h_n-m-k_2-j)\binom{h_n-m-k_2-1-j}{h_n-m-2k_2}=(k_2-j)\binom{h_n-m-k_2-j}{h_n-m-2k_2}$$

以及针对 $\binom{k+j-1}{2j}+\binom{k+j-1}{2j-1}$ 和 $\binom{h_n-m-k_2-j}{h_n-m-2k_2}-\binom{h_n-m-k_2-1-j}{h_n-m-2k_2}$ 各应用两次斯蒂费尔恒等式（见 (A.1)：

$$\begin{aligned}
&2a^2_{j,k_2,m}(h_n-m-j-k_2)+4(m+k_2+j)b^2_{j-1,k_2,m}-(2j+1)b^2_{j,k_2,m}\\
&=2^{2j+1}(k_2-j-1)!(m+k_2+j)!\\
&\times\left[\binom{k_2+j-1}{2j}\binom{h_n-m-k_2-1-j}{h_n-m-2k_2}(h_n-m-j-k_2)\right.\\
&\left.+(k_2-j)\binom{h_n-m-k_2-j}{h_n-m-2k_2}\binom{k_2+j-1}{2j-1}-(2j+1)\binom{h_n-m-k_2-1-j}{h_n-m-2k_2}\binom{k_2+j}{2j+1}\right]\\
&=2^{2j+1}(k_2-j)!(m+k_2+j)!\binom{k_2+j}{2j}\left[\binom{h_n-m-j-k_2}{h_n-m-2k_2}-\binom{h_n-m-k_2-1-j}{h_n-m-2k_2}\right]\\
&=2^{2j+1}(m+k_2+j)!(k_2-j)!\binom{k_2+j}{2j}\binom{h_n-m-k_2-j-1}{h_n-m-2k_2-1}=2b^1_{j,k_2.m}
\end{aligned}$$

最后，根据 $b^2_{k_2-1、\ k_2、\ m}$ 和 $2b^1_{k_2、\ k_2、\ m}$ 的定义，可得公式 (A.6)。 □

**命题 A.2.** 设 $k_1\in\mathbb{N}_0$ 和 $m\in\mathbb{N}$。对于作为奇数的 $n$，令 $h_n=\frac{n-1}{2}$。则有

*(1)* 对于 $0\le j\le k_1$

$$-(2j+1)a^1_{j,k_1+1,m}+2(m+k_1+j+2)b^1_{j,k_1+1,m}=2a^2_{j,k_1+2,m} \tag{A.7}$$

*(2)*

$$2(m+2k_1+3)b^1_{k_1+1,k_1+1,m}=2a^2_{k_1+1,k_1+2,m}. \tag{A.8}$$

*(3)* 对于 $0\le j\le k_1$

$$2(h_n-m-k_1-2-j)a^1_{j,k_1+1,m}+4(m+k_1+j+2)b^1_{j,k_1+1,m}-2(j+1)b^1_{j+1,k_1+1,m}=2b^2_{j,k_1+2,m} \tag{A.9}$$

*(4)*

$$4(m+2k_1+3)b^1_{k_1+1,k_1+1,m}=2b^2_{k_1+1,k_1+2,m} \tag{A.10}$$

证明。我们首先证明 移动公式（A.7）。利用 Stifel 恒等式（见（A.1））以及等式

$$(2j+1)\binom{k_1+1+j}{2j+1}=(k_1+1-j)\binom{k_1+1+j}{2j}$$

我们有

$$\begin{aligned}
&-(2j+1)a^1_{j,k_1+1,m}+2(m+k_1+j+2)b^1_{j,k_1+1,m}=2^{2j+1}(m+k_1+2+j)!(k_1-j)!\\
&\times\left[-(2j+1)\binom{k_1+1+j}{2j+1}\binom{h_n-m-k_1-j-3}{h_n-m-2k_1-3}+\binom{h_n-m-k_1-j-2}{h_n-m-2k_1-3}\right.\\
&\left.\times\binom{k_1+1+j}{2j}(k_1+1-j)\right]\\
&=2^{2j+1}(m+k_1+2+j)!(k_1-j+1)!\binom{k_1+j+1}{2j}\binom{h_n-m-j-3-k_1}{h_n-m-2k_1-4}\\
&=2a^2_{j,k_1+2,m}
\end{aligned}$$

公式 (A.8) 可由使用$b^1_{k_1+1,k_1+1,m}$ amd$a^2_{k_1+1,k_1+2,m}$的定义得到。为证明公式 (A.9)，我们使用以下等式

$$(h_n-m-k_1-2-j)\binom{h_n-m-k_1-3-j}{h_n-m-2k_1-3}=(k-j+1)\binom{h_n-m-k_1-j-2}{h_n-m-2k_1-3}$$

and

$$(2j+2)\binom{k_1+j+2}{2j+2}=(k_1-j+1)\binom{k_1+j+2}{2j+1}$$

以及两次斯蒂费尔恒等式（见 (A.1)：

$$\begin{aligned}
&2(h_n-m-k_1-2-j)a^1_{j,k_1+1,m}+4(m+k_1+j+2)b^1_{j,k_1+1,m}-2(j+1)b^1_{j+1,k_1+1,m}\\
&=2^{2j+2}(m+k_1+2+j)!(k_1-j)!\left[(h_n-m-k_1-2-j)\binom{k_1+1+j}{2j+1}\binom{h_n-m-k_1-3-j}{h_n-m-2k_1-3}\right.\\
&\left.+(k-j+1)\binom{h_n-m-k_1-j-2}{h_n-m-2k_1-3}\binom{k_1+1+j}{2j}-(2j+2)\binom{h_n-m-k_1-j-3}{h_n-m-2k_1-3}\binom{k_1+j+2}{2j+2}\right]\\
&=2^{2j+2}(m+k_1+2+j)!(k-j+1)!\binom{k_1+2+j}{2j+1}\left[\binom{h_n-m-k_1-2-j}{h_n-m-2k_1-3}-\binom{h_n-m-k_1-j-3}{h_n-m-2k_1-3}\right]\\
&=2^{2j+2}(m+k_1+2+j)!(k_1-j+1)!\binom{k_1+2+j}{2j+1}\binom{h_n-m-k_1-3}{h_n-m-2k_1-4}=2b^2_{j,k_1+2,m}
\end{aligned}$$

最后，公式 (A.10) 根据 $b^2_{k_2-1,k_2,m}$ 和 $b^1_{k_2,k_2,m}$的定义得出。 □

## Declarations and statements

**数据可用性**。本文的研究不涉及数据的使用。

**利益冲突**。作者声明不存在利益冲突。

**致谢**。A. De Martino 和 S. Pinton 获得 MUR 卓越系 2023-2027 项目资助。

## References

[1] L.D. Abreu，H.G. Feichtinger，*Function spaces of polyanalytic functions*。《调和分析与复分析及其应用》，第1–38页，数学前沿，Birkh¨auser/施普林格，Cham（2014年）。[2] D. Alpay，F. Colombo，I. Sabadini，*Slice hyperholomorphic Schur analysis*。算子理论：进展与应用第256卷，巴塞尔，Birkh¨auser/施普林格（2016年）。[3] D. Alpay，F. Colombo，I. Sabadini，*Quaternionic de Branges spaces and characteristic operator function*。数学简明丛书，施普林格，Cham（2020年）。[4] N. Aronszain，T.M. Creese，L.J. Lipkin，*Polyharmonic Functions*。克拉伦登出版社（1983年）[5] M.B. Balk，*Polyanalytic functions*。数学研究第63卷。Akademie-Verlag，柏林（1991年）。[6] G. Birkhoff，J. von Neumann，*The logic of quantum mechanics*。数学年刊（第2辑）**37**（4）（1936年）823–843。[7] F. Brackx，R. Delanghe，F. Sommen，*Clifford Analysis*，Pitman数学研究札记，76，1982年。[8] F. Colombo，A. De Martino，I. Sabadini，*Towards a general $F$-resolvent equation and Riesz projectors*。《数学分析与应用杂志》，2，517（2023年），126652。[9] F. Colombo，A. De Martino，S. Pinton，*Functions and operators of the polyharmonic and polyanalytic Clifford fine structures on the $S$-spectrum* 2501 14716 （已提交）（arXiv: . ）[10] F. Colombo，A. De Martino，S. Pinton，I. Sabadini，*Axially harmonic functions and the harmonic functional calculus on the $S$-spectrum* 2, 33 2023 54 。《几何分析杂志》，（），第[11] F. Colombo，A. De Martino，S. Pinton，I. Sabadini，*The fine structure of the spectral theory on the $S$-spectrum in dimension five* 9, 33 2023 73 。《几何分析杂志》，（），第[12] F. Colombo，A. De Martino，I. Sabadini，*The $\mathcal{F}$-resolvent equation and Riesz projectors for the $\mathcal{F}$-functional calculus* 2, 17 2023 42 ，《复分析与算子理论》，（），第[13] F. Colombo，A. De Martino，S. Pintion，I. Sabadini，P. Schlosser，*An Introduction to the Fine Structures on the $S$-spectrum* ¨ 。载于：Faustino, N., Ferreira, M., Kahler, U., Vieira, N.（编）《超复分析及其应用》。ICHAA 2024。数学前沿（），第9卷。Birkh¨auser，Cham。（2025年）。

[14] F. Colombo，D. Deniz Gonz
´ *Fractional powers of vector operators with first order boundary* alez，S. Pinton，。
*conditions* **151**, 18 2020 103618
《几何与物理学杂志》（）。[15] F. Colombo，D. Deniz Gonz
´ *The noncommutative fractional Fourier law in bounded and unbounded* alez，S. Pinton，。
*domains* **15** 7 114, 27 2021
《复分析与算子理论》（），论文编号（）。[16] F. Colombo，J. Gantner，D.P. Kimsey，
*Spectral theory on the S-spectrum for quaternionic operators*。算子理论：进展与应用第270卷，Birkh¨auser/施普林格，Cham，2018年。[17] F. Colombo，J. Gantner，*Formulations of the F-functional calculus and some consequences*，《爱丁堡皇家学会会刊A辑》146（2016年），第3期，509–545。[18] F. Colombo，J. Gantner，*Quaternionic closed operators，fractional powers and fractional diffusion processes*。算子理论：进展与应用274，Birkh¨auser/施普林格，Cham（2019年）viii+322。[19] F. Colombo，M.M. Peloso，S. Pinton，*The structure of the fractional powers of the noncommutative Fourier law*。《数学方法与应用科学》42（18）（2019年）6259–6276。[20] F. Colombo，I. Sabadini，D.C. Struppa，
*Michele Sce's Works in Hypercomplex Analysis. A Translation with* 。Birkhauser/施
*Commentaries* ¨ 2020
普林格巴塞尔股份公司，巴塞尔，。[21] F. Colombo，I. Sabadini，D.C. Struppa，
*Noncommutative functional calculus. Theory and applications of slice* 。数学进展第 卷，
*hyperholomorphic functions* 289 ¨
Birkhauser/施普林格巴塞尔股份公司，巴塞尔（2011年）vi+221 页。[22] F. Colombo，I. Sabadini，D.C. Struppa，
*Entire Slice Regular Functions*，数学简明丛书，施普林格，Cham，2016年。[23] F. Colombo，I. Sabadini，F. Sommen，
*The Fueter mapping theorem in integral form and the $\mathcal{F}$-functional calculus*。《数学方法与应用科学》33（17）（2010年），2050–2066。[24] R. Delanghe，F. Sommen，V. Soucek，
*Clifford algebra and spinor-valued functions. A function theory for the* 。数学及其应用
*Dirac operator* 53
第 卷。Kluwer Academic Publishers Group，多德雷赫特（1992年）。[25] A. De Martino，
*The Fine Structure Theories on the S-Spectrum*。载于：Alpay, D., Sabadini, I., Colombo, F.（编）《算子理论》。施普林格，巴塞尔，doi: 10.1007/978-3-0348-0692-3，（2025年）。[26] A. De Martino，A. Guzm
´ ´ *On the harmonic generalized Cauchy-Kovalevskaya extension and its con-* an Adan，，即
*nection with the Fueter-Sce theorem* 10 1090 9614
将在《美国数学会汇刊》发表，doi: . /tran/ 。[27] A. De Martino，K. Diki，A. Guzm
´ ´ *On the connection between the Fueter mapping theorem and the* an Adan，。
*Generalized CK-extension* 78, 55 2023 35
《数学研究成果》，（），第[28] A. De Martino，K. Diki，A. Guzm´an Ad´an，
*The Fueter-Sce mapping and the Clifford-Appell polynomials*。《爱丁堡数学学会会刊》，3，66（2023年），642–688。[29] A. De Martino，S. Pinton，*A polyanalytic functional calculus of order 2 on the S-spectrum*。《美国数学会会刊》151（2023年）2471–2488。[30] A. De Martino，S. Pinton，*Properties of a polyanalytic functional calculus on the S-spectrum*。《数学新闻》296（2023年）5190–5226。[31] N. Dunford，J. Schwartz，*Linear operators，part I: general theory*，J. Wiley and Sons，1988年。[32] R. Fueter，*Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta\Delta u = 0$ mit vier reellen Variablen.*《海尔维第数学评论》，7（1）：307–330，1934年。[33] K. G¨urlebeck，K. Habetha，W. Spr¨ossig，
*Holomorphic functions in the plane and n-dimensional space*。Birkh¨auser出版社，巴塞尔，2008年。[34] B. Jefferies，
*Spectral properties of noncommuting operators*。数学讲义第1843卷。施普林格出版社，柏林（2004年）。[35] B. Jefferies，A. McIntosh，J. Picton-Warlow，*The monogenic functional calculus*。《数学研究》136（1999年）99–119。[36] G. Laville，I. Ramadanoff，*Holomorphic Cliffordian functions*。《克利福德代数应用进展》8（1998年）323–340。[37] G. Laville，E. Lehman，*Analytic Cliffordian functions*。《芬兰科学院数学年刊》29（2004年）251–268。[38] N.I. Muskhelishvili，
*Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*。Noordhoff International Publishing，莱顿，英文版。基本方程、平面弹性理论、扭转与弯曲，由J. R. M. Radok从经修订和增补的俄文第四版译出（1977年）。[39] T. Qian，
*Generalization of Fueter's result to* $\mathbb{R}^{n+1}$。《林琴国家科学院物理、数学与自然科学类汇刊》（第9辑）数学应用版8（2）（1997年）111–117。[40] T. Qian，P. Li，*Singular integrals and Fourier theory on Lipschitz boundaries*。北京科学出版社，北京；施普林格，新加坡（2019年）xv+306 页。[41] M. Sce，*Osservazioni sulle serie di potenze nei moduli quadratici*。《林琴国家科学院物理、数学与自然科学类汇刊》23（8）（1957年）220–225。

(ADM) Politecnico di Milano, Dipartimento di Matematica, Via E. Bonardi, 9, 20133 Milano, Italy
*Email address*: antonino.demartino@polimi.it(SP) Politecnico di Milano, Dipartimento di Matematica, Via E. Bonardi, 9, 20133 Milano, Italy*Email address*: stefano.pinton@polimi.it