图能量作为网络中社区可检测性的度量

Lucas Böttcher，[1, 2, *] Mason A. Porter，[3, 4, 5, †] 和 Santo Fortunato[6, ‡]1计算科学与哲学系，法兰克福金融管理学院，*60322* 美因河畔法兰克福，德国2医学系，佛罗里达大学，盖恩斯维尔，佛罗里达州 *32610*，美利坚合众国3数学系，加利福尼亚大学洛杉矶分校，加利福尼亚州洛杉矶，*90095*，美利坚合众国4社会学系，加利福尼亚大学洛杉矶分校，加利福尼亚州洛杉矶，*90095*，美利坚合众国5圣菲研究所，圣菲，新墨西哥州 *87501*，美利坚合众国6复杂网络与系统研究中心（*CNetS*），印第安纳大学，布卢明顿，印第安纳州，美国

（2026年1月9日）

arXiv:2601.05065v1 [cs.SI] 8 Jan 2026

网络科学中的一项关键挑战是社区检测。社区是网络中一组节点，它们内部连接紧密，而与网络其余部分的连接稀疏。社区检测中的一项基本成果是：由植入划分模型（PPM）生成的稀疏图存在一个非平凡的社区可检测性阈值。低于这一所谓的“可检测性极限”，任何社区检测方法的表现都无法胜过随机机会。由于与社区检测相关的特征向量所对应的特征值可能被谱主体吸收，谱方法在达到这一可检测性极限之前就会失效。采用非回溯矩阵等特殊矩阵可以绕过可检测性问题，但这需要考虑更高维的矩阵。本文表明，即便仅使用底层网络的邻接矩阵，PPM 与 Erdős–Rényi（ER）网络之间的图能量差异也会在可检测性阈值处呈现明确的转变。图能量基于邻接矩阵的完整谱，因此我们的结果表明，标准图矩阵仍然能够区分社区可检测与不可检测的参数区域。

引言

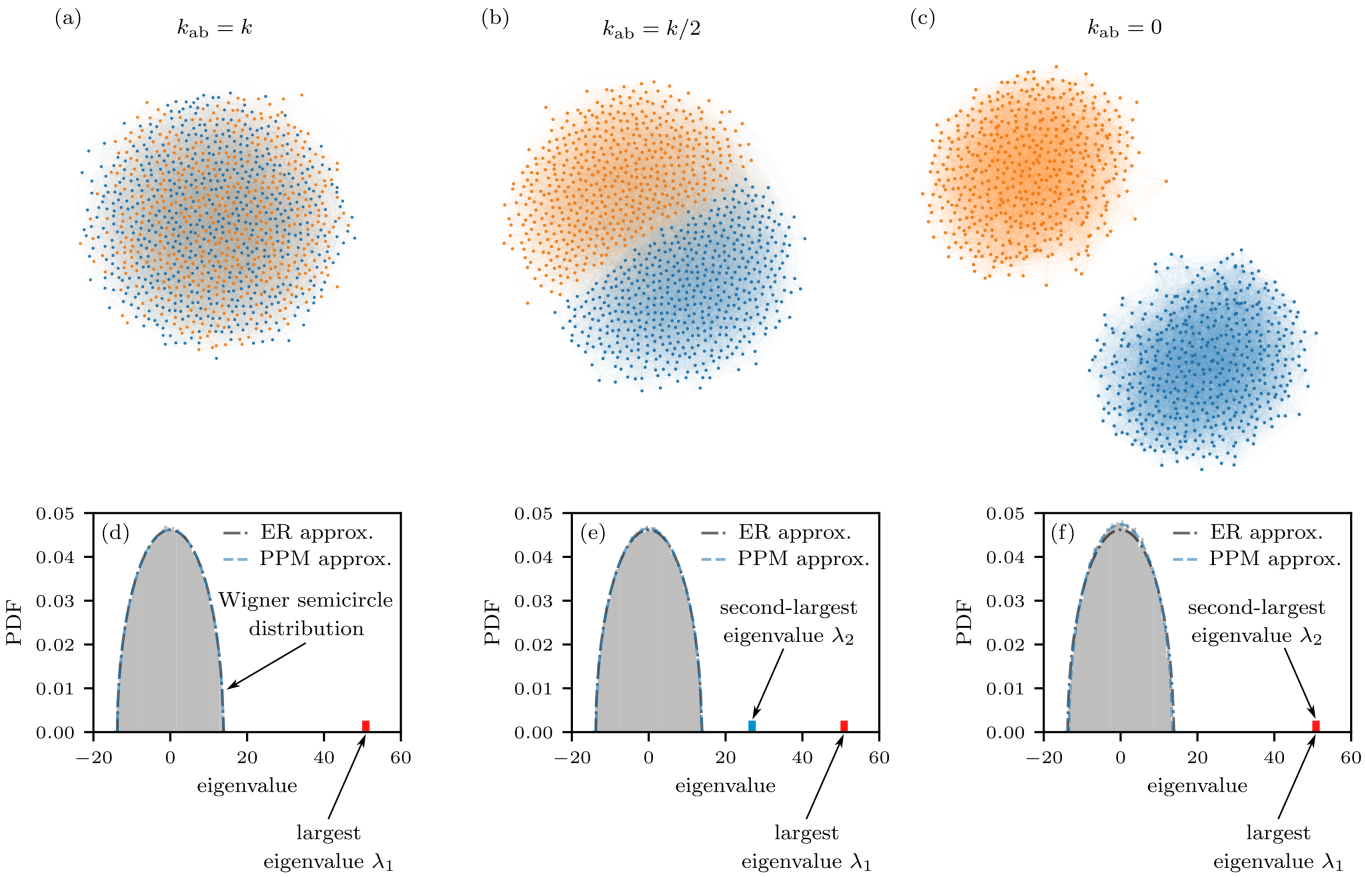
在图（即网络[1]）中检测社区是网络分析中的一项关键任务 [1–6]。传统上，人们将网络中的社区视为一组节点，这些节点在组内的联系比组间联系更紧密。这种直觉通常意味着，社区内部的边密度高于社区之间的边密度。例如，人们通常认为，强烈的社会纽带存在于家庭成员、朋友和密切熟人之间，而彼此几乎不认识的人之间的社会互动则较为零散 [7]。

研究人员通常会在由一类模型生成的人工网络上测试社区检测算法，例如随机块模型（SBMs）及其推广形式 [5, 8–14]。这些算法基于一个简单原理：两个节点彼此相邻的概率完全取决于它们所属的社区。对于无向网络，具有 q 组节点的随机块模型通常有 $q(q+1)/2$ 个参数，用于编码每对社区之间以及每个社区内部的边概率（对于度修正随机块模型 [15]，则为类似概率的倾向）。在测试社区检测算法时，研究人员最常使用植入划分模型（PPM）来创建人工网络；这是一种简单的随机块模型 [16, 17]。在传统的植入划分模型中，有 $q = 2$ 个大小相等的社区，包含两个参数：社区内部边的概率 p_{aa} 和社区之间边的概率 p_{ab}。原则上，只要 $p_{\mathrm{aa}} > p_{\mathrm{ab}}$，就可以预期能够检测出网络中的社区，因为社区内部和社区之间的边密度存在有利的差异。如果网络是稠密的（即其平均度随网络规模$N \to \infty$而发散），情况确实如此。然而，大多数关注的网络都是稀疏网络 [18],，其平均度 k 在 $N \to \infty$时保持有限。对于由植入划分模型生成的稀疏网络，当

$$k_{\mathrm{aa}} - k_{\mathrm{ab}} > q\sqrt{k}\,, \tag{1}$$

* l.boettcher@fs.de
† mason@math.ucla.edu
‡ santo@iu.edu

[1] 图之外还有更广义的网络类型。不过，为求简便，我们将“网络”和“图”视为同义词。



$$E(G; k_{ab} = k) > E(G; k_{ab} = k/2) > E(G; k_{ab} = 0)$$

图1. 使用植入划分模型（PPM）生成的网络在不同社区间度下的结构和谱性质。在(a)–(c)中，我们展示了具有 $N = 1000$ 个节点、平均度为 $k = 50$且由两个大小相等的社区（橙色和蓝色）组成的网络，其社区间度参数 k_{ab}取值各不相同。我们考察了(a)较高的社区间连通性（$k_{ab} = k$）、(b)中等的社区间连通性（$k_{ab} = k/2$）以及(c)没有社区间边（$k_{ab} = 0$）的情况。在(d)–(f)中，我们展示了PPM的100次实现所生成网络的邻接矩阵对应特征值分布的均值。点划黑线和虚蓝线分别表示平均度为 $k = 50$ 且有 $N = 1000$ 个节点的ER网络，以及具有两个大小相等的社区且平均度和网络规模相同的相应PPM网络的维格纳近似。随着 k_{ab}减小，第二大特征值（蓝色）与谱主体的分离愈发明显，并向最大特征值（红色）靠近，表明社区结构更强。（为便于观察，我们调整了代表最大和第二大特征值的柱条尺寸。）当 $k_{ab} = 0$时，PPM网络由两个不相交社区组成，二者的最大特征值平均而言相同。随着k_{ab}减小，图能量也随之降低。也就是说，$E(G; k_{ab} = k) > E(G; k_{ab} = k/2) > E(G; k_{ab} = 0)$。

其中 $k_{aa} = (N-2)p_{aa}$ 且 $k_{ab} = Np_{ab}$ [19–21]。数值 $q\sqrt{k}$ 是 理论可检测性阈值。若算法要比随机机会更成功地识别网络中种植的社区，k_{aa} 与 k_{ab}之间必须存在有限差距。相比之下，如果 $0 \leq k_{aa} - k_{ab} \leq q\sqrt{k}$，那么从信息论角度来看，网络与 Erdős–Rényi（ER）网络无法区分，因此没有任何方法能比随机机会更好地找到种植的社区 [22]。即使条件（1）得到满足，计算约束仍可能限制可检测性 [5]。

谱算法利用网络矩阵（例如邻接矩阵、拉普拉斯矩阵和模块度矩阵）的特征向量，只要网络不太稀疏，就能够在不等式（1）所示的非平凡可检测性极限处及其以上检测 PPM 网络中的社区 [23]。然而，如果 PPM 网络的平均度较低，这些算法可能难以成功检测社区，因为主导特征向量可能不会局限于这些社区（即，对应于同一社区中节点的特征向量分量可能彼此并不相似），因此无法帮助揭示这些社区。因此，对于稀疏网络，基于标准矩阵的谱聚类会使不可检测相超出（1）中的起始点，并且

因此，在一系列 k_{aa} 和 k_{ab} 取值下，这类算法无法识别社区，尽管此时本应能够检测到它们。然而，某些特殊的（高维）矩阵，例如非回溯矩阵（有关该矩阵及相关非回溯矩阵的谱性质，参见文献 [24] ），不存在这个问题。利用这类矩阵的特征向量，即使对于稀疏网络，也能将社区检测效果提升至优于随机机会，一直达到可检测性极限 [25]。

大量研究以这些基础为出发点，取得了许多理论进展，并以严格的数学方法证实了各种可检测性结果 [22]。从数学角度来看，可检测性阈值是 Kesten–Stigum（KS）阈值的一个实例 [26], ，目前已有丰富且活跃的数学研究探讨此类可检测性阈值。参见文献 [21, 27–30] 及其中引用的文献。

受文献 [19, 20, 23, 25]等研究成果的启发，人们普遍认识到，当网络稀疏时，标准矩阵（例如邻接矩阵）无法识别可检测性转变 [22]。本文利用图能量 [31–33]，提供了反驳这一观点的数值和理论证据

$$E(G)=\sum_{i=1}^{N}|\lambda_i|\,, \tag{2}$$

其中 λ_i 表示图 G的邻接矩阵的第 i个特征值 G。[2,3] 我们按照特征值绝对值的降序排列。方程（ $|\lambda_i|$ 2）中的 [36]之和也可以解释为邻接矩阵偶数次幂的迹的加权和，这意味着图能量完全由网络中的偶长度闭合游走决定 [36]。

图能量最初是赫克尔分子轨道理论中总 π电子能量的一种推广。该理论是一种紧束缚近似，将分子表示为网络 [31, 33]。此后，关于图能量数学性质的研究层出不穷 [37]。除了考察极端特征值，人们也日益关注图能量等谱测度，以分析网络的结构和动力学性质。其动机之一是发现非极端特征值也能携带相关的结构信息 [38–41]。图能量是衡量网络谱性质的一种通用指标 [42], ，已被用于分析分子结构 [43], 、刻画基因调控网络 [44], ，以及量化网络上简单疾病传播过程中的平均场近似准确性 [45]。此外，研究人员还通过比较有无特定节点时图能量的差异来测量节点中心性（即重要性） [46], ，推导了有向随机图图能量的解析结果 [47], ，并分析了具有复数边权的网络的性质 [48]。

PPM 网络的谱性质与图能量

设 G 表示一个由 PPM 生成的图，该图有 N 个节点和两个大小相等的社区 a 和 b。该网络的平均度为 $k=(k_{\mathrm{aa}}+k_{\mathrm{ab}})/2$。我们还定义了 $p=(p_{\mathrm{aa}}+p_{\mathrm{ab}})/2$。在补充材料中，我们会进一步介绍这些定义。

对于具有 $q=2$ 个社　　区的网络，当规模趋于无穷大 N 时，社区结构将变得不可检测，条件是

$$k_{\mathrm{aa}}-k_{\mathrm{ab}}<2\sqrt{k}\,. \tag{3}$$

在图1中，我们展示了改变社区间连通性所产生的结构和谱效应。在图1(a)–(c)中，我们展示了具有 $N=1000$ 个节点、平均度为 $k=50$且包含两个大小相同的社区的网络，其社区间度参数分别为：(a) $k_{\mathrm{ab}}=k$，(b) $k_{\mathrm{ab}}=k/2$和 (c) $k_{\mathrm{ab}}=0$。随着 k_{ab}减小，社区之间的分离变得更加明显。在图1(d)–(f)中，我们展示了这类 PPM 网络的 100 次实现所对应的邻接矩阵特征值分布的均值。对于所有考察的社区间连通性，谱主体均呈现出维格纳半圆分布 [49, 50]。当社区间连通性较高（即社区间度参数 k_{ab} 较大）时，谱主体之外还存在一个主导特征值 [，在图1(d)]中以红色表示。第二大特征值位于谱主体内，表明不存在社区结构。随着社区间连通性降低，第二大特征值（蓝色）开始与谱主体分离 [，见图1(e)], ，这表明存在社区结构。在完全断开的

[2] 尽管“图能量”一词最常指式（2）中的量，但这个术语也被用于表示节点度的某个特定函数之和 [34]。 [3] 也可以将图能量视为 Schatten 1-范数（即核范数或迹范数），它等于矩阵奇异值之和。对于实对称矩阵（例如无向图的邻接矩阵），这些奇异值就是其特征值的绝对值 [35]。

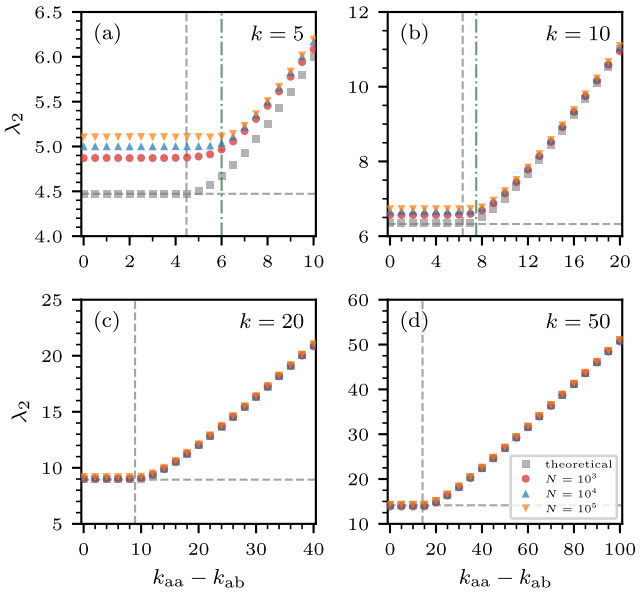


图 2. 邻接矩阵的第二大特征值 λ_2 随社区内度与社区间度参数之差 $k_{aa} - k_{ab}$ 的变化。每个面板展示了网络中不同平均度 $k \in \{5, 10, 20, 50\}$ 对应的结果，节点数为 $N \in \{10^3, 10^4, 10^5\}$。灰色标记表示我们的理论预测，彩色标记表示模拟结果。理论预测假设在理论可检测性阈值处及以下，第二大特征值等于 $2\sqrt{k}$。对于稀疏网络，这一假设不再成立。竖直虚线表示理论可检测性阈值，水平虚线表示可检测性阈值以下 λ_2 的取值。两个值均等于 $2\sqrt{k}$。(a) 和 (b) 面板中的竖直点划线标记有效可检测性阈值；低于此阈值时，λ_2 被谱主体吸收。误差条比标记更小。

情形下（即 $k_{ab} = 0$），两个不相交社区的主导特征值在平均意义上相同，这一点可以从图1(f)中的谱看出。

这些观察结果也与（3）中的理论可检测性阈值有关。当 $k_{aa} - k_{ab} < 2\sqrt{k}$ 时，第二大特征值仍处于分布的谱主体中，因此对于 $N \to \infty$，社区结构不可检测。在图 1 中，我们展示了超过这一阈值如何导致谱分离，进而使社区结构变得可检测。我们很快将证明，图能量（2）会随着社区间连通性的降低而降低。也就是说，$E(G;\ k_{ab} = k) > E(G;\ k_{ab} = k/2) > E(G;\ k_{ab} = 0)$。具体而言，我们将证明，ER 与 PPM 的图能量之差会在理论可检测性阈值处发生转变，从而能够区分可检测相与不可检测相。

利用维格纳近似 [37, 51, 52] 描述谱主体，并结合关于邻接矩阵主特征值的结果 [23],，对于较大的 N（即，当 $N \to \infty$ 时）和 $k_{aa} - k_{ab} > 2\sqrt{k}$，图能量为

$$E(G; k_{ab}) \sim N^{3/2} \frac{8}{3\pi} \sqrt{\sigma^2_{p_{aa}, p_{ab}}} + k + 1 + \frac{1}{2}(k_{aa} - k_{ab}) + \frac{k_{aa} + k_{ab}}{k_{aa} - k_{ab}}, \tag{4}$$

其中，$\sigma^2_{p_{aa},\ p_{ab}} = p_{aa}(1 - p_{aa})/2 + p_{ab}(1 - p_{ab})/2$ 是邻接矩阵非对角元的方差，$\lambda_1 = k + 1$ 是最大特征值（即绝对值最大的特征值），而 $\lambda_2 = (k_{aa} - k_{ab})/2 + (k_{aa} + k_{ab})/(k_{aa} - k_{ab})$是绝对值第二大的特征值。更多详情请参见补充材料。

在我们的模拟中，图能量在低于理论可检测性阈值时趋于平台。因此，在理论分析中，我们将不可检测区间内的图能量设为与阈值处相等（3）。也就是说，$E(G;\ k_{ab}) = E(G;\ k_{ab} = k_{aa} - 2\sqrt{k})$ 对于 $k_{aa} - k_{ab} \le 2\sqrt{k}$。

第二大特征值转变与有效谱可检测性极限

为了说明我们对图能量的分析，我们绘制了邻接矩阵的第二大特征值 λ_2，以网络中社区内与社区间度参数之差 $k_{aa} - k_{ab}$ 为函数

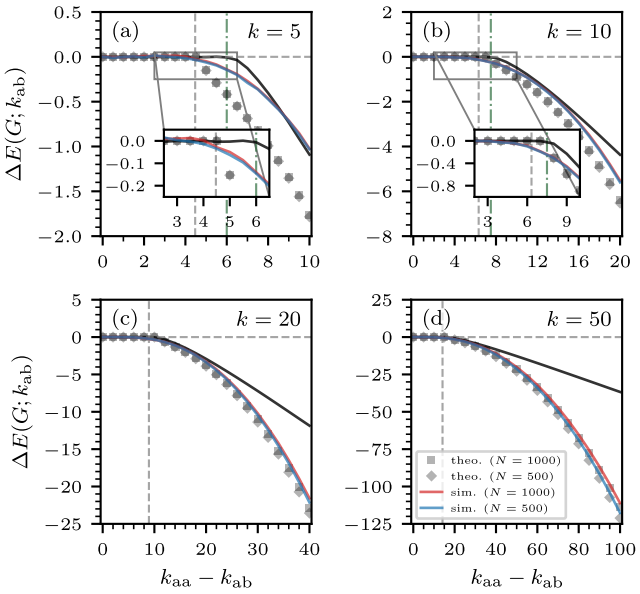


图 3. 对于规模相同 N 且平均度相同 k 的图，PPM 图能量 $E(G;\, k_{ab})$ 与 ER 图能量 $E(G;\, k_{ab} = k)$ 之间的图能量差 $\Delta E(G;\, k_{ab}) := E(G;\, k_{ab}) - E(G;\, k_{ab} = k)$。每个面板展示不同平均度 $k \in \{5, 10, 20, 50\}$ 的图的结果，这些图包含 $N \in \{500, 1000\}$ 个节点。灰色标记表示我们的理论预测，彩色曲线表示模拟结果。灰色虚线表示理论可检测性阈值 $2\sqrt{k}$，黑色实线曲线表示平移后的负第二大特征值，该值是针对包含 $N = 10^5$ 个节点的 PPM 计算得到的。具体而言，每条黑色曲线都是 $-(\lambda_2(k_{aa} - k_{ab}) - \lambda_2(0))$ 的图像；当 $k_{aa} - k_{ab} = 0$ 时，该值等于 0。面板 (a) 和 (b) 中的竖直点划线标示有效可检测性阈值；低于该阈值时，λ_2 会被谱主体吸收。请注意，低于可检测性阈值时，$\Delta E(G; k_{ab}) \approx 0$，并且随着社区结构变得更加明显（即随着 $k_{aa} - k_{ab}$ 增大），它会减小。误差条小于线宽。

规模 $N \in \{10^3, 10^4, 10^5\}$ 和平均度 $k \in \{5, 10, 20, 50\}$ 下的情况（见图 2）。我们的理论预测基于以下假设：在理论可检测性阈值及其以下，第二大特征值等于 $2\sqrt{k}$；否则，则由式（13）给出（见补充材料）。然而，对于稀疏网络，这一假设并不成立 [见图 2(a,b)]。在所考察的最稀疏情形（$k = 5$）中，随着网络规模 N 增大，λ_2 的平台区间延伸到了理论可检测性阈值之外。这是因为第二大特征值被谱主体吸收，其对应的特征向量因而不再与网络的预设社区结构相关。因此，基于邻接矩阵第二大特征值确定的这一有效可检测性阈值高于理论可检测性阈值。此外，在 $k_{aa} - k_{ab}$ 的一段取值范围内（约从 4.5 到约 6），这种现有方法无法比随机机会更好地检测社区，而其他方法则可以 [19, 20, 25]。

图能量转变与理论谱可检测性极限

正如我们在补充材料中所展示的，研究社区可检测性时，一个有用的量是 $\Delta E(G; k_{ab}) := E(G;\, k_{ab}) - E(G;\, k_{ab} = k)$，它表示对于规模相同 N 且平均度相同 k的图，PPM 网络图能量 $E(G; k_{ab})$ 与 ER 网络图能量 $E(G;\, k_{ab} = k)$ 之差。基于对谱主体的维格纳近似，我们在补充材料中证明，$\Delta E(G; k_{ab})$ 同时取决于第二大特征值λ_2 以及一个与 $(k_{aa} - k_{ab})^2$ 成正比的谱主体方差修正项。

我们利用解析结果和模拟数据，研究 PPM 和 ER网络的邻接矩阵的 $\Delta E(G; k_{ab})$。模拟数据是通过借助配备 JAX 和 PyTorch 的图形处理器（GPU）生成的。在计算中，我们利用 GPU 加速的线性代数与张量计算能力（见补充材料）；这很重要，因为计算一个 $N \times N$ 矩阵的完整谱，其运行时间复杂度为$\mathcal{O}(N^3)$。此外，将所有 N 特征值的绝对值求和来估算图能量，需要对大量网络实例取平均，才能得到稳定的估计，因为各特征值的样本间变异性会在求和过程中累积。我们考虑网络规模为 $N \in \{500, 1000\}$、平均度为 $k \in \{5, 10, 20, 50\}$，且 $k_{ab} \in \{1, \ldots, k\}$取不同值的网络。对应的取值为 k_{aa} $2k - k_{ab}$。

在图 3 中，我们展示了图能量差 $\Delta E(G;\, k_{\mathrm{ab}})$ 随 $k_{\mathrm{aa}} - k_{\mathrm{ab}}$ 变化的情况。我们观察到，在理论可检测性阈值以下，$\Delta E(G;\, k_{\mathrm{ab}}) \approx 0$，因此在该阈值以下，PPM 和 ER网络的谱实际上无法区分。在理论可检测性阈值以上，随着社区结构变得更加明显（即随着 $k_{\mathrm{aa}} - k_{\mathrm{ab}}$ 增大），$\Delta E(G; k_{\mathrm{ab}})$ 逐渐减小。更重要的是，图能量曲线显示，经过初始的平台期后，曲线平滑下降，且这一变化似乎始于理论可检测性阈值。相比之下，只有在稀疏区间接近有效阈值时，λ_2 中的转变才明显（见图 3 中的黑色实线）。尽管维格纳半圆定律不再成立，$N = 500$ 与 $N = 1000$ 的衰减模式近似重合，这表明图能量差与网络规模无关这一性质 [见式（21）] 延伸到了稀疏区间，因此观察到的模式很可能代表其渐近行为。

尽管我们的理论预测（见图 2 和 3中的灰色标记）与平均度为 $k \in \{20{,}50\}$时的模拟结果吻合良好，但在稀疏网络中会出现明显偏差，尤其是在 $k = 5$时。对于如此小的 k值，作为我们解析近似基础的 Wigner 半圆律不再成立，因此解析结果与模拟结果之间存在差异。正如文献 [53], 所指出的，在稀疏网络中，邻接矩阵的特征值分布会严重变形。具体而言，稀疏网络的邻接矩阵谱通常在 0 特征值处有一个显著峰值，同时还存在与树状子图相关的狄拉克δ函数峰。其他涉及相关随机矩阵的模型中也会出现类似行为 [54–58]。

结论

我们的分析表明，图能量——更具体地说，PPM 图能量与 ER 图能量之差——似乎能够识别 PPM 网络中的可检测性转变。因此，网络的邻接矩阵对可检测性转变 很敏感，至少在考察完整的特征值谱时是如此。

这一结果并不意味着，使用邻接矩阵的谱聚类在达到理论可检测性阈值之前能够比随机机会更好地识别社区。不过，这表明与谱主体特征值对应的特征向量可能有助于社区检测 [38–40]。探索这类特征向量在社区检测中的潜力，是一个值得期待的未来研究方向。

我们工作的一个重要局限是，由于计算图能量的计算量很大（需要计算$\mathcal{O}(N^3)$个] ），而图能量取决于邻接矩阵的整个谱，因此我们的分析仅限于规模相对较小的网络（最多$N = 1000$ 个节点） [。尽管我们发现的规律似乎已经相当清晰，但仍有必要对更大规模的网络进行计算，以全面了解图能量和可检测性极限。

我们还可以从许多方向拓展本研究。例如，针对大型网络开发定制化的近似方案，以近似图能量及相关谱测度，将具有重要价值。一种可能性是利用图能量即邻接矩阵的 Schatten 1-范数这一事实，并以现有的 Schatten 1-范数近似算法为基础 [59]。另一个方向是，针对具有已知谱密度的其他随机图模型推导图能量的解析近似（例如，借鉴参考文献 [60, 61] 中的思路），或者采用 Stieltjes变换方法来改进我们对图能量的近似 [62]。

附录

双社区 *PPM* 网络的定义

为说明我们对具有两个等规模社区的 PPM 网络中 $p_{\mathrm{aa}} = k_{\mathrm{aa}}/(N-2)$ 和 $p_{\mathrm{ab}} = k_{\mathrm{ab}}/N$ 的定义，我们明确计算了两种极限情形下的平均度 k：(i) $p_{\mathrm{aa}} = 0$，$p_{\mathrm{ab}} > 0$；以及 (ii) $p_{\mathrm{aa}} > 0$，$p_{\mathrm{ab}} = 0$。

在第一种极限情形中，网络中只有社区间边，此时边的期望数量为

$$p_{\mathrm{ab}} \left(\frac{N}{2}\right)^2 = \frac{k_{\mathrm{ab}} N}{4}\,. \tag{5}$$

每条无向边对网络的总度贡献 2，因此所有节点的社区间度总和为 $k_{\mathrm{ab}}N/2$。将社区间度总和除以网络规模（即节点数）N，即可得到平均度

$$k = \frac{k_{\mathrm{ab}}}{2}\,. \tag{6}$$

这一计算表明，我们对平均度 $k = (k_{\mathrm{aa}} + k_{\mathrm{ab}})/2$ 的定义与定义$p_{\mathrm{ab}} = k_{\mathrm{ab}}/N$（或等价地，$k_{\mathrm{ab}} = Np_{\mathrm{ab}}$）一致，其中 $p_{\mathrm{aa}} = 0$ 且 $p_{\mathrm{ab}} > 0$。

在第二种极限情形中，网络仅包含社区内边，平均度 k 仅基于社区内连接。一个社区内的预期边数为

$$p_{\mathrm{aa}} \binom{N/2}{2} = p_{\mathrm{aa}} \frac{N}{2}\left(\frac{N}{2} - 1\right)/2\,. \tag{7}$$

代入 $p_{\mathrm{aa}} = k_{\mathrm{aa}}/(N-2) = k_{\mathrm{aa}}/[2(N/2-1)]$ 到方程（7）中，得到

$$\frac{k_{\mathrm{aa}}}{N-2}\frac{N}{2}\left(\frac{N}{2} - 1\right)/2 = \frac{k_{\mathrm{aa}} N}{8}\,. \tag{8}$$

两个社区的贡献相同，因此社区内边的总数为 $2(k_{\mathrm{aa}}N)/8 = k_{\mathrm{aa}}N/4$。每条无向边对网络的总度贡献 2，因此社区内总度为 $2k_{\mathrm{aa}}N/4 = k_{\mathrm{aa}}N/2$。将社区内总度除以网络规模 N，得到平均度

$$k = \frac{k_{\mathrm{aa}}}{2}\,. \tag{9}$$

此表达式与我们的定义 $k = (k_{\mathrm{aa}} + k_{\mathrm{ab}})/2$一致，其中在此情形下 $k_{\mathrm{ab}} = 0$。其他研究人员 [23] 已在极限 $N \to \infty$下研究了 $p_{\mathrm{aa}} = k_{\mathrm{aa}}/N$。

双社区 *PPM* 网络的图能量

我们补充说明了推导渐近表达式（4）的细节，该表达式表示极限 $E(G; k_{\mathrm{ab}})$ 下具有两个等规模社区的 PPM 网络的图能量 $N \to \infty$，其中 $k_{\mathrm{aa}} - k_{\mathrm{ab}} > 2\sqrt{k}$。

我们的出发点是 Wigner 矩阵的经典理论 [37, 51, 52]。Wigner 矩阵 $X_N \in \mathbb{R}^{N\times N}$ 是一个实对称随机矩阵，其元素为 x_{ij}，其中 $i,\ j \in \{1, \ldots\ldots, N\}$，并满足以下性质：

- 元素 x_{ij} 相互独立（对称位置上的元素除外），且都是均值为零的随机变量，并且 $x_{ij} = x_{ji}$。
- 对角元素 x_{ii} 取自分布 F_1，而非对角元素 x_{ij}（其中 $i \neq j$）取自分布 F_2。
- 分布 F_2 具有有限方差 $\sigma_2^2 < \infty$。

在极限 $N \to \infty$ 下，$X_N/\sqrt{N}$ 的经验谱分布几乎必然收敛到 Wigner 半圆律

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_2^2}\sqrt{4\sigma_2^2 - x^2}\,\mathbb{1}_{|x|<2\sigma_2}\,, \tag{10}$$

其中， $\phi(x)$ 表示 $X_N/\sqrt{N}$ 的极限特征值密度，而 $\mathbb{1}_S$ 表示集合 S上的示性函数。

对于 $G(N,\ p)$ ER网络，邻接矩阵是一个非中心化 Wigner 矩阵，其中 F_1 是取值为 0 的点质量分布（即，对于 $x<0$， $F_1(x)=0$；对于 $x\geq 0$， $F_1(x)=1$），而 F_2 是成功概率为 p 的伯努利分布。非对角元素的方差为 $\sigma_2^2=p(1-p)$。

利用主体谱的半圆近似并对 $|x|\phi(x)$积分，可得图能量

$$E[G(N,p)]\sim \underbrace{N^{3/2}\frac{8}{3\pi}\sqrt{p(1-p)}}_{\text{bulk}}+\underbrace{k+1}_{\lambda_1} \tag{11}$$

在渐近极限下 $N\to\infty$。式（11）中的第一项来自将主体特征值之和近似为 $\sum_{i\neq 1}|\lambda_i|\sim N^{3/2}\int_{-\infty}^{\infty}|x|\phi\ (x)\ \mathrm{d}x$，其中使用了式（10）。式（11）中的另外两项对应于主导特征值$\lambda_1=pN+1=k+1$，它位于半圆主体谱之外 [23]。更详细的推导见参考文献 [37, 63]，其中包括基于 Ky Fan 定理的下界和上界 [64]。

对于正文中的双社区 PPM，与社区内边和社区间边相关的方差为

$$\sigma^2_{p_{\mathrm{aa}},p_{\mathrm{ab}}}=\frac{1}{2}p_{\mathrm{aa}}(1-p_{\mathrm{aa}})+\frac{1}{2}p_{\mathrm{ab}}(1-p_{\mathrm{ab}})\,. \tag{12}$$

高于理论可检测阈值的上方 可检测性阈值，双社区 PPM 的第二大模特征值为

$$\lambda_2=\frac{1}{2}(k_{\mathrm{aa}}-k_{\mathrm{ab}})+\frac{k_{\mathrm{aa}}+k_{\mathrm{ab}}}{k_{\mathrm{aa}}-k_{\mathrm{ab}}}\,. \tag{13}$$

由此得到的图能量渐近近似为

$$\begin{aligned}E[G(N;p_{\mathrm{aa}},p_{\mathrm{ab}})]\sim&\underbrace{N^{3/2}\frac{8}{3\pi}\sqrt{\sigma^2_{p_{\mathrm{aa}},p_{\mathrm{ab}}}}}_{\text{bulk}}+\underbrace{k+1}_{\lambda_1}\\&+\underbrace{\frac{1}{2}(k_{\mathrm{aa}}-k_{\mathrm{ab}})+\frac{k_{\mathrm{aa}}+k_{\mathrm{ab}}}{k_{\mathrm{aa}}-k_{\mathrm{ab}}}}_{\lambda_2}\end{aligned} \tag{14}$$

即 $N\to\infty$。

对于 $k_{\mathrm{ab}}=0$，当 $N\to\infty$时，双社区 PPM 网络的图能量等于两个各含 $N/2$ 个节点且平均度为 $p_{\mathrm{aa}}N/2$ [37]的ER网络的图能量。也就是说，

$$\begin{aligned}E(G)\sim\ &2\left(\frac{N}{2}\right)^{3/2}\frac{8}{3\pi}\sqrt{p_{\mathrm{aa}}(1-p_{\mathrm{aa}})}\\&+2\left(p_{\mathrm{aa}}\frac{N}{2}+1\right)\end{aligned} \tag{15}$$

为 $N\to\infty$，其中式（15）中的第一项刻画了两个社区的谱主体的图能量，而$p_{\mathrm{aa}}N/2+1$ 是其中一个社区的主导特征值 [23]。对于 $k_{\mathrm{ab}}=0$，关系式（4）可化简为（15）[，因为$N^{3/2}\sqrt{p_{\mathrm{aa}}}\ (1-p_{\mathrm{aa}})\ /2=2\ (N/2)\ ^{3/2}\sqrt{p_{\mathrm{aa}}}\ (1-p_{\mathrm{aa}})\ ]$。

PPM 与 Erdős–Rényi 图能量之差

利用 $p=k/N$，我们将式（11）改写为

$$E\big[G(N,p)\big]\sim\underbrace{N^{3/2}\frac{8}{3\pi}\sqrt{\frac{k}{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)}}_{\text{bulk}}+\underbrace{k+1}_{\lambda_1}, \tag{16}$$

我们将其在 p （即较小的 k/N）情况下展开，得到

$$E\big[G(N,p)\big]\sim\underbrace{N\frac{8}{3\pi}\sqrt{k}\left(1-\frac{k}{2N}\right)}_{\text{bulk}}+\underbrace{k+1}_{\lambda_1}\,. \tag{17}$$

在渐近极限 $N \to \infty$下，我们将 PPM 方差（12）改写为

$$\sigma^2_{p_{\rm aa},p_{\rm ab}} \sim \frac{k}{N} - \frac{1}{2N^2}\left(k^2_{\rm aa} + k^2_{\rm ab}\right). \tag{18}$$

利用 $k^2_{\rm aa} + k^2_{\rm ab} = 2k^2 + \frac{(k_{\rm aa}-k_{\rm ab})^2}{2}$，这一关系式（18）可得

$$\sigma^2_{p_{\rm aa},p_{\rm ab}} \sim \frac{k}{N} - \frac{k^2}{N^2} - \frac{(k_{\rm aa}-k_{\rm ab})^2}{4N^2}. \tag{19}$$

现在，我们将（14）在 p （即 k/N较小时展开，并写作

$$\begin{aligned} E\big[G(N,p_{\rm aa},p_{\rm ab})\big] \sim & \underbrace{N\frac{8}{3\pi}\sqrt{k}\left(1 - \frac{k}{2N} - \frac{(k_{\rm aa}-k_{\rm ab})^2}{8kN}\right)}_{\rm bulk} \\ & + \underbrace{\frac{1}{2}(k_{\rm aa}-k_{\rm ab}) + \frac{k_{\rm aa}+k_{\rm ab}}{k_{\rm aa}-k_{\rm ab}}}_{\lambda_2} + \underbrace{k+1}_{\lambda_1}. \end{aligned} \tag{20}$$

计算 PPM 与 Erdős–Rényi 图能量之差，可以让我们看到谱主体与 λ_2 信号之间的竞争。该差值为

$$E\big[G(N,p_{\rm aa},p_{\rm ab})\big] - E\big[G(N,p)\big] \sim \underbrace{\frac{1}{2}(k_{\rm aa}-k_{\rm ab}) + \frac{2k}{k_{\rm aa}-k_{\rm ab}}}_{\lambda_2} - \underbrace{\frac{1}{3\pi}\frac{(k_{\rm aa}-k_{\rm ab})^2}{\sqrt{k}}}_{\text{bulk term}} \tag{21}$$

如 $N \to \infty$。
在（21）中，我们看到，PPM 与 Erdős–Rényi 图能量之差可近似为两项之和：(i) 离群项 λ_2，在超过理论可检测性阈值后，其增长主要呈线性，和 (ii) 依赖于 $k_{\rm aa} - k_{\rm ab}$ 的二次体修正项。减去 ER 图能量后，我们便从 PPM 能量中去除了占主导地位的（且与 $k_{\rm aa} - k_{\rm ab}$) 无关的） $N\sqrt{k}$ 谱主体项。 –

（21）的数学结构为数值计算 PPM–ER 图能量差提供了解析层面的依据。我们将该差值作为 $k_{\rm aa} - k_{\rm ab}$ 的函数进行计算，以考察谱主体贡献能否比单独考察 λ_2 更清晰地揭示可检测性转变。在我们的模拟中，PPM–ER 图能量差在低于理论可检测性阈值时始终近似为 0 。解析近似（21）包含一个常数偏移量 $-\sqrt{k}(2-4/(3\pi))$，在达到理论可检测性阈值时取该值。

数值计算

我们在 AMD® Ryzen Threadripper 3970X 中央处理器（CPU）上，对绝对值为 λ_2 的第二大特征值进行了数值计算。对于所考察的网络，每个（$k_{\rm aa}$，$k_{\rm ab}$）组合的实例数分别为 20000（对于 $N = 10^3$）、10000（对于 $N = 10^4$）和 1000（对于 $N = 10^5$）。

我们在两种不同的硬件配置上进行了图能量的数值计算：（i）AMD®Ryzen Threadripper 3970X CPU，以及（ii）NVIDIA A100-SXM4-80GB Tensor Core GPU。在 CPU 上，我们使用 NumPy 程序包 `np.linalg.eigvalsh`计算特征值，该程序包依赖线性代数程序包（LAPACK）例程。在 GPU 上，我们使用 PyTorch（及其 `torch.linalg.eigvalsh` 程序包）和 JAX（及其 `jax.numpy.linalg.eigvalsh` 程序包）计算特征值。由于集成了加速线性代数（XLA），JAX 的性能优于 PyTorch；XLA 可实现针对硬件优化的线性代数运算执行。

对于所研究的网络，我们在表 ($k_{\rm aa}$、 $k_{\rm ab}$) 中展示了每个I中对应项的实例数量。

代码仓库

我们的代码和模拟数 据可在 https://gitlab.com/ComputationalScience/graph-energy-sbm 获取 .

表 I. 数值图能量计算中每个（k_{aa}，k_{ab}）组合对应的网络实例数，我们按网络规模 N 和平均度 k对其进行分组。

N	k	实例数
1000	5	13,808,000
1000	10	13,808,000
1000	20	9,122,170
1000	50	8,844,170
500	5	3,712,500
500	10	3,712,500
500	20	1,485,000
500	50	1,485,000

致谢

LB 感谢 hessian.AI 服务中心（由联邦研究、技术与太空部 BMFTR 资助；资助编号：16IS22091）和 hessian.AI 创新实验室（由黑森州数字战略与创新部资助；资助编号：S-DIW04/0013/003）提供的支持。我们感谢 Cris Moore 和 C. Seshadhri 提供的宝贵意见。

[1] M. A. Porter、J.-P. Onnela 和 P. J. Mucha，《网络中的社区》，《美国数学会通报》56，1082（2009）。[2] S. Fortunato，《图中的社区检测》，《物理报告》486，75（2010）。[3] S. Fortunato 和 D. Hric，《网络中的社区检测：用户指南》，《物理报告》659，1（2016）。[4] A. Ghasemian、P. Zhang、A. Clauset、C. Moore 和 L. Peel，《动态网络中社区结构的可检测性阈值与最优算法》，《物理评论 X》6，031005（2016）。[5] E. Abbe，《社区检测与随机块模型：最新进展》，《机器学习研究杂志》18，1（2018）。[6] S. Fortunato 和 M. E. J. Newman，《网络社区检测20年》，《自然·物理》18，848（2022）。[7] S. Wasserman 和 K. Faust，《社会网络分析：方法与应用》（剑桥大学出版社，英国剑桥，1994）。[8] S. E. Fienberg 和 S. Wasserman，《单一社会测量关系的分类数据分析》，《社会学方法论》12，156（1981）。[9] P. Holland、K. B. Laskey 和 S. Leinhardt，《随机块模型：初步探索》，《社会网络》5，109（1983）。[10] S. Wasserman 和 C. Anderson，《随机后验块模型：构建与评估》，《社会网络》9，1（1987）。[11] X. Zhang、R. R. Nadakuditi 和 M. E. J. Newman，《具有社区结构和任意度数的随机图谱》，《物理评论 E》89，042816（2014）。[12] P. Zhang 和 C. Moore，《利用模块度的消息传递方法，可扩展地检测统计显著社区与层级结构》，《美国国家科学院院刊》111，18144（2014）。[13] T. P. Peixoto，《贝叶斯随机块建模》，载于《网络聚类与块建模进展》，P. Doreian、V. Batagelj 和 A. Ferligoj 编（约翰·威立父子公司，霍博肯，新泽西州，美国，2019），第289–332页。[14] M. Bazzi、L. G. S. Jeub、A. Arenas、S. D. Howison 和 M. A. Porter，《多层网络中中尺度结构生成模型构建框架》，《物理评论研究》2，023100（2020）。[15] B. Karrer 和 M. E. J. Newman，《网络中的随机块模型与社区结构》，《物理评论 E》83，016107（2011）。[16] M. Jerrum 和 G. B. Sorkin，《用于图二分的模拟退火》，载于《1993年IEEE第34届计算机科学基础年会论文集》（1993），第94–103页。[17] A. Condon 和 R. M. Karp，《植入划分模型上的图划分算法》，《随机结构与算法》18，116 2001( )。[18] M. Newman，《网络》，第2版（牛津大学出版社，英国牛津，2018）。[19] A. Decelle、F. Krzakala、C. Moore 和 L. Zdeborová，《稀疏网络中模块检测的推断与相变》，《物理评论快报》107，065701（2011）。[20] A. Decelle、F. Krzakala、C. Moore 和 L. Zdeborová，《模块化网络随机块模型的渐近分析及其算法应用》，《物理评论 E》84，066106（2011）。[21] E. Mossel、J. Neeman 和 A. Sly，《块模型阈值猜想的证明》，《组合数学》38，665（2025）。[22] C. Moore，《社区检测的计算机科学与物理学：景观、相变与计算困难性》，《欧洲理论计算机科学协会通报》121，25（2017）。[23] R. R. Nadakuditi 和 M. E. J. Newman，《图谱与网络中社区结构的可检测性》，《物理评论快报》108，188701（2012）。[24] J. Jost、R. Mulas 和 L. Torres，《图的非回溯拉普拉斯算子的谱理论》，《离散数学》346，113536（2023）。

[25] F. Krzakala、C. Moore、E. Mossel、J. Neeman、A. Sly、L. Zdeborová 和 P. Zhang，《稀疏网络聚类中的谱恢复》，《美国国家科学院院刊》110，20935（2013）。[26] H. Kesten 和 B. P. Stigum，《不可约多维Galton–Watson过程的附加极限定理》，《数学统计年刊》37，1463（1966）。[27] Y. Sohn 和 A. S. Wein，《低次多项式估计中的尖锐相变》，arXiv预印本 arXiv:2502.14407（2025）。[28] B. Chin、E. Mossel、Y. Sohn 和 A. S. Wein，《具有众多社区的随机块模型与Kesten–Stigum界》，arXiv预印本 arXiv:2503.03047（2025）。[29] A. Carpentier、C. Giraud 和 N. Verzelen，《具有多于 $\sqrt{n}$ 个社区的随机块模型的相变》，arXiv预印本 arXiv:2509.15822（2025）。[30] A. Carpentier、C. Giraud 和 N. Verzelen，《具有多于 $\sqrt{n}$ 个社区的随机块模型的相变（II）》，arXiv预印本 arXiv:2511.21526（2025）。[31] I. Gutman，《图能量》，载于第10届施泰尔马克数学研讨会（赖因修道院，格拉茨，1978），《格拉茨研究报告：数学与统计分部》，第103卷（1978），第1–22页。[32] I. Gutman，《图能量：新旧成果》，载于《代数组合学与应用：欧洲会议论文集》，代数组合学与应用（ALCOMA），于1999年9月12日至19日在德国格斯魏因施泰因举行 2001 196 211 –（施普林格出版社，）第–页。[33] I. Gutman 和 B. Furtula，《图能量综述》，《数学跨学科研究》2，85（2017）。[34] G. Palla、I. Derényi、I. Farkas 和 T. Vicsek，《网络拓扑相变的统计力学》，《物理评论 E》69，046117（2004）。[35] V. Nikiforov，《超越图能量：图与矩阵的范数》，《线性代数及其应用》506，82（2016）。[36] E. Estrada 和 M. Benzi，《图能量究竟意味着什么？》，《离散应用数学》230，71（2017）。[37] X. Li、Y. Shi 和 I. Gutman，《图能量》（施普林格出版社，海德堡，德国，2012）。[38] M. Cucuringu 和 M. W. Mahoney，《数据矩阵低阶特征向量的局域化》，arXiv预印本 arXiv:1109.1355（2011）。[39] J. P. Fairbanks、D. A. Bader 和 G. D. Sanders，《混合特征向量的谱划分》，《复杂网络杂志》5，551 2017( )。[40] X. Cheng 和 G. Mishne，《谱嵌入范数：深入探究图拉普拉斯矩阵的谱》，《SIAM成像科学杂志》13，1015（2020）。[41] N. Masuda 和 P. Kundu，《利用邻接矩阵的主导与非主导特征向量对网络上的动力系统进行降维》，《物理评论研究》4，023257（2022）。[42] G. Bounova 和 O. De Weck，《异质图系综上多指标拓扑分析的度量指标及其相关模式概述》，《物理评论 E》85，016117（2012）。[43] M. Dehmer、M. Grabner 和 B. Furtula，《利用距离、度和基于特征值的度量指标进行网络结构判别》，《PLoS ONE》7，e38564（2012）。[44] M. Dehmer、L. A. J. Mueller 和 F. Emmert-Streib，《作为前列腺癌疾病状态分类生物标志物的定量网络指标：诊断生物标志物的系统方法》，《PLoS ONE》8，e77602（2013）。[45] P. Van Mieghem 和 R. Van de Bovenkamp，《网络上易感者–感染者–易感者疫情平均场近似的准确性判据》，《物理评论 E》91，032812（2015）。[46] S. Kamath 和 M. S.，《基于图能量的中心性度量：识别社交网络中有影响力的节点》，载于《2019年IEEE第五届技术融合国际会议（I2CT）》（印度孟买，2019），第1–6页。[47] C. T. Martínez-Martínez、J. A. Méndez-Bermúdez 和 J. M. Sigarreta，《随机有向图的拓扑与谱性质》，《物理评论 E》109，064306（2024）。[48] L. Böttcher 和 M. A. Porter，《具有复权重的复杂网络》，《物理评论 E》109，024314（2024）。[49] M. L. Mehta，《随机矩阵》，第3版（学术出版社，剑桥，马萨诸塞州，美国，2004）。[50] G. Livan、M. Novaes 和 P. Vivo，《随机矩阵导论——理论与实践》，arXiv预印本 arXiv:1712.07903（2017）。[51] E. P. Wigner，《无限维边框矩阵的特征向量》，《数学年刊》62，548（1955）。[52] E. P. Wigner，《论某些对称矩阵的根的分布》，《数学年刊》67，325（1958）。[53] M. Bauer 和 O. Golinelli，《随机关联矩阵：谱密度的矩》，《统计物理学杂志》103，301（2001）。[54] S. Kirkpatrick 和 T. P. Eggarter，《二元合金的局域态》，《物理评论 B》6，3598（1972）。[55] S. N. Evangelou 和 E. N. Economou，《稀疏随机矩阵系综中的谱密度奇异性、能级统计与局域化》，《物理评论快报》68，361（1992）。[56] T. Rogers、I. P. Castillo、R. Kühn 和 K. Takeda，《稀疏对称随机矩阵谱密度的腔方法》，《物理评论 E》78，031116（2008）。[57] I. Gutman 和 B. Borovicanin，《图的零度：最新综述》，《论文集》14，137（2011）。[58] R. Bueno 和 N. Hatano，《复杂网络上量子漫步的零特征值局域化》，《物理评论研究》2，033185（2020）。[59] S. Ubaru、J. Chen 和 Y. Saad，《利用随机Lanczos求积快速估计tr($f(A)$)》，《SIAM矩阵分析与应用杂志》38，1075（2017）。[60] R. R. Nadakuditi 和 M. E. J. Newman，《具有任意期望度的随机图谱》，《物理评论 E》87，012803 2013( )。[61] M. E. J. Newman、X. Zhang 和 R. R. Nadakuditi，《具有任意度数的随机网络谱》，《物理评论 E》99，042309 2019( )。

[62] K. Avrachenkov、L. Cottatellucci 和 A. Kadavankandy，《随机块模型中随机矩阵的谱性质》，载于*第13届移动、自组织和无线网络建模与优化国际研讨会（WiOpt）*（2015年），第537–544页。[63] W. Du、X. Li 和 Y. Li，《随机图的能量》，《线性代数及其应用》**435**，2334（2011年）。[64] K. Fan，《完全连续算子特征值的极值性质与不等式》，《美国国家科学院院刊》**37**，760（1951年）。