arXiv:2601.05078v1 [math.GR] 8 Jan 2026

Artin 群周长的同构不变性

Giovanni Sartori

摘要。对于所有 Artin 群，我们从代数角度刻画其定义图的围长（即最短环的长度），并证明它是一个同构不变量。利用这一结果，我们证明基于圈图的 Artin 群具有同构刚性。

除围长外，我们还引入一种新的图不变量——加权围长，它将定义图的标记纳入考量。在双曲型二维 Artin 群这一类中，我们通过某些极小直角 Artin 子群刻画加权围长，并证明它是一个同构不变量。最后，在定义图无叶顶点这一附加假设下，我们证明加权围长等于 Hagen-Martin-Sisto 引入的交换图的围长。

2020年数学主题分类。20F65（主要），20F36，20F67。关键词。Artin 群，同构问题。

目录

引言 1
1. Artin 群背景 5 2. 二面体Artin群的 RAAG 子群 9 3. 圈型阿廷群的嵌入 11 4. Deligne 复形中的标准树的循环与圆盘图 14 5. 标准树环的长度与加权围长 18 6. 循环 Artin 群的极小嵌入 27 7. 交换图的围长 28 8. 循环 Artin 群的刚性 32 参考文献 35

引言

动机。Artin 群是由 Tits 引入的一类群，出现在数学的许多领域中，因为它们是自由群、自由阿贝尔群和辫群的推广，并且与 Coxeter 群密切相关 [30]。定义 Artin 群 A_Γ 的通常方法是通过有限的带标签单纯图 Γ给出一个表示；这种图通常称为定义图。同构的定义图会导出同构的 Artin 群，但反过来通常并不成立。事实上，这类群的主要开放问题之一是同构问题：

问题 A ([9, 问题 28])。给定两个带标记图 Γ 和 Λ，是否存在一种算法，可以判定 *Artin* 群 A_Γ 和 A_Λ 是否同构？

迄今为止，一般情形下的问题仍完全悬而未决，但在限制于某些子类 [3, 14, 32]时，已有一些结果。

寻求解决同构问题的一步，是找出定义图的同构不变量，换言之，即定义图所具有的性质

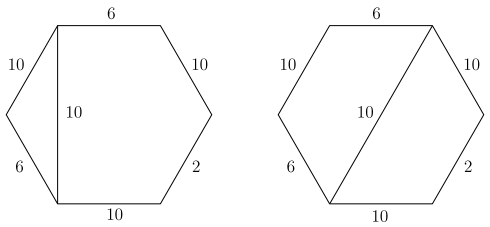

图1. 两个围长不同的带标记图。

这些性质在群同构下保持不变。Baudisch 证明了是直角型这一性质是一个同构不变量 [3]。Martin-Vaskou 证明了具有大类型在同构下保持不变；更确切地说，在二维 Artin 群这一类中，定义图的标签集合也是一个同构不变量 [24]。最近，Jones-Mangioni-Sartori 证明了具有分离顶点是一个同构不变量（事实上，同构的 Artin 群的大块集合之间存在双射） [20]。一般而言，一些基本图论性质的同构不变性仍是一个开放问题：

问题 B. 设 Γ 和 Λ 是带标记图，且群 A_Γ 和 A_Λ 同构。Γ和 Λ 的顶点数相同吗？它们的边数相同吗？它们的围长相同吗？

据猜想，若两个 Artin 群同构，则相应的定义图是扭曲等价的 （定义见 [11]）。扭曲等价是带标记图上的一种等价关系，其严格弱于同构。不过，两个扭曲等价的带标记图具有相同的顶点数和边数，且围长也相同（即最短圈子图的长度）。

结果陈述. 本文给出了定义图围长的一种代数刻画，证明它是一个同构不变量。

定理 C (定理 6.1)。 设 Γ 是一个带标记图； Γ 的围长等于满足以下条件的最小 $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ ： 存在一个含 n 个顶点的标记圈 C_n ， 以及一个嵌入 $A_{C_n} \to A_\Gamma$。

特别地，定义图的围长是一个同构不变量。

例 D. 图1中的两个带标记图具有不同的围长（分别为 3 和 4），因此根据定理 C，它们对应的 Artin 群不同构。

注意，使用其他现有方法无法区分这两个 Artin 群。这两个图都是连通的，且顶点数和边数相同。两个图的标记都是偶数，因此这两个群的阿贝尔化相同。标记集合不满足 Blasco-García–Paris 偶 Artin 群同构判据的假设 [5, 定理 5.1]。它们都不是大型类型，但都是二维的。Vaskou 的二维 Artin 群判据适用 [32, 定理 E], ，但仍无法区分这两个群：它们都没有欧几里得三角形，按重数计的标记集合相同，所有片段（每个顶点处的局部信息）也都相同。最后，这两个图都没有分离顶点 [20,定理 A]。

我们的方法还使我们能够证明，基于环的 Artin 群具有同构刚性。

定理 E (定理 8.1)。 设 Γ 和 Λ 是带标号的循环图；若 $A_\Gamma \cong A_\Lambda$，则 $\Gamma \cong \Lambda$。

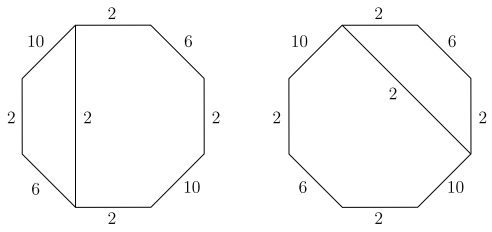

图 2. 两个围长相同但加权围长不同的标记图。

除了围长之外，我们还考虑另一种图不变量，即定义图的加权围长，也就是说，将标签至少为 3 的每条边各细分一次后所得图的围长（见定义 5.4）。在本文中，若 Λ 是单纯图，则用 R_Λ 表示与 Λ关联的直角Artin群。

定理 F (定理 6.2)**.** 设 A_Γ 是双曲型二维 *Artin* 群。Γ 的加权围长等于满足以下条件的最小 $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$：存在一个环 C_n，其上有 n 个顶点，并且存在一个嵌入 $R_{C_n} \to A_\Gamma$。

特别地，定义图的加权围长是双曲型二维 *Artin* 群类中的同构不变量。

例 G. 图 2 中的两幅图具有不同的加权围长（6 和 5）。两幅图均无三角形，且不含 $(2,2,2,2)$-正方形子图，因此它们是双曲型二维图（见定义 1.11）。定理 F 适用，可以区分与之关联的 Artin 群。

注意，这两个图的围长相同，因此定理 C（以及例 D 中列出的所有其他判据）都无法区分这两个群。

最后，借助定理 F，我们将加权围长 wg(Γ) 表示为交换图 Y_Γ 的围长。Hagen-Martin-Sisto 引入了后者，用以证明大型双曲型 Artin 群是分层双曲的 [16], ，并且该交换图在其中扮演着映射类群的曲线图的角色；此外，它与 Martin-Przytycki 的锥化 Deligne 复形 [23] 准等距。此外，当 Γ 进一步满足没有叶这一条件时，交换图与 Huang-Osajda-Vaskou 引入的交图 [17] 重合。

定理 H (定理 7.2)。设 A_Γ 是双曲型二维 *Artin* 群，并假设 Γ 没有叶。那么 加权围长 $(\Gamma) =$ 围长(Y_Γ)。

证明策略。我们的方法主要是几何方法。定理 C 和定理 F 的证明基于这样一个观察：当 A_Γ 是二维且为双曲型时，圈 Artin 群嵌入 A_Γ 会在 Deligne 复形 D_Γ 中诱导出一个标准树环 （见引理 3.11）。标准树经过平移后就是一个标准生成元的不动点集；我们所说的标准树环，是指由 $\{T_i\}_{i\in\mathbb{Z}_n}$ 棵标准树组成的序列，它们满足以下性质：对于每个 $i \in \mathbb{Z}_n$、$T_i \cap T_{i+1} \neq \varnothing$ 和 $T_{i-1} \cap T_i \cap T_{i+1} = \varnothing$（见定义 3.3）。值得注意的是，我们对标准树环的定义比 Blufstein-Martin-Vaskou [6] 提出的定义更宽松（见备注 3.4 ）。接着，我们定义标准树环的长度和加权围长的一个有意义的版本（见定义 5.5），并证明它们有仅取决于 Γ 的一致下界。这将是我们的主要技术结果：

命题 I (引理 5.3 和引理 5.7)。 设 A_Γ 是一个二维 *Artin* 群。对于 D_Γ 中的每个标准树环 $\mathscr{L} = \{T_i\}_{i\in\mathbb{Z}_n}$，

$$n \geq \operatorname{girth}(\Gamma).$$

此外，若 Γ 无三角形或属于双曲型，则

$$\operatorname{wg}(\mathscr{L}) \geq \operatorname{wg}(\Gamma).$$

进一步的问题。 我们以一些由本研究引出的问题作为本引言的结尾。

加权围长的完全不变性。 一般而言，尚不清楚定义图的加权围长是否是所有 Artin 群这一类中的同构不变量：

问题 J。 设 Γ 和 Λ 是带标记图。若 *Artin* 群 A_Γ 和 A_Λ 同构，是否有 $\operatorname{wg}(\Gamma) = \operatorname{wg}(\Lambda)$?

注意，根据定理 C，girth(Γ) = girth(Λ)；并且若此围长至少为 5，则 A_Γ 和 A_Λ 均属于双曲型，此时定理 F 适用，从而得到 wg(Γ) = wg(Λ)。因此，问题 J 可归结为理解 “ 围长较小 ” 的情形。当 A_Γ 的围长为 3 或 4 时，它不一定是二维双曲型，上文所述的标准树环论证也无法推广。值得注意的是，在证明定理 C 时，我们可以绕过这一限制：根据定义，围长为 3 的情形已是最小情形（环至少由三个顶点组成）；而特设论证适用于包含一个 (2，2，2，2)-正方形的无三角形图，这些图是二维的，但不属于双曲型。

识别环 *Artin* 子群。 正如“证明策略”一段中所提示的，如果 C 是一个标记圈，且 A_Γ 是一个双曲型二维 Artin 群，那么任意群单同态 $A_C \to A_\Gamma$ 都会在 D_Γ 中诱导出一个标准树环。自然会提出如下逆向问题：

问题 K。 设 A_Γ 是一个双曲型二维 *Artin* 群，且 $\mathscr{L} \subseteq D_\Gamma$ 是一个（简单的）标准树环。是否存在一个标记圈 C 和一个群单同态 $\varphi\colon\ A_C \to A_\Gamma$，使得 $\mathscr{L}$ 是与 φ 相关联的标准树环?

关于这个问题的另外两个更精细版本，请参见问题 7.10 和问题 7.11。

环 *Artin* 子群谱。 若要获得比围长更精细的不变量，可以考虑整个谱 spec(Γ),

$$\{n \in \mathbb{N}\colon \text{存在一个标记 } n\text{-环 } C_n \text{ 和一个嵌入 } A_{C_n} \to A_\Gamma\}.$$

除了在定理 C 中将 minspec(Γ) 实现为 girth(Γ) 之外，我们尚未发现有研究专门探讨这一对象。

论文结构。 第1节回顾 Artin 群的一些基本定义和结果，重点关注二维 Artin 群这一类。

要初步了解哪些圈 Artin 群能够嵌入双曲型二维 Artin 群，我们首先需要对二面体 Artin 群的 RAAG 子群进行分类。我们在第2节完成这项工作。

在第 3 节，我们引入标准树的环的定义，并证明圈 Artin 群的嵌入会在 Deligne 复形中确定标准树的循环。

在第 4 节中，我们说明如何为标准树环关联一个圆盘图，并回顾组合高斯–博内定理的版本，它是

本文的主要技术工具。在第 5 节中，我们将组合高斯–博内定理应用于这样的圆盘图，从而得到命题 I。

最后，我们推导出命题 I 的一些应用：第 6 节给出围长（定理 C）和加权围长（定理 F）的代数刻画；第 7 节将定义图的加权围长实现为交换图的围长（定理 H）；第 8 节证明定义图为环的 Artin 群具有同构刚性（定理 E）。

致谢。我谨向 Alexandre Martin 表示感谢，感谢他的支持；也感谢 Jacques Darné、Federica Gavazzi、Oli Jones、Giorgio Mangioni 和 Nicolas Vaskou 与我进行的有益交流。本研究部分获得 EPSRC 标准研究资助 UKRI1018 的支持。

1. Background on Artin groups

这里回顾一些关于 Artin 群的众所周知的事实。

1.1. Artin 群。

除非另有说明，本文假设所有 Artin 群的定义图都是连通的。这并不失一般性，因为定义图不连通等价于分解为自由积 [4, 命题 1.3]，因此这是一个同构不变量。

定义 1.1（Artin 群）。设 $\Gamma = (\mathrm{V}(\Gamma), \mathrm{E}(\Gamma))$ 是一个有限单纯图；

（1）Γ 的标记是一个映射 $m\colon \mathrm{E}(\Gamma) \to \mathbb{N}_{\geq 2}$。若 $\{s,t\}$ 是 Γ 的一条边，则我们用 m_{st} 代替 $m(\{s,t\})$。我们称有序对 (Γ, m) 为定义图[1]；（2）设 (Γ, m) 是一个定义图；与 (Γ, m) 相关联的 ***Artin*** 群是由表示给出的群 A_Γ

$$\langle \mathrm{V}(\Gamma) \mid \text{for every } \{s,t\} \in \mathrm{E}(\Gamma),\ \underbrace{sts\cdots}_{m_{st}} = \underbrace{tst\cdots}_{m_{st}} \rangle.$$

V(Γ) 中的元素通常称为该表示的标准生成元；（3）与 Γ 相关联的 ***Coxeter*** 群是 A_Γ 关于由 $\{s^2$ 生成的子群的正规闭包所得的商群 W_Γ： $s \in \mathrm{V}(\Gamma)\}$。

我们通常会忽略标记，并将 A_Γ 称为与 Γ 相关联的 Artin 群。

如果 Γ 是一个图，而 $\Lambda \subseteq \Gamma$ 是一个子图，回顾一下，若 Λ 的每条连接 Λ 中两个顶点的边也都是 Λ的边，则称 Λ 为由 V(Λ) 诱导的 Γ 诱导子图（或简称为诱导子图）。

对于 Γ 的任意顶点子集 S，我们可以考虑由 S生成的 A_Γ的子群 $\langle S\rangle_{A_\Gamma}$。这样的子群称为由 S 生成的 A_Γ的标准抛物子群，记作 A_S。若 Γ_S 表示由 S 张成的 Γ 的诱导子图，那么根据 van der Lek [31]的结果，A_S 与 A_{Γ_S} 同构。A_Γ 中与标准抛物子群共轭的子群称为 A_Γ的抛物子群。

定义 1.2（Artin 群的族）。称 Artin 群 A_Γ 为：

(1) 二面体，若 $|\mathrm{V}(\Gamma)| = 2$；(2) 直角型，若 Γ的所有标签均为 2，此时我们称 A_Γ 为直角Artin群（RAAG）；(3) 球面型，若相应的 Coxeter 群 W_Γ 是有限的；(4) 二维，若 A_Γ 的每个球面型标准抛物子群都对应于一个至多含两个顶点的子图。

[1]文献中也常用*Coxeter* 图 和表示图 这两个术语。

请注意，原则上，这些性质是定义图的性质，而非群论性质。事实上，直角型和二维实际上是群论性质。

Baudisch 证明，在直角Artin群中，任意两个元素要么彼此交换，要么生成一个非阿贝尔自由子群 [3]。由此可知，若 A_Γ 和 A_Λ 是同构的 Artin 群，且 A_Γ 是 RAAG，那么 A_Λ 也如此。鉴于这一观察，若 A_Γ 是 RAAG，我们便用 R_Γ 代替它。（这种记号选择略显不寻常，但有助于本文的论证。）

根据以下刻画，二维性是一个群论性质；这一刻画为专家所熟知。为求完整起见，我们将证明加以简化。

命题 1.3. 对于 Artin 群 A_Γ，以下条件等价：
(1) A_Γ 是二维的；(2) 若存在 $H \leq A_\Gamma$ 使得 $H \cong \mathbb{Z}^n$，
则 $n \leq 2$。
特别地，在 Artin 群这一类中，二维性是一个同构不变量。

证明。直接蕴含。根据二维 Artin 群的 K(π,1)猜想的解答，[10], A_Γ 具有一个维数至多为 2 的 CW复形作为分类空间，即其几何维数至多为 2。后者给出了 A_Γ 的上同调维数的上界（特别地，也给出了自由阿贝尔子群最大维数的上界）。

逆蕴含。假设 A_Γ 不是二维的。那么存在一个三角形子图 $\Delta \subseteq \Gamma$，使得抛物子群 A_Δ 是球面型的。不妨设 Δ至多有一条边的标签为 2；否则 A_Δ 将分解为标准抛物子群的直积（即 A_Δ 将是可约的）。令 e为 Δ中标签至少为 3 的一条边，并令 v 为 e的一个顶点。群 A_v、A_e 和 A_Δ 都是不可约的球面型群，因此它们的中心是无限循环群 [13, 定理 4.21], 所述，分别由 v、z_e 和 z_Δ 生成。于是，由$\{v, z_e, z_\Delta\}$ 生成的 A_Γ 的子群同构于 $\mathbb{Z}^3$。□

1.2. **Deligne 复形**。我们使用 A_Γ 的抛物子群来构造一个由 A_Γ 作用的单纯复形。

定义 1.4（Deligne 复形）。设 Γ 为一个有限标记图；与 Γ 相关联的 单纯 *Deligne*复形（或简称 Deligne 复形） D_Γ 是下列偏序集的单纯实现

$$\{g \cdot A_\Lambda : g \in A_\Gamma \text{ and } \Lambda \subseteq \Gamma \text{ such that } A_\Lambda \text{ is of spherical type}\},$$

按包含关系排序。

更明确地说，D_Γ 是按如下方式定义的单纯复形：

- D_Γ 的顶点与 A_Γ 的球面型标准抛物子群的左陪集一一对应；
- 对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 和每个 $g \in A_\Gamma$，若 $\Gamma_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \Gamma_n$，则顶点 $g \cdot A_{\Gamma_0}$、.....、$g \cdot A_{\Gamma_n}$ 张成 D_Γ 的一个 n 维单纯形。

群 A_Γ 通过左乘在 D_Γ 上作用，且该作用余有界且无反转；也就是说，若 A_Γ 中的一个元素将某个单形映射到自身，则它逐点固定该单形。我们用 K_Γ 表示 D_Γ 的子复形，它对应于以下集合的单纯实现：

$$\{A_\Lambda : \Lambda \subseteq \Gamma \text{ such that } A_\Lambda \text{ is of spherical type}\}$$

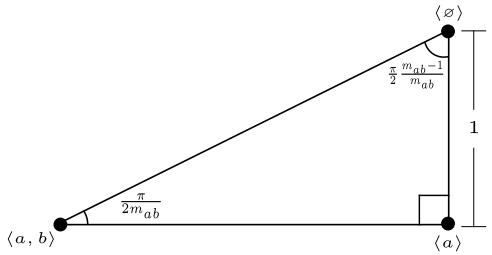

图3。 D_Γ的一个三角形上的 Moussong 度量。

并称其为作用 $A_\Gamma \curvearrowright D_\Gamma$的典范基本域。不难验证， K_Γ 确实是一个基本域。

对于 Γ的每个诱导子图 γ ，其单纯实现 K_γ 也以类似方式定义，并且是 K_Γ的一个子复形。

当 A_Γ 是一个二维 Artin 群时， A_Γ 中球型的抛物子群至多基于两个顶点，由此可知 D_Γ 是一个维数至多为二的单纯复形。

定义 1.5 （顶点类型）。 设 A_Γ 是一个二维 Artin 群；

- 平凡子群的左陪集称为 D_Γ的零型顶点 （或类型为 0 的顶点）；
- 循环标准抛物子群的左陪集称为 D_Γ 的一型顶点（或类型 1 的顶点）；
- 二面体球型抛物子群的左陪集称为 D_Γ 的二型顶点 （或类型 2 的顶点）；

特别地，二型顶点对应于形如 $g \cdot \langle a, b\rangle$ 的左陪集，其中 $g \in A_\Gamma$ 和 $\{a, b\} \in$ E(Γ)，因此我们可以讨论二型顶点的标签 m_{ab} 。

给 D_Γ 赋予度量通常很方便。本文将为单纯Deligne复形赋予Moussong度量，下面介绍这一度量。对于每条边 $\{a, b\} \in$ E(Γ)，我们按如下方式在顶点为 $\langle\varnothing\rangle$、$\langle a\rangle$ 和 $\langle a, b\rangle$ 的三角形上定义度量：

- 边 $\{\langle\varnothing\rangle, \langle a\rangle\}$ 的长度设为单位长度；
- $\langle a\rangle$处的角为直角；
- $\langle a$处的角， $b\rangle$ 为 $\frac{\pi}{2m_{ab}}$

其余边和角的设置使得该三角形为欧几里得三角形。沿公共边粘合两个三角形时，粘合映射是一个等距变换。参见图3。

定理1.6 ([10, 命题 4.4.5；23，第 3 节。1])。 设 A_Γ 是一个二维 Artin 群。 D_Γ 上的Moussong度量是一个 CAT(0)度量。此外，若 A_Γ为双曲型（见定义 1.11），则 D_Γ 可赋予 CAT(-1)度量。

除单纯Deligne复形外，我们还考虑其立方对应物。

定义 1.7 （立方 Deligne 复形）。设 Γ 是一个有限标记图；与 Γ 相关联的立方 ***Deligne*** 复形 C_Γ 是一个立方复形，其顶点集与 D_Γ 相同，并且 Γ 的每个球面类型 k-团都张成一个单位 k-立方体。

更明确地说，设 $g \in A_\Gamma$ ，并令 $\Lambda \subseteq \Gamma$ 为球面型子图。对于每个子图 $M \subseteq \Lambda$，如果 $|$V(Λ) $\smallsetminus$ V(M)$| = k$，那么顶点 $\{gA_{M'} : M \subseteq M' \subseteq \Lambda\}$ 张成一个 C_Γ 的酉 k-立方体。

回顾一下，如果一个图的每个环子图都至少有四条边，则该图是 无三角形 的。

定理 1.8 ([10, 定理 4.3.5])。 设 A_Γ 是一个无三角形 Artin 群。立方 Deligne 复形（赋予标准立方度量）是一个 CAT(0) 立方复形。

显然， A_Γ 通过左乘作用在 D_Γ 和 C_Γ 上，且该作用没有反转。单纯 Deligne复形可以通过对立方 Deligne 复形作适当细分得到，因此，关于 A_Γ 作用于 D_Γ 的所有结果都适用于其作用于 C_Γ的情形。特别地，在二维情形下，椭圆元素已得到完整分类。

引理 1.9 ([16, 引理 2.27；23，第 4] 节)。 设 A_Γ 是一个二维 Artin 群，且 $g \in A_\Gamma \smallsetminus \{1\}$ 是一个在 D_Γ上椭圆作用的元素：

(1) 若 g 共轭于某个标准生成元的非平凡幂，则其不动点集是一个包含于 $D_\Gamma^{(1)}$ 中的树，称为与 g相关联的标准树 T_g；(2) 否则， g 的不动点集恰好是一个 2 型顶点。

对于每个标准生成元 $a \in$ V(Γ)， T_a 的整体稳定子与 A_Γ 中 a 的中心化子（等价地，正规化子）一致。该中心化子具有 $\langle a\rangle \times F$ 的形式，其中 F 是一个有限秩自由群。

根据不动点集，椭圆元素分为树椭圆和顶点椭圆两类。我们利用这一对在 Deligne 复形上椭圆作用的元素的刻画，证明二面体抛物子群在 A_Γ 中所有同构于二面体 Artin 群的子群中按包含关系是极大的。

引理 1.10。 设 A_Γ 是一个二维 Artin 群， Γ 中有一条标签为 $m_{ab} \geq 3$ 的边 $\{a, b\}$ 。假设存在 $g \in A_\Gamma$、 $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ 和一个子群 $H \leq A_\Gamma$，使得 $g\langle a, b\rangle g^{-1} \leq H$ 且 $H \cong$ DA$_m$。那么 $H = g\langle a, b\rangle g^{-1}$。

证明。 经过 A_Γ 中的共轭后，不失一般性地假设 $g = 1$。由于m， $m_{ab} \geq 3$， H和 $\langle a$， $b\rangle$ 都是球面不可约的，因此其中心是无限循环群，分别记为 Z(H) $= \langle z_H\rangle$ 和 Z($\langle a$， $b\rangle$) $= \langle z_{ab}\rangle$。由于 $\langle a$， $b\rangle \leq H$，可得$z_H = z_{ab}^i$，其中 $i \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$。由此可知，对每个 $h \in H$，在 D_Γ

$$h \cdot \langle a, b\rangle = h \cdot \mathrm{Fix}(z_{ab}^i) = h \cdot \mathrm{Fix}(z_H) = \mathrm{Fix}(hz_Hh^{-1}) = \mathrm{Fix}(z_H) = \mathrm{Fix}(z_{ab}^i) = \langle a, b\rangle,$$

也就是说， H稳定顶点 $\langle a$， $b\rangle$，因此 $H \leq \langle a$， $b\rangle$。 □

1.3. **双曲型 Artin 群**。 我们所说的双曲群 是指按词度量双曲的（或 Gromov 双曲的）。尽管真正的双曲 Artin 群为数甚少，但我们可以探究其对应的 Coxeter 群何时是双曲的。

定义 1.11 （双曲型）。Artin 群 A_Γ 是双曲型，当且仅当其对应的 Coxeter 群 W_Γ 是双曲的。

对于二维 Artin 群，属于双曲型等价于同时满足以下两个条件 [25]:

(1) Γ 的每个（p， q， r）-三角形子图都满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$;
(2) Γ 不包含任何作为诱导子图的 (2，2，2，2)-正方形。

当 A_Γ 是双曲型二维时， A_Γ 中与二面体 Artin 群抽象同构的子群已得到分类。阿贝尔子群的分类归功于 Martin-Przytycki。

定理1.12 ([23, 推论C]). 设 A_Γ 是双曲型二维 Artin 群，且 H 是 A_Γ 的一个几乎为 $\mathbb{Z}^2$的子群。那么以下情况之一成立：

- H 包含于 A_Γ的一个二面体抛物子群中；
- H 包含于 A_Γ的某个标准生成元的共轭元的中心化子中。特别地， H 包含某个标准生成元的共轭元的非零次幂。

转向非阿贝尔情形，Vaskou 对与二面体 Artin 群同构的二维 Artin 群子群给出了完整分类 [32, 定理D]。从该分类可知，奇异二面体子群（即那些不能共轭到二面体抛物子群中的子群）仅出现在非双曲型 Artin 群中。相反，双曲型带来了更严格的分类。为方便起见，我们补充这一事实的证明。

引理1.13。设 A_Γ 是一个双曲型二维 Artin 群，且 $H \leq A_\Gamma$ 是一个几乎同构于某个二面体 Artin 群 DA$_m$的子群，其中 $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$满足相应条件。那么 H 包含于一个二面体抛物子群中。

证明。 不妨设 Γ 不由单条边组成，否则该陈述显然成立。沿用 ˆ Martin-Przytycki 的构造，令 D_Γ 表示 A_Γ 的锥化 Deligne 复形。由于 A_Γˆ 是双曲型的， D_Γ 由定理 A] 可赋予 CAT(−1) 度量，并具有圆柱型作用A_Γ [23, 。因为 H 几乎分裂为 $\mathbb{Z} \times F$ 无限群的直积， H 不是圆柱双曲的 [27, 推论 7.3]。因此，根据定理II.2.8；27，定理 ˆ 1.1]， H 具有 ˆ 有界轨道，因而在 D_Γ [8, 上椭圆地作用。现在我们根据 D_Γ 的顶点区分两种情形，即 H 所固定的顶点。

如果 H 固定 D_Γ 的一个顶点，那么该顶点必然是类型 2 的，因此 H 包含于 A_Γ 的二面体抛物子群中。

如果 H 固定一个锥点，那么 H 全局稳定 D_Γ的一棵标准树；也就是说，存在 $a \in$ V(Γ)，使得 H 在 C$_{A_\Gamma}$(a) $\cong \mathbb{Z} \times F$内共轭。这意味着 H 几乎是 $\mathbb{Z}^2$，因为 $\mathbb{Z} \times F$ 中不存在广义辫关系，这与 $m \geq 3$ 的假设矛盾。□

由引理 1.10 和引理1.13可直接得到以下标签集的包含关系。

引理 1.14。设 A_Γ 和 A_Λ 是同构的二维 Artin 群。若 A_Λ 是双曲型，则

$$\{m_e : e \in \mathrm{E}(\Gamma) \text{ and } m_e \geq 3\} \subseteq \{m_e : e \in \mathrm{E}(\Lambda) \text{ and } m_e \geq 3\}.$$

证明。设 φ: $A_\Gamma \to A_\Lambda$ 是一个同构，且设 $\{a, b\} \in$ E(Γ) 是一条标签为 $m_{ab} \geq 3$ 的边。由引理1.13，存在 $g \in A_\Gamma$ 和 $\{x, y\} \in$ E(Λ)，满足 $m_{xy} \geq 3$，使得 $\varphi(\langle a,\ b\rangle) \subseteq \varphi(g)\langle x,\ y\rangle\varphi(g)^{-1}$。由此可得 $g^{-1}\langle a,\ b\rangle g \subseteq \varphi^{-1}(\langle x,\ y\rangle)$。由引理 1.10 $g^{-1}\langle a,\ b\rangle g = \varphi^{-1}(\langle x,\ y\rangle)$，因此 $m_{ab} = m_{xy}$。 □

2. 二面体 Artin 群的 RAAG 子群

我们刻画了哪些 RAAG 能作为二面体Artin群的子群。了解二面体Artin群可能具有的这类子群，是通过局部到整体策略理解一般二维 Artin 群可能具有的 RAAG 子群的关键。

定义 2.1 (路径、环、荚图)。 设 $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$:

(1) n 个顶点上的单纯路径 是图 P_n ，其顶点集为

$$\mathrm{V}(P_n) = \{u_i : i \in \{1, \dots, n\}\}$$

和边集

$$\mathrm{E}(P_n) = \{\{u_i, u_{i+1}\} : i \in \{1, \dots, n-1\}\};$$

(2) 对于 $n \geq 3$， n 顶点上的 单纯圈是图 C_n ，其顶点集为

$$\mathrm{V}(C_n) = \{u_i : i \in \mathbb{Z}_n\}$$

和边集

$$\mathrm{E}(C_n) = \{\{u_i, u_{i+1}\} : i \in \mathbb{Z}_n\};$$

(3) 单纯的 n-荚图是图 S_n ，其顶点集为

$$\mathrm{V}(S_n) = \{u_i : i \in \{0, \dots, n\}\}$$

和边集

$$\mathrm{E}(S_n) = \{\{u_0, u_i\} : i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

对于 $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$，令 DA$_m$ 表示标签为 m 的二面体 Artin 群。本节的目标是证明以下刻画：哪些定义在某些路径 P_n 或某些环 C_n 上的 RAAG 可以作为子群嵌入 DA$_m$:

引理 2.2。设 $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$;

(1) 二面体 Artin 群 DA$_m$ 不含任何圈型右阿廷群作为子群；(2) 若 $m \geq 3$ 且 DA$_m$ 含有一个与 R_{P_n} 同构的子群，则 $n \leq 3$；(3) 若 DA$_2$ 含有一个与 R_{P_n} 同构的子群，则 $n \leq 2$。

值得指出的是，DA$_2 \cong \mathbb{Z}^2$ ，以及当 $m \geq 3$ 时的 DA$_m$ ，含有一个形如 $\mathbb{Z} \times F_k$ 的有限指数子群，其中 $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ [11, 见第 2] 节。特别地，DA$_m$ 几乎同构于一个 RAAG R_{S_k}。为了证明引理 2.2，我们将首先弄清楚哪些 RAAG 可以嵌入 R_{S_k} ，然后证明二面体 Artin 群的每个 RAAG 子群都嵌入该 R_{S_k} 子群。

定理 2.3 ([21, 定理 1.11])。设 Γ， Λ 是有限单纯图，且 Γ无三角形；以下条件等价:

(1) 存在群单同态 $R_\Lambda \to R_\Gamma$；(2) Λ 是 ext(Γ)
的诱导子图。

这里，ext(Γ) 表示 Γ的扩张图：其顶点集为 $\{gvg^{-1} : v \in \mathrm{V}(\Gamma)\ g \in R_\Gamma\}$ ，且当两个对应的群元素在 R_Γ 中可交换时，这两个顶点相邻。

引理 2.4. 设 $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$:

(1) 群 R_{S_k} 不包含任何与 R_{C_n}同构的子群；(2) 群 R_{S_k} 包含一个与 R_{P_n} 同构的子群，当且仅当 $n \leq 3$。

证明。 由于 S_k 无三角形，根据定理 2.3， R_{S_k} 的直角阿廷子群与 ext(S_k) 的诱导子图相对应。荚图 S_k 分解为一个联 $\{u_0\} * \{u_1, \dots, u_k\}$，因此 ext($S_k$) $=$ ext($\{u_0\}$) $*$ ext($\{u_1, \dots, u_k\}$) [21,引理 3.5]。根据扩张图的定义，我们有 ext($\{u_0\}$) $= \{u_0\}$，而 ext($\{u_1, \dots, u_k\}$) 是一个具有可数多个顶点的离散图。因此，ext(S_k) 是形如 $\{v\} * \{v_i : i \in \mathbb{Z}\}$ 的联。作为诱导子图，它不含任何环，且只含至多有三个顶点的路径。□

引理 2.5。设 Γ是有限单纯标记图， Λ 是有限单纯图，且 G 是一个与 A_Γ几乎同构的群。以下条件等价：

(1) A_Γ 含有一个与 R_Λ同构的子群；(2) G 含有一个与 R_Λ同构的子群。

证明。设 H 是 G的一个有限指数子群，且与 A_Γ 同构，并设 $d = |G : H|$。由 $\{a^d : a \in V(\Lambda)\}$ 生成的 G 的子群包含于 H 中，且根据 R_Λ [12,定理 1]，它与之同构。另一个蕴含在一般情形下成立。□

当 G 是二面体 Artin 群时，我们得到引理 2.2。

引理 *2.2* 的证明。对于 $m \geq 3$，DA_m 几乎是某个 $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ 的 $\mathbb{Z} \times F_k$，由引理 2.4 和引理 2.5 可得结论。对于 $m = 2$，只需注意到 DA_2 与 R_{P_2} 相同，且 $ext(P_2) = P_2$。□

推论 2.6. 设 $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$，且 C_n 是一个标记圈。二面体 Artin 群不包含任何与 A_{C_n} 同构的子群。

证明. 反设存在 $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ 和一个标记圈 C_n，使得 DA_m 包含一个与 A_{C_n} 同构的子群。对于 $i \in \mathbb{Z}_n$，若$m_{i,\ i+1} \geq 3$，则记 $z_{i,\ i+1}$ 为 $\langle u_i,\ u_{i+1}\rangle$ 中心的生成元。由 A_{C_n} 生成的子群

$$\{u_i^4 : i \in \mathbb{Z}_n\} \cup \{z_{i,i+1}^4 : i \in \mathbb{Z}_n \text{ and } m_{i,i+1} \geq 3\}$$

与圈型右阿廷群 [18, 同构，这与定理 1.1], 和引理 2.2 矛盾。□

3. 圈型阿廷群的嵌入

我们从几何视角研究双曲型二维 Artin 群的圈型阿廷子群。我们将看到，每个圈型阿廷子群都对应于 Deligne 复形中的一个标准树环。

定义 3.1（圈 Artin 群）。设 C_n 是一个标记圈；我们称群 A_{C_n} 为一个圈 *Artin* 群。如果 A_{C_n} 是直角型的，那么我们将其记作 R_{C_n}，并称之为圈型右阿廷群。

为了简化记号，我们从不明确指出 C_n 的边标记，但始终应将它视为一个标记图。

为适应循环 Artin 群嵌入的表述，我们只使用命题 1.3 的直接推论形式：

引理 3.2。设 A_Γ 是一个双曲型二维 Artin 群；不存在任何群单同态 $R_{C_3} \to A_\Gamma$。

给定一个循环 Artin 群嵌入 $A_{C_n} \to A_\Gamma$，我们研究由 A_{C_n} 在 A_Γ 中的标准生成元的最小集所张成的 D_Γ 的子复形。我们的目标（引理 3.11）是证明这样的子复形是一个标准树环。现在我们对二维 Artin 群 A_Γ 定义标准树环。回顾一下，标准树在平移意义下是 A_Γ 的一个标准生成元的不动点集。

定义 3.3（标准树的循环）。设 $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$；$D_\Gamma$ 中的一个标准树环是由不同标准树 $\{T_i\}_{i\in\mathbb{Z}_n}$ 构成的有限集合，且对于每个 $i \in \mathbb{Z}_n$：

(1) $T_i \cap T_{i+1} \neq \varnothing$；(2) $T_{i-1} \cap T_i \cap T_{i+1} = \varnothing$。

对于每个 $i \in \mathbb{Z}_n$，我们将 v_i 称为交点顶点 $T_i \cap T_{i+1}$（根据引理 4.3]，该顶点必定唯一）。若将测地线段 $[v_i, v_{i+1}]$ 首尾相接所得的 D_Γ 环路是嵌入回路，则标准树环 $\{T_i\}_{i\in\mathbb{Z}_n}$ 称为简单。

由 $\{T_i\}_{i\in\mathbb{Z}_n}$ 构成的子循环 是一个单射 $\alpha\colon \mathbb{Z}_k \to \mathbb{Z}_n$，满足 $\{T_{\alpha(j)}\}_{j\in\mathbb{Z}_k}$是一个标准树环。

注3.4。 Blufstein-Martin-Vaskou 的著作 [6, 定义 6.2], 中也使用了“标准树环”（以及“标准树环路”）这一术语，但我们的概念较弱。具体而言，我们不要求：对于任意不同的指标 i，$j \in \mathbb{Z}_n$，若 $j \neq i \pm 1$，则子群 $\langle g,\ h\rangle_{A_\Gamma}$ 是非阿贝尔自由群，其中 $T_i =$不动点集(g)且$T_j =$不动点集(h)。

我们指出，每个标准树环都含有一个简单子循环。

引理 3.5。 设 $\mathscr{L} = \{T_i\}_{i\in\mathbb{Z}_n}$ 是一个非简单的标准树环。存在 $j \in \{1,\dots,n\}$ 和 $k \in \{2,\dots,n-1\}$，使得 $\mathscr{M} = \{T_j, T_{j+1}, \dots, T_{j+k}\}$是 $\mathscr{L}$的一个简单子循环。

证明。 对于每个 $i \in \mathbb{Z}_n$，令 $v_i \coloneqq T_i \cap T_{i+1}$，并用 γ_i 表示测地线段 $[v_i, v_{i+1}]$。令 m 为满足 $\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_{m-1}$ 是嵌入回路这一性质的最小元素，并注意到，由于 $\mathscr{L}$ 不是简单的，$m < n$。令 $j \in\{1,\dots,m-1\}$ 为满足 $\gamma_m \cap \gamma_j \neq \varnothing$ 这一性质的最大元素。设 $k = m-j$，模 n。根据构造，环 $\{T_j, T_{j+1}\dots, T_{j+k}\}$ 是简单的。□

3.1. **一般情形**。 在本小节中，我们始终在以下设定下讨论。

设定 3.6。 设 A_Γ 是一个双曲型二维 Artin 群，令 $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$，并令 φ: $A_{C_n} \to A_\Gamma$ 为群单态。由于 $\{u_i\}_{i\in\mathbb{Z}_n}$ 是 C_n 的顶点集，我们设 $y_i \coloneqq \varphi(u_i)$。为简化记号，我们用 $m_{i,\ i+1}$ 表示边 $\{u_i, u_{i+1}\}$ 的边标。

引理 3.7. 我们在设定 3.6 的假设下进行讨论。对于每个 $i \in \mathbb{Z}_n$，y_i 在 D_Γ 上椭圆地作用。

证明. 不妨对指标作平移。反设 y_2 在 D_Γ 上双曲型地作用。我们分两种情形讨论。

如果标签 m_{12} 和 m_{23} 中至少有一个不是 2，不妨设为 $m_{12} \geq 3$，那么由引理1.13可知，$\langle y_1, y_2\rangle$ 是 A_Γ 的一个二面体抛物子群，也就是说，它是 D_Γ 中某个顶点的稳定子，这就导致矛盾。

假设 $m_{12} = m_{23} = 2$。由于 $\langle y_1, y_2\rangle \cong \mathbb{Z}^2$，它包含在 A_Γ 的某个标准生成元的共轭元的中心化子中（见定理1.12）。经过共轭后，不妨假设存在 $a \in$ V(Γ)，使得 $\langle y_1, y_2\rangle \leq$ C$_{A_\Gamma}(a)$。由于 y_2 在 D_Γ 上双曲型地作用，并稳定标准树 T_a，因此 Axis$(y_2) \subseteq T_a$。对子群 $\langle y_2, y_3\rangle$应用同样的论证，可得存在 $b \in$ V(Γ) 和 $g \in A_\Gamma$，使得 $\langle y_2, y_3\rangle \leq g$ C$_{A_\Gamma}(b)g^{-1}$，且 Axis$(y_2) \subseteq g \cdot T_b$。由于不同的标准树至多相交于一个顶点 [23, （备注 4.4],），标准树 T_a 和 $g \cdot T_b$ 必定重合，因此 $\langle y_1, y_2, y_3\rangle \leq$ C$_{A_\Gamma}(a)$。利用同构 C$_{A_\Gamma}(a) \cong \langle a\rangle \times F$（其中 F 是某个有限生成自由群），对于 $i \in \{1,2,3\}$，记 $y_i =(a^{n_i}, x_i)$。由于 y_1 和 y_2可交换，因此 x_1 和 x_2 也必定可交换；这意味着存在 $z' \in F \smallsetminus \{1\}$，使得 $x_1, x_2 \in \langle z'\rangle$，因为 F 的任意阿贝尔子群都是循环的。同理，由于 y_2 和 y_3 可交换，存在 $z'' \in F \smallsetminus \{1\}$，使得 $x_3 \in \langle z''\rangle$。特别地，存在 $z \in F$，使得 $x_1, x_2, x_3 \in \langle z\rangle$。由此可知 y_1 和y_3 可交换，这与引理 3.2 矛盾。□

引理 3.8。 我们在设定 3.6 的假设下进行讨论。对于每个 $i \in \mathbb{Z}_n$，Fix(y_i) 与 Fix(y_{i+1}) 相交。

证明。 因为 $\langle y_i,\ y_{i+1}\rangle \cong \mathbf{DA}_m$ 对某个 $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$成立，所以它要么包含在 A_Γ 的一个二面体抛物子群中，要么在 $m = 2$时包含在某个标准生成元共轭元的换位子群中（见引理1.13和定理1.12）。在第一种情况下， y_i 和 y_{i+1} 都不动一个 2 型顶点。在第二种情况下，经过共轭，我们可以假设存在 $a \in$V(Γ)，使得 $\langle y_i,\ y_{i+1}\rangle \leq$C$_{A_\Gamma}$($a$) $\cong \langle a\rangle \times F$。如果 y_i 和 y_{i+1} 中有一个是树椭圆的，那么结论成立；如果二者都是顶点椭圆的，那么它们必定不动同一个顶点；否则， a 所关联的标准树上的标准乒乓论证表明，它们会生成一个非阿贝尔自由子群。□

引理 3.9. 我们在设定 3.6 的假设下进行讨论。对于每个 $i,\ j \in \mathbb{Z}_n$，如果 y_i 和 y_j 在 D_Γ 上树椭圆地作用，并且固定同一棵标准树，那么 $i = j$。

证明。 在 D_Γ中平移后，不妨设 y_i 和 y_j 固定标准树T_a，其中 $a \in$ V(Γ)。特别地，我们有 $\langle y_i,\ y_j\rangle \leq \langle a\rangle$，当且仅当 $i = j$时，这种情况才会发生。□

引理 3.10. 我们在设定 3.6 的假设下进行讨论。设 $k = |\{i \in \mathbb{Z}_n : y_i$ 在 $D_\Gamma\}|$上树椭圆地作用。那么 $k \geq 3$，并且存在 k 棵不同的标准树 T_1、……、T_k，它们属于 D_Γ，使得

$$\bigcup_{i\in\mathbb{Z}_n} \mathrm{Fix}(y_i) = \bigcup_{j=1}^{k} T_j.$$

证明。 我们通过说明 $k \in \{0, 1, 2\}$ 这些情形不符合条件，来证明 $k \geq 3$。注意，情形 $A_{C_n} = \mathbb{Z}^3$ 已由引理 3.2 排除。此外，一旦我们证明 φ 的像包含在一个二面体子群中，就可利用推论 2.6 得到矛盾。

如果 $k = 0$，那么这意味着所有 y_i 都在 D_Γ 上顶点椭圆地作用。根据引理 3.8，所有 y_i 必须固定同一个顶点，也就是说， φ 的像包含于 A_Γ 的一个二面体子群中。

如果 $k = 1$，那么我们可以假设 y_1 是唯一的树椭圆元素。根据引理 3.8，元素 y_2，…，y_n 固定同一个 2 型顶点，该顶点位于标准树 Fix(y_1) 中。特别地，φ 的像包含于一个二面体抛物子群中，这与此矛盾。

假设 $k = 2$。对指标作适当平移后，我们可以假设 T_1 =Fix(y_1)，并记 $v := T_1 \cap T_2$；这恰好是一个顶点，因为两个不同的标准树至多相交于一个顶点 [23, 备注 4.4]。反设 Fix(y_2) 既不是 v，也不是 T_2。根据引理 3.9， y_2 顶点椭圆地作用，因此固定了 T_1 的一个顶点，该顶点不同于 v。于是可得，存在 $i \in \{3, \ldots, n-1\}$，使得 Fix(y_i) $= T_1$，这与引理 3.9 矛盾。对 T_2 重复同样的论证可得，所有 y_i 都必须固定顶点 v，也就是说， φ 的像包含于一个二面体 Artin 群中。

为了证明包含关系，只需作如下观察：如果 y_i 是树椭圆的，那么 Fix(y_i) 是某个 T_j；如果 y_i 是顶点椭圆的，那么 Fix(y_i) ⊆Fix(y_{i-1})。□

引理 3.11。 我们在设定 3.6 的假设下进行讨论。设 A_Γ 是一个双曲型二维 Artin 群，设 $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$，且设 φ: $A_{C_n} \to A_\Gamma$ 是一个群单态。设 k，并令 T_i's 如引理 3.10 的陈述所述。则 $\{T_i\}_{i\in\mathbb{Z}_k}$ 是标准树环。

证明。设 $i \in \mathbb{Z}_n$。引理 3.8 给出 $T_i \cap T_{i+1} \neq \varnothing$，而引理 2.2 给出 $T_{i-1} \cap T_i \cap T_{i+1} = \varnothing$。□

3.2. **RAAG 情形**。我们将注意力转向圈 RAAG 的嵌入。它们比圈型 Artin 群的嵌入更刚性，具体而言：

引理 3.12。设 A_Γ 是一个双曲型二维 Artin 群，设 $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$，并设 $\varphi\colon R_{C_n} \to A_\Gamma$ 是群单态。设 $i \in \mathbb{Z}_n$。

(1) 若 $\varphi(u_i)$ 和 $\varphi(u_{i+1})$ 都在 D_Γ 上树椭圆地作用，则 $\mathrm{Fix}(\varphi(u_i)) \cap \mathrm{Fix}(\varphi(u_{i+1}))$ 由一个标签为 2 的二型顶点组成。(2) 若 $\varphi(u_i)$ 树椭圆地作用，且 $\varphi(u_{i+1})$ 在 D_Γ 上顶点椭圆地作用，则 $\mathrm{Fix}(\varphi(u_{i+1}))$ 由一个标签至少为 3 的二型顶点组成，并且 $\varphi(u_{i+2})$ 在 D_Γ 上树椭圆地作用。(3) 元素 $\varphi(u_i)$ 和 $\varphi(u_{i+1})$ 不可能都在 D_Γ 上顶点椭圆地作用。

证明。对于 $j \in \mathbb{Z}_n$，令 $y_j = \varphi(u_j)$。不妨假设 $i = 1$。根据引理 3.8 和引理 3.9，不动点集(y_1)与不动点集(y_2)相交于一个二型顶点$v := g\langle a,\ b\rangle$，其中某个 $\{a, b\} \in \mathrm{E}(\Gamma)$，且某个 $g \in A_\Gamma$。

不妨设 y_1 和 y_2 都树椭圆地作用。因为 y_1 和 y_2 固定 v，所以有 $y_1, y_2 \in g\langle a,\ b\rangle g^{-1}$。因此，存在一组顶点 $\{x_1, x_2\} = \{a, b\}$ 以及两个元素 $h_1, h_2 \in \langle a,\ b\rangle$，使得 $y_1 = (gh_1)x_1(gh_1)^{-1}$ 且 $y_2 = (gh_2)x_2(gh_2)^{-1}$ [7, 定理 1.1]。因为 $\langle y_1,\ y_2\rangle \cong \mathbb{Z}^2$，唯一的可能性是$m_{ab} = 2$ [6, 引理 2.12]。

现在分析 y_1 树椭圆地作用且 y_2 顶点椭圆地作用的情形。根据引理 3.8，元素 y_1、y_2、y_3 都固定 v，因此特别有 $\langle y_1、\ y_3\rangle \leq \mathrm{Stab}_{A_\Gamma}(v)$。由于 $\langle y_1、\ y_3\rangle \cong F_2$，可知 $\mathrm{Stab}_{A_\Gamma}(v)$ 不可能是阿贝尔的，即 $m_{ab} \geq 3$。

进一步反设 y_3 在 D_Γ 上顶点椭圆地作用，从而固定 v。再次根据引理 3.8，可知 y_4 也固定 v，因此$\langle y_1、\ldots、\ y_4\rangle \leq \mathrm{Stab}_{A_\Gamma}(v) \cong \mathrm{DA}^{m_{ab}}$。若 $n = 4$，则 $\langle y_1、\ldots、\ y_4\rangle \cong R_{C_4}$；若 $n \geq 5$，则 $\langle y_1、\ldots、\ y_4\rangle \cong R_{P_4}$：在这两种情况下，引理 2.2 都会导出矛盾。

最后，假设 y_1 和 y_2 都是顶点椭圆的。令 ℓ 为集合中的最小元

$$\{j \in \{3, \ldots, n\} : y_j \text{ acts tree-elliptically on } D_\Gamma\},$$

其存在性由引理 3.10 保证。将前一点的论证稍作修改，并应用于元素 $y_{\ell-2}$，$y_{\ell-1}$ 和 y_ℓ，即可得到矛盾。□

4. Deligne 复形中的标准树的循环与圆盘图

设 A_Γ 是一个双曲型的二维 Artin 群。我们在第 3 节中看到，圈 Artin 群嵌入 A_Γ 与 D_Γ 中标准树的循环相对应。现在，我们为标准树的循环赋予一种组合结构，即圆盘图的组合结构。

4.1. **组合高斯–博内定理**。我们回顾圆盘图的概念以及 Gauss–Bonnet 定理的组合版本。

定义 4.1（圆盘图）。设 D 是一个嵌入圆盘中的二维有限可缩多边形复形，另设 X 为一个多边形复形。

(1) 圆盘图是一种组合映射 $D \to X$；

(2) 如果 D 与圆盘同胚，则称 $D \to X$ 为非奇异圆盘图。在这种情况下，该同胚给出了圆盘图的边界 ∂D 和内部 int(D) 的定义；(3) 若圆盘图 $D \to X$ 中共享一条边的不同二维胞腔被映射到 X 中不同的二维胞腔，则称 $D \to X$ 为约化的；(4) 如果圆盘图 $D \to X$ 在每个 2-胞腔上都是单射，则称其为非退化的。

对于一个 2-胞腔 P of D 和一个顶点 $v \in P$，有序对 (v, P) 称为 P 在 v 处的角。对于 D 的一个顶点 v，我们用 Cor(v) 表示 v 处的角的集合；对于 D 的一个 2-胞腔 P，我们用 Cor(P) 表示 P 的角的集合。我们用 Cor(D) 表示 D 的角的集合。

定义 4.2（曲率）。设 D 是一个圆盘图，且 $\angle$: Cor(D) $\to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是一个映射，我们称之为角度赋值。

（1）对于一个边界由 n 1 个 2-胞腔组成的 2-胞腔 P， P 的曲率 为

$$\kappa(P) \coloneqq (2-n)\pi + \sum_{c \in \mathrm{Cor}(P)} \angle(c)$$

（2）对于一个位于边界 ∂D 中的顶点 v， v 的曲率 为

$$\kappa(v) \coloneqq \pi - \sum_{c \in \mathrm{Cor}(v)} \angle(c)$$

（3）对于一个位于 D 内部的顶点 v， v 的曲率 为

$$\kappa(v) \coloneqq 2\pi - \sum_{c \in \mathrm{Cor}(v)} \angle(c)$$

在我们的证明中，我们将考虑 Deligne 复形上的圆盘图。根据考虑的是单纯版本还是立方版本，我们会得到两种不同的角度赋值方式。

例子 4.3（Moussong角度）。设 A_Γ 是一个二维 Artin 群。我们考虑赋予 Moussong度量的单纯Deligne复形 D_Γ。对于圆盘图 F: $D \to D_\Gamma$，我们将角度$\angle$(v, P) := $\angle$(F(v) F(P))赋给 D的每个角(v, P)。 D_Γ中三角形上的角度见图 3。

例子 4.4（立方角度）。若 A_Γ 是一个无三角形的二维对象，则我们在立方 Deligne 复形 C_Γ 上赋予立方度量（即所有二维立方体都是欧几里得正方形）。对于圆盘图 G: $E \to C_\Gamma$，我们将角度 $\angle(v,\ P) \coloneqq \angle(G(v)\ G(P)) = \frac{\pi}{2}$ 赋给 E 的每个角 (v, P)。

定理 4.5（组合高斯–博内定理，[2]）。设 D 为一个圆盘图，其角度赋值为 $\angle$: Cor（D） $\to \mathbb{R}_{\geq 0}$。那么

$$\sum_{v \in D^{(0)}} \kappa(v) + \sum_{P \in D^{(2)}} \kappa(P) = 2\pi.$$

4.2. **由标准树环得到的圆盘图**。设 A_Γ 是一个二维 Artin 群。设 $\{T_i\}_{i \in \mathbb{Z}_n} \subseteq D_\Gamma$ 是一个标准树环；必要时取其子循环后，我们可以假设它是简单的。对于每个 $i \in \mathbb{Z}_n$，令 v_i 为标准树 T_i 和 T_{i+1} 相交的顶点，并令 $\sigma_i \subseteq D_\Gamma$ 为连接 v_i 与 v_{i+1}的测地线段。由于标准树是 D_Γ的凸子集， σ_i 包含于 T_{i+1}中。记 σ := $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}_n} \sigma_i$，这是一个连通子集。由于 D_Γ 是可缩的， [10], 存在一个非奇异、非退化的圆盘图 $D \to D_\Gamma$，其将 ∂D 同构地映射到σ [19, 引理 1.6]。我们将每个这样的圆盘图称为 σ的填充图。我们

总可以假设 $D \to D_\Gamma$ 是 σ的一个极小填充图，即在 σ的填充图中，它包含的二维胞腔数量最少。极小性意味着 $D \to D_\Gamma$ 是约化的，否则，对二维胞腔进行消去的标准论证将产生一个包含严格更少二维胞腔的图。

借助 $D \to D_\Gamma$ ，我们可以讨论 D 的顶点类型，如定义 1.5 中所述。

为了在 D 中运用组合高斯–博内定理，我们需要为 D 的角赋予角度。我们固定一个极小填充图 $F\colon D \to D_\Gamma$ ，对应于 σ；对于 D 的每个角（v, P），定义 $\angle$（v, P）$:=\angle$（F（v） F（P））（见例 4.3）。定理 4.5 中的等式变为

$$2\pi = \sum_{i=1}^{n} \kappa(v_i) + \sum_{u \in D^{(0)}} \kappa(u) + \sum_{P \in D^{(2)}} \kappa(P),$$

其中， u 遍历 D 中除交点顶点 v_i 之外的所有顶点。将顶点曲率之和拆分为两个和，是为了强调，在我们的情形中，交点顶点 v_i 可能是唯一贡献正曲率的顶点。

注 4.6（类型 0 顶点）。 由于不同的标准树至多相交于一个顶点 [16, 推论 2.18]，D 至少包含一个类型 0 顶点 v_0 ；否则， D 将包含于 D_Γ 的 1-骨架中，因而不同胚于二维圆盘。

注记 4.7。 在 D_Γ 和 C_Γ中，本质 1-骨架，即由类型 1 和 2 的顶点张成的子复形，彼此重合。由于标准树包含在本质 1-骨架中，很容易验证上述构造同样适用于 C_Γ 中的标准树的循环（此时，角度赋值采用例 4.4 中所述的赋值）。在每个证明中，我们将自由选择最便于处理的复形。

4.3. **曲率的计算**。 本节最后给出相对于 D_Γ 上的 Moussong度量和 C_Γ上的立方度量的曲率估计。

引理 4.8。 设 $F\colon D \to X$ 是一个约化圆盘图。对于每个 $v \in$ V(D)，限制 $F\colon$ Link$_D$(v) $\to$Link$_X$(F(v)) 是一个浸入（即局部单射）。特别地，

$$\operatorname{girth}(\mathrm{Link}_D(v)) \geq \operatorname{girth}(\mathrm{Link}_X(F(v))).$$

此外，若 $X = D_\Gamma$ 是某个二维 Artin 群的 Deligne 复形，且 $F\colon D \to D_\Gamma$ 由第 4.2 节中所述的构造得到，则

$$\operatorname{wg}(\mathrm{Link}_D(v)) \geq \operatorname{wg}(\mathrm{Link}_{D_\Gamma}(F(v))).$$

证明。 限制映射 F: Link$_D$(v) $\to$Link$_X$(F(v)) 是浸入这一事实，源于圆盘图 $D \to X$ 是约化的，并结合以下观察：Link$_D$(v) 的边对应于包含 v的 D 的 2-胞腔。如果 Link$_D$(v) 中两条相邻的边在 Link$_X$(F(v)) 中有相同的像，那么对应的两个 2-胞腔将映射到 X的同一个 2-胞腔，这与 F 是约化的事实矛盾。

要证明 F 会降低围长，只需注意，Link$_D$(v) 中的不回溯路径会映射为 Link$_X$(F((v)) 中的不回溯路径，因为$F\colon D \to X$ 是约化圆盘图。

“此外”这一断言由前一个断言以及以下事实结合得出： D 的顶点类型和标签是由 $F\colon D \to D_\Gamma$诱导的。□

设 A_Γ 是一个二维 Artin 群，并设 $\{T_i\}_{i\in\mathbb{Z}_n}$ 是 D_Γ 中由标准树构成的简单圈。回忆一下，我们将交点顶点记作 v_i $T_i \cap T_{i+1}$，将由线段 $[v_i, v_{i+1}]$ 拼接得到的环路记作 σ 。

引理 4.9（计算曲率）。设 $F\colon D \to D_\Gamma$ 是 σ 的一个极小填充图。D 的每个 2-胞腔都具有非正曲率。此外，对于每个顶点 $v \in \mathrm{V}(D)$：

- 若 v 是类型 0，则 v 属于 D 的内部，并且存在一个圈子图 $\gamma \subseteq \Gamma$，使得

$$\kappa(v) \le \pi(2 - \operatorname{girth}(\gamma)) + \pi \sum_{e \in \mathrm{E}(\gamma)} \frac{1}{m_e};$$

- 若 v 是类型 1 顶点，或是不属于交点顶点 v_i之一的类型 2 顶点，则 $\kappa(v) \le 0$。

特别地，若 A_Γ 是双曲型，则类型 0 顶点具有严格负曲率。

证明。由于 D_Γ 的 2-单形是欧几里得三角形，D 的每个 2-胞腔都具有非正曲率。

设 v 是 D内部的一个顶点。由于我们在 $\mathrm{Link}_D(v)$ 中采用角度度量，量 $\sum_{(v,P)\in \mathrm{Cor}(v)} \angle(v, P)$（即 v的曲率）对应于 $\mathrm{Link}_D(v)$ 中某个环路的长度，记作 λ。根据引理 4.8，$F(\lambda)$ 是 $\mathrm{Link}_{D_\Gamma}(F(v))$ 中一个长度更短的环路（不一定是简单环路）。因此 $\kappa(v) \le \kappa(F(v))$。接下来，我们来求 $\kappa(F(v))$ 的上界；换言之，就是求 $\mathrm{Link}_{D_\Gamma}(F(v))$ 中环路长度的下界。

首先考虑 v 位于 D 内部的情形。若 v 属于类型 2，则 $\mathrm{Link}_{D_\Gamma}(F(v))$ 的围长为 2π [1, （引理 6]）。若 v 属于类型 1，则 $\mathrm{Link}_{D_\Gamma}(F(v))$ 同构于两个无边图的联 $\mathbb{Z} * \{1, \dots, k\}$，其中每条边的长度为 $\frac{\pi}{2}$；此时其围长为 2π（除非 $k = 1$，在这种情况下它是一棵树）。若 v 属于类型 0，则可将 $\mathrm{Link}_{D_\Gamma}(F(v))$ 识别为（重心细分后的）Γ，且圈子图 $\gamma \subseteq \Gamma$ 的长度为

$$\operatorname{len}_\Gamma(\gamma) = \sum_{e \in \mathrm{E}(\gamma)} \frac{m_e - 1}{m_e}\pi = \pi \operatorname{girth}(\gamma) - \sum_{e \in \mathrm{E}(\gamma)} \frac{\pi}{m_e}.$$

注意，等式 $\operatorname{len}_\Gamma(\gamma) = 2\pi$ 仅当 γ 是一个带有 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ 的（p, q, r）-三角形，或 γ 是（2, 2, 2, 2）- 正方形时才成立。特别是，当 A_Γ 属于双曲型时，$\operatorname{len}_\Gamma(\gamma) > 2\pi$。

现在设 v 是一个边界顶点，且它不是某个 v_i。由于 D 是 σ 的填充图，而标准树不含类型 0 顶点，因此 v 只能是类型 1 或类型 2。在这种情况下，量 $\sum_{(v,P)\in \mathrm{Cor}(v)} \angle(v, P)$ 对应于 $\mathrm{Link}_D(v)$ 中的一条路径的长度，这条路径连接（分别对应于）v 所在的标准树中与 v相邻的两条边的两个顶点。这样的路径长度至少为 π [23, 推论 4.2]。□

立方 Deligne 复形配备立方度量时，对应的结论也同样成立。

引理 4.10（计算立方曲率）。设 $\operatorname{girth}(\Gamma) \ge 4$，并令 $F\colon D \to C_\Gamma$ 为 σ的一个极小填充图。D 的每个 2-胞腔的曲率都非正。此外，对每个顶点 $v \in \mathrm{V}(D)$：

- 如果 v 是类型 0，那么 v 属于 D 的内部，并且存在一个圈子图 $\gamma \subseteq \Gamma$，使得

$$\kappa(v) \le (4 - \operatorname{girth}(\gamma))\frac{\pi}{2};$$

- 如果 v 是一个类型 1 顶点，或是一个并非交点顶点 v_i之一的 2 型顶点，那么 $\kappa(v) \le 0$。

证明。 证明过程与引理 4.9 的证明类似。注意，girth(Γ) ≥ 4确保 D 的二维胞腔具有非正曲率。

设 v 是 D 内部的一个顶点。沿用前一个证明中的记号，我们将求出 Link$_{C_\Gamma}$($F(v)$) 围长的一个下界。若 v 是类型 2，则 Link$_{C_\Gamma}$($F(v)$) 的围长至少为 2π [1, 引理 6]。若 v 是类型 1，则 Link$_{C_\Gamma}$($F(v)$) 是一个联 $\mathbb{Z} * \{1, \dots, k\}$，其中每条边的长度为 $\frac{\pi}{2}$。若 v 是类型 2，则 Link$_{C_\Gamma}$($F(v)$) 可识别为 Γ 的重心细分，且一个环路 $\gamma \subseteq \Gamma$ 的长度为

$$\mathrm{len}_\Gamma(\gamma) = \mathrm{girth}(\gamma) \cdot \frac{\pi}{2}.$$

由于围长(Γ) ≥ 4，len$_\Gamma(\gamma) \geq 2\pi$。

若 v 是 D 边界上不属于任何一个 v_i 的顶点，则 v 必然是类型 1 或类型 2。同样，在 Link$_{C_\Gamma}$($F(v)$) 中，连接同一标准树的两条边的路径长度至少为 π [23, 推论 4.2]。□

5. 标准树环的长度与加权围长

我们回顾图的围长定义，并引入一种新的图不变量——加权围长。接着，我们为标准树的循环引入两个不变量，即长度和加权围长，并证明它们存在一个仅取决于定义图的下界。我们分别在引理 5.3（针对长度）和引理 5.7（针对加权围长）中证明这一点。

注 5.1（树定义图）。 若 Γ 是一棵树，则 D_Γ 中不存在标准树环。为证明这一点，假设存在一个标准树环，并构造一个填充图 $F\colon D \to D_\Gamma$。根据注 4.6， D 的内部含有一个零型顶点 u。由于 D 与圆盘同胚，Link$_D(u)$ 在拓扑上是一个圆。根据引理 4.8，Link$_D(u)$ 在 F 下的像是 Link$_{D_\Gamma}$($F(u)$) 中的一条（可能不是简单的）环路，而后者同构于 Γ，这就导致了矛盾。

特别地，当 Γ 是一棵树时，引理 5.3 和引理 5.7 的陈述均显然成立。

5.1. 围长情形。

回忆一下，单纯图的围长是最短圈的长度，并约定树的围长为 ∞。

例 5.2。 与 A_Γ 对应的抛物子群以规范方式定义了标准树的环。设 $\gamma \subseteq \Gamma$ 是一个简单圈子图。每个 $v \in$V(γ) 都在 D_Γ 上树椭圆地作用，并且集合 {Fix(v) $\}_{v\in \mathrm{V}(\gamma)}$ 是一个由 girth(γ) 棵标准树组成的简单环。此外，这些标准树界定了标准基本域 K_Γ 的子复形 K_γ。

引理 5.3（标准树环的长度）。 设 A_Γ 是一个二维 Artin 群，且 $\{T_i\}_{i\in\mathbb{Z}_k}$ 是 Deligne 复形中的一个标准树环。那么 $k \geq$girth(Γ)。

此外，若 $n :=$ 围长(Γ) ≥ 5，那么，对于每个由 n标准树 $\{T_i\}_{i\in\mathbb{Z}_n}$构成的环，都存在一个圈子图 $\gamma \subseteq \Gamma$，使得围长(γ) $= n$，且 T_i's界定了A_Γ的 K_γ平移。

证明。 不妨取一个树更少的子循环，因此可以假设 $\{T_i\}_{i\in\mathbb{Z}_k}$ 是简单的。根据定义，每个标准树环都由至少三棵树组成，因此可以假设 girth(Γ) ≥ 4，并在立方 Deligne 复形 C_Γ中进行讨论。考虑第 4 节中构造的一个极小填充圆盘图 D。对于 $i \in \mathbb{Z}_k$，令 v_i 为交点顶点 $T_{i-1} \cap T_i$，并令 v_0 为一个零型顶点；它必然存在且属于.....的内部

D （见注 4.6）。组合高斯–博内定理，加上其余顶点贡献非正曲率这一事实，得出

$$2\pi \leq \sum_{i=1}^{k} \kappa(v_i) + \kappa(v_0) \leq k\frac{\pi}{2} + (4 - \mathrm{girth}(\gamma))\frac{\pi}{2},$$

其中 γ 是 Γ 的圈子图（我们正在引用引理 4.10）。注意到 girth(Γ) 是 Γ 的圈子图的最小围长，即可得出该结论。

第二个陈述的证明需要对曲率进行更仔细的考察。根据引理的第一部分（连同例 5.2），n 是最小的，这意味着环 $\{T_i\}_{i\in\mathbb{Z}_n}$ 是简单的。组合高斯–邦内定理给出

$$2\pi \leq \sum_{i=1}^{n} \kappa(v_i) + \kappa(v_0) \leq \sum_{i=1}^{n} \kappa(v_i) + (4 - \mathrm{girth}(\gamma))\frac{\pi}{2},$$

对于某个环子图 $\gamma \subseteq \Gamma$。如果存在 $j \in \{1, \ldots, n\}$ 使得 $\kappa(v_j) < \frac{\pi}{2}$，那么我们将得到

$$2\pi < n\frac{\pi}{2} + (4 - \mathrm{girth}(\gamma))\frac{\pi}{2} \leq n\frac{\pi}{2} + (4 - n)\frac{\pi}{2} = 2\pi,$$

矛盾。特别地，$\sum_{i=1}^{n} \kappa(v_i) = n\frac{\pi}{2}$。如果有 girth(γ) $> n$，那么

$$2\pi < n\frac{\pi}{2} + 2\pi - n\frac{\pi}{2} = 2\pi,$$

又一个矛盾。因此，girth(γ) $= n$，且每个不等式实际上都是等式。由于 girth(Γ) ≥ 5 意味着 A_Γ 是双曲型，类型 0 顶点具有严格负曲率。因此，v_0 是 D中唯一的类型 0 顶点，而树 T_i的边界在 Link$_{C_\Gamma}(v_0) \cong \Gamma$中构成一个环路。□

5.2. **加权围长情形**。我们引入标记图的加权围长。

定义 5.4（加权围长）。设 Γ 是一个标记图：

(1) 对于每个简单圈子图 $\gamma \subseteq \Gamma$，γ 的加权围长 为以下量

$$\mathrm{wg}(\gamma) = \mathrm{girth}(\gamma) + |\{\{a, b\} \in \mathrm{E}(\gamma) : m_{ab} \geq 3\}|;$$

(2) Γ的加权围长 定义为最小值

$$\mathrm{wg}(\Gamma) = \min\{\mathrm{wg}(\gamma) : \gamma \subseteq \Gamma \text{ cycle subgraph}\}.$$

如果 Γ 是树，则令 wg(Γ) $= \infty$。

等价地，wg(Γ)可以定义为将 Γ 中所有标签至少为 3 的边细分后所得图的围长。

类似地，我们定义标准树环的加权围长。

定义 5.5. 设 A_Γ 是一个二维 Artin 群，$\mathscr{L} = \{T_i\}_{i\in\mathbb{Z}_k}$是 D_Γ的一个标准树环；$\mathscr{L}$ 的加权围长 为

$$\mathrm{wg}(\mathscr{L}) = k + |\{i \in \mathbb{Z}_k : \mathrm{label}(T_i \cap T_{i+1}) \geq 3\}|.$$

我们在例 5.2 中看到，定义图 Γ 的环子图决定了 Deligne 复形中长度相同的标准树环。这种对应关系也适用于加权围长。

例 5.6. 设 $\gamma \subseteq \Gamma$ 是一个简单圈子图。标准树环 $\{\mathrm{Fix}(a)\}_{a\in\mathrm{V}(\gamma)}$ 围成的子复形 K_γ 的加权围长为 wg(γ)。事实上，它的长度为 girth(γ)，且标签至少为 3 的交点顶点对应于 γ 中标签至少为 3 的边。

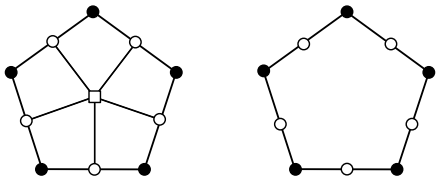

图 4. 移除一个类型 0 的顶点，并以一个多边形替换其星形。

我们的目标是证明以下下界：

引理 5.7。 设 A_Γ 是一个二维 Artin 群。

无三角形情形。假设 girth(Γ) ≥ 4。对于每个标准树环 $\mathscr{L} \subseteq D_\Gamma$，wg($\mathscr{L}$) $\geq$ wg(Γ)。

此外，如果 girth(Γ) ≥ 5，那么，对于每个满足 wg($\mathscr{L}$) $=$ wg(Γ) 的标准树环 $\mathscr{L} = \{T_i\}_{i\in\mathbb{Z}_k}$，存在一个圈子图 $\gamma \subseteq \Gamma$，使得 wg(γ) $=$ wg(Γ)，且 T_i 的边界构成一个 A_Γ-平移的 K_γ。

双曲型情形。假设 A_Γ 是双曲型的。对于每个标准树环 $\mathscr{L} \subseteq D_\Gamma$，wg($\mathscr{L}$) $\geq$ wg(Γ)。

5.2.1. 无三角形情形。 我们首先处理定义图无三角形的情形，此时我们可以利用立方 Deligne 复形是一个 CAT(0) 立方复形这一性质。证明的核心是理解标准树的简单圈：

引理 5.8。 设 A_Γ 是一个围长为Γ ≥ 4的二维 Artin 群。对于每个标准树的简单圈 $\mathscr{L} \subseteq C_\Gamma$，wg($\mathscr{L}$) $\geq$ wg(Γ）。

证明。 设 $\mathscr{L} \subseteq C_\Gamma$ 是标准树的一个简单圈。对于 $i \in \mathbb{Z}_k$，设 v_i 为交点顶点 $T_{i-1} \cap T_i$，并考虑一个填充图 $f\colon D \to C_\Gamma$，其对应于 $\mathscr{L}$。

注意，由于所有二维胞腔都是正方形且曲率为零，曲率全部集中在顶点上。为了简化计算，我们将从 D出发构造一个新的圆盘图 F。首先，对于每个 0 型顶点 u，我们移除 u，并将 Star$_D$(u) 替换为一个单独的多边形 P_u，使其附着在 Link$_D$(u) 上。这个手术定义良好，因为标准树包含在由类型 1 和 2 的顶点张成的 C_Γ 子复形中。直观示意见图 4。

此操作会生成一个新的圆盘图。为方便起见，我们仍将其记作 $f\colon E \to C_\Gamma$。E的角恰好是形如 (v, P) 的角，其中 P 是 E 的一个多边形，v 是 P的一个顶点。我们为每个角赋予一个角度 $\frac{\pi}{2}$。

命题 5.9。 E的二维胞腔的曲率上界为 $\frac{\pi}{2}$(4 –围长(Γ))。特别地，它们的曲率均为非正。

命题 *5.9* 的证明。 设 P 是 E的一个 2-胞腔。映射 f 将边界 ∂P 映到 Link$_{C_\Gamma}$(u) 中的一个环路，其中u是某个类型 0 顶点。因此，∂P 是一个二部圈，由 n 个类型 1 顶点和 n 个类型 2 顶点组成，其中 $n \in \mathbb{N}_{\geq \mathrm{girth}(\Gamma)}$为某个量。由此可得

$$\kappa(P) = (2-2n)\pi + \sum_{i=1}^{n} \pi + \sum_{j=1}^{n} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(4-n) \qquad \text{（定义 4.2）}$$

根据围长(Γ) ≥ 4这一假设，结论得证。 □

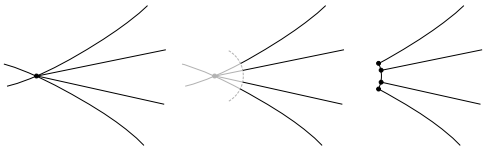

图5. 截去标签至少为 3 的一个角。

现在我们修改 E，以构造圆盘图 F。对于每个 $i \in \mathbb{Z}_k$，如果 v_i 的标签为 3，那么我们取足够小的 $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$，使得 D 中以 v_i 为中心、半径为 ε 的闭球 B 所包含的唯一顶点就是 v_i 本身。对于包含 v_i的每条边 e E， F在 $e \cap \partial B$处有一个顶点 v_e（我们称这类顶点为辅助顶点）；对于包含 v_i的每个 2-胞腔 $P \in E^{(2)}$， F 在 $P \cap \partial B$处有一条边。最后，我们移除 B的内部。图5给出了直观示意。根据构造，存在一个双射

$$E^{(2)} \to F^{(2)}$$
$$P \mapsto \overline{P}$$

E 的二维胞腔与 F的二维胞腔之间。如果 a 是 F 的一个辅助顶点，且 P 是包含它的一个二维胞腔，那么我们赋予 $\angle(a, \overline{P}) = \frac{\pi}{2}$。

断言 5.10. 对于 E的每个二维胞腔 P， $\kappa(\overline{P}) \leq \kappa(P)$。特别地， F的二维胞腔具有非正曲率。

断言 *5.10* 的证明。设 P 是 F的一个二维胞腔。我们用 e 表示 P的边数，用 v_1 表示 P 中类型 1 顶点的数量，用 v_2 表示 P中类型 2 顶点的数量。类似地，我们为 P 定义 e、 v_1 和 v_2。此外，我们将v_2 分解为 $v_2' + v_2''$，其中 v_2''是标签至少为 3 的交点顶点数（即那些被截去的顶点）。根据我们从 E构造 F 的方式可知，
$e = e + v_2''$、 $v_1 = v_1$和 $v_2 = v_2' + 2v_2''$。因此

$$\begin{aligned}
\kappa(\overline{P}) &= (2 - \overline{e})\pi + \overline{v}_1\pi + \overline{v}_2\frac{\pi}{2} && \text{(Definition 4.2)} \\
&= (2 - e - v_2'')\pi + v_1\pi + (v_2' + 2v_2'')\frac{\pi}{2} && \text{(vertex truncation)} \\
&= (2 - e)\pi + v_1\pi + (v_2' + v_2'')\frac{\pi}{2} - v_2''\frac{\pi}{2} && \text{(algebraic manipulation)} \\
&= \kappa(P) - v_2''\frac{\pi}{2} && \text{(definition of curvature)}
\end{aligned}$$

回想一下，根据命题 5.9， $\kappa(P)$是非正的，因此该结论成立。 □

F 中可能具有正曲率的顶点数至多为 $\mathrm{wg}(\mathscr{L})$。事实上，我们来估计不同类型顶点的曲率。根据引理 4.10，类型 1 的顶点，以及既不是交点顶点也不是辅助顶点的类型 2 顶点，都具有非正曲率。对于每个被替换的交点顶点 v_i，恰有两个曲率非零的辅助顶点（其曲率值恰为 $\frac{\pi}{2}$）。每个未被辅助顶点替换的顶点 v_i （即标签为 2 的顶点）的曲率至多为 $\frac{\pi}{2}$，具体取决于包含该顶点的 2-胞腔数量。

事实上，有些顶点的曲率严格为负。

命题 5.11。类型 2 且标签至少为 3、并非对应于截断顶点的顶点，其曲率严格为负，且不超过 $-\frac{\pi}{2}$。

命题 *5.11* 的证明。设 v 是这样一个顶点，其标签为 $m \geq 3$。如果 v 属于 F 的内部，那么其链接的组合围长至少为 $2m$ [1, 引理

6] 因此 $\kappa(v) \leq 2\pi - 2m\frac{\pi}{2} \leq -\pi$。如果 v 属于 F 的边界，那么在 $\mathrm{Link}_F(v)$ 中，连接对应于同一标准树的边的两个顶点的路径，其组合长度至少为 m [23, 推论 4.2]。由此可得 $\kappa(v) \leq \pi - m\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{2}$。□

我们将利用这种负曲率来人为地进行一次“重新分配”。设 P_0 是 F 的一个 2-胞腔；由于 F 是非奇异的（因为 D 曾是），因此该 2-胞腔必然存在。我们可以将 P_0 的顶点数分解为 $p+q'+q''+a'+2a''$，其中 p 是类型 1 的顶点数，q' 是类型 2 且标签为 2 的顶点数，q'' 是类型 2 且标签至少为 3 的顶点数，a' 是曲率为零的辅助顶点数，$2a''$ 是正曲率的辅助顶点数（根据构造，它们成对出现）。令 $\kappa'(P_0) := \kappa(P_0) - \frac{\pi}{2}q''$。对于每个类型 2 且标签至少为 3 的顶点 $w \in P_0$，令 $\kappa'(w) := \kappa(w) + \frac{\pi}{2}$。其余胞腔的曲率不变：对于每个其他 2-胞腔 $P \in F^{(2)}$，令 $\kappa'(P) := \kappa(P)$；对于每个其他顶点 $v \in F^{(0)}$，令 $\kappa'(v) := \kappa(v)$。根据构造

$$\sum_{v\in F^{(0)}} \kappa(v) + \sum_{\overline{P}\in F^{(2)}} \kappa(\overline{P}) = \sum_{v\in F^{(0)}} \kappa'(v) + \sum_{\overline{P}\in F^{(2)}} \kappa'(\overline{P}). \tag{1}$$

断言 5.12. 我们有 $\kappa'(P_0) \leq 2\pi - \frac{\pi}{2}\,\mathrm{wg}(\Gamma)$。

断言 5.12 的证明。 根据定义 $\kappa'(P_0) = \kappa(P_0) - \frac{\pi}{2}q''$ 可得

$$\begin{aligned}\kappa'(\overline{P}_0) &= \kappa(\overline{P}_0) - \frac{\pi}{2}q'' \\ &= (2-p-q'-q''-a'-2a'')\pi + (p+a')\pi + (q'+q''+2a'')\frac{\pi}{2} - q''\frac{\pi}{2} \\ &= 2\pi - \frac{\pi}{2}(q'+2q''+2a).\end{aligned}$$

设 u_0 为 C_Γ 的 0型顶点，使得 $f(\partial P_0) \subseteq$ 链接$_{C_\Gamma}(u_0)$。借助同构 $\mathrm{Link}_{C_\Gamma}(u_0) \cong \Gamma$，量 $q'+2q''+2a$ 有下界 $\mathrm{wg}(\Gamma)$，因此 $\kappa'(P_0) \leq 2\pi - \frac{\pi}{2}\,\mathrm{wg}(\Gamma)$。□

根据 κ'的定义，具有非正 κ-曲率的顶点和二维胞腔仍具有非正κ'-曲率。特别地，根据断言 5.10 和断言 5.12，所有二维胞腔都具有非正的 κ'-曲率。组合高斯–博内定理给出

$$\begin{aligned}2\pi &= \sum_{v\in F^{(0)}} \kappa(v) + \sum_{\overline{P}\in F^{(2)}} \kappa(\overline{P}) && \text{(组合版高斯–博内定理)} \\ &= \sum_{v\in F^{(0)}} \kappa'(v) + \sum_{\overline{P}\in F^{(2)}} \kappa'(\overline{P}) && \text{(Equation (1))} \\ &\leq \mathrm{wg}(\mathscr{L})\frac{\pi}{2} + \kappa'(\overline{P}_0) && \text{(truncation)} \\ &= \mathrm{wg}(\mathscr{L})\frac{\pi}{2} + 2\pi - \frac{\pi}{2}\,\mathrm{wg}(\Gamma) && \text{(Claim 5.12)}\end{aligned}$$

由此可得 $\mathrm{wg}(\mathscr{L}) \geq \mathrm{wg}(\Gamma)$。□

引理 5.13. 设 A_Γ 是一个围长$(\Gamma) \geq 4$的二维 Artin 群，$\mathscr{L}$是 D_Γ的一个标准树环。若 $\mathscr{L}$ 不是简单的，则存在一个 $\mathscr{L}$ 的简单子圈 $\mathscr{M}$，满足

$$\mathrm{wg}(\mathscr{M}) < \mathrm{wg}(\mathscr{L}).$$

证明。 令 $\mathscr{L} = \{T_i\}_{i\in\mathbb{Z}_n}$。对指标作平移后，可以假设 $\mathscr{M} = \{T_1, T_2, \ldots, T_k\}$ 是引理 3.5 给出的简单圈，其中 $w = T_k \cap T_1$（可能）是唯一一个两个相邻的树相交于此、但未作为交点顶点 's 出现的顶点。

现在我们来估计 $\mathscr{M}$ 的加权围长。我们可以将 $\mathscr{L}$ 的加权围长分解为

$$k + (n-k) + |\{i \in \mathbb{Z}_{k-1} : \mathrm{label}(v_i) \geq 3\}| + |\{i \in \mathbb{Z}_{n-k+1} : \mathrm{label}(v_i) \geq 3\}|$$

以及 $\mathscr{M}$ 的加权围长到

$$k + |\{i \in \mathbb{Z}_{k-1} : \mathrm{label}(v_i) \geq 3\}| + \tau(w),$$

其中 $\tau(w) \in \{0,1\}$，具体取决于标签$(w) = 2$还是标签$(w) \geq 3$。我们得到

$$\mathrm{wg}(\mathscr{L}) - \mathrm{wg}(\mathscr{M}) = (n-k) + |\{i \in \mathbb{Z}_{n-k+1} : \mathrm{label}(v_i) \geq 3\}| - \tau(w)$$

需指出，$n-k \geq 1$，因为 $\mathscr{L}$不是简单的。因此，wg$(\mathscr{L}) \geq$wg$(\mathscr{M})$，而要得到 wg$(\mathscr{L}) =$wg$(\mathscr{M})$，唯一的可能是 $n-k=1$,$\{i \in \mathbb{Z}_{n-k+1}:$ 标签$(v_i) \geq 3\} = \varnothing$ 且标签$(w) \geq 3$，这是不可能的。事实上，补子循环 $\{T_k, T_n, T_1\}$ 是由三个标准树构成的环，而 girth$(\Gamma) \geq 4$，这与引理 5.3 矛盾。□

引理 *5.7* 的证明，无三角形情形。第一个断言的证明是引理 5.8 和引理 5.13 的直接组合。

现在来证明第二个断言，设 girth$(\Gamma) \geq 5$。令 $n =$ wg(Γ)。根据第一个断言和例 5.6，n是极小的，因此根据引理 5.13，$\mathscr{L}$ 是一个简单环。我们沿用引理 5.8 的证明中引入的构造和记号：仔细考察曲率即可得出该断言。具体而言，我们关注圆盘图 F；由组合高斯–博内定理可得方程 2。

反设 F 中贡献正曲率的顶点数严格小于 n。那么

$$2\pi = \sum_{v \in \mathrm{V}(F)} \kappa'(v) + \sum_{\overline{P} \in F^{(2)}} \kappa'(\overline{P}) < n\frac{\pi}{2} + \kappa'(\overline{P}_0) \leq n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}(4 - \mathrm{wg}(\Gamma)) = 2\pi,$$

这就产生了矛盾。因此，F 中的顶点所贡献的正曲率恰为 $n\frac{\pi}{2}$。

反设 F 至少由两个不同的 2-胞腔组成，记作 P_0 （即进行曲率重新分配的那个胞腔）和 P_1。那么

$$\begin{aligned}
2\pi &= \sum_{v \in \mathrm{V}(F)} \kappa'(v) + \sum_{\overline{P} \in F^{(2)}} \kappa'(\overline{P}) && \text{(Equation 2)} \\
&\leq n\frac{\pi}{2} + \kappa'(\overline{P}_0) + \kappa'(\overline{P}_1) && \text{(non-positive curvatures)} \\
&\leq n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\,{}^{(4-\text{围长（}\Gamma\text{）})} + \frac{\pi}{2}\,{}^{(4-\text{围长（}\Gamma\text{）})} && (\kappa'(P_0)\text{的定义及断言 5.10}) \\
&= 4\pi - \mathrm{girth}(\Gamma)\frac{\pi}{2} && (n = \mathrm{wg}(\Gamma)) \\
&= \frac{3}{2}\pi && (\mathrm{girth}(\Gamma) \geq 5)
\end{aligned}$$

这再次导致矛盾。因此可知，P_0是 F的唯一 2-胞腔。方程 2 变为

$$2\pi = n\frac{\pi}{2} + \kappa'(\overline{P}_0) \leq n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}(4 - \mathrm{wg}(\Gamma)),$$

这表明 P_0的曲率恰为 $\frac{\pi}{2}(4 - \mathrm{wg}(\Gamma))$，其为$-\kappa'$。因此，树 T_i'围成一个加权围长为 n 的简单回路，位于 Link$_{C_\Gamma}(u_0) \cong \Gamma$ 中。□

5.2.2. 双曲型情形。 现在我们讨论双曲型的二维 Artin 群，不再要求满足无三角形假设。

引理 5.14. 设 A_Γ 是一个围长$(\Gamma) = 3$ 的双曲型二维 Artin 群。对于每个标准树环 $\mathscr{L} \subseteq D_\Gamma$，$\mathrm{wg}(\mathscr{L}) \geq 5$。

证明. 反设存在一个加权围长为 3 或 4 的标准树环$\mathscr{L}$。若 $\mathrm{wg}(\mathscr{L}) = 3$，则唯一可能的情况是 $\mathscr{L}$ 由三个标准树构成一个环，且三个交点顶点 v_i的标签均为 2，因此曲率 $\kappa(v_i) \leq \frac{\pi}{2}$。根据引理 4.9，所有其他顶点和三角形的曲率均非正。将组合高斯–博内定理应用于任意一个以 $\mathscr{L}$ 为边界的填充图 D，可得

$$2\pi = \sum_{v \in D^{(0)}} \kappa(v) + \sum_{P \in D^{(2)}} \kappa(P) \leq \sum_{i=1}^{3} \kappa(v_i) \leq \frac{3}{2}\pi,$$

矛盾。

现在假设 $\mathrm{wg}(\mathscr{L}) = 4$。唯一可能的构型就是图 6 所示的两种构型。

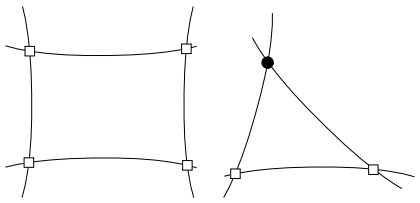

图 6. 加权围长为 4 的标准树环的两种可能构型。白色正方形表示标签为 2 的顶点；黑色圆圈表示标签至少为 3 的顶点。

首先假设 $\mathscr{L}$ 是一个由标准树构成、具有四个直角的正方形（图 6a），并令 D 是 $\mathscr{L}$ 的一个填充图。通过标准的高斯–博内论证，我们得到

$$\begin{aligned}
2\pi &= \sum_{v \in \mathrm{V}(\partial D)} \kappa(v) + \sum_{u \in \mathrm{V}(D^\circ)} \kappa(u) + \sum_{P \in D^{(2)}} \kappa(P) && \text{（组合高斯–博内）} \\
&\leq \sum_{v \in \mathrm{V}(\partial D)} \kappa(v) + \sum_{u \in \mathrm{V}(D^\circ)} \kappa(u) && \text{(triangles have } \leq 0 \text{ curvature)} \\
&\leq \sum_{v \in \mathrm{V}(\partial D)} \kappa(v) + \kappa(v_0) + \sum_{u \in \mathrm{V}(D^\circ) \smallsetminus \{v_0\}} \kappa(u) && \text{(for some vertex } v_0 \text{ of type 0)} \\
&\leq \sum_{v \in \mathrm{V}(\partial D)} \kappa(v) + \kappa(v_0) && \text{(interior vertices have } \leq 0 \text{ curvature)} \\
&\leq 4 \cdot \frac{\pi}{2} + \kappa(v_0) && \text{（共有四棵标准树）} \\
&< 2\pi && (\kappa(v_0) < 0 \text{ by Lemma 4.9})
\end{aligned}$$

这再次导致矛盾。

$\mathscr{L}$是一个含两个直角的标准树三角形（图6b）时，情况类似。具体而言，这两个直角各自贡献的曲率至多为$\frac{\pi}{2}$，而第三个顶点贡献的曲率至多为 π。□

引理5.15。设 A_Γ 是一个双曲型二维 Artin 群，其围长(Γ) $=3$ 且 wg(Γ) $=6$。对于每个标准树环 $\mathscr{L}\subseteq D_\Gamma$，wg($\mathscr{L}$) ≥ 6。

证明。由于 wg(Γ) $=6$ 和 A_Γ 是双曲型，Γ 不包含任何 (2, 2,2, 2, 2)-五边形、(p, 2, 2,2)- 正方形或 (p, q, 2)- 三角形（对于 $p, q\in\mathbb{N}_{\geq 3}$）。反设存在一个标准树环 $\mathscr{L}\subseteq D_\Gamma$，其 wg($\mathscr{L}$) ≤ 5。引理 5.14 的论证排除了 wg($\mathscr{L}$) $\in\{3,4\}$ 的情形，因此我们假设 wg($\mathscr{L}$) $=5$。$\mathscr{L}$ 的标准树可能构型如图 7 所示。

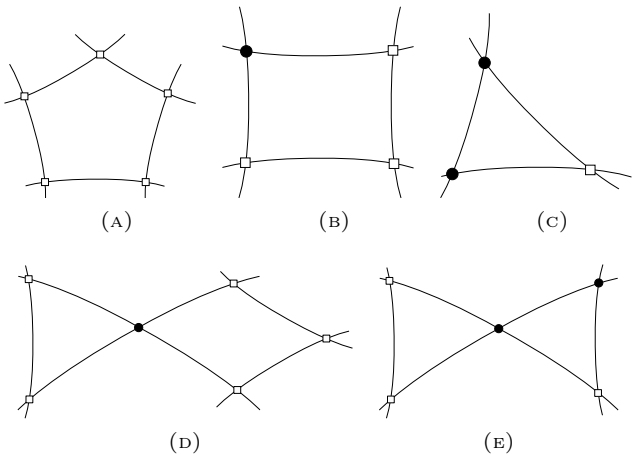

图 7. 加权围长为 5 的标准树环的五种可能构型。白色正方形表示标签为 2 的顶点；黑色圆圈表示标签至少为 3 的顶点。

对于一个标准树的简单圈，我们填入一个圆盘图 D，并按照第 4 节所述，利用组合高斯–博内定理导出矛盾。根据引理 4.9，D 的二维胞腔具有非正曲率。此外，类型 1 或类型 2 的顶点具有非正曲率，但交点顶点 $\{v_i\}_{i=1}^k$除外。因此，组合高斯–博内定理给出了如下形式的初步估计

$$2\pi\leq\sum_{i=1}^{k}\kappa(v_i)+\sum_{v\in\mathrm{V}(D)}\kappa(v)\leq\sum_{i=1}^{k}\kappa(v_i)+\sum_{v\in\mathrm{V}^0(D)}\kappa(v),\tag{3}$$

其中 $\mathrm{V}^0(D)$ 表示 D 中类型 0 的顶点。令 v 为这样的顶点，并令$\gamma\subseteq\Gamma$ 为一个简单回路，使得

$$\kappa(v)\leq(2-\mathrm{girth}(\gamma))\pi-\pi\sum_{e\in\mathrm{E}(\gamma)}\frac{1}{m_e}$$

（根据注 4.6，这样的类型 0 顶点确实存在）。我们得到以下估计：

- 若围长(γ) $=3$，则令 $\alpha:=1/p+1/q+1/r$，其中 p，q，$r\in\mathbb{N}_{\geq 3}$是三角形 γ的标签。由于 A_Γ 是双曲型，$\alpha<1$，上述等式给出 $\kappa(v)\leq(\alpha-1)\pi$；
- 如果围长(γ) $=4$，那么

$$\kappa(v)\leq-2\pi+\pi\sum_{e\in\mathrm{E}(\gamma)}\frac{1}{m_e}\leq-2\pi+\pi\left(2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{3}\right)=-\frac{\pi}{3},$$

其中我们用到了 Γ 不包含任何（p，2，2，2）四边形，适用于 $p\in\mathbb{N}_{\geq 2}$；

- 如果围长$(\gamma) = 5$，那么

$$\kappa(v) \leq -3\pi + \pi \sum_{e \in \mathrm{E}(\gamma)} \frac{1}{m_e} \leq -3\pi + \pi \left(4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}\pi,$$

其中我们利用了 Γ 不含任何 (2，2，2，2，2)-五边形；
- 若围长$(\gamma) \geq 6$，则

$$\kappa(\gamma) \leq (2 - \mathrm{girth}(\gamma))\pi + \frac{\pi}{2}\,\mathrm{girth}(\gamma) \leq -\pi.$$

证明现在归结为验证图 7 中的各种情形均不可能。我们将 D 的类型 0 顶点集划分如下：对于 $i \in \{3, 4, 5\}$，令 V_i 为满足围长$(\mathrm{Link}_D(u)) = i$ 的顶点 u 集合，令 V 为满足围长$(\mathrm{Link}_D(u)) \geq 6$ 的顶点 u 集合。

若 ∂D 由一个直角五边形（图 7a）构成，则公式 3 给出$2\pi \leq 5 \cdot \frac{\pi}{2} + \sum_v \kappa(v)$，或等价地，$0 \leq \frac{\pi}{2} + \sum_v \kappa(v)$。若 $V \neq \varnothing$ 或 $V_5 \neq \varnothing$，则很容易得到矛盾。因此，令我们假设 V，$V_5 = \varnothing$。该五边形的标准树在标签为 2 的顶点处相交，而Γ 的三角形不含标记为 2 的边。因此，每个交点顶点都与 V_4 中的一个顶点相邻。若 $|V_4| \geq 2$，则 V_4 的曲率至多为 $-\frac{2}{3}\pi$，从而导致矛盾。因此，V_4 由单个顶点 u 和$D = \mathrm{Star}_D(u)$ 构成。由此可知，存在一个围长至多为 4 的环路 $\gamma \subseteq \Gamma$，使得 D 在 D_Γ 中的像包含于 K_γ 的某个平移中，这就产生了矛盾。

如果 ∂D 是一个含三个直角的正方形（图 7b），那么公式 3 给出 $2\pi \leq 3 \cdot \frac{\pi}{2} + \pi + \sum_v \kappa(v)$，或者等价地，$0 \leq \frac{\pi}{2} + \sum_v \kappa(v)$，于是可以采用与上一段类似的论证。如果 V 或 V_5 非空，那么类型 0 顶点将产生过多的负曲率，从而导致矛盾。由于标准树在三个标签为 2 的顶点处相交，且 Γ的三角形标签至少为 3，因此每个这样的交点顶点都与 V_4的一个顶点相邻。同样，如果 $|V_4| \geq 2$，就会产生过多的负曲率，这与组合高斯–博内定理相矛盾。因此，这三个标记为 2 的交点顶点属于 V_4中唯一一个顶点的链接。同样，这会导致矛盾，因为 Γ 的正方形最多只能有两条标签为 2 的边。

如果 ∂D 是一个含一个直角的三角形（图 7c），那么公式 3 再次给出 $0 \leq \frac{\pi}{2} + \sum_v \kappa(v)$。按照上述论证，必定恰好有一个顶点 $u \in V_4$。令$\lambda \subseteq \Gamma$ 为一个正方形子图，使得 $\kappa(u) \leq \pi(2 - \text{围长}(\lambda)) + \pi \sum_{e \in \mathrm{E}(\lambda)} \frac{1}{m_e}$，如引理 4.9 所给出。我们将根据 λ的标记区分两种情况。

如果 λ有两条标记为 2 的边，那么链接$_D(u)$包含一个 2 型顶点和标记 2，由此可知，根据 [1,引理 6], ，必定还至少有另一个 V_4 顶点，从而产生过多的负曲率，导致矛盾。

如果 λ 恰好有一条标记为 2 的边，那么我们可以得到曲率的更精确上界：

$$\kappa(u) \leq \pi(2 - 4) + \sum_{e \in \mathrm{E}(\lambda)} \frac{1}{m_e} \leq -2\pi + \frac{\pi}{2} + 3 \cdot \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}$$

于是公式 3 变为 $0 \leq \sum_{v \neq u} \kappa(v)$。如果 D 中还包含另一个类型 0 的顶点，就会出现过多的负曲率，从而导致矛盾。由此可知，D 与 D 中 u 的星形重合，这与 $\mathrm{Link}_D(u)$ 的围长为 4 的假设相悖。

在图 7d 和图 7e 的情况下，我们需要考虑四个标准树的简单子圈。此前唯一未涉及的情况是

恰好有两个直角的标准树三角形。组合高斯–博内定理给出

$$2\pi \le 2\cdot\frac{\pi}{2} + \pi + \sum_{v\in \mathrm{V}(D)} \kappa(v),$$

这很容易表明存在矛盾，因为至少有一个类型 0 的顶点，其曲率严格为负。

这穷尽了加权围长为 5 的标准树的所有可能构型，并由此完成证明。□

引理 *5.7* 的证明，双曲型情形。 不妨假设 Γ 含有一个诱导三角形，否则适用无三角形情形 。由于 Γ 是二维双曲型，且含有一个诱导三角形，因此 wg(Γ) $\in \{5,6\}$。结合引理5.14和引理5.15即可得到所述结论。□

6. Minimal embeddings of cycle Artin groups

对于所有 Artin 群，我们给出其定义图围长的代数刻画。

定理 6.1。 设 Γ 是一个标记图；girth(Γ) 等于满足下述条件的最小$n \in \mathbb{N}_{\ge 3}$ ： 存在一个位于 n 个顶点上的标记圈 C_n ， 以及一个嵌入$A_{C_n} \to A_\Gamma$。

此外，通过将范围限定为双曲型二维 Artin 群，我们将证明加权围长的类似代数刻画。

定理 6.2. 设 A_Γ 是一个双曲型二维 Artin 群。 Γ 的加权围长 wg(Γ)等于满足以下条件的最小 $n \in \mathbb{N}_{\ge 3}$ ： 存在一个具有 n 个顶点的环 C_n ， 以及一个嵌入 $R_{C_n} \to A_\Gamma$。

本节将用于证明定理 6.1 和定理 6.2。我们首先指出一个初等观察：定义图的环子图会诱导出一个具有相应围长（分别为加权围长）的圈 Artin 群（分别为圈型右阿廷群）的嵌入：

例 6.3（典范环嵌入）. 设 Γ 是一个标记图。对于每个环子图 $\gamma \subseteq \Gamma$，圈 Artin 群 A_γ 作为标准抛物子群嵌入 A_Γ 。

此外，假设 Γ 是二维的。记 $\{a_i\}_i$ 为 γ 的顶点集合；若 $m_{a_i,\ a_{i+1}} \ge 3$，则记 z_i 为$\langle a_i,\ a_{i+1}\rangle$的中心生成元。由 A_Γ 的 g_i^4和 z_j^4生成的子群同构于以环 $C_{\mathrm{wg}(\gamma)}$ [18, 为基础的直角Artin群（定理 1）。1]

6.1. 围长的刻画。 基于标准树环的论证给出了维数为 2 且为双曲型时的结论。

引理 6.4。 设 A_Γ 是一个双曲型二维 Artin 群；girth(Γ)等于满足以下条件的最小 $n \in \mathbb{N}_{\ge 3}$ ： 存在一个在n 个顶点上的标记圈 C_n ， 以及一个嵌入 $A_{C_n} \to A_\Gamma$。

证明。 我们可以假设 Γ 具有有限围长，否则结论显然成立。事实上，如果 Γ 是一棵树，那么它是双曲型的二维类型（定义 1.11 的刻画检验的是一个空条件），因此任何循环 Artin 群嵌入都会在 C_Γ 中诱导出一个标准树环（见引理 3.11）。然而，当 Γ是一棵树时， C_Γ 不包含标准树环，正如注 5.1 中所述。

例6.3 给出了一个标记圈 $C_{\mathrm{girth}(\Gamma)}$ 以及一个嵌入 $A_{C_{\mathrm{girth}(\Gamma)}} \to A_\Gamma$。为证明 girth(Γ) 是最小的，令 $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$，设 C_n 为一个标记圈，并假设存在群单同态 φ: $A_{C_n} \to A_\Gamma$。根据引理 3.10，存在 $k \in \{3, \dots, n\}$ 以及一个与 φ 相关联的标准树环 $\{T_i\}_{i \in \mathbb{Z}_k}$。根据引理 5.3，girth(Γ) $\leq k$。□

特设论证涵盖了剩余情形，即当 A_Γ 不是双曲型时。

引理6.5。设 Δ 是一个带标记三角形，Γ 是一个无三角形带标记图。不存在群单同态 $A_\Delta \to A_\Gamma$。

证明。反设存在群单同态φ: $A_\Delta \to A_\Gamma$。由于围长(Γ) ≥ 4，A_Γ 是二维的，A_Δ 也是；否则 $\varphi(A_\Delta)$将包含一个与 $\mathbb{Z}^3$同构的子群。令 V(Δ) $= \{a, b, c\}$: 由于 A_Δ 是二维的，m_{ab}、m_{bc} 和 m_{ac} 中至多一个可以是 2，设为 m_{ac}。由于围长(Γ) ≥ 4（事实上，因为 Γ 没有欧几里得三角形），子群 $\varphi(\langle a, b\rangle)$和 $\varphi(\langle b, c\rangle)$都共轭到 A_Γ [32, 的一个二面体抛物子群中（推论 3.12]）。因此，$\varphi(a)$、$\varphi(b)$和 $\varphi(c)$在 C_Γ 上椭圆地作用，而第 3.1 节的引理可原样推广到这种情形。特别地，$\varphi(a)$、$\varphi(b)$和 $\varphi(c)$在 C_Γ 上树椭圆地作用，且它们的不动点集构成由三个标准树组成的一个环，这与引理 5.3 矛盾。□

备注6.6。引理6.5 的证明依赖于 Vaskou 对二维 Artin 群中二面体 Artin 子群的特征刻画中的一个特例 [32, 定理 D]。更具体地说，我们利用了这样一个事实：三角形无关 Artin 群中所有与二面体 Artin 群抽象同构的子群，都共轭于一个二面体抛物子群。值得注意的是，引理 6.4 的证明并不依赖这一分类。

定理 *6.1* 的证明。同样，例6.3给出了一个标记圈 $C_{\mathrm{girth}(\Gamma)}$ 和一个嵌入 $A_{C_{\mathrm{girth}(\Gamma)}} \to A_\Gamma$。如果围长(Γ) $= 3$，那么根据定义它就是最小的，无需证明。如果围长(Γ) $= 4$，那么引理6.5排除了嵌入任何 A_{C_3}的可能性。如果围长(Γ) ≥ 5，那么 A_Γ 是双曲型二维群，引理 6.4 适用。□

6.2. **加权围长的刻画**。现在我们转向加权围长的情形。回顾一下，我们将讨论范围限制在二维双曲型 Artin 群。

定理 *6.2* 的证明。正如定理 6.1 的证明中所观察到的，我们可以假设Γ 不是一棵树。例6.3给出了一个标记圈 $C_{\mathrm{wg}(\Gamma)}$ 和一个嵌入$R_{C_{\mathrm{girth}(\Gamma)}} \to A_\Gamma$。为了证明这个嵌入是最小的，令 $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$，设$C_n$ 为一个圈图，并假设存在群单同态 φ: $R_{C_n} \to A_\Gamma$。令$\mathscr{L}$为与 φ相关联的标准树环。由引理 3.12，$n \geq$ wg($\mathscr{L}$)；由引理 5.7，wg($\mathscr{L}$) $\geq$ wg(Γ)。□

7. 交换图的围长

Artin 群的交换图由 Hagen-Martin-Sisto 引入；在二维双曲型情形下，它扮演着映射类群的曲线曲线图的角色 [16]。当 Γ 进一步没有叶时，它与 Huang-Osajda-Vaskou 引入的交图 [17]一致。

设 Γ 是一个标记图；当且仅当 a 和 b 之间存在一条奇数标记路径时，a 和 b 在 A_Γ 中共轭。推论 4.2]。令 $\mathrm{V}_{\mathrm{odd}}$(Γ) 表示 V(Γ) 关于共轭等价关系的商集。本节中，我们始终假设 A_Γ 是一个双曲型二维 Artin 群。

定义 7.1（交换图）。我们定义集合

$$\mathcal{H}_\Gamma = \{\mathrm{N}_{A_\Gamma}(a) : a \in \mathrm{V}_{\mathrm{odd}}(\Gamma)\} \cup \{\langle b, c\rangle : \{b, c\} \in \mathrm{E}(\Gamma) \text{ and } m_{bc} \geq 3\};$$

Γ 的（代数）交换图是以 Y_Γ 为顶点集的图

$$\bigsqcup_{H \in \mathcal{H}_\Gamma} A_\Gamma / H$$

当且仅当 $g\,\mathsf{Z}(G)g^{-1}$ 与 $h\mathsf{Z}(H)h^{-1}$ 逐元素交换时，两个顶点 gG 和 hH 相邻。

群 A_Γ 通过左乘作用于 Y_Γ 的顶点上，由此在 Y_Γ上诱导出单纯复形作用。注意，相邻条件说明了交换图这一名称的由来。

回顾一下，图的叶顶点是度数为一的顶点。我们将证明以下等式。

定理 7.2。若 Γ 没有叶顶点，则围长(Y_Γ) =wg(Γ)。

注记 7.3（ Y_Γ的代数刻画）。在定理 7.2 的假设下，即当 A_Γ 是双曲型二维 Artin 群且Γ 没有叶时，代数交换图 Y_Γ 可由代数刻画，因此是一个同构不变量。事实上，这些子群

$$\{\mathrm{N}_{A_\Gamma}(a) : a \in \mathrm{V}(\Gamma)\} \cup \{\langle b, c\rangle : \{b, c\} \in \mathrm{E}(\Gamma) \text{ with } m_{bc} \geq 3\}$$

与 A_Γ 中按包含关系极大的、几乎可分解为非平凡直积的子群在共轭意义下相同；这是因为 A_Γ 是圆柱双曲群 [23,定理 A]。

出于我们的目的，我们定义另一种图，即几何交换图，并证明在满足定理 7.2 的假设时（即当 Γ 没有叶时），后者与代数交换图等变同构。

定义 7.4（几何交换图）。Γ 的几何交换图是单纯图 $\mathcal{C}(\Gamma)$，其顶点分为两种类型

$$\{g \cdot T_a : a \in \mathrm{V}(\Gamma), g \in A_\Gamma\} \cup \{h \cdot \langle b, c\rangle : \{b, c\} \in \mathrm{E}(\Gamma), m_{bc} \geq 3 \text{ and } h \in A_\Gamma\}$$

（每个顶点要么是 D_Γ 中的标准树，要么是标签至少为 3 的 2 型顶点）。假设不同的标准树 $g \cdot T_a$ 和 $h \cdot T_b$ 相交。则它们在一个 2 型顶点 $f \cdot \langle c,\ d\rangle$处相交：

- 若 $m_{cd} = 2$，则在 $\mathcal{C}(\Gamma)$ 中，$g \cdot T_a$ 和 $h \cdot T_b$ 之间有一条边（注意，$f \cdot \langle c,\ d\rangle$ 不是 $\mathcal{C}(\Gamma)$的顶点）；
- 若 $m_{cd} \geq 3$，则 $f \cdot \langle c,\ d\rangle$ 在 $\mathcal{C}(\Gamma)$ 中与 $g \cdot T_a$ 和 $h \cdot T_b$相邻。

群 A_Γ 通过左乘作用于 $\mathcal{C}(\Gamma)$，且该作用保持顶点的划分。

我们引 入以下关于.....顶点的术语 $\mathcal{C}(\Gamma)$:

- 树类型 顶点具有 $g \cdot T_a$ 的形式；
- 二面体类型 顶点具有 $h \cdot \langle b,\ c\rangle$ 的形式。

令 CST(Γ) 表示 D_Γ 中标准树环的集合，令 SL(Γ) 表示 $\mathcal{C}(\Gamma)$ 中简单回路的集合。

引理 7.5。存在一个双射 f: CST(Γ) $\to$ SL(Γ)，使得对于每个标准树环 $\mathscr{L} \in$ CST(Γ)，girth$(f(\mathscr{L}))$ = wg$(\mathscr{L})$。特别地，wg(Γ) = girth$(\mathcal{C}(\Gamma))$。

证明。证明依赖于以下观察：

命题 7.6. $\mathcal{C}(\Gamma)$ 中的每个环路都由其经过的树型顶点的（有序）序列唯一确定。

命题 *7.6* 的证明。 对于 $\mathcal{C}(\Gamma)$ 的一个环路子图，令 $\{u_i\}_{i\in\mathbb{Z}_k}$ 为其中树型顶点的序列（初始顶点的选择除外）。如果 u_i 和 u_{i+1} 的组合距离为 1，则无需证明。如果它们的组合距离为 2，这意味着分别对应于 u_i 和 u_{i+1}的两棵标准树相交。由于不同的标准树至多相交于一个顶点， [22, 注 4.4], 与 u_i 和 u_{i+1} 相邻的二面体型顶点是唯一确定的。最后， u_i 和 u_{i+1} 的组合距离不可能大于或等于 3，因为在 $\mathcal{C}(\Gamma)$ 中没有两个二面体型顶点相邻。□

对于每个标准树环 $\mathscr{L} \subseteq D_\Gamma$，若 $\mathscr{L} = \{T_i\}_{i\in\mathbb{Z}_k}$，则我们将 $f(\mathscr{L})$ 定义为 $\mathcal{C}(\Gamma)$ 中由树型顶点 $\{T_i\}_{i\in\mathbb{Z}_k}$ 唯一确定的环路。根据命题 7.6， f 的定义是良定义的。此外，由于标准树环由不同的树组成， f 的像包含于 $\mathcal{C}(\Gamma)$ 中的简单环路子集。另外，对于每个 $\mathscr{L} \in \mathsf{CST}(\Gamma)$，$\mathsf{wg}(\mathscr{L}) = \mathsf{girth}(f(\mathscr{L}))$，因为 $\mathcal{C}(\Gamma)$ 的二面体型顶点对应于 D_Γ 中标签至少为 3 的 2 型顶点。

我们按如下方式定义一个逆映射 $g\colon \mathsf{SL}(\Gamma) \to \mathsf{CST}(\Gamma)$，其中 f 如下。对于简单回路 $\gamma \in \mathsf{SL}(\Gamma)$，设 $\{T_i\}_{i\in\mathbb{Z}_k}$ 为其树型顶点序列：我们定义 $g(\gamma) = \{T_i\}_{i\in\mathbb{Z}_k}$。下面验证 $g(\gamma)$ 确实是一个标准树环（回顾定义 3.3）。由于 γ 是简单的， T_i 彼此不同。两个相邻的树型顶点 T_i 和 T_{i+1} 的组合距离至多为 2：若它们相邻，则标准树 T_i 和 T_{i+1} 相交于一个标签为 2 的 2 型顶点；若它们的组合距离为 2，则标准树 T_i 和 T_{i+1} 相交于一个标签至少为 3 的 2 型顶点。特别地， $T_i \cap T_{i+1}$ 非空。最后，为证明 $T_{i-1} \cap T_i \cap T_{i+1} = \varnothing$，注意，若三个不同的标准树相交于同一个顶点，那么该顶点将对应于 γ 中的一个回溯二面体型点，这与 γ 是简单的这一假设矛盾。这说明 g 是良定义的。根据构造， f 和 g 互为逆映射。□

注意，引理 7.5 无需假设 Γ 没有叶也成立。

引理 7.7。 假设 Γ 没有叶。存在一个 A_Γ-等变图同构，将 Y_Γ 映到 $\mathcal{C}(\Gamma)$。

证明。 我们首先按如下方式定义一个中间图 X_Γ ，并注意到 Y_Γ 和 $\mathcal{C}(\Gamma)$ 都与 X_Γ 等变同构（关于 A_Γ）。 X_Γ 的顶点是A_Γ的共轭元

$$\{\mathrm{N}_{A_\Gamma}(a) : a \in \mathrm{V}(\Gamma)\} \cup \{\langle b, c\rangle : \{b, c\} \in \mathrm{E}(\Gamma) \text{ and } m_{bc} \geq 3\},$$

其中，当对应的中心逐元素交换时，顶点 gGg^{-1} 和 hHh^{-1} 相邻。于是，在A_Γ通过共轭作用于 $\mathsf{V}(X_\Gamma)$ 的作用下， X_Γ 成为一个 A_Γ-图。

命题 7.8。 图 X_Γ 与 Y_Γ 是 A_Γ-等变同构的。

断言 *7.8* 的证明。 定义映射 $f\colon Y_\Gamma \to X_\Gamma$ 如下：对每个 $gG \in \mathsf{V}(Y_\Gamma)$，令$f(gG) = gGg^{-1}$。根据构造， f 是一个 A_Γ-等变图同态。显然， f 也是满射。

下面证明 f 是单射。反设存在陪集 gG和 hH，使得 $gGg^{-1} = hHh^{-1}$。由于 A_Γ 是二维的，标准生成元的正规化子具有形式 $\mathbb{Z} \times F$（其中 F [23]是某个有限秩自由群）；而非阿贝尔二面体 Artin 群不是 RAAG，因此 G 和 H要么都是某个标准生成元的正规化子，要么都是二面体抛物子群

。不同的球面型二面体标准抛物子群彼此永不共轭，而每个球面型非阿贝尔二面体抛物子群都是自正规化的 [15, 推论 4.12]。因此，我们可以假设$G = \mathrm{N}_{A_\Gamma}(a)$ 和 $H = \mathrm{N}_{A_\Gamma}(b)$，其中 $a, b \in \mathrm{V}(\Gamma)$。若 $\mathrm{N}_{A_\Gamma}(a)$ 和 $\mathrm{N}_{A_\Gamma}(b)$ 共轭，则它们的中心也共轭；利用将每个标准生成元映到 1 的高度同态$A_\Gamma \to \mathbb{Z}$，可证明 a 和 b 必定共轭。由此可知，在 Γ中，a与 b之间存在一条奇数标记路径，这意味着 $a = b$ 属于 $\mathrm{V}_{\mathrm{odd}}(\Gamma)$。因此，$gh^{-1}$ 正规化 $\mathrm{N}_{A_\Gamma}(a)$；后者是自正规化的，故可得 $g\,\mathrm{N}_{A_\Gamma}(a) = h\mathrm{N}_{A_\Gamma}(b)$（要看出 $\mathrm{N}_{A_\Gamma}(a)$ 是自正规化的，只需注意到后者分解为直积 $\langle a\rangle \times F$，其中$\langle a\rangle$是中心，因而是特征子群 [16,引理 2.27]）。□

注意，X_Γ 与 Y_Γ 之间的同构一般成立，并不需要无叶定义图这一假设。现在我们来证明，$\mathcal{C}(\Gamma)$ 与 X_Γ 是A_Γ-等变同构的。

命题 7.9. 假设 Γ 没有叶顶点。图 X_Γ 与 $\mathcal{C}(\Gamma)$ 是A_Γ-等变同构的。

命题 *7.9* 的证明。定义 $\varphi\colon\ \mathcal{C}(\Gamma) \to X_\Gamma$ 如下：对于每个 $x \in \mathrm{V}(\mathcal{C}(\Gamma))$，令$\varphi(x) = \mathrm{Stab}_{A_\Gamma}(x)$。特别地，对于树型顶点，有 $\varphi(g \cdot T_a) = g\,\mathrm{N}_{A_\Gamma}(a)g^{-1}$ [16, 引理 2.27], ；对于二面体型顶点，则有 $\varphi(g\cdot\langle a,\ b\rangle) = g\langle a,\ b\rangle g^{-1}$。根据构造，$\varphi$ 是一个 A_Γ-等变图同态，并且显然它是满射。

为了证明 φ 是单射，我们构造一个左逆。定义$\psi\colon X_\Gamma \to \mathcal{C}(\Gamma)$如下：对于 X_Γ的每个顶点 H，令 $\psi(H) = \mathrm{Fix}(\mathrm{Z}(H))$。下面证明 ψ 定义良好。经过共轭后，H 的形式为 $\mathrm{N}_{A_\Gamma}(a)$ 或 $\langle a,\ b\rangle$。

若 $H = \mathrm{N}_{A_\Gamma}(a)$，则其形式为 $\langle a\rangle \times F_k$，并且由于 Γ 没有叶，$k \geq 2$。由此可知，$\mathrm{N}_{A_\Gamma}(a)$的中心与 $\langle a\rangle$重合，而后者在 D_Γ上椭圆地作用，并固定标准树 T_a。

若 $H = \langle a,\ b\rangle$，则 H本身在 D_Γ上椭圆地作用，并固定 2 型顶点 $\langle a,\ b\rangle$。根据构造，$\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathcal{C}(\Gamma)}$，这表明 φ 是单射。□

结合命题 7.8 和命题 7.9，即得所需的同构。 □

定理 *7.2* 的证明。根据引理 7.5，$\mathrm{wg}(\Gamma) = \mathrm{girth}(\mathcal{C}(\Gamma))$；根据引理 7.7，$\mathcal{C}(\Gamma)$ 和 Y_Γ 是同构图，因此 $\mathrm{girth}(\mathcal{C}(\Gamma)) = \mathrm{girth}(Y_\Gamma)$。□

7.1. **实现环嵌入**。我们以一个开放问题结束本节。设 $\mathscr{L} \subseteq D_\Gamma$ 是一个标准树环，根据引理 7.5，我们可以将其视为一个简单回路$\ell \subseteq \mathcal{C}(\Gamma)$。命题 7.6 表明，$\ell$ 由其树型顶点集合唯一确定，记该集合为 $\{T_i\}_{i\in\mathbb{Z}_n}$。$T_i$ 的逐点稳定子是一个无限循环群，生成元可记为 g_i。

问题 7.10。A_Γ 中由 $\{g_i\}_{i\in\mathbb{Z}_n}$ 生成的子群何时是一个圈 Artin 群?

ℓ 的二面体型顶点对应于 D_Γ 中标签至少为 3 的二型顶点 $v_j = T_j \cap T_{j+1}$。v_j 的稳定子是一个球面不可约二面体 Artin 群，因此它的中心是无限循环群，设由 z_j生成。

问题 7.11。在什么条件下存在 $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$，使得由 g_i^k和 z_j^k生成的 A_Γ 的子群是圈型右阿廷群?

值得注意的是，Jankiewicz-Schreve [18] 和 Oh-Park [26] 的研究也朝着这个方向推进。

8. 循环 Artin 群的刚性

我们利用定理 C 对围长的代数刻画，证明了基于环的 Artin 群具有刚性。

定理 8.1。设 Γ 和 Λ 是带标号的循环图；若 $A_\Gamma \cong A_\Lambda$，则 $\Gamma \cong \Lambda$。

如果 A_Γ 和 A_Λ 是两个同构的循环 Artin 群，那么定理 C 表明，Γ 和 Λ 是长度相同的圈。我们将根据该长度是 3、4 还是至少为 5，把定理 8.1 的证明分为三种情形。

我们将经常利用以下观察。

引理 8.2。设 Γ 和 Λ 是带标号的 n-圈图，设 A_Λ 是双曲型二维的，且设 $\varphi\colon A_\Gamma \to A_\Lambda$ 是一个群同构。如果与 φ 相关联的标准树环界定了 K_Λ 的单个平移，那么 $\Gamma \cong \Lambda$。

证明。令 $\mathscr{L}$ 为与 φ 相关联的标准树环（见引理 3.11）。在 D_Λ 中平移（等价地，通过 A_Λ 中唯一元素进行共轭）后，我们可以假设 $\mathscr{L}$ 围出典范基本域 K_Λ。由引理 3.10，$\mathscr{L}$ 至多由 girth(Γ) 棵标准树组成，而引理 5.3 表明 $\mathscr{L}$ 至少由 girth(Λ) 棵标准树组成。由于 girth(Γ) = girth(Λ) = n，$\mathscr{L}$ 恰好由 n 棵标准树组成。特别地，φ 将 A_Γ 的标准生成元映射为 A_Λ 的标准生成元。因此，φ 诱导出有限集之间的单射 $\varphi\colon$ V(Γ) → V(Λ)，且这两个有限集的基数相同，故该映射为双射。令 $\{a,b\} \in$ E(Γ)。由引理 3.8，标准树 $T_{\varphi(a)}$ 和 $T_{\varphi(b)}$ 在顶点 $\langle\varphi(a)\ \varphi(b)\rangle$ 处相交。由于 $\varphi(\langle a,b\rangle) = \langle\varphi(a)\ \varphi(b)\rangle$，可知 φ 保持边的标签不变。顶点（标准生成元）、邻接关系和标签（二面体关系）这些数据完全决定了标记图的同构类。□

引理 8.3. 设 Γ 和 Λ 是标记圈图，且 $\varphi\colon A_\Gamma \to A_\Lambda$ 是群同构；若围长(Λ) ≥ 5，则 $\Gamma \cong \Lambda$。

证明. 根据定理 C，Γ和 Λ 的长度相同。因此，A_Γ和 A_Λ 均为双曲型二维对象。设 $\{T_i\}_{i\in\mathbb{Z}_k} \subseteq D_\Lambda$ 是与 φ相关联的标准树环。由引理 5.3，$\mathscr{L}$ 围住了 D_Λ 的一个基本域，因此由引理 8.2可得 $\Gamma \cong \Lambda$ 。□

接下来讨论方形情形。关于立方 Deligne 复形中曲率的估计，参见引理 4.10。

引理 8.4（网格引理）。设 Γ 是一个带标记的 4-圈图。设$\{T_i\}_{i\in\mathbb{Z}_4}$ 是 C_Γ 中的四棵标准树组成的环，且设 $F\colon D \to C_\Gamma$ 是与之相关联的约化圆盘图。那么每个交点顶点的曲率恰为 $\frac{\pi}{2}$。

此外，如果 D 包含一个非交点顶点的类型 2 顶点 v，那么 label(v) = 2。如果 v 位于 D 的内部，则它与四个类型 1 顶点相邻；如果 v 位于 D的边界，则它与两个类型 1 顶点相邻。

证明。 我们将交点顶点 $T_i \cap T_{i+1}$记为 v_i。第一个断言可直接由组合高斯–博内定理 4.5 得出。事实上，四个 v_i的曲率均至多为 $\frac{\pi}{2}$，且不可能严格小于 $\frac{\pi}{2}$，因为其他每个顶点的曲率都非正。

对于“此外”这一断言，我们反设 D 包含一个标签为 $m \geq 3$ 的类型 2 顶点 v，并估计其曲率。根据 v 属于 D的内部还是边界，我们分两种情况讨论。

首先假设 v 属于 D的内部。对于某个环子图 $\gamma \subseteq \mathrm{Link}_{C_\Gamma}(f(v))$，我们有 $\kappa(v) \leq \kappa(f(v)) = 2\pi - \mathrm{len}(\gamma)$。由于 $\mathrm{Link}_{C_\Gamma}(f(v))$ 的每个嵌入回路的长度至少为 $2m \cdot \frac{\pi}{2} = m\pi$ [1, 引理 6],

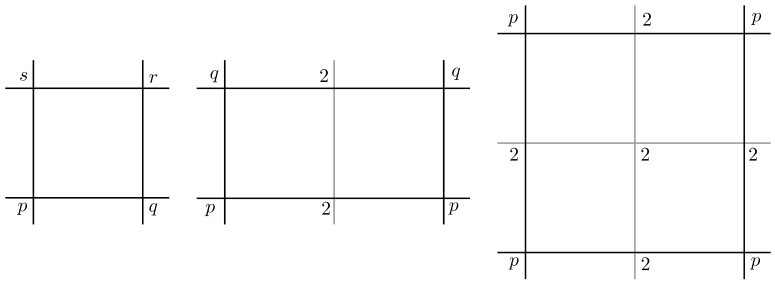

图 8。围长(Γ) = 4时，四棵标准树（黑色）的可能构型。每个正方形都对应于作用 $A_\Gamma \curvearrowright C_\Gamma$的一个基本域。

我们有 $\kappa(v) \leq (2-m)\pi$。根据相对于圆盘图 D 的组合高斯–博内定理 4.5，我们得到

$$2\pi = \sum_{u\in D^{(0)}} \kappa(u) + \sum_{P\in D^{(2)}} \kappa(P) \leq \sum_{i=1}^{4} \kappa(v_i) + \kappa(v),$$

这里该估计成立，是因为交点顶点 $\{v_i\}_{i=1}^4$ 是唯一可能产生正曲率的顶点，而所有二维胞腔的曲率均非正。此外，每个顶点 v_i 的曲率都不超过 $\frac{\pi}{2}$。因此我们得到

$$2\pi \leq 4\cdot\frac{\pi}{2} + (2-m)\pi \leq \pi,$$

一个矛盾。由此可知，标签$(v) = 2$。顶点 v 至少与$2\cdot 2 = 4$个类型为 1 [1,的顶点相邻，引理 6],；而更高的度数（从而使链接$_D(v)$的围长更大）会导致负曲率过多，这与组合高斯–博内公式相悖。由此可知， v 恰好与 4 个类型 1 的顶点相邻。

当 v 是边界顶点时，证明类似，唯一需要注意的是 $\kappa(f(v)) = \pi - \mathrm{len}(\gamma)$，其中 γ 是 $\mathrm{Link}_{C_\Gamma}(f(v))$ 中连接 $\mathrm{Link}_{C_\Gamma}(f(v))$ 的两个顶点的路径，这两个顶点对应于标准树 $f(v)$ 所属的对象。同样，任意两个这样的不同顶点之间的距离至少为 $m\cdot\frac{\pi}{2}$ [23, 引理 4.3]。□

引理 8.5. 设 Γ 是一个带标记的 4-圈图。设 $\mathscr{L} \subseteq C_\Gamma$ 是由四棵标准树组成的环。则有如下分类：

(1) 若存在 $p,q,r,s \in \mathbb{N}_{\geq 3}$，使得 Γ 是一个 (p,q,r,s)-环、$(p,q,r,2)$-环或 $(p,2,q,2)$-环，则 $\mathscr{L}$ 围成一个基本域；(2) 若存在 $p,q \in \mathbb{N}_{\geq 3}$，使得 Γ 是一个 $(p,q,2,2)$-环，则 $\mathscr{L}$ 围成一个基本域或两个相邻基本域的并；(3) 若存在 $p \in \mathbb{N}_{\geq 3}$，使得 Γ 是一个 $(p,2,2,2)$-环，则 $\mathscr{L}$ 围成一个基本域、两个相邻基本域的并，或由四个在同一顶点相交的基本域组成的正方形。

参见图 8。

证明。 证明由引理 8.4 以及以下事实得出：Γ 是双曲类型，因此它不是 (2，2，2，2)-正方形。□

引理 8.6 (4-循环)。 设 Γ 和 Λ 是带标记的 4-循环。若存在群同构 $\varphi\colon A_\Gamma \to A_\Lambda$，则 $\Gamma \cong \Lambda$。

证明。 RAAG 在 Artin 群类中的同构问题的解表明，若 Γ 是 (2，2，2，2)-环，则 Λ 也是 [3,14]。因此，我们可以假设 Γ 和 Λ 都至少有一个不同于 2 的标签，因而属于双曲型。设 $\mathscr{L} \subseteq C_\Lambda$ 是与 φ 相关联的标准树环。

如果存在 p，q，r，$s \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ 使得 Λ 是一个（p，q，r，s）-环，或一个（p，q，r，2）-环，或一个（p，2，q，2）-环，那么根据引理 8.5，$\mathscr{L}$界定了 K_Λ 的一个平移。于是，引理 8.2 蕴含 $\Gamma \cong \Lambda$。

现在假设存在 p，$q \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ 使得 Λ 是一个（p，q，2，2）-环。根据我们刚刚证明的结果，对于某个 p'，$q' \in \mathbb{N}_{\geq 3}$，$\Gamma$ 只能是一个（p'，q'，2，2）-环，或一个（p'，2，2，2）- 环。根据引理 8.5 的分类，环 $\mathscr{L}$ 要么界定一个单独的基本域，要么界定两个相邻基本域的并集。在第一种情况下，引理 8.2 给出 $\Gamma \cong \Lambda$。在第二种情况下，我们将有 A_Γ 同构于 4-环（p，p，q，q）上的 Artin 群。然而，属于大型是一个同构不变量，[24, 定理 A]„ 从而产生矛盾。

最后，假设存在 $p \in \mathbb{N}_{\geq 3}$，使得 Λ 是一个（p，2，2，2）-环。再次根据我们已经证明的结果，对于某个 $p' \in \mathbb{N}_{\geq 3}$，$\Gamma$ 必须是一个（p'，2，2，2）-环。根据引理 8.5 的分类，环 $\mathscr{L}$ 要么围成一个基本域，要么围成两个相邻基本域的并，要么围成四个在同一顶点相交的基本域之并所形成的正方形。在第一种情况下，引理 8.2 给出 $\Gamma \cong \Lambda$。在第二种和第三种情况下，我们将有 A_Γ 同构于 4-环上的 Artin 群，其类型分别为（p，p，2，2）或（p，p，p，p）。下面说明这两种情况都不成立。群 $A_{(p,p,2,2)}$ 和 $A_{(p,2,2,2)}$ 不可能同构，因为 $A_{(p,p,2,2)}$ 有两个不同的 DA$_p$-子群共轭类，而 $A_{(p,2,2,2)}$ 只有一个 [15, 推论 4.12]；群 $A_{(p,p,p,p)}$ 和 $A_{(p,2,2,2)}$ 不可能同构，因为只有其中一个是大型类型，而大型类型是一个同构不变量，正如上一段所论证的那样。□

最后，我们处理三角形情形。

引理 8.7（3-循环）。设 Γ 和 Λ 是带标记三角形图；若 $A_\Gamma \cong A_\Lambda$，则 $\Gamma \cong \Lambda$。

证明。 根据 Λ、A_Λ 的标记，它或者是球面型，或者是二维的。若 A_Λ 是球面型，则 A_Γ 也是球面型，因为二维性是同构不变量。在这种情况下，球面型 Artin 群类中的同构问题解答意味着 $\Gamma \cong \Lambda$ [29]。于是我们假设 A_Λ（因此 A_Γ）是二维的。

断言 8.8。若 Λ 是大型的（即 Λ 的标记中没有一个是 2），则 $\Gamma \cong \Lambda$。

断言 8.8 的证明。 若 Λ 是大型的，则根据 [24, 定理 A]，Γ 也是大型的。因此，Γ 和 Λ 要么是 (3，3，3)-三角形，要么是双曲型。若 Λ 是双曲型，则任意嵌入 $A_\Gamma \to A_\Lambda$ 都会在 D_Λ 中诱导出一个标准树三角形。根据引理 3.10]，这样的标准树三角形界定了 K_Λ [33, 的一个单独平移，从而根据引理 8.2 有 $\Gamma \cong \Lambda$。若 Λ 是 (3，3，3)-三角形，则对任意嵌入 $A_{(3,3,3)} \to A_\Gamma$ 应用相同论证可得 $\Gamma = (3，3，3)$。□

因此，以下不妨假设存在 $p, q, u, v \in \mathbb{N}_{\geq 3}$，使得 $\Gamma = (2, p, q)$ 和 $\Lambda = (2, u, v)$。

断言 8.9。若 Λ 是双曲型，则 $\Gamma \cong \Lambda$。

断言 8.9 的证明。 由于 Λ 是双曲型，根据引理 1.14 可得 $\{p, q\} \subseteq \{u, v\}$。如果 p 和 q 不同，那么 $\{p, q\} = \{u, v\}$，因此 $\Gamma \cong \Lambda$。如果 $p = q$，那么 $p \geq 4$，因为 Artin 群 $A_{(2,3,3)}$ 将是球面型。如果 $p \geq 5$,

那么 Γ 是双曲型，对任意嵌入 $A_\Lambda \to A_\Gamma$ 应用引理 1.14 可得 $\{m,n\} \subseteq \{p\}$，从而 $\Gamma \cong \Lambda$。

我们还需证明：如果 $A_{(2,4,4)} \cong A_{(2,4,v)}$，那么 $v = 4$。为此，反设 $v \geq 5$（注意，$A_{(2,3,4)}$ 是球面型），并固定一个同构 φ：$A_{(2,4,4)} \to A_{(2,4,v)}$。设 a、b、c 是 $A_{(2,4,4)}$ 的标准生成元，满足 m_{bc}、$m_{ac} = 4$；设 y、z 是 $A_{(2,4,v)}$ 的标准生成元，满足 $m_{yz} = 4$。根据引理1.13，存在 g、$h \in A_\Gamma$，使得

$$\varphi(\langle b, c\rangle) \leq \varphi(g)\langle y, z\rangle\varphi(g)^{-1} \text{ and } \varphi(\langle a, c\rangle) \leq \varphi(h)\langle y, x\rangle\varphi(h)^{-1}.$$

由于 $\langle b、\ c\rangle$ 与 $\langle a、\ c\rangle$ 在 $A_{(2,4,4)}$ 中不共轭，因此可知，$\varphi^{-1}(\langle y、\ z\rangle)$ 是一个二面体 Artin 子群，并且真包含抛物子群 $\varphi(g)^{-1}\langle b、\ c\rangle\varphi(g)$，这与引理 1.10 矛盾。□

剩下的情形是 A_Γ 和 A_Λ 都是二维的、规模不大且非双曲型。满足这些条件的定义图只有 (2，4，4) 和 (2，3，6)。群 $A_{(2,4,4)}$ 和 $A_{(2,3,6)}$ 不可能同构，因为它们的阿贝尔化不一致。□

我们现在可以证明定理 8.1。

定理 *8.1* 的证明。设 Γ 和 Λ 是满足 $A_\Gamma \cong A_\Lambda$的两个标记圈。根据定理 C，Γ 和 Λ 是长度相同的环 $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$。根据 $n \geq 5$、$n = 4$ 或 $n = 3$分别成立与否，引理 8.3、引理 8.6 或引理8.7可得所需结论。□

参考文献

[1] Kenneth I Appel 和 Paul E Schupp，《Artin 群与无限 Coxeter 群》，《数学创刊》72 (1983)，第 2 期，201–220。[2] Werner Ballmann 和 Serguei Buyalo，《二维多面体上的非正曲率度量》，Mathe- matische Zeitschrift 222 (1996)，第 1 期，97–134。[3] Andreas Baudisch，《半自由群的子群》，《匈牙利数学学报》38 (1981)，第 1–4 期，19–28。[4] Jason Behrstock、Cornelia Druţu 和 Lee Mosher，《厚度度量空间、相对双曲性与拟等距刚性》，《数学年刊》344 (2009)，第 3 期，543–595。[5] Rubén Blasco-García 和 Luis Paris，《偶 Artin 群的同构问题》，《代数杂志》607 (2022)，35–52。献给 P. Dehornoy 的特刊。[6] Martín Blufstein、Alexandre Martin 和 Nicolas Vaskou，《大型 Artin 群之间的同态》，arXiv 预印本 arXiv:2410.19091 (2024)。[7] Martín Blufstein 和 Luis Paris，《Artin 群的抛物子群中的抛物子群》，《美国数学会会刊》151 (2023)，第 04 期，1519–1526。[8] Martin R Bridson 和 André Haefliger，《非正曲率度量空间》，第 319 卷，Springer Science & Business Media，2013。[9] Ruth Charney，《与 Artin 群相关的问题》，美国数学研究所（2016）。[10] Ruth Charney 和 Michael W Davis，《与无限反射群相关的超平面补集的 K(π, 1) 问题》，《美国数学会杂志》8 (1995)，第 3 期，597–627。[11] John Crisp，《二维 Artin 群的自同构与抽象公度子》，《几何与拓扑》9 (2005)，第 3 期，1381–1441。[12] John Crisp 和 Luis Paris，《关于 Artin 群生成元平方所生成子群的 Tits 猜想的证明》，《数学创刊》145 (2001)，19–36。[13] Pierre Deligne，《广义辫群的建筑》，《数学创刊》17 (1972)，第 4 期，273–302。[14] Carl Droms，《图群的同构》，《美国数学会会刊》100 (1987)，第 3 期，407–408。[15] Eddy Godelle，《具有 CAT(0) Deligne 复形的 Artin–Tits群》，《纯粹与应用代数杂志》208 (2007)，第 1 期，39–52。[16] Mark Hagen、Alexandre Martin 和 Alessandro Sisto，《超大类型 Artin群是分层双曲的》，《数学年刊》388 (2024)，第 1 期，867–938。

[17] Jingyin Huang、Damian Osajda 和 Nicolas Vaskou，《大类型Artin群的刚性与分类结果》，arXiv 预印本 arXiv:2407.19940 (2024)。[18] Kasia Jankiewicz 和 Kevin Schreve，《Artin 群的直角阿廷子群》，伦敦数学会会刊 106 (2022)，第 2 期，818–854。[19] Tadeusz Januszkiewicz 和 Jacek Świątkowski，《单纯形非正曲率》，高等科学研究所数学出版物 104 (2006)，第 1 期，1–85。[20] Oli Jones、Giorgio Mangioni 和 Giovanni Sartori，《所有 Artin 群的 JSJ 分解》，arXiv 预印本 arXiv:2506.17157 (2025)。[21] Sang-hyun Kim 和 Thomas Koberda，《直角 Artin 群之间的嵌入性》，《几何与拓扑》17 (2013)，第 1 期，493–530。[22] Alexandre Martin，《二维 Artin 群的蒂茨替代定理与 Wise 幂替代定理》，《代数杂志》（2023）。[23] Alexandre Martin 和 Piotr Przytycki，《双曲型二维 Artin 群的圆柱型作用》，国际数学研究通知 2022 (2022)，第 17 期，13099–13127。[24] Alexandre Martin 和 Nicolas Vaskou，《大类型Artin群的特征刻画》，伦敦数学会通报 56 (2024)，第 11 期，3346–3357。[25] Gabor Moussong，《双曲考克斯特群》，俄亥俄州立大学，1988。[26] Sangrok Oh 和 Jihoon Park，《直角 Artin 群嵌入分层双曲群的嵌入性》，arXiv 预印本 arXiv:2509.02454 (2025)。[27] D. Osin，《圆柱双曲群》，Trans. Amer. Math. Soc. 368 (2016)，第 2 期，851–888。MR3430352[28] Luis Paris，《Artin 群的抛物子群》，《代数杂志》196 (1997)，第 2 期，369–399。[29] ，《球面型 Artin 群的同构分类》，《代数杂志》281 (2004)，第 2 期，666–678。[30] Jacques Tits，《环面正规化子 I：扩张 Coxeter 群》，Journal of algebra 4 (1966)，第 1 期，96–116。[31] Harm Van der Lek，《复超平面补空间的同伦型》，博士论文，1983。[32] Nicolas Vaskou，《大类型Artin群的同构问题》，arXiv 预印本 arXiv:2201.08329 (2022)。[33] ，《大类型无穷自由阿廷群的自同构》，Geometriae Dedicata 219 (2025)，第 1 期，16。

（Giovanni Sartori）数学系，赫瑞-瓦特大学和麦克斯韦数学科学研究所，英国爱丁堡电子邮箱：gs2057@hw.ac.uk