arXiv:2601.05068v1 [math.HO] 8 Jan 2026

Dick 和 Liz Askey 于1987年访问苏联，以及离散 Askey 方案也起源于俄罗斯的经过

Tom H. Koornwinder

摘要

本文介绍了离散 Askey 方案如何独立地在俄罗斯产生，以及 Askey 是如何了解到这一情况的。特别是，Askey 于1987年9月访问苏联期间，结识了这一故事中的主要人物，即 Gel'fand 和苏斯洛夫，以及尼基福罗夫和乌瓦罗夫。本文还较为详细地描述了这次旅行，尤其是依据 Askey 的妻子 Liz 所写的日记；Liz 陪同 Askey 一同出行。Dick 和 Liz Askey 随后继续前往日本、澳大利亚和印度。文中也给出了这三次访问的日程安排。

1 引言

1987年9月至1988年1月期间，Dick Askey 和他的妻子 Liz 先后前往苏联、日本、澳大利亚和印度。访问苏联后，他们曾短暂返回位于麦迪逊的家中，但之后访问其他三个国家时未曾中断行程。Liz Askey 撰写了四本旅行日记，每个国家一本。这些日记最初是手写的。后来有人制作并传阅了几份打字稿，也送给了我。最近，我已在网上提供了这些日记的编辑和注释版本[1]。

日记中没有涉及数学，但 Liz 描述了她在场时与（有时是知名的）数学家的相遇。日记的重点是旅途中的文化活动，有时 Dick 和 Liz 一起参加，更多时候是 Liz 独自参加，而 Dick 则在讨论数学。

他们的旅行日程安排如下。

- 9月1日至21日：苏联（莫斯科和列宁格勒）
- 回到麦迪逊待两周
- 10月6日至11月14日：日本
- 11月15日至12月10日：澳大利亚（悉尼和堪培拉）
- 12月11日至1月8日：印度（拉马努金诞辰百年纪念）
- 1月9日至15日：英国伦敦

[1] https://staff.fnwi.uva.nl/t.h.koornwinder/specfun/#DickAskey

本文首先介绍一些背景，包括 Liz Askey 的简短生平、Dick Askey 开始这趟旅程时的数学地位，以及那些年触及他本人研究兴趣的重要数学发展。接着，第 3 节将介绍俄罗斯在离散 Askey 方案相关内容上的研究，这些研究或为原创，或独立于其他地方开展的工作。从 19世纪的切比雪夫到 20世纪80年代的谢尔盖·苏斯洛夫及其合作者，均在讨论之列。本节旨在为下一节关于 Askey 苏联之行的内容提供更好的背景。对于这两节，谢尔盖·苏斯洛夫向我提供的亲历者叙述极具价值。另请参阅他关于 Askey 的回忆 [56]

本文最后用三个简短章节介绍了 Askey 夫妇前往日本、澳大利亚和印度的旅程，只列出了他们到访的地点和参加的会议。有关这些旅程的更多详情，请参阅 Liz Askey 在线编辑的日记、我于2022年6月15日在 OPSFA 16 上演讲的幻灯片[2] ，以及 George Andrews 关于印度之行的亲历记述 [1]。

2 一些背景

2.1 Liz Askey

Elizabeth Hill“Liz”Askey[3] 于1936年11月18日出生于华盛顿州阿伯丁。她于1958年6月14日与 Dick Askey 结婚。她于2022年1月29日去世，比 Dick 早 $2\frac{1}{4}$ 年离世。他们有两个孩子：一儿一女。–Liz 在布林莫尔学院读本科，主修历史。她在学院与普林斯顿大学合办的一场联谊会上结识了 Dick。

孩子们上学后，Liz 在威斯康星大学麦迪逊分校兼职学习，并获得城市与区域规划硕士学位。之后，她又获得了图书馆与信息研究学院的另一个硕士学位。儿童文学一直是她特别感兴趣的领域。她擅长写作和讲故事。

Liz 经常陪同 Dick 出行。许多读者可能曾在 Dick 演讲的会议上见过 Liz。

2.2 截至 1987 年 Dick Askey 的数学成就与兴趣

1987 年出行时，Dick Askey 正处于数学能力的巅峰。1984 年，他与 Mourad Ismail 合著的美国数学会回忆录 [5] 已经出版；1985 年，他与 Jim Wilson 合著的美国数学会回忆录 [8] 也已出版，其中引入了 Askey–Wilson 多项式。这部 1985 年的回忆录还提出了著名的 *Askey 方案* （不过其中连续 Hahn 多项式只有一个二参数类）。正如我在 [31, 前言，第 vi 页], 中提到的，Askey 从 Michael Hoare 于 1977 年在奥伯沃尔法赫所作的一场演讲中获得了提出这类方案的灵感。Hoare 展示了一张图表，出自他与 Cooper 和 Rahman 合著的 1977 年论文 [19, 图 2] ，图中从 Hahn 多项式一直列到 Hermite 多项式。

Askey–Wilson 回忆录中基本上已经描述了 Askey 方案的 q 类比形式，但当时还没有将其绘制成图。事实上，Askey 早已从其学生 Jim Wilson 于 1978年 撰写的学位论文 [61, Chapter III] 中得知，(q-) Askey 方案

[2] https://staff.fnwi.uva.nl/t.h.koornwinder/art/sheets/2022_OPSFA.pdf[3] https://www.legacy.com/us/obituaries/madison/name/elizabeth-askey-obituary?id=33536679

还没有达到顶层：Wilson 已证明，在 Racah 多项式之上还存在双正交有理函数。直到 1991 年，Wilson 才在一份期刊上发表了这一结果 [63]。在此之前，Askey 并未广泛谈论这一成果。

通过考虑相应的关联正交族，也可以扩展（q-）Askey 方案。1991年，Ismail 和 Rahman [29]提出了关联 Askey–Wilson 多项式，为此画上了句号。

与 Askey–Wilson 回忆录同在1985年，Louis de Branges 关于比伯巴赫猜想的证明 [12] 发表了。他在第150页使用了 Askey–Gasper 不等式 [4,(1.17)、(3.1)] 作为关键步骤。

Askey 在最先访问的三个国家所作演讲的题目都没有保存下来，因此我们只能猜测演讲内容。我猜他讲了不少关于 q的内容。拉马努金的工作及其遗产也可能是演讲主题之一。这应该为1987年12月在印度举行的拉马努金诞辰百年纪念活动做好了准备；他至少需要在纪念会议上发言五次。

2.3 截至1987年的一些数学新发展

就在1987年之前或当年，一些与正交多项式和特殊函数也有关的新理论应运而生：

- 量子群（Drinfel'd [20],伯克利国际数学家大会，1986年）
- Heckman–Opdam 多项式 [28] （1987年、1988年）
- Macdonald 多项式（手稿于1987年传阅）
- Dunkl 算子 [21] （1989年，1987年提交）
- Gelfand 超几何函数 [23]（1986年）
- 小波（ondelettes [35], 1986）

启程时，Dick或许还未完全了解所有这些内容，但在旅途中，他肯定会从遇到的人那里进一步了解这些主题。

3 俄罗斯的离散 Askey 方案

3.1 切比雪夫的1875年论文

大约一个世纪以来，切比雪夫的论文 [17](1875年) 主要因离散切比雪夫多项式 [58, §2.8], [22, §10.23], 而为人所知，也就是说，它们是在有限集 $\{0, 1, \ldots, N\}$上对应常权重的正交多项式。事实上，正如 Roy [53], 所述，切比雪夫此前还撰写过几篇关于插值的论文 [14] (1858)、 [15] (1859年)、 [16] (1864年)[1], ，其中讨论了这些

[1]另请参阅 R. J. Pulskamp 的网页 https://probabilityandfinance.com/pulskamp/Chebyshev/Chebyshev.html, 其中列出了"最小二乘法插值"这一标题下的相关论文，并附有英文译本链接。

多项式。正如 [53, §3], 所述，切比雪夫将这些多项式作为连分数展开中的分母多项式 [18,第三章, §4] 来求得

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\cdots+\frac{1}{x-m+1}\,.$$

他证明了正交性，并为勒让德多项式推导出了罗德里格斯公式的一个有限差分变体。

然而，这些正交多项式的二参数推广，用当前记法 [31,§9.5]表示为

$$Q_n(x;\alpha,\beta,N):={}_3F_2\left(\begin{matrix}-n,n+\alpha+\beta+1,-x\\ \alpha+1,-N\end{matrix};1\right),\quad n=0,1,\dots,N, \tag{3.1}$$

是在 [17]后面的第9节和第10节中引入的。在那里，切比雪夫得到多项式 $\phi_n(x)$，它们关于权

$$\theta^2(x):=\frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x)}\,\frac{\Gamma(m-x+\beta)}{\Gamma(m-x)}=\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\,\frac{(\alpha+1)_{x-1}}{(x-1)!}\,\frac{(\beta+1)_{m-x-1}}{(m-x-1)!}$$

在有限集 $\{1,2,\dots,m-1\}$上构成正交多项式。他证明了这些正交多项式可以由公式给出

$$\phi_n(x)=\Delta^n\left(\frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x-n)}\,\frac{\Gamma(m-x+\beta+n)}{\Gamma(m-x)}\right)\Big/\left(\frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x)}\,\frac{\Gamma(m-x+\beta)}{\Gamma(m-x)}\right).$$

（即我们现在所称的罗德里格斯公式），因为右端定义了次数为n 的多项式，并满足与 $\phi_n(x)$相同的正交关系。他接着给出了 $\phi_n(x)$的二次范数的计算结果，最后推导出 $\phi_n(x)$作为有限和的表达式，我们可以将其写成

$$\begin{aligned}\phi_n(x)&=(\alpha+1)_n(m-n-x)_n\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}-n,-n-\beta,-x+1\\ \alpha+1,m-n-x\end{matrix};1\right)\\ &=(m-n-1)_n(\alpha+1)_n\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}-n,n+\alpha+\beta+1,-x+1\\ \alpha+1,-m+2\end{matrix};1\right)\\ &=(m-n-1)_n(\alpha+1)_n\,Q_n(x-1;\alpha,\beta,m-2).\end{aligned}$$

这里第二个等式来自终止 ${}_3F_2(1)$的一个变换公式，而该公式是 [10, 3.8(1)]的特例:

$${}_3F_2\left(\begin{matrix}-n,b,c\\ d,e\end{matrix};1\right)=\frac{(e-b)_n}{(e)_n}\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}-n,b,d-c\\ d,b-e-n+1\end{matrix};1\right). \tag{3.2}$$

阅读更多关于切比雪夫在 [13]中的工作的内容。

一般情形 α,β 在 [17] 中长期遭到忽视，可能是因为人们对这些多项式的兴趣主要在于它们在插值和数值分析中的应用，而在这些领域，情形 $\alpha=\beta=0$ 尤其有用。

一般情形 α, β 由 Hahn [27], 重新发现，但主要是在 q 的框架下。他的 I 型导出了我们如今所称的 q-Hahn 多项式；当 $q \to 1$ 时，其极限情形便得到 Hahn 多项式，Hahn 只在论文末尾简略讨论了它们。[22, §10.23], 中也简略介绍了它们，而 [59] 和 [30] 则对其作了更详细的讨论。所有这些论文也都提到了 Bateman 多项式 [11, (18)、(19)] （Hardy 也曾研究过），并将其视为 Hahn 多项式的特例；但实际上，它们是连续 Hahn 多项式的特例，只能在形式上将其视为 Hahn 多项式 [31, §9.4]。Pasternack 扩展了 Bateman 多项式。历史背景及更多参考文献见 [32] 和 [57, 第 8, 9] 页。

大概是在1978年，Askey [36, 第8]页首次将一般 Hahn 多项式的功劳归于切比雪夫。他在 [2, 第866]页对切比雪夫的论文作了更详细的讨论。

3.2 离　　散 Askey 方案及其与群论物理学的关系 s

Wilson 在其学位论文 [61] （1978年）中得到了新的离散正交多项式，这些多项式关于有限集上的权正交，实现了 SU(2) 群中已知的 $6j$ 符号（或 Racah 系数）的正交关系。于是，*Racah* 多项式 诞生了，它们处于离散 Askey 方案的顶端，而 Hahn 多项式是其直接的极限情形。他还给出了具有连续正交性的版本，后来以他的名字命名为：*Wilson* 多项式。他于 [60] （1977年）公布了这些结果，并于1980年在期刊 [62] 上发表。早在1979年，他就与 Askey [6] 合作发表了 Racah 多项式的一个 q版本。

大约在那个时候，也就是1978年，Askey [6] 已知道，SU(2) 的 $3j$ 或 Clebsch–Gordan 系数可以用 Hahn 多项式表示，但这些细节并未发表于任何地方。随后，作者 [33]于1981年发表了这一结果。此外，在一年后的一篇论文 [34]中，他指出，SU(2) 的不可约酉表示的矩阵元不仅可以用 Jacobi 多项式表示（这是 Wigner 的结果），也可以用 Krawtchouk 多项式表示，从而体现了列正交性。

3.3 与此同时，在莫斯科

Gel'fand、Minlos 和 ˇSapiro [25, 补充材料 III] 在1958年指出，Clebsch–Gordan 系数可以视为 Jacobi 多项式的离散类比，因为它们可以用 Rodrigues 型公式表示，与 Jacobi 多项式的公式类似，只是将导数换成了差分算子。然而，他们并未用 Hahn 多项式表示 CG 系数，因为他们并不了解这类多项式。据 Graev（在与苏斯洛夫的一次交谈中）所述，实际上是 Gel'fand 得出了这个公式。Gel'fand 对这一结果十分兴奋。他鼓励身边的人继续研究，但无人感兴趣。这种冷淡在很久之后的一次 Gelfand 研讨班上也显而易见，当时的报告主题是正交多项式。正如 Retakh 所提到的 [52,第164], 页，听众中只有资深人士在认真听报告。

[25] 中尚未解决的问题，于1982年在库尔恰托夫研究所由 Smorodinskii 和他的学生谢尔盖·苏斯洛夫 [54]接手：他们独立于 [33]，用 Hahn 多项式表示 CG系数。同年，他们独立于 Wilson 的研究，重新发现了 [55] Racah 多项式及其与 $6j$ 符号的联系。不知何故，Klimyk

曾向作者们指出 [33], 阿姆斯特丹数学中心一份报告的预印本版本，该版本在莫斯科也能找到。因此，他们得知了 [33] 中的结果，并通过其中的一条参考文献，也了解了 Wilson的论文 [62]。他们在 [55] 的补充材料中承认了这些成果。

3.4 Nikiforov和Uvarov专著的演变

20世纪70年代和80年代，任职于莫斯科Keldysh研究所[4] 的Nikiforov和Uvarov撰写了两部关于特殊函数的连续专著 [43], [44] ，并先后推出多个版本：
1974年：《特殊函数理论基础》（俄文版）；1977年：法语译本；
1978年：《数学物理特殊函数》（俄文版）；1983年：法语译本；
1984年：俄文第二版；1988年：英文译本。

第一部专著 [43] 已经包含关于经典离散正交多项式的内容（第17节），尤其是Hahn 多项式及其罗德里格斯公式，但没有提到将它们解释为Clebsch–Gordan 系数。第二部专著 [44]的第一版也同样如此。

约在1982年，苏斯洛夫与作者们取得了联系（他们只能在Keldysh研究所外会面，因为安全规定不允许非职工进入大楼）。他们共同在Keldysh研究所预印本系列发表了几篇报告。值得注意的是， [38] 再次给出了 [54], 的结果，并恰当地引用了 [54] 和 [33], ；而 [40]讨论了 Racah 多项式（但没有 $6j$ 符号），并恰当地引用了 [55], [6]和 [62]。苏斯洛夫独自撰写的另外两篇相关论文于1983年发表在《苏联核物理杂志》上。难怪这些结果也被收入 [44]的后续版本中。1983年的法语译本将Hahn 多项式解释为CG系数，并讨论了Racah 多项式。1984年俄文第二版也将Racah 多项式解释为 $6j$ 符号。然而，刚才提到的[38] 和 [40] 中的参考文献并未出现在这两个版本的 [44], 中，但 [6], [62] 和 [33] 作为参考文献见于1988年英文译本中。该版本还包含离散经典正交多项式的 q-类比形式。苏斯洛夫和其他几位人士在序言中因“对本书内容提出有益意见”而受到感谢。

3.5 华沙的1983年国际数学家大会

Askey 与苏联数学家的首次接触很可能发生在1983年8月16日至24日于华沙举行的国际数学家大会上 [49]„ Dick 是受邀演讲者。他在那里见到了 Sergey Nikolsky（苏联代表团团长）和 Andrey Gonchar。两人都是莫斯科苏联科学院斯捷克洛夫数学研究所的成员[5] 。另外两位莫斯科数学家 Arnold Nikiforov 和 Israel Gel’fand 也是 Askey 想见的人，但他们未获准前往，因为他们参与了莫斯科 Keldysh研究所为

[4]https://en.wikipedia.org/wiki/Keldysh_应用_数学_研究所_
https://en.wikipedia.org/wiki/Steklov[5]数学_研究所_

苏联原子弹计划所开展的工作。不过，Nikiforov 已经提交了他那篇简短报告的题目，演讲也已排入日程。随后，Dick 似乎进行了他的报告。

目前尚不清楚，1983年的 Askey 对 Nikiforov 的研究了解多少，因为在那之前，后者只用俄语发表过作品。但可以肯定的是，如果他们当时在华沙相遇，一定会有很多话题可谈。

3.6 苏斯洛夫的与阿塔基希耶夫的合作：连续 Hahn 多项式

尼基福罗夫和乌瓦罗夫专注于离散正交多项式，而忽略了连续族；与此同时，苏斯洛夫也开始与当时身处苏联巴库的纳蒂格·阿塔利希耶夫合作。他们密切关注连续情形的发展。他们合作的一项重要成果与阿斯基和威尔逊于 [7] （1982年）发表的一篇论文有关：他们将连续 Hahn 多项式的一个二参数族作为 Wilson 多项式的极限情形，而 Wilson 多项式由 Wilson [62]于1980年提出。他们的二参数族于 [8]（1985年）被纳入 Askey 方案。阿塔基希耶夫和苏斯洛夫 [9] 在同年指出，连续 Hahn 多项式实际上可以扩展为一个三参数族；Askey [3] 在写给同一期刊的一封信中证实了这一点。从那时起，这个三参数族便成为 Askey 方案的一部分。

3.7 作为[44]的后续：尼基福罗夫、苏斯洛夫和乌瓦罗夫的专著

1983年，尼基福罗夫和乌瓦罗夫还开始与苏斯洛夫合作撰写一本专著，重点介绍离散经典正交多项式及其 q类比。该专著 [42] 于1985年出版。部分草稿内容已收入后来版本的 [44] 中（见上文）。大约在1984年，尼基福罗夫受Gel'fand邀请，在他的研讨班上介绍这项工作，安排在主讲人之后进行一场20分钟的报告。Gel'fand对此表现出浓厚兴趣，也在那里与苏斯洛夫讨论了相关内容。应Gel'fand之邀，尼基福罗夫、苏斯洛夫和乌瓦罗夫在他的期刊上发表了论文 [41] 。论文末尾，作者感谢Gel'fand以及他主持的研讨班的参与者所给予的有益讨论。

我只能读到这本专著 [42], 的英文译本，该译本于1991年出版。尼基福罗夫和苏斯洛夫的一篇短文于 [39] 1986年以英文发表，介绍了专著中的一些主要结果。Askey在《数学评论》数学评论中对这篇论文的评论MR0824673里，将他们的方法与阿斯基和威尔逊的方法进行了比较。俄罗斯的方法受到物理学的启发，着重研究与这类多项式相伴的（q-）差分算子，以此作为美国方法的替代；美国方法则采用来自（q-）超几何函数的三项递推关系。Askey接着说道："他们的大部分工作都是独立完成的，因为他们虽然知道第一篇Askey–Wilson论文 [6], ，但我们并未在其中纳入罗德里格斯公式的差商形式。"不过，据苏斯洛夫（私人通信）所述，他们并未仔细研究 [6]，尽管已将其作为参考文献列入 [39]。

[42] 的英文译本对其他地方的相关研究成果也作了及时的引用，反响极佳，至今仍被视为标准参考书。序言中感谢了苏斯洛夫撰写专著的特定部分，但事实上，他的贡献远不止于此。俄文版的前言也收录在

译本中，由 M. I. Graev 于1984年撰写。他特别感谢 Gel'fand 指出，在 [25] 中，连续变量和离散变量的经典正交多项式之间存在深刻的类比，这也与旋转群的表示有关。致谢中感谢了 S. M. Nikolsky 和 A. A. Gonchar 两位院士，“他们参与了作者报告以及 R. Askey 在斯捷克洛夫数学研究所所作报告的讨论”。正如下一节将要介绍的，这些讨论发生于1987年9月，当时俄文版已经出版。

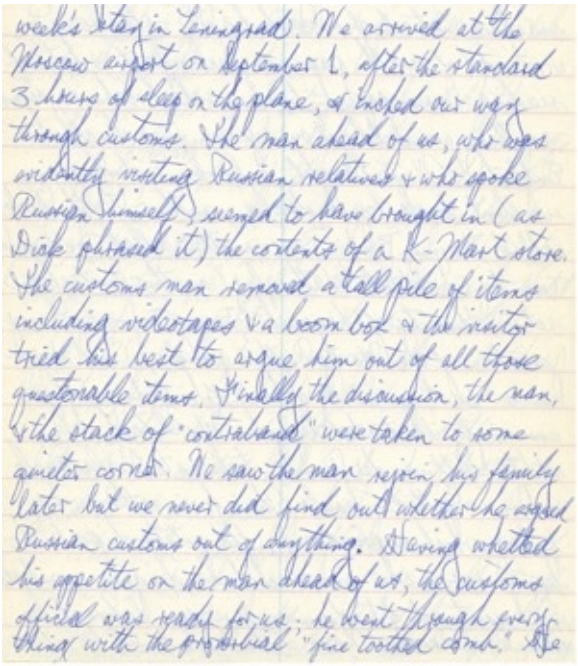
4 苏联，1987年9月1日至21日

概述 阿斯基夫妇于8月31日从麦迪逊出发（见照片），前往苏联停留三周。抵达莫斯科后，他们只在那里住了一晚，随后乘坐夜班火车前往列宁格勒，并于9月3日至9日期间住在那里。返回莫斯科后，他们住在学术酒店，可能是由莫斯科斯捷克洛夫研究所安排的。在列宁格勒，他们住在莫斯科酒店，由列宁格勒斯捷克洛夫研究所的 Sergey Khrushchev 安排。

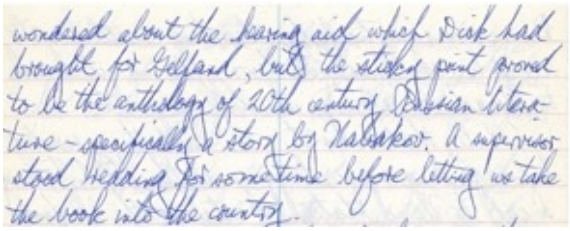


9月1日：抵达莫斯科机场

我们于*9*月*1*日抵达莫斯科机场，在飞机上照例只睡了三个小时，随后缓慢地通过海关。排在我们前面的那个人显然是来探望俄罗斯亲戚的，而且自己也会说俄语；他似乎带进来了（用 *Dick* 的话说）一整家 *K-Mart* 商店的东西。海关人员拿出了一大堆物品，包括录像带和一台手提音响，那位访客竭力想说服他放过这些可疑物品。最后，他们把这场争论、那个人和那堆“违禁品”带到了一个较安静的角落。后来我们看到那人回到了家人身边，但始终没弄清他是否说服俄罗斯海关放过了什么东西。海关人员被前面那个人勾起了兴致，开始检查我们的行李；他用上了俗话说的“细齿梳”，把每样东西都仔细查了一遍。

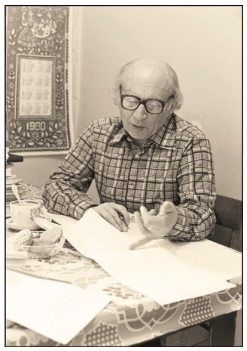

weeks stay in Leningrad. We arrived at the Moscow airport on September 1, after the standard 3 hours of sleep on the plane, & inched our way through customs. The man ahead of us, who was evidently visiting Russian relatives & who spoke Russian himself, seemed to have brought in (as Dick phrased it) the contents of a K-Mart store. The customs man removed a tall pile of items including videotapes & a boom box & the visitor tried his best to argue him out of all those questionable items. Finally the discussion, the man, & the stack of "contraband" were taken to some quieter corner. We saw the man rejoin his family later but we never did find out whether he argued Russian customs out of anything. Having whetted his appetite on the man ahead of us, the customs official was ready for us: he went through every thing with the proverbial "fine toothed comb." The

他对 *Dick* 带给 *Gel'fand* 的助听器颇感兴趣，但真正棘手的是那本《*20*世纪俄罗斯文学选集》——具体来说，是其中纳博科夫的一篇小说。一位主管站在那里读了好一阵子，才允许我们把这本专著带进境内。


wondered about the hearing aid which Dick had brought for Gelfand, but the sticking point proved to be the anthology of 20th century Russian literature - specifically a story by Nabokov. A supervisor stood reading for some time before letting us take the book into the country.

9月2日：拜访 Gel'fand 的家

前一天晚上为我们带路的人帮我们叫了辆出租车，并带我们去了 *Gel'fand* 和家人居住的公寓楼。由于 *Gel'fand* 的妻子生病，我们原本只打算待十五分钟。他见到 *Dick* 非常高兴，交谈的时间远远超过了*15*分钟。他不断被电话打断，不得不接听电话；我们后来才知道，那天是他的*74*岁生日。


Photograph by Carol Tate.

Math in the kitchen, 1982.

Israel Gel'fand[6] [52] （1913—2009年）是战后莫斯科最杰出的数学家之一，活跃于多个领域，尤其是群论、表示论和泛函分析。1955年，他 [24] 与列维坦合作的研究，再加上马尔琴科同年发表的一篇论文，促成了Gel'fand–Levitan–Marchenko积分方程的提出。该方程是逆散射理论的基础，对孤子理论也十分重要。1987年，Gel'fand 刚开始与其团队的其他成员共同研究以他命名的多变量超几何函数。每周一举行的 Gelfand 研讨班声名远扬，但对一些演讲者和参与者而言也令人畏惧。1989年，他移居美国。

9月3日至9日：访问列宁格勒

列宁格勒的莫斯科酒店位于涅瓦大街东端。附近便是拉扎列夫公墓，Liz在那里看到了陀思妥耶夫斯基、柴可夫斯基、里姆斯基-科萨科夫等伟人的墓地；Dick则与东道主 Sergey Khrushchev 一起在欧拉墓前合影。



Sergey Khrushchev[7] 从事复分析、泛函分析和调和分析研究。他的工作

[6]https://en.wikipedia.org/wiki/Israel_Gelfand,
https://mathscinet.ams.org/mathscinet/MRAuthorID/189130[7]
https://official.satbayev.university/en/teachers/khrushchev-sergey,
https://mathscinet.ams.org/mathscinet/MRAuthorID/198407

对正交多项式的研究始于2000年之后，当时他身
在俄罗斯以外。

斯捷克洛夫数学研究所[8], Dick前往那里讲学和讨论，研究所位于涅瓦大街的中段。他们曾多次造访的冬宫则在这条大道的另一端。他们还参观了俄罗斯博物馆，并前往城外的巴甫洛夫斯克宫和普希金的叶卡捷琳娜宫游览。

作为科学院的贵宾，Liz对他们受到的待遇与普通人的日常生活之间的差异感触很深：普通人总是排着长队，吃的东西也很差。她还注意到酒店里有人监视：每层电梯附近都坐着几名女性，她们在客人离开楼层时收走房间钥匙，等客人回来时再归还。

9月10日至21日：逗留莫斯科

他们下榻的学术酒店靠近列宁大街，这是一条从花园环路上的列宁纪念碑向西南延伸至（外）环城公路的主要大道。步行前往红场和克里姆林宫需要45分钟；到莫斯科国立大学则要90分钟。

他们刚从列宁格勒回来，就前往美国大使馆（离白宫——俄罗斯政府的办公地——不远）赴约。随后，他们沿着加里宁大街（如今称为新阿尔巴特大街）步行，游览了莫斯科的一些主要景点："列宁图书馆、无名烈士墓，拐进红场，经过列宁墓和圣瓦西里大教堂（一座真正宏伟而引人注目的建筑），再穿过那座建于19世纪、曾容纳数百家小店、如今作为古姆百货商场的建筑。"接着下起了阵雨，于是他们乘地铁返回酒店。

后来有一天，Liz 愉快地参观了中央儿童图书馆，并送上来自麦迪逊的礼物：专著和盒式磁带。馆方人员带她参观，她也与图书馆工作人员进行了充分交流。

Dick 和 Liz 在酒店房间里饱受臭虫侵扰。一夜之间，Dick 被叮了13个包。Liz 被叮得少一些，但她对臭虫的反应很强烈，不得不前往美国大使馆咨询医生。

看来真的是臭虫！凌晨*2:30*，*Dick* 被新咬了六个包，他可不打算再爬回去，和那些正把他当美餐的虫子待在一起。也不能怪他。不过，他刚刚离开去 *Gelfand* 研讨班做报告；昨晚只睡了三个小时，接下来这个晚上对他来说会很辛苦。他此行的目的就是谈数学，这或许足以让他坚持下去。

9月14日：Dick 忙碌的一天

这个星期一，尽管 Dick 睡得很不好，日程安排还是要让他依次会见三个与他相关的研究小组。

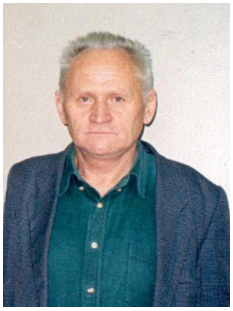
1. 尼基福罗夫、乌瓦罗夫和苏斯洛夫

据 Liz 的日记记载，早上来接他的是"一行三位物理学家和一位翻译"。

[8] https://en.wikipedia.org/wiki/St._Petersburg_Department_of_Steklov_Mathematical_Institute_of_the_俄罗斯_科学院_of_Sciences

而且“其中一位物理学家还从自家花园里给我带来了一束鲜花”。事实上，这些（数学）物理学家中有两位是 Arnold Nikiforov[9] （1930–2005）和 Vasily Uvarov[10] （1929–1997），两人都在 Keldysh研究所工作。鲜花是 Nikiforov 带来的，他的女儿则担任翻译。在库尔恰托夫研究所[11] 门前，Sergei Suslov[12] （1955）也加入了他们。出于安全考虑，只有工作人员才能进入那栋楼。因此，会议在附近的一栋国际办公楼举行。如前一节所述，这三人都积极研究离散经典正交多项式，最终促成了这本专著 [42],的俄文版，因此他们有很多话题可以讨论。

Dick 在莫斯科之行接近尾声时见到了纳蒂格·阿塔基希耶夫，他是谢尔盖·苏斯洛夫经常合作的合著者。只有在那次会面中，Dick 才讲到了 Jim Wilson 的双正交有理函数 [61,第三章]/



尼基福罗夫



乌瓦罗夫



苏斯洛夫

2. 斯捷克洛夫数学研究所（尼科尔斯基和冈查尔）

接下来，Dick 拜访了著名的斯捷克洛夫数学研究所，并在那里见到了由 Sergey Nikolsky[13] [46] （1905–2012）和 Andrey Gonchar[14] （1931–2012）带领的团队。尼基福罗夫的本科生谢尔盖·苏斯洛夫也获准加入他们。Dick 担任主讲人，举行了一场非正式研讨会。尼科尔斯基送给 Dick 一套英文译本的两卷本分析学著作 [45], ，该书刚由 Mir 出版社出版。多年以后，谢尔盖·苏斯洛夫定居美国时，Dick 把这套书送给了他；苏斯洛夫当年还是学生时，读的是俄文原版。

之后，冈查尔（1991—1998年间曾任俄罗斯科学院副院长）邀请研讨班的小组成员到他家共进午餐。

[9] https://tinyurl.com/27vdwjws（俄语维基百科页面），
https://www.mathnet.ru/php/person.phtml?personid=27523&option_lang=eng[10]
https://tinyurl.com/yuramt9m（俄语维基百科页面），
https://www.mathnet.ru/php/person.phtml?personid=24913&option_lang=eng[11]
https://en.wikipedia.org/wiki/Kurchatov_研究所[12] https://search.asu.edu/profile/90437,
https://mathscinet.ams.org/mathscinet/MRAuthorID==195261[13]
https://en.wikipedia.org/wiki/Sergey_尼科尔斯基,
https://www.mathnet.ru/php/person.phtml?personid=9182&option_lang=eng[14]
https://en.wikipedia.org/wiki/Andrey_冈查尔_（数学家），
https://www.mathnet.ru/php/person.phtml?&personid=8518&option_lang=eng



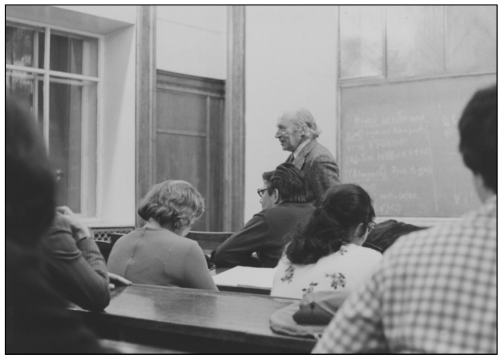
尼科尔斯基



冈查尔

3. Gelfand 研讨班[15]

晚上，Dick 在莫斯科国立大学的 Gelfand 研讨班上作了报告（遗憾的是，苏斯洛夫未能通过安检进入会场）。在这所大学，Gel'fand 组建了一个团队，成员包括 Zelevinsky 和列维坦等人；他们刚刚开始研究 Gel'fand 版本的广义超几何级数。这个团队与斯捷克洛夫数学研究所的团队交流不多（另请注意，Gel'fand 虽于 1953 年当选为苏联科学院通讯院士，但直到 1984 [52, p.25]才成为该院正式院士）。



Photograph by Carol Tate.

At the Monday night seminar.

更多活动 在莫斯科逗留期间，Liz 和 Dick 一起或由 Liz 独自游览了奥斯坦金诺宫、科洛缅斯科耶博物馆保护区、圣瓦西里大教堂、圣乔治教堂、克里姆林宫、新圣女修道院和尼基特尼基教堂。Liz 还把从麦迪逊带来的儿童书籍送到了中央儿童图书馆，并在那里参观了一番。

Dick 和 Liz 对餐馆的食物和服务并不满意，但他们在俄罗斯同事家里吃到了几顿非常美味的饭：

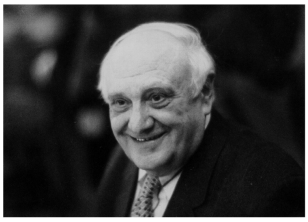
泽列温斯基一家邀请我们回他们的公寓用餐，这是我们在俄罗斯逗留期间最精彩的一餐。我们吃了罗宋汤、蘑菇洋葱馅饼、奶酪馅饼、一道让我想起焗土豆的土豆肉菜、一种配有茄子和番茄、抹在一片面包上吃的蔬菜"酱"，新鲜香甜的西瓜，以及三种蛋糕作为甜点——两种用红醋栗制作，一种用草莓制作——还有茶。味道实在太好了，我们每一口都吃得津津有味。



泽列文斯基[16] (1 953–2013）在代数、组合学和表示论方面做出了重要工作。 e-

[15]更多关于 Gelfand 研讨班的信息，请参阅 S. Gindikin 为 [26] 撰写的前言，以及 [52, 第 25–26, 48, 164][16] 页：https://en.wikipedia.org/wiki/Andrei_Zelevinsky、https://mathscinet.ams.org/mathscinet/MRAuthorID/191850

他积极参与了刚刚启动的 Gelfand 超几何函数项目。1990 年，他移民到美国。



昨晚我们和列维坦夫妇、他们的儿媳以及泽列文斯基共进晚餐。那是一顿丰盛的晚餐，甜点一道接一道，席间窗外可俯瞰莫斯科河，河对岸的莫斯科尽收眼底，景色绝佳。

列维坦[17] (1914–2004)致力于研究几乎周期函数、斯图姆–刘维尔算子和逆散射。他与 Gel' fand 合著的论文 [24] (1955)影响深远。1992年，他移居美国。

Liz在日记中注意到戈尔巴乔夫试图改变经济体制，但她没有提到改革，也没有预感到1989–1991年的重大事件将推倒铁幕并终结苏联。总的来说，她不喜欢苏维埃制度，但喜欢俄罗斯文化和俄罗斯人民。

5 日本，10月6日至11月14日,1987年

日程安排：

- 10月6日至12日：仙台（接待人：东北大学的猪狩悟）
- 10月12日至18日：东京（接待人：私人接待的久保寿纪，以及上智大学的高桥礼司）
- 10月18日至23日：名古屋（接待人：名古屋大学的青本和彦，以及岐阜大学的渡边敏弘）
- 10月23日至26日：长野（与青本夫妇参加会议并游览）
- 10月26日至28日：名古屋
- 10月28日—11月12日：京都（接待人：神保道夫，京都大学）
- 11月12日至14日：东京（接待人：久保寿纪）

6 澳大利亚，1987年11月15日—12月10日

日程安排：

- 11月15日至26日：悉尼（接待人：Alfred van der Poorten，麦考瑞大学；以及 David Hunt，新南威尔士大学）

[17] https://en.wikipedia.org/wiki/Boris_列维坦,
https://mathscinet.ams.org/mathscinet/MRAuthorID/198925

- 11月26日—12月10日：堪培拉（接待人：Rodney Baxter，澳大利亚国立大学）

7 印度，1987年12月11日–1988年1月8日

日程安排：

- 12月11日至14日：马德拉斯（拜访拉马努金夫人）
- 12月15日至16日：奇丹巴拉姆（安纳马莱大学会议）
- 12月17日：前往昆巴科纳姆游览（参观拉马努金故居）
- 12月18日：本地治里（安纳马莱大学会议闭幕式）
- 12月19日至26日：马德拉斯（在安娜大学举行会议，拉吉夫·甘地总理为国际会议揭幕）
- 12月27日至28日：浦那（会议）
- 12月29日至1月8日：孟买（访问塔塔研究所并参加会议）
- 1月9日至15日：伦敦，英国（文化活动和购物，不涉及数学）

参加的会议：

- 12月15日至18日：拉马努金百年国际会议 [50], 安纳马莱纳加尔，奇丹巴拉姆。
- 12月19日至21日：国际拉马努金百年诞辰会议在马德拉斯安娜大学举行。会议包括一场数论专题讨论会 [47]。
- 12月22日至27日：国际拉马努金诞辰百年会议在马德拉斯数学科学研究所举行（因政治动荡，会议于12月24日至25日中断）。
- 12月26日至28日：拉马努金诞辰百年国际分析学专题讨论会[51], 在浦那浦那大学举行。
- 1月4日至11日：拉马努金诞辰百年国际专题讨论会 [48], 在孟买塔塔基础研究所举行。

致谢 如果没有谢尔盖·苏斯洛夫向我提供的所有个人记忆中的信息，这篇论文不可能完成。在20世纪80年代，他是莫斯科的亲历者和积极参与者；1987年9月14日，他在莫斯科与 Askey 的会面，对其进一步的数学发展至关重要，也为 Askey 的俄罗斯之行提供了最有价值的联系人之一。谢尔盖，非常感谢你，也感谢你最后审阅并评论了我的草稿。

参考文献

[1] G. E. Andrews, 《Richard Askey 在印度》—1987年12月11日—1988年1月8日，预印本，2025年。[2] R. Askey（编），Gabor Szeg ¨o, 《论文集》第3卷，Birkh ¨auser，1982年。[3] R. Askey, 《连续 Hahn 多项式》，《物理学杂志 A》18（1985年），L1017–L1019。[4] R. Askey 和 G. Gasper, 《正 Jacobi 多项式和，II》，《美国数学杂志》98（1976年），709–737。[5] R. Askey 和 M. E. H. Ismail, 《递推关系、连分数与正交多项式》，《美国数学会回忆录》49（1984年），第300号。[6] R. Askey 和 J. Wilson, 《一组推广 Racah 系数或 $6j$ 符号的正交多项式》，《SIAM 数学分析杂志》10（1979年），1008–1016。[7] R. Askey 和 J. Wilson, 《一组超几何正交多项式》，《SIAM 数学分析杂志》13（1982年），651–655, [8] R. Askey 和 J. Wilson, 《一些推广 Jacobi 多项式的基本超几何正交多项式》，《美国数学会回忆录》54（1985年），第319号。[9] N. M. 阿塔基希耶夫和 S. K. Suslov, 《虚数自变量的 Hahn 和 Meixner 多项式及其一些应用》，《物理学杂志 A》18（1985年），1583–1596。[10] W. N. Bailey, 《广义超几何级数》，剑桥大学出版社，1935年。[11] H. Bateman, 《厄米意义下的正交函数：基本数的新应用》，《美国国家科学院院刊》20（1934年），63–66。[12] L. de Branges, 《比伯巴赫猜想的证明》，《数学学报》154（1985年），137–152。[13] P. Butzer 和 F. Jongmans, 《P. L. Chebyshev（1821–1894年）：生平与著作指南》，《近似理论杂志》96（1999年），111–138。[14]P. Chebyshev, 《论一个新的级数》（法语译本）´《物理—数学类通讯》，[18], 《圣彼得堡帝国科学院院刊》17, 第17号，257–260；另见 [37, 第1卷，第381–384]页。[15] P. Chebyshev, 《论最小二乘法插值》（法语译本），´《圣彼得堡帝国科学院回忆录》´。第七辑第1卷（1859年），第15号，1–24；另见 [37, 第1卷，第473–498]页。[16] P. Chebyshev, 《论插值》（俄语），´《圣彼得堡帝国科学院回忆录》´。第七辑第4卷（1864年），补充材料第5号；法语译本见[37, 第1卷，第541–560]页。[18]https://www

· 生物多样性图书馆 · org/item/173069#page/613/mode/1up

[17] P. Chebyshev, 《等距值的插值》（俄文）[19], 《帝国科学院纪事》25（1875年），补编第5号；法语译本见 [37, 第2卷，第217–242]页。[18]T. S. Chihara, 《正交多项式导论》, Gordon and Breach，1978年；Dover Publications 于2011年再版。[19] R. D. Cooper、M. R. Hoare 和 M. Rahman, 《随机过程与特殊函数：与经典正交多项式相关的某些正核的概率起源》, 《数学分析与应用杂志》61（1977年），262–291页。[20] V. G. Drinfel'd, 《量子群》，载于《国际数学家大会论文集》第1卷（加利福尼亚州伯克利，1986年），美国数学会，1987年，第798–820页。[21] C. F. Dunkl, 《与反射群相关的微分差分算子》, 《美国数学会汇刊》311（1989年），167–183页。[22] A. Erd´elyi, 《高等超越函数》第II卷, McGraw-Hill，1953年。[23] I. M. Gel'fand, 《超几何函数的一般理论》（俄文）, 《苏联科学院通报》288（1986年），第1期，14–18页。[24] I. M. Gel'fand 和 B. M. Levitan, 《由谱函数确定微分方程》（俄文）, 《苏联科学院消息》数学辑15（1951年），309–360页；英文译本见：《美国数学会译丛》（第2辑），第1卷，第253–304页，美国数学会，1955年。[25] I. M. Gel'fand、R. A. Minlos 和 Z. Ya. ˇSapiro, 《旋转群与洛伦兹群的表示及其应用》（俄文），国家物理数学文献出版社，莫斯科，1958年；英文译本：Pergamon，1963年。[26] I. M. Gel'fand 研讨会，S. Gel'fand 和 S. Gindikin（编），《苏联数学进展》第16卷，第1部分。.[27] W. Hahn, 《关于满足 q-差分方程的正交多项式》, 《数学通讯》2（1949年），4–34页。[28] G. J. Heckman 和 E. M. Opdam, 《根系与超几何函数 I（H-O）、II（H）、III（O）、IV（O）》, 《Compositio Mathematica》64（1987年），329–352、353–373页；67（1988年），21–49、191–209页。[29] M. E. H. Ismail 和 M. Rahman, 《相关的 Askey–Wilson 多项式》, 《美国数学会汇刊》328（1991年），201–237页。[30] S. Karlin 和 J. L. McGregor, 《Hahn 多项式、公式及其应用》, 《Scripta Mathematica》26（1961年），33–46页

[19]https://play.google.com/books/reader?id=AZc9AQAAIAAJ&pg=GBS.RA4-PA2&hl=en_US

[31] R. Koekoek、P. A. Lesky 和 R. F. Swarttouw，《超几何正交多项式及其 q-类似物》，施普林格出版社，柏林，2010年。[32] H. T. Koelink，《关于 Jacobi 多项式和连续 Hahn 多项式》，《美国数学会会刊》124（1996年），887–898。美国数学会，1993年。[33] T. H. Koornwinder，《SU(2) 的 Clebsch–Gordan 系数与 Hahn 多项式》，《新数学档案》（第3辑）29（1981年），140–155。[34] T. H. Koornwinder，《Krawtchouk 多项式：两种不同群论解释的统一》，《SIAM 数学分析杂志》13（1982年），1011–1023。[35] P. G. Lemari´e 和 Y. Meyer，《小波与希尔伯特基》，《伊比利亚美洲数学评论》2（1986年），1–18。[36] G. Mackie，附 R. Askey 撰写的补遗，《Arthur Erd´elyi》，《应用分析》8（1978年），1–10。[37] A. Markoff 和 N. Sonin（编），《P. L. Tchebychef 文集》[20]，圣彼得堡，1899/1907年，第1卷和第2卷；Chelsea 出版社于1962年在纽约重印。[38] A. F. Nikiforov 和 S. K. Suslov，《Hahn 多项式及其与群 SU(2) 的 Clebsch– Gordan 系数的联系》（俄文），苏联科学院应用数学研究所预印本（1982年），第83号。[39] A. F. Nikiforov 和 S. K. Suslov，《非均匀格点上的离散变量经典正交多项式》，《数学物理快报》11（1986年），27–34。[40] A. F. Nikiforov、S. K. Suslov 和 V. B. Uvarov，《Racah 多项式和对偶 Hahn 多项式：离散变量经典正交多项式的推广》（俄文），苏联科学院应用数学研究所预印本（1982年），第165号。[41] A. E. Nikiforov、S. K. Suslov 和 V. B. Uvarov，《离散变量经典正交多项式与三维旋转群的表示》，《泛函分析及其应用》19（1985年），182–193。[42] A. F. Nikiforov、S. K. Suslov 和 V. B. Uvarov，《离散变量经典正交多项式》（俄文），Nauka，莫斯科，1985年；英文译本：施普林格出版社，1991年。[43] A. F. Nikiforov 和 V. B. Uvarov，《特殊函数理论基础》（俄文），Nauka，1974年；法语译本： ´El ´éments de la th ´éorie des fonctions sp ´éciales，Mir，1976年。[20]第1卷：https://archive.org/details/oeuvresdepltche01chebrich/page/n7/mode/2up，

第2卷：https://archive.org/details/oeuvresdepltche02chebrich/page/n7/mode/2up

[44] A. F. Nikiforov 和 V. B. Uvarov，《数学物理特殊函数》（俄文），Nauka，1978年；法语版：Fonctions sp´eciales de la physique math´ematique，Mir，1983年；第二俄文版：Nauka，1984年；英文译本：Birkh¨auser，1988年。[45] S. M. Nikolsky，《数学分析教程》，第1卷和第2卷，俄文第二版（1975年）英译本，Mir 出版社，莫斯科，1985年。[46] S. M. Nikolsky，《回忆录》（俄文），斯捷克洛夫数学研究所，莫斯科，2003年。[47]《数论》，马德拉斯，1987年（国际拉马努金百年诞辰会议，安纳马莱大学，1987年12月21日），K. Alladi（编），数学讲义1395，施普林格出版社，1989年。[48]《数论及相关主题》（拉马努金诞辰百年国际专题讨论会，孟买，1988年1月4日至11日），牛津大学出版社，1989年。[49]《国际数学家大会论文集》，第1卷和第2卷（于华沙举行，1983年8月16日至24日），PWN 波兰科学出版社，华沙；北荷兰出版公司，阿姆斯特丹，1984年。[50]《拉马努金百年国际会议论文集》（安纳马莱大学，1987年12月15日至18日），R. Balakrishnan、K. S. Padmanabhan 和 V. Thangaraj（编），拉马努金数学学会，1988年。[51]《拉马努金国际分析研讨会》（浦那，1987年12月26日至28日），N. K. Thakare、K. C. Sharma 和 T. T. Raghunathan（编），印度麦克米伦有限公司，新德里，1989年。[52] V. Retakh（协调编辑），《Israel Moiseevich Gelfand》，《美国数学会通报》60（2013年），24–49，162–171。[53] R. Roy，《Chebyshev 关于正交多项式的研究》，载于《单变量与多变量多项式及其应用专题》，世界科学出版社，1993年，第495–512页。[54] Ya. A. Smorodinskii 和 S. K. Suslov，《群 SU(2) 的 Clebsch–Gordan 系数与 Hahn 多项式》（俄文），《核物理》35（1982年），192–201；英文译本：《苏联核物理杂志》35（1982年），108–113。[55] Ya. A. Smorodinskii 和 S. K. Suslov，$6j$ 符号与正交多项式（俄文）；《核物理》36（1982年），1066–1071；英文译本：《苏联核物理杂志》36（1982年），623–625。[56]S. K. Suslov，《我对 Richard Askey 教授温暖而随意记录的回忆》，预印本，2025年。[57] S. K. Suslov 和 B. Trey，《非相对论与相对论库仑问题中的 Hahn 多项式》，《数学物理杂志》49（2008年），012104，共51页。

[58] G. Szeg¨o, 《正交多项式》，美国数学学会，第三版，1967年。[59] M. Weber 和 A. Erd´elyi，关于罗德里格公式的有限差分类比，《美国数学月刊》59 (1952)，163–168。[60] J. A. Wilson，三项连带关系与一些新的正交多项式，载于：《页码 ´和有理逼近》，学术出版社，1977年，第227–232页。[61] J.A.Wilson，《超几何级数递推关系与一些新的正交函数》，博士学位论文，威斯康星大学麦迪逊分校，1978年。[62]J. A. Wilson，一些超几何正交多项式，《SIAM 数学分析杂志》11 (1980)，690–701。[63] J. A. Wilson，《由格拉姆行列式构造的正交函数》，《SIAM 数学分析杂志》22 (1991)，1147–1155。