arXiv:2601.05088v1 [math.OA] 8 Jan 2026

C*-覆盖格二分法

ADAM HUMENIUK、CHRISTOPHER RAMSEY 和 MARCEL SCHERER

Abstract. 本文证明，非自伴算子代数的 C*-覆盖格要么只有一个元素，要么是不可数的。我们通过两种方式证明，确实存在只有一个元素的非自伴算子代数：一种是将其明确构造为泛缩算子的 C*-代数的子代数，另一种是借鉴 Kirchberg 和 Wassermann 关于算子系统的工作，采用直极限构造。我们还证明，C*-包络在该格中不一定有直接后继C*-覆盖；此外，半狄利克雷非自伴算子代数的格绝不会只有一个元素。

1. Introduction

非自伴算子代数所生成的自伴结构能告诉我们关于原算子代数的哪些信息？已知这些 C*-代数在一种自然等价关系下构成完备格，因此我们将探讨这一集合可能具有的最基本形式。是否存在生成唯一一个 C*-代数的非自伴算子代数，还是说这意味着它是自伴的？有限格呢？全序格呢？

给定一个算子代数 A，若一个 C*-代数由 A 的某个完全等距表示的像生成，则称其为 *C*-覆盖* 。如果两个这样的覆盖之间存在一个与 A 的表示相容的 *-同构，则称它们等价。所有 C*-覆盖构成的集合称为*C*-覆盖格*，记为 C*-Lat(A)；在自然偏序下，它是一个完备格。这意味着存在一个极小C^*-覆盖和一个极大 C^*-覆盖；从历史上看，它们是算子代数最重要的自伴结构。近年来，人们开始研究和运用 C*-覆盖格，参见[**15, 21, 10, 12, 11, 13**], ；我们坚信，基于存在众多易于处理的开放问题，这将发展成为一门有价值的理论。

我们将在第2节向读者回顾 C*-覆盖的相关定义、定理和发展历史。我们还将仔细阐述算子代数的直极限理论及其与 C*-覆盖的关系。之后，我们将研究 C*-Lat(A) 的基数，并探讨 [**12**] 中的问题3.1：是否存在一个只有一个 C^*-覆盖等价类的非自伴算子代数？我们将在第3节通过证明以下定理，对这个问题给出肯定的回答。

定理 3.12。设 x 为一个泛缩算子。那么，由1、x、$(x^*)^2, (x^*)^3$ 生成的算子代数是非自伴的，且在等价意义下只有一个 C^*-覆盖。

此外，从任意一个非自伴算子代数出发，我们构造一个由算子代数组成的单射归纳序列，其归纳极限是非自伴的，且仅有一个 C^*-覆盖等价类。受 Kirchberg-Wassermann 算子系的启发（见 [**16**, 命题 16]），构造过程如下：我们考虑一个嵌入其极大 C^*-覆盖中的算子代数 A，并加入其 Shilov 理想 I。重复这一过程即可得到该归纳序列。受对象 $A + I$ 的应用启发，我们在第4节研究由 Shilov 理想扩张算子代数的情形，并证明 C*-Lat(A) 与 C*-Lat($A + I$) 格同构。我们还用 A 的极大 C^*-覆盖刻画 $A + I$ 的极大 C^*-覆盖。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 47L55, 46L05,
Key words and phrases: C*-覆盖、算子代数、非自伴。

鉴于存在具有单点 C^*-覆盖格的非自伴算子代数，我们继续研究 C^*-覆盖格，并提出以下问题：是否存在一个算子代数 A，使得 $|\mathrm{C}^*\text{-Lat}(A)| < \infty$？结合 Sarason 和 Katsnelson 的一项经典结果，我们在第5节得到了本文的主要结果。

定理 5.6。设 A是一个可分算子代数。则

$$|C^*\text{-Lat}(A)| = \begin{cases} 1 & or \\ \mathfrak{c}, \end{cases}$$

其中 $\mathfrak{c}$是连续统。

对于不可分算子代数，其基数要么为 1，要么至少为 $\mathfrak{c}$。结合 [12], 中的结果可知，包含于有限维C^*-代数中的非自伴算子代数，以及超刚性算子代数，都至少具有 $\mathfrak{c}$个不同的 C^*-覆盖等价类。

虽然这一结果排除了 $\mathrm{C}^*\text{-Lat}(A)$ 的许多可能结构，但格是否能够成为全序仍然未知。格二分性的证明表明，如果最小 C^*-覆盖存在直接后继，则 $\mathrm{C}^*\text{-Lat}(A)$ 不可能成为全序。在第 6 节中，我们利用 Gramsch 和 Luft 的一个结果 [8, 18] ，给出了一个算子代数的例子，其中最小 C^*-覆盖没有直接后继；该结果刻画了任意维数希尔伯特空间 H 上 $\mathcal{B}(H)$中的理想。

最后，我们通过证明以下结论来回答 [11] 的问题 3.13：

定理 7.1。若 A是非自伴的半狄利克雷算子代数，则最大C^*-覆盖不是半狄利克雷C^*-覆盖。

结合格二分性，这意味着非自伴半狄利克雷算子代数拥有无穷多个不同的 C^*-覆盖等价类。

2. Background

2.1. C*-覆盖。给定一个算子代数 A，若一对$(\mathcal{A}, j)$由一个 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 和一个完全等距映射 $j : A \to \mathcal{A}$ 组成，且满足 $\mathcal{A} = j(A)$，则称其为 A的一个 C^*-覆盖。给定 A 的两个C^*-覆盖$(\mathcal{A}_1, j_1)$，$(\mathcal{A}_2, j_2)$，若存在一个 $*$-同态 $\Phi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$，满足 $\Phi j_1 = j_2$，则称其为C^*-覆盖态射，记作

$$\Phi : (\mathcal{A}_1, j_1) \to (\mathcal{A}_2, j_2)\,.$$

据我们所知，C*-覆盖及其态射首次在 [4, 第2]章中得到描述。若该态射存在，则事实上它是唯一的，因此我们只写

$$(\mathcal{A}_2, j_2) \preceq (\mathcal{A}_1, j_1)$$

若这样的态射存在。唯一性还意味着，若 $(\mathcal{A}_2, j_2) \preceq (\mathcal{A}_1, j_1)$ 且 $(\mathcal{A}_1, j_1) \preceq(\mathcal{A}_2, j_2)$，则存在一个 $*$-同构 $\Phi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$，满足 $\Phi j_1 = j_2$。在这种情况下，我们写作

$$(\mathcal{A}_1, j_1) \sim (\mathcal{A}_2, j_2)\,.$$

不难验证，$\sim$ 定义了一个等价关系。用 $[\mathcal{A}, j]$ 表示所有与 $(\mathcal{A}, j)$ 等价的 C^*-覆盖所构成的等价类。那么，-覆盖的格，

$$\mathrm{C}^*\text{-Lat}(A) = \{[\mathcal{A}, j] \mid (\mathcal{A}, j)\ C^*\text{-cover of A}\},$$

构成一个带有继承偏序的集合，我们仍用同一符号 $\preceq$表示该偏序。对于 $\mathrm{C}^*\text{-Lat}(A)$ 中的一个族 $(f_i)_{i\in I}$，若元素 $f \in \mathrm{C}^*\text{-Lat}(A)$ 满足以下条件，则称其为 $(f_i)_{i\in I}$ 的上确界

(i) 对所有 $i \in I$，$f_i \preceq f$；(ii) 如果 $g \in \mathrm{C}^*\text{-Lat}(A)$ 满足 $f_i \preceq g$，则对所有 $i \in I$，有 $f \preceq g$。

不难验证，若这样的元素 f 存在，则它是唯一的。上确界的另一种说法是最小上界。特别地，$\{[\mathcal{A}_i, j_i]\}_{i\in I}$（ A 的一组 C*-覆盖）的上确界是 $[C^*(j(A))\ j]$ ，其中

$$j = \bigoplus_{i\in I} j_i\,.$$

对偶地，元素 $f \in$C*-Lat(A) 被称为 $(f_i)_{i\in I}$ 的下确界，如果

(i) 对所有 $i \in I$， $f \preceq f_i$；(ii) 如果 $g \in$ C*-Lat(A) 对所有 $i \in I$ 满足 $g \preceq f_i$，那么 $g \preceq f$。

同样容易验证，如果这样的元素 f 存在，那么它是唯一的。下确界的另一个术语是最大下界。下一小节将用边界理想具体描述下确界。

如果一个偏序集中的每个有限子集都有上确界和下确界，则称其为格。在任意格中，上确界和下确界通常分别记作 $\vee$ 和 $\wedge$。如果偏序集中的每个（可能是无限的）子集都有上确界和下确界，则称其为完备格。

命题2.1 ([10]和 [21])。 设 A 是一个算子代数。那么，带有序关系 $\preceq$的 C^*-$Lat(A)$ 构成一个完备格。

每个完备格都有唯一的最小元和最大元，分别是整个格的下确界和上确界。稍微滥用一下记号，我们将 C*-Lat(A) 的最小元，以及相应等价类中的每个 C^*-覆盖，称为 A 的 C^*-包络，记作

$$[C_e^*(A), i_e] \qquad \text{respectively} \qquad (C_e^*(A), i_e).$$

这两种记号中具体指哪一种，从上下文即可看出。不过，值得注意的是，就 C^*-覆盖而言， C^*-包络在同构意义下唯一，并具有如下泛性质：给定 A 的任意一个 C*-覆盖 $(\mathcal{A},\ j)$，存在唯一的 $*$-同态$\pi:\ \mathcal{A} \to C_e^*(A)$，使得 $\pi j = i_e$。 C^*-包络的存在并非显然；Arveson 在 [1] 中提出了这一猜想，Hamana 则于 [9] 首次给出了证明。

同样，我们将 C*-Lat(A) 的最大元称为 A的极大 C^*-覆盖，记作

$$[C_{max}^*(A), i_{max}] \qquad \text{respectively} \qquad (C_{max}^*(A), i_{max}).$$

其存在性的证明可见 [4]。关于极大 C^*-覆盖的以下刻画广为人知，称为极大 C^*-覆盖的泛性质。

引理 2.2. 设$(\mathcal{A}, \pi)$ 是算子代数 A 的一个 C^*-覆盖。以下各项等价:

(i) $(\mathcal{A}, \pi)$ 相对于 $\preceq$ 是极大的。(ii) 对于每个完全收缩同态 ρ: $A \to \mathcal{B}(H)$ ，都存在一个 $*$-同态 φ :$\mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ 使得

$$\rho = \varphi\pi.$$

最后，我们以简要介绍有关 C*-覆盖的已知结果来结束本小节。[15] 和 [10] 证明， A 的完全等距自同构不一定能提升到所有 C*-覆盖。[12] 提出了四种彼此相关但又不同的等价关系，用以刻画 C*-覆盖格中的“相同性”；这些关系都弱于完全等距同构。 [11] 证明，半狄利克雷算子代数的半狄利克雷 C*-覆盖构成一个完备子格。[13] 证明，剩余有限维算子代数的有限维表示分离（RFD）C*-覆盖往往不构成完备子格。

2.2. **边界理想**。 设 $(\mathcal{A}, i)$ 是 A 的一个 C^*-覆盖。若闭双边理想 $I \subset \mathcal{A}$ 满足商映射

$$\mathcal{A} \to \mathcal{A}/I$$

在 $i(A)$ 上是完全等距的。包含所有其他边界理想的边界理想称为 希洛夫边界理想，简称 *Shilov* 理想。请注意，边界理想

始终是相对于特定的 C^*-覆盖来考虑的，而且 Shilov 理想是唯一的。Shilov 理想的存在等价于 C^*-包络的存在，因此 Shilov 理想总是存在。

固定的 C^*-覆盖中的边界理想集合，连同按包含关系定义的典范序，构成一个完备格，其中族 $(I_i)_i$ 的下确界为 $\bigcap_i I_i$ ，上确界则为由 $\bigcup_i I_i$生成的（闭双边）理想 $\sum_i I_i$。这个完备格与 C*-Lat(A) 存在自然联系，由下述命题给出。证明见 [**21**, 定理 3.3]。

命题 2.3。 设 A 是一个算子代数，且$(C^*_{max}(A)\ i_{max})$ 是一个极大 C^*-覆盖。则映射

$$C^*\text{-}Lat(A) \to \{\text{boundary ideals in } C^*_{max}(A)\},$$
$$[\mathcal{B}, j] \longmapsto \ker(\tilde{j}),$$

~其中 $j : C^*_{max}(A) \to \mathcal{B}$ 是满足下式的唯一酉 $*$-同态

$$\tilde{j} \circ i_{max} = j,$$

and

$$\{\text{boundary ideals in } C^*_{max}(A)\} \to C^*\text{-}Lat(A), \quad I \longmapsto (C^*_{max}(A)/I, q_I),$$

其中 q_I 是关于 I的商映射，这些映射是反序且互为逆映射。

我们还有以下关于 C^*-包络的刻画。

引理 2.4. 设 A 是一个算子代数，且 $(\mathcal{A}, i)$ 是 A的一个 C^*-覆盖。则以下条件等价:

(i) $(\mathcal{A}, i)$ 是 A的 C^*-包络。(ii) $\mathcal{A}$ 不含关于 $i(A)$的非零边界理想。(iii) 相对于 $(\mathcal{A}, i)$ 的 *Shilov* 理想是 $\{0\}$。

2.3. **极大 u.c.c. 映射**。 设 H 和 K 是满足 $H \subset K$的希尔伯特空间，且 $\pi : A \to \mathcal{B}(H)$ 和 $\varphi : A \to \mathcal{B}(K)$ 是 u.c.c. 映射。若 φ 膨胀 π，或称 φ 是 π的一个膨胀，则

$$\pi = P_H \varphi|_H.$$

若对于 π的每一个膨胀， H 都是一个约化子空间，我们就称 π 是极大 的。证明见[**7**,定理 **1.2**]。

命题 2.5。 设 A 为一个算子代数，且 π 是定义在 A 上的完全收缩映射。则存在 π 的一个膨胀 φ，使得 φ 是极大的。

结合下一引理的第（i）部分，该命题可导出 C^*-包络存在性的证明。

引理 2.6。 设 A 为一个算子代数，并设 π 是定义在 A 上的极大完全等距酉同态。则

（i）（C^*（π（A））π）是 A 的一个 C^*-包络。（ii）若 （C^*_e（A） i_e）是 A 的 C^*-包络，则存在唯一的 *-同态 $\tilde{\pi}$，定义在 C^*_e（A）上，使得

$$\tilde{\pi} \circ i_e = \pi.$$

因此，如果我们取一个 u.c.i.同态 ρ 并将其膨胀为一个极大完全收缩同态 π，那么不难验证 π 也是 u.c.i.的，从而根据前一引理的（i），（C^*（π（A））π）是 A 的一个 C^*-包络。稍后我们将使用这一构造，并取 ρ 作为嵌入极大 C^*-覆盖的嵌入。

引理 2.7。 设 A 是一个算子代数，$(C^*_{max}(A)\ i_{max})$ 是极大 C^*-覆盖， I 是 *Shilov* 理想。对于 A 上的完全收缩同态 π，记 $\tilde{\pi}$ 为 $C^*_{max}(A)$上的唯一含幺 $*$-同态，满足

$$\tilde{\pi} i_{max} = \pi,$$

then

$$I = \bigcap \{\ker(\tilde{\pi}) \mid \pi : A \to \mathcal{B}(H) \text{ u.c.c. and maximal}\}.$$

结合引理 2.4，我们得到：如果 $(C^*_{max}(A)\ i_{max})$ 不是 C^*-包络，那么 $I \neq \{0\}$。这一观察将在二分定理的证明中发挥关键作用。

引理 2.8。设 A 是 C^*-代数 $\mathcal{A} = C^*(A)$ 中的一个算子代数，并设 π、$\pi_n : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$是含幺 *-同态，满足 $\pi_n \to \pi$ 逐点*-强算子拓扑。若每个 $\pi_n|_A$ 都是极大的，则存在一个定义在 C*-包络 $(C^*_e(A)\ i_e)$ 上的 $*$-同态 ψ，使得

$$\psi \circ i_e = \pi.$$

证明。由于每个同态 $\pi_n|_A$ 都是极大的，由引理 2.6，存在定义在 $C^*_e(A)$ 上的 *-同态ψ_n，满足

$$\psi_n \circ i_e = \pi_n|_A.$$

设 $q : \mathcal{A} \to C^*_e(A)$ 是商映射，满足 $q|_A = i_e$。那么 $\psi_n \circ q = \pi_n$，因为这些是 A 上以及 $\mathcal{A} = C^*(A)$ 上相等的 $*$-同态。

只需证明 $(\psi_n)_n$ 是逐点*-强算子拓扑柯西序列。设 $a \in C^*_e(A)$。由于 q 是满射，存在 $\tilde{a} \in \mathcal{A}$ 使得 $q(\tilde{a}) = a$。于是，

$$\|(\psi_n - \psi_m)(a)x\| = \|(\pi_n - \pi_m)(\tilde{a})x\|$$

对所有 $x \in H$ 均成立。因此，序列 (ψ_n) 有一个 *-强算子拓扑极限 ψ，标准论证表明 ψ 仍是一个 *-同态。对于 $a \in A$，我们有

$$\psi(i_e(a)) = \lim_n \psi_n(i_e(a)) = \lim_n \pi_n(a) = \pi(a),$$

因此 $\psi \circ i_e = \pi|_A$，如所需。 ∎

2.4. 直接极限。一列算子代数 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 连同 u.c.i. 同态

$$i_n : A_n \to A_{n+1}$$

称为算子代数的直接系统。构造它们的直接极限有几种方法。一种方法见 [**4**, Example 2.3.8]，：将 A_n 视为 Banach代数，在 Banach代数意义下构造它们的直接极限 A；利用 A_n 的算子代数结构，将 $M_m(A)$ 转化为 Banach代数；然后使用 Blecher-Ruan-Sinclair定理验证所得对象仍是一个（抽象）算子代数。由于我们关注的是 C^* 对 A_n 的覆盖与直接极限的 C^* 覆盖之间的明确联系，而上述构造并未涉及这一点，因此这种方法无法提供我们所需的充分信息。于是，我们将介绍一种更具体的方法，借助 C^* 覆盖来构造直接极限；此方法与 [**16**, Proposition 16], 类似，并建立该序列的 C^* 覆盖与直接极限的 C^* 覆盖之间的联系。由于无需更一般的情形，我们只对以自然数为指标的直接系统介绍这一构造；将其推广到以任意有向集为指标的直接系统也毫无困难。

对于每个 n，令 $C^*(A_n)$ 为 A_n 的任意 C^*-覆盖。为大幅简化记号，我们省略嵌入，并将 A_n 视为 $C^*(A_n)$ 的子集。令 $\mathcal{A}$为$C^*(A_n)$ 的 ℓ^∞-直积，并考虑理想

$$I = \{(x_n) \in \mathcal{A} \mid \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0\}.$$

令 $B \subset \mathcal{A}$ 为满足以下条件的序列代数 (x_n)

(i) 对所有 n，$x_n \in A_n \subseteq C^*(A_n)$；(ii) $x_{n+1} = x_n$ 最终成立。

Set

$$A = \overline{(B + I)/I} \subset \mathcal{A}/I.$$

对于 $n \geq 0$，定义 $\lambda_n\colon\ A_n \to A$ 由 $x \mapsto (x_j) + I$ 给出，其中

$$x_j = \begin{cases} 1 & (j < n), \\ x & (j = n), \\ (i_{j-1} i_{j-2} \dots i_n)(x) & (j > n). \end{cases}$$

显然可以验证，每个 λ_n 都是 u.c.i.同态，$\lambda_n = \lambda_{n+1} i_n$ 和 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda_n(A_n)$。我们称算子代数 A 为 $(A_n, i_n)_n$ 的直接极限，而 C^*-代数$C^*(A) \subset \mathcal{A}/I$ 连同恒等嵌入则称为 A的诱导 C^*-覆盖。

现在，$(A_n)_n$ 的每个 C^*-覆盖序列 $(\mathcal{A}_n, \varphi_n)_n$ 都会通过以下方式诱导出一个直接系统：

$$\varphi_0(A_0) \xrightarrow{\tilde{i}_0} \varphi_1(A_1) \xrightarrow{\tilde{i}_1} \varphi_2(A_2) \to \dots$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{i}_n : \varphi_n(A_n) &\to \varphi_{n+1}(A_{n+1}), \\ a &\mapsto (\varphi_{n+1} i_n \varphi_n^{-1})(a). \end{aligned}$$

不难预料，正如下一命题将要证明的，该直接系统的直接极限与 A 相同，亦即这两个直极限之间存在一个满射酉完全等距同态。因此，$(\varphi_n(A_n)\ i_n)_n$ 的诱导 C^*-覆盖也是 A的一个 C^*-覆盖，但它取决于该满射酉完全等距同态。为避免这一问题，我们将要求该满射酉完全等距同态具有某种交织性质，使其唯一，如下一命题所示。

命题 2.9。给定一个由算子代数组成的直接系统 $(A_n, i_n)_n$ 及其 C^*-覆盖 $(\mathcal{A}_n, \varphi_n)$。令 A 为 $(A_n, i_n)_n$ 的直接极限，令 B 为 $(\varphi_n(A_n)\ i_n)_n$的直接极限。记

$$\lambda_n : A_n \to A \quad \text{and} \quad \tilde{\lambda}_n : \varphi_n(A_n) \to B$$

由直接极限的构造得到的 *u.c.i.*同态。则存在唯一的满射酉完全等距同态 $\pi : A \to B$，使得 $\pi\lambda_n = \lambda_n\varphi_n$。

此外，若算子代数 C 满足

(i) 对每个 n，都存在 *u.c.i.*同态 $\rho_n\colon\ A_n \to C$，使得 $\rho_n = \rho_{n+1} i_n$，(ii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \rho_n(A_n) = C$,

then 存在唯一的满射酉完全等距同态 $\gamma\colon\ A \to C$，使得 $\gamma\lambda_n = \rho_n$.

特别地，这表明所得的直极限算子代数 A与对每个 A_n所使用的具体 C*-覆盖无关（在完全等距同构的意义下）。

证明。采用上述记号，对于每个 n，映射

$$j_n : \lambda_n(A_n) \to \tilde{\lambda}_n(\varphi_n(A_n)),\ \lambda_n(a) \mapsto \tilde{\lambda}_n(\varphi_n(a))$$

是一个满射酉完全等距同态，并且

$$j_{n+1}\lambda_n = j_{n+1}\lambda_{n+1} i_n = \tilde{\lambda}_{n+1}\varphi_{n+1} i_n = \tilde{\lambda}_{n+1}\tilde{i}_n\varphi_n = \tilde{\lambda}_n\varphi_n = j_n\lambda_n$$

因此，映射 j_n 诱导出一个良定义的满射酉完全等距同态

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda_n(A_n) \to \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{\lambda}_n(\varphi_n(A_n))$$

~，它延拓为一个满射酉完全等距同态 $\pi\colon\ A \to B$，且满足 $\pi\lambda_n = \lambda_n\varphi_n$。$\pi$ 的唯一性源于 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda_n(A_n)$在 A中稠密这一事实，由此证明了命题的第一部分。

附加结论可通过将上述证明中的 ~ $\lambda_n\varphi_n$ 以及来自（i）的态射。

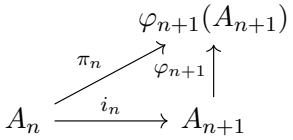
■

在上述命题的情形下，我们将 C^*-覆盖（$C^*(B)$ π）称为关于 C^*-覆盖（$C^*(\varphi_n(A_n))$ φ_n）的 诱导 C^*-覆盖 A $_n$。注意，根据前一个命题，u.c.i.同态 π 满足

$$\pi\lambda_n = \tilde{\lambda}_n\varphi_n.$$

定理 2.10。 设$(A_n, i_n)_n$是一个直接系统，其直接极限为 A；设$(\mathcal{A}_n, \varphi_n)_n$是$(A_n)_n$的 C^*-覆盖，并假设存在 $*$-同构 $\pi_n: C^*(A_n) \to \mathcal{A}_{n+1}$，使得交换图

(2.1)



˜可交换。那么，$(A_n, i_n)_n$和$(\varphi_n(A_n)\ i_n)_n$所诱导的 C^*-覆盖是 A 的等价覆盖，其中 $\tilde{i}_n : \varphi_n(A_n) \to \varphi_{n+1}(A_{n+1})$ 是由 $\varphi_{n+1}i_n\varphi_n^{-1}$给出的诱导完全等距同态。

证明。 沿用上述记号，设 $\mathcal{B}_1$ 是$(C^*(A_n))_n$ 的 ℓ^∞-和， $\mathcal{B}_2$ 是$(\mathcal{A}_n)_n$的 ℓ^∞-和。显然，

$$\Phi : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2,$$
$$(x_n) \mapsto (0, \pi_0(x_0), \pi_1(x_1), \dots)$$

是一个单射 $*$-同态。对于 $i = 1,2$，令

$$I_i = \{(x_n) \in \mathcal{B}_i \mid \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0\}.$$

不难验证

$$\pi : \mathcal{B}_1/I_1 \to \mathcal{B}_2/I_2,$$
$$(x_n) + I_1 \mapsto (x_n) + I_2$$

是良定义的，且为一个 $*$-同构。

回顾一下， $C^*(A) \subset \mathcal{B}_1/I_1$ 与恒等嵌入一起构成由 C^* 诱导的 ˜$(A_n, i_n)_n$ 覆盖，并将由 $(\mathcal{A}, j)$ 诱导的、关于 $(\mathcal{A}_n, \varphi_n)_n$ 的 C^* 覆盖记为 $(\mathcal{A}, j)$。根据构造，由诱导的 C^* 覆盖可知 ˜ $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}_2/I_2$。要证明这两个 C^* 覆盖等价，只需证明

$$\pi|_A = j.$$

˜设 λ_n 和 λ_n 是 u.c.i.同态，它们分别映到由关于 (A_n, i_n) 和 $(\varphi_n(A_n)\ i_n)$ 的直接极限构造所得到的各个直极限算子代数。利用 ˜ $\bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda_n(A_n)$ 在 A 中稠密这一点，以及 λ_n 和 λ_n 的定义，再结合 $j\lambda_n = \lambda_n\varphi_n$，只需证明对任意 $m > n$ 和 $x \in A_n$

(2.2) $$(\pi_{m-1}i_{m-2}i_{m-3}\dots i_n)(x) = (\tilde{i}_{m-1}\tilde{i}_{m-2}\dots\tilde{i}_n)(\varphi_n(x)).$$

˜首先，我们利用 $i_n\varphi_n = \varphi_{n+1}i_n$ 得到

$$(\tilde{i}_{m-1}\tilde{i}_{m-2}\dots\tilde{i}_n\varphi_n)(x) = (\varphi_m i_{m-1}i_{m-2}\dots i_n)(x).$$

现在，交换图 2.1 可交换这一假设推出 $\varphi_m i_{m-1} = \pi_{m-1}$，这表明等式 (2.2) 成立，因此定理得证。

■

命题 2.9 使我们能够将算子代数 A_n 视为 A 的子代数，并按包含关系排序。因此，我们可以省略嵌入 $i_n : A_n \to A_{n+1}$ 和 $\lambda_n : A_n \to A$；本节余下部分都将如此处理。

到目前为止，我们已经证明，为每个算子代数 A_n 选取特定的 C*-覆盖，自然会得到相应直极限算子代数 A 的一个 C*-覆盖。接下来的结果表明， A 的每个 C*-覆盖都可以由此方式得到。

引理 2.11。 设(A_n, i_n) 是算子代数的一个直接系统，且$(\mathcal{A}, j)$ 是直接极限 A 的一个 C^*-覆盖。那么，关于$(C^*(j(A_n))j|_{C^*(A_n)})$这些 C^*-覆盖所诱导的 C^*-覆盖 A，与$(\mathcal{A}, j)$等价。

证明。 定义 $\mathcal{A}_n = C^*(j(A_n))j_n = j|_{C^*(A_n)}$。将关于 C^*-覆盖 $(\mathcal{A}_n, j_n)$ 所诱导的 C^*-覆盖 A 记为 $(\mathcal{A}, \pi)$，并注意到，根据 π 的交织性质，$(j(A_n)\ ji_n j^{-1})_n$ 的直接极限构造中的 u.c.i.同态为 $\pi\circ j_n^{-1}$:

~ ~$j(A_n) \to \mathcal{A}$。我们需要证明存在一个 $*$-同构 $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$，使得

$$\Phi \circ \pi = j.$$

C^*-代数序列 $(\mathcal{A}_n)_n$ 按包含关系排序，因此在~ C^*-代数的意义下存在一个直接极限。容易验证，该极限与 $\mathcal{A}$ 一致，且 $\mathcal{A}_n \to \tilde{\mathcal{A}}$ 的嵌入延拓了 $\pi \circ j_n^{-1}$。此外，根据 [**19**, 定理 6.1.2 和注记~ 6.1.3], ，存在一个 $*$-同构 $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$，它与 $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}$ 的嵌入和~$\mathcal{A}_n \to \mathcal{A}$相交织。因此

$$\Phi(j(a)) = \Phi(j_n(a)) = (\pi j_n^{-1})(j(a)) = \pi(a)$$

对于一个 $a \in A_n$，并且由于 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 在 A中稠密，我们得到这些 C^*-覆盖之间的等价 个 .

定理 2.12. 通过使用每个 A_n的极大 C^*-覆盖得到的 A 的诱导 C^*-覆盖，构成 A的一个极大 C^*-覆盖。类似地，每个 A_n 的 C^*-包络构成 A的 C^*-包络。

证明。 不难验证，若 $\mathcal{A}_n$ 和 $\mathcal{B}_n$ 是 A_n 的 C^*-覆盖，且 $\mathcal{A}_n \preceq \mathcal{B}_n$，则 $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$。其中， $\mathcal{A}$ 是与 $(\mathcal{A}_n)_n$ 对应的诱导 C^*-覆盖，而 $\mathcal{B}$ 是与 $(\mathcal{B}_n)_n$对应的诱导覆盖。由引理 2.11 可知， A 的每个 C^*-覆盖都等价于一个诱导的 C^*-覆盖，因此结论成立。 ∎

一个很好的推论是：只需将所涉及的所有完全收缩同态延拓到相应的最大 C*-代数，就能立即得到任意直接极限所预期的泛性质。

引理 2.13。 设 (A_n, i_n) 是一个直接系统， A 是其直接极限，且 π_n 是定义在 A_n 上的完全收缩同态，并满足

$$\pi_{n+1} \circ i_n = \pi_n.$$

那么，存在一个定义在 A 上的完全收缩同态 π，使得

$$\pi \circ \lambda_n = \pi_n,$$

其中， λ_n： $A_n \to A$ 是由 A的构造得到的完全等距同态。

3. Non-trivial one point lattice example

本节将给出一种构造仅有一个 C^*-覆盖的非自伴算子代数的一般方法，即极大和最小 C*-覆盖重合，从而回答 [**12**]中的问题3.1。需要指出的是，我们的构造受到 [**16**, 命题16], 的启发，Kirchberg 和 Wassermann 曾用该构造构造仅有一个 C*-覆盖的算子系统。请注意，我们的结果是新颖的，无法作为 Kirchberg-Wassermann 构造的推论得出，因为他们的构造是在算子系统范畴中进行的，而该范畴不保留乘法结构。

在继续之前，我们先提出一个结果，后文将反复用它来得到（闭）算子代数。

引理 3.1. 设 X 是一个 *Banach*空间，且 Y、 $Z \subseteq X$ 是闭子空间。如果商映射 $X \to X/Y$ 在 Z上是等距的，那么 $Z + Y$ 是闭的。

证明。 令 $q : X \to X/Y$ 为商映射。由于 q 在 Z 上是等距的，像 $q(Z)$ 是闭集。因此，$Z + Y = q^{-1}(q(Z))$ 是闭集的连续原像，故为闭集。 ∎

我们的构造需要采用以下方法来扩张算子代数。给定一个具体嵌入某个 C*-覆盖中的算子代数，我们可以通过添加相应的 Shilov 理想来扩张它。

命题 3.2. 设 $A \subseteq C^*(A)$ 是一个具体算子代数，其 *Shilov* 理想为 $I \triangleleft C^*(A)$。集合 $A+I$ 是一个闭子代数，包含 I 作为自伴理想，并且和 $A+I$ 是直和，即 $A \cap I = 0$。投影映射 $p\colon A+I \to A$ 由 $p|_A = \mathrm{id}_A$ 和$p|_I = 0$ 给出，是一个完全压缩同态。

$A+I$ 在 $C^*(A)$ 中的 *Shilov* 理想是 $\{0\}$，因此 $C^*(A)$ 是 $A+I$的 C*-包络。此外，如果 A 是非自伴的，那么 $A+I$也是。

证明。 由于 I 是一个理想，因此 $A+I$ 是一个包含 I 作为理想的子代数。由于商映射 $q\colon C^*(A) \to C^*(A)/I$ 在 A上完全等距，且 q 消去I，任意元素 $x \in A \cap I$ 都满足 $\|x\| = \|q(x)\| = \|0\| = 0$，因此 $A \cap I = 0$。此外，由于 q在 A上是等距的，根据引理 3.1，子代数 $A+I$ 是闭的。将 q 限制到 $A+I$，可得到一个完全压缩同态 $p\colon A+I \to q(A) = (A+I)/I \cong A$，满足 $p|_A = \mathrm{id}$ 和 $p|_I = 0$。

现在，令 $J \triangleleft C^*(A)$ 为 $A+I$ 的边界理想。由于 $A \subseteq A+I$，理想 J 也是 A 的边界理想，因此 $J \subseteq I$。但是，商映射 $C^*(A) \to C^*(A)/J$ 必须在 $I \subseteq A+I$ 上完全等距，因此 $I \cap J = \{0\}$。所以 $C^*(A)$ 是 $A+I$ 的 C*- 包络。

最后，假设 $A+I$ 是自伴的，那么它将是一个 C*-代数，从而 $C^*(A) = A+I$。因此，商映射 $A+I = C^*(A) \to C^*(A)/I \cong C_e^*(A)$ 是一个 $*$-同态，其值域是 $C_e^*(A)$ 中 A 的副本。因此 A 本身是自伴的。 ∎

给定一个抽象算子代数，它仅在完全等距同构意义下唯一确定，这相当于固定一个给定的 A 的 C*-覆盖 $(C,\ \iota)$，并转而考虑子代数 $\iota(A)+I$。在证明中，通常将 ι 视为恒等映射会简单得多；这样可以大幅简化记号，同时不失一般性。

例3.3。 考虑算子代数 $T_2 \subseteq M_2$ 和完全压缩同态 $\pi\colon\ T_2 \to \mathbb{C}$，其定义如下：

$$\pi\begin{pmatrix} a & b \\ & c \end{pmatrix} = a.$$

接着，令 $\mathrm{id}\colon T_2 \to M_2$ 为包含映射，并考虑算子代数

$$A = (\pi \oplus \mathrm{id})(T_2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & & \\ & a & b \\ & & c \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,c \in \mathbb{C} \right\} \subseteq T_2.$$

算子代数 A 只是 T_2 的一个完全等距副本，但嵌入在一个并非其包络的 C*-代数 $\mathbb{C} \oplus M_2$ 中。此处，Shilov 理想为 $I = \mathbb{C} \oplus 0$，而以 I 扩张 A 得到

$$A + I = \mathbb{C} \oplus T_2,$$

事实上，$C^*(A+I) = \mathbb{C} \oplus M_2$ 正是 C*-包络。根据 [**12**, 推论 2.8]，T_2 与直和 $\mathbb{C} \oplus T_2$ 具有同构的 C*-覆盖格。第4节的主要结果——定理 4.4——表明这一情况总是成立：A 与 $A+I$ 格同构。

注意，尽管 $A \cap I = \{0\}$ 属于算子代数 $A+I$，但该算子代数与算子代数直和 $A \oplus I$ 并不通过映射 $(a,x) \to a+x$ 完全等距同构，其中 $a \in A$ 且 $x \in I$。

例3.4。 根据 [**3**, 例2.4]，， T_2 的最大C*-覆盖（$C^*_{\max}(T_2)$ $i_{\max}$）可明确描述为

$$C^*_{\max}(T_2) = \{F \in C([0,1], M_2) \mid F(0) \text{ is diagonal}\},$$

带嵌入

$$i_{\max}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right)(t) = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{t} \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

设 $A := i_{\max}(T_2)$。映射到 C*-包络 $C_e^*(T_2) \cong M_2$ 的唯一 C*-覆盖态射就是求值映射 $F \mapsto F(1)$。因此， A 的 Shilov 理想为

$$I = \{F \in C([0,1], M_2) \mid F(0) \text{ is diagonal and } F(1) = 0\}.$$

A的扩张因此是

$$A + I = \{F \in C([0,1], M_2) \mid F(0) \text{ is diagonal and } F(1) \text{ is upper triangular}\}.$$

不存在这样的 $[0,1]$ 闭子集，使得限制在 $A+I$ 上是完全等距的，因此 $A+I$ 在 $C^*_{\max}(T_2)$ 中的 Shilov 理想是平凡的。

接下来，我们将给出关于 A 上的完全收缩同态的每个 $A+I$ 完全收缩同态的完整刻画，并在本节余下部分多次使用这一结果。该结果应与 [2] 中定理 1.3.4 之前的分解结果进行比较。

定理 3.5. 设 A 是 $C^*(A)$ 中的非自伴算子代数，且 I 是A的 *Shilov* 理想。那么， $A+I$ 上的每个完全收缩同态 π 都有一个分解

$$\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$$

为完全收缩同态，使得 $\pi_1(I) = 0$ ，并且 π_2 延拓为 $C^*(A)$ 上的幺元 $*$-同态。此外，对于 A 上的每个完全收缩同态 π ，都存在 $A+I$ 上的完全收缩同态 $\tilde{\pi}$ ，使得 $\tilde{\pi}(I) = 0$ 且 $\tilde{\pi}(a) = \pi(a)$ 对所有 $a \in A$ 均成立。

证明。 若 $\pi\colon A+I \to \mathcal{B}(H)$ 是定义在 $A+I$ 上的完全收缩同态，则 $K = \pi(I)\overline{(H)}$ 是一个约化子空间。事实上，对所有 $a \in A+I, i \in I, x \in K, y \in K^\perp$ ，有

$$\langle \pi(a)\pi(i)x, y\rangle = \langle \pi(ai)x, y\rangle = 0$$

因为 $\pi(ai)x \in K$，并且

$$\langle \pi(i)x, \pi(a)y\rangle = \langle \pi(a)^*\pi(i)x, y\rangle = \langle (\pi(i^*a)^*x, y\rangle = \langle \pi(a^*i)x, y\rangle = 0,$$

这里我们用到了将 π 限制在 I 上是一个 $*$-同态。

Let

$$\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$$

分别通过压缩到 K 和 $K^\perp$ 得到该分解。显然可验证， π_2 在 I 上为零。另一方面，根据构造， π_1 是非退化的，因此由 [6, 引理 1.9.14] 可知， π_1 延拓为定义在 $C^*(A)$ 上的酉 $*$-同态。

补充说明可由以下观察得出：算子代数 $(A+I)/I$ 可通过一个酉完全等距同态与 A 等同。因此，若 π 是定义在 A 上的完全收缩同态，则可将 $\tilde{\pi}$ 选为 π 与商映射的复合。 ∎

在第4节中，我们通过显式构造该扩张$A+I$ 的 C*-覆盖格与 A的 C*-覆盖格之间的序同构，彻底确定了该扩张的 C*-覆盖格结构；不过，在下面这个 Kirchberg-Wassermann[16,型命题的证明中，我们并不需要这一同构 16] 。

定理 3.6。 每个非自伴算子代数都可以单位完全等距地嵌入到一个仅有一个 C^*覆盖的非自伴算子代数中。

证明。 设 A_0 是一个含幺的非自伴算子代数。将 A_0 与其在 $C_e^*(A_0)$ 中的像等同后，我们可以假设 $C^*(A_0)$ 已经是 C^*包络。固定一个极大 C^*覆盖 $(C^*_{max}(A_0)\ i_0)$，并令 I_0 表示 $i_0(A_0)$ 在 $C^*_{max}(A_0)$ 中的 Shilov 理想。

对于 $n \geq 0$，采用归纳法进行。给定 A_n 的极大 C^*-覆盖 $(C^*_{max}(A_n)\ i_n)$，以及 $i_n(A_n)$ 的 Shilov 理想 $I_n \subset C^*_{max}(A_n)$，令

$$A_{n+1} = i_n(A_n) + I_n \subset C^*_{max}(A_n),$$

由此得到一个算子代数的直接系统

$$i_n : A_n \to A_{n+1},$$

以及该归纳系统

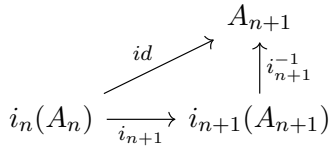
$$A_0 \xrightarrow{i_0} A_1 \xrightarrow{i_1} A_2 \xrightarrow{i_2} \dots$$

令 A 为序列 $(A_n)_n$ 的直极限算子代数，并令 $\lambda_n : A_n \to A$ 为满足下述条件的 u.c.i.同态

(i) $\lambda_n = \lambda_{n+1} i_n$,
(ii) $A = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} \lambda_n(A_n)}$.

由引理 3.2，$(C^*_{max}(A_n)$,id) 是 A_{n+1} 的 C^*-包络。将定理 2.12 应用于系统 $(A_n, i_n)_n$，可得所诱导的 C^*-覆盖是 A 的 C^*-包络。

由同一定理，我们可通过 $(C^*(i_n(A_n))\ i_n)$ 的诱导 C^*-覆盖，得到 A 的一个极大 C^*-覆盖。在此情形下，从 $i_n(A_n)$ 到 $\to i_{n+1}(A_{n+1})$ 的 u.c.i.同态由 $i_{n+1} i_n i_n^{-1} = i_{n+1}$ 给出。由于交换图



是交换的，我们可以应用定理 2.10，从而得到极大 C^*-覆盖与 A 的 C^*-包络等价。

还需证明 A 是非自伴的。我们将证明 A 至少有一个非极大表示。对于任意固定的 $n \in \mathbb{N}$，假设我们有定义在 A_n 上的完全收缩同态 π_n 和 Φ_n，使得 Φ_n 是 π_n 的一个膨胀。由定理 3.5

$$\begin{aligned} \pi_{n+1} : i_n(A_n) + I_n &\to \mathcal{B}(H), \\ i_n(x) + j &\mapsto \pi_n(x) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1} : i_n(A_n) + I_n &\to \mathcal{B}(H), \\ i_n(x) + j &\mapsto \Phi_n(x) \end{aligned}$$

是完全收缩同态。显然，Φ_{n+1} 是 π_{n+1} 的膨胀，并且

$$\pi_{n+1} \circ i_n = \pi_n, \qquad \Phi_n \circ i_n = \Phi_n.$$

由于 A_0 是非自伴的，存在定义在 A_0 上的完全收缩同态 π_0 和 Φ_0，使得 π_0 被 Φ_0 非平凡地膨胀。递归地可得完全收缩同态 $(\pi_n)_n$ 和 $(\Phi_n)_n$，使得 π_n 被 Φ_n 膨胀，并且

$$\pi_{n+1} \circ i_n = \pi_n, \qquad \Phi_{n+1} \circ i_n = \Phi_n.$$

因此，由引理 2.13，存在定义在 A 上的完全收缩同态 π 和 Φ，使得

$$\pi \circ \lambda_n = \pi_n, \qquad \Phi \circ \lambda_n = \Phi_n.$$

由于 $\pi_0 = \pi \circ \lambda_0$ 被 $\Phi_0 = \Phi \circ \lambda_0$ 非平凡地膨胀，我们有 Φ 是 π 的一个非平凡膨胀。因此，A 是非自伴的。 ∎

虽然计算上述证明中构造的泛算子代数似乎很困难——因为必须计算无穷多个极大 C^*-覆盖——但实际上并非如此。正如下一条定理将要证明的，极大 C^*-覆盖都与初始算子代数的极大 C^*-覆盖密切相关。

定理 3.7。设 A 是一个非自伴算子代数，视为极大C^*覆盖 $(C^*_{max}(A)\ i_{max})$ 的子代数，且 $I \subseteq C^*_{\max}(A)$ 是 A的 ***Shilov*** 理想。设

$$\mathcal{A} = \{(a + i, a + j) \mid a \in C^*_{max}(A), i, j \in I\}.$$

Then

$$j : A + I \to \mathcal{A},\ a + i \mapsto (a + i, a)$$

是良定义的，$(\mathcal{A}, j)$ 是 $A+I$的极大 C^*-覆盖，且 $0\oplus I$是 $j(A+I)$的 *Shilov* 理想。

证明。我们首先证明 $\mathcal{A}$确实是一个 C^*-代数。唯一可能不明确的是完备性。为此，我们将证明 $\mathcal{A}$ 在 $C^*_{max}(A) \oplus C^*_{max}(A)$ 中是闭的。首先注意到

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{(a,a) |\ a \in C^*_{max}(A)\}$$

是 $C^*_{max}(A) \oplus C^*_{max}(A)$ 的一个 C^*-子代数，并且 $0\oplus I$ 是 $C^*_{max}(A)\oplus C^*_{max}(A)$ 中的一个理想。~注意到，商映射由 $0\oplus I$ 给出，并且在 $\mathcal{A}$ 上是等距的，因为

$$\|(a, a+i)\| = \max\{\|a\|, \|a+i\|\} \geq \|a\|.$$

~根据引理 3.1，我们得到 $\mathcal{A}+0\oplus I$ 是闭的。由于

$$(a+i, a+j) = (a+i, a+i) + (0, j-i),$$

~我们看到 $\mathcal{A} = \mathcal{A}+0\oplus I$，因此 $\mathcal{A}$ 是闭的。

接下来注意，由于 $A\cap I = \{0\}$，$x \in A+I$ 中的每个元素都有一个唯一分解$x = a+i$，其中 $a\in A$，$i \in I$。因此映射

$$j : A+I \to \mathcal{A}, a+i \mapsto (a+i, a)$$

是良定义的。显然，j 是一个含幺同态，且$C^*(j(A+I)) = \mathcal{A}$。因此，要证明（$\mathcal{A}$，$j$）是 $A+I$ 的一个 C^*-覆盖，只需证明 j 是完全等距的。给定一个矩阵 $M = (a_{k,\ l} + i_{k,\ l})_{1\leq k,\ l\leq n}$，我们有

$$\|M\| \geq \|(a_{k,l})_{1\leq k,l\leq n}\|.$$

因此

$$\|j(M)\| = \max\{\|M\|, \|(a_{k,l})_{1\leq k,l\leq n}\|\} = \|M\|,$$

因此 j 是完全等距的。

最后，我们需要证明（$\mathcal{A}$，j）是 $A+I$的极大 C^*-覆盖。根据引理 2.2，只需证明 $j(A+I)$ 上的每个完全收缩同态都延拓为$\mathcal{A}$上的一个 $*$-同态。设 π 是 $j(A+I)$上的一个完全收缩同态。

首先注意到，由于 $j(I) = I\oplus 0$ 是 $\mathcal{A}$中的一个理想，定理 3.5 表明 π 可分解为 $\pi_1\oplus\pi_2$，使得 $\pi_1(I\oplus 0) = 0$，并且 π_2 可延拓为 $\mathcal{A}$上的一个 $*$-同态。因此，我们只需证明 π_1 可延拓为 $\mathcal{A}$上的一个 $*$-同态。

在 A 上定义一个完全收缩同态，令其为

$$a \mapsto \pi_1((a,a)).$$

由 $C^*_{max}(A)$ 的泛性质，该完全收缩同态可扩张为一个含幺 $*$-同态 Π_1。在 $\mathcal{A}$ 上定义一个含幺 $*$-同态 ρ，令其为

$$(a+i, a+j) \mapsto \Pi_1(a+j).$$

由于

$$\rho((a+i,a)) = \Pi_1(a) = \pi_1((a,a)) = \pi_1((a+i,a))$$

我们看到 ρ 延拓了 π_1，因此 $(\mathcal{A}, j)$ 是 $A+I$ 的极大 C^*-覆盖。

最后，令 $p\colon \mathcal{A}\to C^*_{max}(A), (a+i, a+j) \mapsto a+i$。由命题 3.2，$(C^*_{max}(A)\ p|_{A+I})$ 是 $A+I$ 的 C^*-包络，因此由命题 2.3，Shilov 理想为

$$\ker(p) = 0\oplus I.$$

■

这一对 $C^*_{max}(A+I)$ 的刻画促成了一种新的构造：从任意非自伴算子代数出发，构造出一个只有一个 C^*-覆盖的非自伴算子代数。在注 3.9 中，我们将证明这个新的算子代数与定理 3.6 中的算子代数一致，这使得下面的证明变得多余；不过，该证明不同于定理 3.6 的证明，并且更深入地揭示了所构造的算子代数为何只有一个 C^*-覆盖。

定理 3.8。设 A 是非自伴算子代数，将其视为极大C^*-覆盖 （C^*_{max}（A） i_{max}）的子代数，并设 I 是 A 的 ***Shilov*** 理想。记 （ c_0）为 （ c_0-和）I_1^∞，并通过以下方式将 A 嵌入 ℓ^∞-和中 C^*_{max}（A）的可数多个副本中

$$i(a) = (a)_{n=1}^{\infty}.$$

Then

$$i(A) + c_0(I)$$

是一个非自伴算子代数，其单点格为 i（C^*_{max}（A）） $+ c_0$（I），并配有恒等嵌入。

证明。 $i(C^*_{max}(A))+c_0(I)$ 是一个 C^*-代数，这可由以下观察得出： $c_0(I)$ 是 $l^\infty(C^*_{max}(A)$ 中的一个理想，按该理想取商的商映射在 $i(A)$上是等距的，并结合引理 3.1。类似地，我们得到 $i(A)+c_0(I)$ 是闭的，因此 $i(A)+c_0(I)$ 确实是一个算子代数。此外，容易看出 $C^*(i(A) + c_0(I)) = i(C^*_{max}(A)) + c_0(I)$，因此 $i(C^*_{max}(A)) + c_0(I)$ 配有恒等嵌入，确实是 C^*-覆盖 $i(A) + c_0(I)$ 的一个 C*-覆盖。

接下来，我们必须证明，除等价之外，这个 C^*-覆盖是唯一的。设 J 是相对于这个 C^*-覆盖和 $x \in J$ 的 Shilov 理想。于是根据引理 3.1， $c_0(I) + J$ 是闭的，显然也是一个理想。若 $c_0(I) + J$ 严格大于 $c_0(I)$，则存在一个 $0 \neq a \in C^*_{max}(A)\tilde{}$ $\tilde{}$，使得 $i(a) \in c_0(I) + J\tilde{}$。设 J为 a在 $C^*_{max}(A)$中生成的理想。则 $i(J) \subset c_0(I) + J\tilde{}$，且 J 在 $C^*_{max}(A)$上的商映射在 A上完全等距。因此 $J \subset I$，尤其是 $a \in I$。根据假设，存在一个 $b \in c_0(I)$，使得 $i(a) + b \in J$。设 (b_λ) 是 I的一个近似单位。设 $(b_\lambda^{(n)})$ 为 $c_0(I)$中的元素，其 n 个分量为 b_λ，其余分量均为 0。然后

$$(i(a) + b)b_\lambda^{(n)} = 0$$

因为它属于 $c_0(I) \cap J$。但是，由于 $(bb_\lambda^{(n)})$ 收敛到这样一个元素：其第 n 个分量为 b 的第 n 个分量，其余分量均为 0；而 $(i(a)b_\lambda^{(n)})$ 收敛到这样一个元素：其第 n 个分量为 $i(a)$ 的第 n 个分量，其余分量均为 0，因此我们得出 $i(a) = -b$。但是 $i(a) =(a)_1^\infty$ 和 $b \in c_0(I)$，所以只有在 $a = 0$ 时才可能如此，这与假设 $a \neq 0$ 矛盾，并且意味着 $J \subset c_0(I)$。由于 $c_0(I) \subset i(A) + c_0(I)$，我们得出 $J = \{0\}$。因此，$i(C^*_{max}(A)) + c_0(I)$ 是 C*-包络。

接下来要证明，极大 C^*-覆盖由 $i(C^*_{max}(A)) + c_0(I)$ 给出。为此，只需证明 $i(A) + c_0(I)$ 上的每个完全收缩同态都能根据引理 2.2 延拓为 $C^*(i(A) + c_0(I))$ 上的单位 $*$-态射。根据定理 3.5， $i(A)+c_0(I)$ 上的每个完全收缩同态 π 都可分解为 $\pi_1 \oplus \pi_2$，使得 $\pi_1(c_0(I)) = 0$，且 π_2 延拓为 $C^*(i(A) + c_0(I))$ 上的单位 $*$-态射。因此，我们只需证明 π_1 可延拓为单位 $*$-态射。

由于 i 是一个单射的含幺 $*$-同态，我们有（i（C^*_{max}（A） $i \circ i_{max}$）仍然是 A的一个极大 C^*-覆盖。因此，根据极大 C^*-覆盖的泛性质， $\pi_1|_{i(A)}$延拓为定义在 i（C^*_{max}（A））上的含幺 $*$-同态 Π_1。定义i（C^*_{max}（A））上的含幺 $*$-同态 $+ c_0$（I）：

$$\rho_n(i(a) + (i_k)) = \Pi_1(a + i_n).$$

只需证明（ρ_n）$_n$ 关于算子范数是逐点柯西序列即可。对于所有 $a \in C^*_{max}$（A）， （i_k） $\in c_0$（I），有

$$\|\rho_n(i(a) + (i_k)) - \rho_m(i(a) - (i_k))\| = \|\Pi_1(i_n - i_m)\| \leq \|i_n - i_m\|,$$

并且由于（i_k） $\in c_0$（I），对于每个 $\epsilon > 0$，都存在一个 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有n， $m \geq N$，均有 $\|i_n - i_m\| < \epsilon$，证明完毕。 ∎

注 3.9。到目前为止，对于具有一个 C^*-覆盖的非自伴算子代数，我们已经看到两种一般构造，即定理 3.6 和定理 3.8。当然，这引出了一个问题：这两者之间有什么关系？事实证明，从存在一个二者之间的满射酉完全等距同态这一意义上说，它们是相同的。为此，设 A_0 为一个非自伴算子代数，并令 $(A_n)_n$ 为定理

3.6 中由 u.c.i.同态 $i_n\colon A_n \to A_{n+1}$ 所构成的算子代数序列，并令 $A = \overline{i(A_0) + c_0(I)}$ 为定理 3.8 中的算子代数。为了证明 A 与 $(A_n)_n$ 的归纳极限重合，根据命题 2.9，只需证明存在 u.c.i.同态 $\lambda_n\colon A_n \to A$，使得

(i) $\lambda_n = \lambda_{n+1} i_n$,
(ii) $A = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} \lambda_n(A_n)}$.

首先定义 λ_0 为

$$\lambda_0(a) = i(a) = (a, a, a, \dots).$$

根据定理 3.7，我们可以将 A_1 识别为

$$\{(a + i, a) \mid a \in A_0, i \in I\},$$

并将 A_1 的极大 C^*-覆盖识别为

$$\{(a + i, a + j) \mid a \in C^*_{max}(A_0), i, j \in I\}.$$

那么 Shilov 理想由 $0 \oplus I$给出。递归地，我们得到 A_n 可以被识别为

$$\{(a + i_1, \dots, a + i_n, a) \mid a \in A_0, i_1, \dots, i_n \in I\},$$

以及 A_n 的极大 C^*-覆盖，其中

$$\{(a + i_1, \dots, a + i_n, a + i_{n+1}) \mid a \in C^*_{max}(A_0), i_1, \dots, i_{n+1} \in I\}$$

其 Shilov 理想为 $0 \oplus \dots 0 \oplus I$。定义 λ_n 为

$$\lambda_n((a + i_1, \dots, a + i_n, a)) = (a + i_1, \dots, a + i_n, a, a, a, \dots).$$

注意到通过上述识别， i_n 可表示为

$$i_n((a + i_1, \dots, a + i_n, a)) = (a + i_1, \dots, a + i_n, a, a),$$

容易验证， λ_n 满足 (i) 和 (ii)。因此，由命题 2.9 可得满射 u.c.i. 同态

本章最后，我们将介绍另一个算子代数的例子：它只有一个 C^*-覆盖，而它与定理 3.6 的关系尚不明确。

令 $C^*(1, x)$ 为由压缩算子 x 生成的含幺泛 C*-代数。本章余下部分中，用 A 表示由 $1, x, (x^2)^*, (x^3)^*$ 生成的算子代数。我们将证明， A 的 C*-包络和最大 C*-代数均为 $C^*(1, x)$，并带有恒等嵌入；此外， A 是非自伴的。注意， A 是有限维表示分离的，因为 $C^*(1, x)$ 是有限维表示分离的 C*-代数。

注 3.10. 设 $\pi\colon A \to \mathcal{B}(H)$ 是一个完全收缩同态。由于 π 可延拓为定义在 $A + A^*$ 上的完全正映射，因此，如果 $a \in A$ 也满足 $a^* \in A$，则 $\pi(a^*) = \pi(a)^*$。于是 $\pi((x^2)^*) = \pi(x^2)^* = (\pi(x)^2)^*$，且 $\pi((x^3)^*) = (\pi(x)^3)^*$。特别地， A上的每个完全收缩同态都由其在 x 上的取值唯一确定。因此，对于每个压缩算子 $T \in \mathcal{B}(H)$，恰有一个完全收缩同态 $\pi : A \to \mathcal{B}(H)$ 满足$\pi(x) = T$。

定理 3.11. 设 $T \in \mathcal{B}(H)$ 是一个可逆压缩算子，且 $\pi\colon C^*(x) \to \mathcal{B}(H)$ 是满足 $\pi(x) = T$ 的含幺 *-同态。那么 $\pi|_A$ 是极大的。

证明。 令 $\Pi\colon C^*(x) \to \mathcal{B}(K)$ 为一个含幺 *-同态，且 $H \subset K$和 $(P_H \Pi|_H)|_A = \pi|_A$。根据 Sarason引理 [20]，我们有 H 对于 Π是半不变的。因此，存在闭子空间 $M \subseteq L \subseteq K$，满足 $L \ominus M = H$，使得 M和 L 对于 $\Pi|_A$是不变的。由于 C*-代数 $C^*(1, x^2, x^3)$ 包含于 A 中， M和 L 已经必须约化 $\Pi|_{C^*(1,\ x^2,\ x^3)}$。将 $\Pi(x)$写成矩阵形式

$$\Pi(x) = \begin{pmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} & T_{1,3} \\ 0 & T & T_{2,3} \\ 0 & 0 & T_{3,3} \end{pmatrix}$$

关于正交分解 $K = M \oplus H \oplus (K \ominus L)$。

现在我们可以用三种不同的方法计算 $\Pi(x^3)$。一方面

$$\Pi(x^3)=\begin{pmatrix} T_{1,1}^3 & 0 & 0\\ 0 & T^3 & 0\\ 0 & 0 & T_{3,3}^3\end{pmatrix},$$

因为 $x^3\in C^*(1,\ x^2,\ x^3)$，因此 $M,\ L$ 是约化的。另一方面

$$\Pi(x^3)=\Pi(x)\Pi(x^2)=\begin{pmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} & T_{1,3}\\ 0 & T & T_{2,3}\\ 0 & 0 & T_{3,3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_{1,1}^2 & 0 & 0\\ 0 & T^2 & 0\\ 0 & 0 & T_{3,3}^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} T_{1,1}^3 & T_{1,2}T^2 & T_{1,3}T_{3,3}^2\\ 0 & T^3 & T_{2,3}T_{3,3}^2\\ 0 & 0 & T_{3,3}^3\end{pmatrix}$$

这里我们用到了 $x^2\in C^*(1,\ x^2,\ x^3)$。因此 $T_{1,\ 2}T^2=0$，且由于根据假设 T可逆，故 $T_{1,\ 2}=0$。同理，我们从

$$\Pi(x^3)=\Pi(x^2)\Pi(x)=\begin{pmatrix} T_{1,1}^2 & 0 & 0\\ 0 & T^2 & 0\\ 0 & 0 & T_{3,3}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} & T_{1,3}\\ 0 & T & T_{2,3}\\ 0 & 0 & T_{3,3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} T_{1,1}^3 & T_{1,1}^2T_{1,2} & T_{1,1}^2T_{1,3}\\ 0 & T^3 & T^2T_{2,3}\\ 0 & 0 & T_{3,3}^3\end{pmatrix}$$

可得 $T_{2,\ 3}=0$。这表明 H 对 Π 是约化的，因此 π 是极大的。 ∎

定理 3.12. 算子代数 A 是非自伴的，且除等价外只有一个C^*-覆盖。

证明. 显然， $C^*_{\max}(A)$由 $C^*(x)$给出，因为每个压缩算子 $T\in\mathcal{B}(H)$都定义了一个完全收缩同态 $\pi\colon A\to\mathcal{B}(H)\ x\mapsto T$。根据注 3.10，每个完全收缩同态 $\pi\colon A\to\mathcal{B}(H)$ 都由压缩算子 $\pi(x)$ 唯一确定，因此唯一延拓为泛 C*-代数 $C^*(x)$上的一个 $*$-同态。

令 $\iota\colon A\to C_{\mathrm{e}}^*(A)$ 为 A 到其 C*-包络的嵌入，并令 $\sigma\colon C^*(A)\to C_{\mathrm{e}}^*(A)$ 为满足 $\sigma|_A=\iota$ 的 A 的唯一 C*- 覆盖态射。由定理 3.11，任意可逆压缩算子 $T\in M_n$ 都确定了 A 的一个极大表示，因此 $*$-同态$C^*(x)\to M_n,\ x\mapsto T$ 可经由 σ 分解。由于可逆压缩算子在 M_n 的所有压缩算子组成的集合中稠密，这类同态 $C^*(x)\to M_n$ 在逐点 *-强算子拓扑下稠密于所有同态 $C^*(x)\to M_n$。由引理 2.8 可知，每个 $*$-同态 $C^*(x)\to M_n$ 都可经由 σ 分解。由于 $C^*(x)$ 根据 [5, 定理 5.1], 具有有限维表示分离性质，有限维表示在 $C^*(x)$ 上取范数，因此 σ 是等距的。

剩下要证明的是， A 是非自伴的。为此，只需证明在 A上至少存在一个非极大的完全收缩同态。考虑以下完全收缩同态： $\pi\colon A\to\mathbb{C},\ x\mapsto 0$ 以及

$$\psi\colon A\to M_2,\quad x\mapsto\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

由于 $\psi((x^*)^2)=\psi((x^*)^3)=0$，我们看到 $\mathbb{C}\oplus 0$ 是 ψ的不变子空间，而将 ψ 压缩到 $\mathbb{C}\oplus 0\cong\mathbb{C}$ 上所得的算子为 π。这表明 π 不是极大的，因此 A 是非自伴的。 ∎

仅有一个 C*-覆盖的非自伴算子代数类，其结构比预想的更丰富，也为进一步研究提供了契机。关于这一点，我们以如下问题结束对具有单点格的非自伴算子代数的讨论：

问题 3.13。 是否存在具有单点格的非自伴交换算子代数?

4. Extension of an operator algebra by a Shilov ideal

在本节中，始终设 A 是一个具体嵌入由 A 生成的 C*-代数中的含幺算子代数，我们将该代数简记为 $C^*(A)$。除非特别说明，我们

不假设 $C^*(A)$ 是 A 的 C*-包络 $C_e^*(A)$ 或最大 C*-代数 $C_{\max}^*(A)$。设 $I \triangleleft C^*(A)$ 是 A 在 $C^*(A)$ 中的 Shilov 理想。

在命题 3.2 中，我们证明了将 A 扩大为算子代数 $A+I$ 时，C*-覆盖 $C^*(A)$ 就成为 C*-包络。人们或许会想知道 $A+I$ 的其余 C*-覆盖格 C*-Lat($A+I$) 是什么，以及它与 A 的格有何关联。为了说明下文内容，以下视角很有帮助：C*-包络 $C_e^*(A+I) = C^*(A)$ 是 C*-包络 $C_e^*(A) \cong C^*(A)/I$ 的一个扩张，其中包含理想 I 的一个副本；按通常意义，这意味着存在一个由 $*$-同态构成的正合列

$$0 \to I \to C^*(A) \to C_e^*(A) \to 0.$$

在本节的主要结果——定理 4.4 中，我们将证明，每个 A 的 C*-覆盖，都唯一地构造为 A 的某个 C*-覆盖的扩张，并包含一个作为 A 的边界理想嵌入的 I 的副本。这个对应关系是 C*-Lat($A+I$) 与 C*-Lat(A) 之间的序同构。

在此，我们将概述后续论证的全部内容。给定 $A+I$ 的一个 C*-覆盖 (D,η)，有两种自然的方法可将其化简为 A 的一个 C*-覆盖。首先，嵌入的副本 $\eta(I) \subseteq D$ of$I$ 是 $\eta(A)$ 在 D 中的一个边界理想，因此存在一个**商映射** C*-覆盖

$$Q(D,\eta) := \left(\frac{D}{\eta(I)}, q\eta_A\right),$$

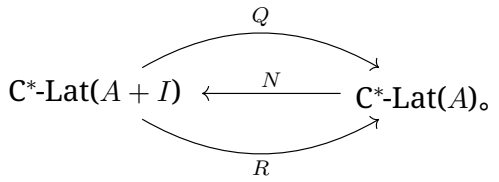
其中 $q\colon D \to D/\eta(I)$ 是商映射。其次，只需将 η 限制到 $A \subseteq A+I$，即可得到该 C*-覆盖的**限制**

$$R(D,\eta) := (C^*(\eta(A)), \eta|_A)$$

A。反过来，给定 A 的一个 C*-覆盖 (C,ι)，如何构造 $A+I$ 的 C*-覆盖？最自然的方法是沿投影映射 $p\colon A+I \to A$ 拉回表示 ι。除非 $I=0$，否则该表示并非完全等距，因此为得到完全等距映射，我们将其与包络表示 id：$A+I \to C^*(A) = C_e^*(A+I)$ 作直和。这就得到了我们称为**归纳**的对象

$$N(C,\iota) = (C^*((\iota q) \oplus \mathrm{id}_{A+I}, (\iota q) \oplus \mathrm{id}_{A+I})$$

对 $A+I$ 的 C*-覆盖 $(C,\ \iota)$。商、归纳和限制在 C*-覆盖格之间诱导出保序映射，其总结如下交换图所示



下文将证明，Q、N 和 R 确实是良定义的保序映射（命题 4.1、4.2 和 4.3）。随后，我们将证明 Q 和 N 互为逆映射（定理 4.4），因此 $A+I$ 与 A 格同构。映射 R 不是满射，因为它只能生成支配原始覆盖的 A 的 C*-覆盖 $(C^*(A),\ \mathrm{id})$，但对于这类覆盖，它是 N 的左逆（命题 4.6）。

命题 4.1。设 $A \subseteq C^*(A)$ 是一个算子代数，其 *Shilov* 理想为 $I \triangleleft C^*(A)$。设 $(D、\ \eta)$ 是算子代数 $A+I$ 的一个 *C**-覆盖。则，$\eta(I)$ 是 D 中的一个（自伴）理想，并且是 $\eta(A)$ 的一个边界理想。定义

$$Q(D,\eta) = (\frac{D}{\eta(I)}, q\eta|_A)$$

降为一个保序映射

$$C^*\text{-}Lat(A+I) \to C^*\text{-}Lat(A),$$

我们用同一个符号表示它。

证明。首先，假设 $(D,\ \eta)$ 是 $A+I$ 的一个 C*-覆盖。理想 $I \subseteq C^*(A)$ 本身是一个 C*-代数，因此完全等距同态 $\eta|_I$ 实际上是一个单射 $*$-态射，其值域 $\eta(I)$ 是 D 的一个 C*-子代数。事实上，$\eta(I)$ 是一个理想。为证明这一点，令

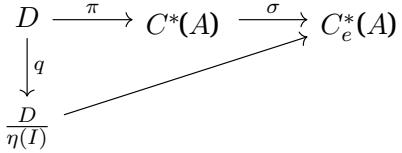
$$M = \{x \in D \mid x\eta(I) \subseteq \eta(I) \text{ and } \eta(I)x \subseteq \eta(I)\}.$$

显然，M 是一个子代数；由于 $\eta(I)$是闭的，M也是闭的；又由于 $\eta(I)$是自伴的，M也自伴。因此，M 是一个 C*-子代数。由于 I 是 $A+I$中的一个理想，且 η是一个同态，因此可知 M包含 $\eta(A+I)$。由于 $D = C^*(\eta(A+I))$由 $\eta(A+I)$生成，我们必有 $M = D$，所以 $\eta(I)$是一个理想。

现在，我们证明 $\eta(I)$是子代数 $\eta(A)$的一个边界理想。根据命题 3.2，恒等表示 $A+I \subseteq C^*(A)$是 A的 C*-包络。因此，存在一个 $*$-同态 $\pi\colon D \to C^*(A)$满足 $\pi\eta = \mathrm{id}_{A+I}$。现在，令 $\sigma\colon C^*(A) \to C^*(A)/I \cong C_e^*(A)$为由 I 到 A的 C*-包络的商映射，因此我们有 $*$-同态

$$D \xrightarrow{\pi} C^*(A) \xrightarrow{\sigma} C_e^*(A)$$

使得复合 $\sigma\pi$ 在 $\eta(A)$ 上完全等距。由于 $\ker\ \sigma = I$ 且 $\pi\eta = \mathrm{id}_{A+I}$，我们有 $\ker\ \sigma\pi \supseteq \eta(I)$。因此，$\pi\sigma$ 可分解为一个 $*$-同态 $D/\eta(I) \to C_e^*(A)$，使得交换图



交换。因为 $\sigma\pi$ 在 $\eta(A)$ 上完全等距，且对角映射是完全压缩的，所以商映射 q 在 $\eta(A)$ 上完全等距。因此，$q\eta|_A$ 完全等距。另请注意，由于 $D = C^*(\eta(A+I))$，那么 $D/\eta(I) = C^*(q\eta(A+I)) = C^*(q\eta(A))$ 由 $q\eta(A)$ 生成，因此 $(D/\eta(I)\ q\eta|_A)$ 确实是 A 的一个 C*-覆盖。

现在，假设 $(D,\ \eta)$ 和 $(E,\ \rho)$ 是 $A+I$ 的 C*-覆盖，且 $(D,\ \eta) \geq (E,\ \rho)$。那么，存在一个 $*$-同态 $\pi\colon D \to E$，满足 $\pi\eta = \rho$。于是 $\pi(\eta(I)) = \rho(I)$，因此 π 导出一个 $*$-同态

$$\tilde{\pi} : \frac{D}{\eta(I)} \to \frac{E}{\rho(I)}$$

满足 $\tilde{\pi}(x+\eta(I)) = \pi(x) + \rho(I)$。映射 $\tilde{\pi}$ 是一个 C*-覆盖态射 $(D/\eta(I)\ q\eta|_A) \to (E/\rho(I)\ q\rho|_A)$，因此 $Q(D,\ \eta) \geq Q(E,\ \rho)$。所以 Q 诱导出一个良定义的保序映射 C*-Lat$(A+I) \to$ C*-Lat(A)。

■

命题 4.2。设 $A \subseteq C^*(A)$ 是一个算子代数，其 *Shilov* 理想为 $I \lhd C^*(A)$。对于算子代数 $A+I$ 的 *C**-覆盖 (D,η)，赋值

$$R(D,\eta) = (C^*(\eta(A)), \eta|_A)$$

下降为一个保序映射

$$C^*\text{-}Lat(A+I) \to C^*\text{-}Lat(A),$$

我们用相同的符号表示该映射。并且，对于任意这样的 *C**-覆盖 (D,η)，在 A 的 *C**-覆盖偏序中有 $R(D,\eta) \geq (C^*(A), \mathrm{id})$。

证明。如果 $(D,\ \eta)$ 是 A 的 C*-覆盖，那么其限制 $\eta|_A$ 仍然是完全等距的，因此 $R(D,\ \eta) = (C^*(\eta(A))\ \eta|_A)$ 是 A 的 C*-覆盖。

设 $(D,\ \eta) \geq (E,\ \rho)$ 是 $A+I$ 的 C*-覆盖，因此存在一个 $*$-同态$\pi\colon D \to E$，满足 $\pi\eta = \rho$。于是 $\pi|_{C^*(\eta(A))}\colon C^*(\eta(A)) \to C^*(\rho(A))$ 是从 C*-覆盖$R(D,\ \eta) \to (E,\ \rho)$ 的一个态射。因此 Q 诱导出一个良定义的保序映射 C*-Lat$(A+I) \to$ C*-Lat(A)。

现在，根据命题 3.2，C*-覆盖 $A+I \subseteq C^*(A)$ 是 $A+I$ 的 C*-包络。因此，存在一个 $*$-同态 $\pi : D \to C^*(A)$，满足 $\pi\eta = \mathrm{id}$。因此，限制

$\pi|_{C^*(\eta(A))}$： $C^*(\eta(A)) \to C^*(A)$ 是 C*-覆盖 $R(D,\eta) \to (C^*(A)\ \iota)$ 的态射，因此 $R[D,\eta] \geq [C^*(A)\ \iota]$ 属于该序关系。 ∎

命题 4.3. 设 $A \subseteq C^*(A)$ 是一个带有 *Shilov* 理想 $I \triangleleft C^*(A)$的算子代数。对于算子代数 $A+I$ 的 *C**-覆盖 (C,ι)，映射

$$N(C,\iota) = (C^*((\iota p) \oplus \mathrm{id}_{A+I}), (\iota p) \oplus \mathrm{id}_{A+I}),$$

其中 $p\colon A+I \to A$ 是投影到 A 的完全压缩同态，可下降为一个保序映射

$$C^*\text{-}Lat(A) \to C^*\text{-}Lat(A+I),$$

我们仍用同一符号表示该映射。

证明。 给定 A 的一个 C*-覆盖 (C,ι),

$$N(C,\iota) := (C^*(\iota p \oplus \mathrm{id}), \iota p \oplus \mathrm{id})$$

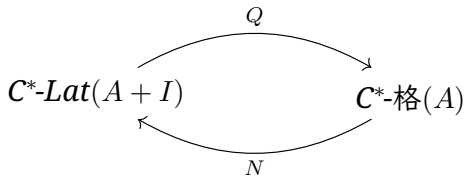
是 $A+I$ 的一个 C*-覆盖。事实上， ι 和 p 是完全压缩同态，因此 ιp 也是如此。由于 p 将 I 映为零，映射 ιp 在 $A+I$ 上显然不是完全等距的，但通过与恒等表示 $\mathrm{id}\colon A+I \subseteq C^*(A)$ 取直和即可解决这一问题。

现在，假设 $(C,\iota) \geq (D,\eta)$ 是 A 的 C*-覆盖，因此存在一个 $*$-同态$\pi\colon C \to D$，满足 $\pi\iota = \eta$。那么

$$(\pi \oplus \mathrm{id}) : C \oplus C^*(A) \to D \oplus C^*(A)$$

是一个满足 $(\pi \oplus \mathrm{id})((\iota p) \oplus \mathrm{id}) = (\pi\iota p) \oplus \mathrm{id} = (\eta p) \oplus \mathrm{id}$ 的 $*$-同态。这将限制为一个 C*-覆盖态射 $N(C,\iota) \to N(D,\eta)$。因此， N 诱导出一个良定义的保序映射 $C^*\text{-}\mathrm{Lat}(A) \to C^*\text{-}\mathrm{Lat}(A+I)$。 ∎

定理 4.4。 设 $A \subseteq C^*(A)$ 是一个算子代数，其 *Shilov* 理想为 $I \triangleleft C^*(A)$，并考虑更大的算子代数 $A+I$。商映射和归纳映射



是保序的互逆映射，因此 A 和 $A+I$ 格同构。特别地， $A+I$ 的每个 *C**-覆盖都是某个唯一的 A 的 *C**-覆盖的归纳；后者是一个 *C**-覆盖，它是通过将 I 的一个副本嵌入为 A 的该副本的边界理想，对 A 的一个 *C**-覆盖作扩张所得。

证明。设 (C,ι) 是 A 的一个 C*-覆盖。令 $N(C,\eta) = (C^*((\iota p \oplus \mathrm{id})(A+I))\ \iota p \oplus \mathrm{id}) =: (D,\eta)$，其中 $p\colon A+I \to A$ 是完全压缩投影同态，且 $\mathrm{id}\colon A+I \to C^*(A)$ 是恒等表示。理想 I 的像为 $\eta(I) = 0 \oplus I$。由于 I 是 Shilov 理想，映射 $\rho\colon A \to C^*(A) \to C^*(A)/I$ 是 A 的一个 C*-包络，因此存在一个单射 $*$-同态 $\pi\colon C \to C \oplus {}^{C^*(A)}{}_{I}$，满足对所有 $a \in A$ 都有 $\pi(a) = a \oplus \rho(a$。综上，我们得到一系列单射 $*$-同态的复合

$$C \xrightarrow{\ \pi\ } C \oplus \frac{C^*(A)}{I} \xrightarrow{\ \sim\ } \frac{C \oplus C^*(A)}{0 \oplus I} = \frac{D}{\eta(I)}.$$

这给出了 A 的 C*-覆盖 $(C,\iota) \to QN(C,\iota)$ 的同构，因此就等价类而言， $QN[C,\iota] = [C,\iota]$。因此 $QN = \mathrm{id}$。

现在，设 (D,η) 是 $A+I$ 的一个 C*-覆盖，因此 $Q(D,\eta) = (\eta^{D}{}_{I()}\ q\eta|_A)$，其中 $q\colon D \to D/\eta(I)$ 是由 $\eta(A)$-边界理想 $\eta(I)$ 给出的商映射。于是

$$NQ(D,\eta) = (C^*(((q\eta p) \oplus \mathrm{id})(A+I)), q\eta p \oplus \mathrm{id})$$

其中

$$C^*(q\eta p \oplus \mathrm{id}) \subseteq \frac{D}{\eta(I)} \oplus C^*(A).$$

根据命题 3.2，C*-代数 $C^*(A)$ 是 $A+I$ 的 C*-包络，因此存在一个 $*$-同态 $\pi: D \to C^*(A)$ 满足 $\pi\eta = \mathrm{id}$。因此我们有一个 $*$-同态

$$\sigma := q \oplus \pi : D \to \frac{D}{\eta(I)} \oplus C^*(A)$$

满足 $\sigma\eta = (q\eta) \oplus \mathrm{id} = (q\eta p) \oplus \mathrm{id}$。注意，$q\eta = q\eta p$，因为 $p: A+I \to A$ 消去I，且 q消去 $\eta(I)$。因此，σ实际上是一个 C*-覆盖态射 $(D,\eta) \to NQ(D,\eta)$。此外，我们有 $\ker\sigma = \ker q \cap \ker \pi = 0$，因为 $\ker q = \eta(I)$，且 π在 $\eta(I)$ 上完全等距。因此，σ是单射，从而给出一个 C*-覆盖同构 $(D,\eta) \to NQ(D,\eta)$，所以就等价类而言 $NQ[D,\eta] = [D,\eta]$。因此 $NQ = \mathrm{id}$，所以 N和 Q互为逆映射。 ∎

推论 4.5. 设 $A \subseteq C^*(A)$ 是一个算子代数，其 *Shilov* 理想为 $I \lhd C^*(A)$。设$(C^*_{\max}(A)\ i_A)$ 是 A 的最大 *C**-覆盖。那么 $A+I$ 的最大 *C**-覆盖为

$$(C^*_{\max}(A+I), i_{A+I}) = (C^*((i_A p \oplus \mathrm{id})(A+I)), i_A p \oplus \mathrm{id}).$$

也就是说，$C^*_{\max}(A+I)$ 是由 $A+I$ 在映射下的像生成的 *C**-代数

$$a + x \mapsto i_A(a) \oplus (a+x)$$

对于 $a \in A$ 和 $x \in I$。存在一个正合列

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{i_{A+I}|_I} C^*_{\max}(A+I) \xrightarrow{\tilde{p}} C^*_{\max}(A) \longrightarrow 0$$

其中 $\tilde{p}$ 是唯一的 $*$-同态，它延拓了完全压缩同态$i_A p$： $A+I \to A \to C^*_{\max}(A)$。

注意，当 $I \lhd C^*_{\max}(A)$ 是嵌入其最大 C*-覆盖中的 A 的 Shilov 理想时，这就还原了定理 3.7。

命题 4.6. 设 $A \subseteq C^*(A)$ 是一个算子代数，其 *Shilov* 理想为 $I \lhd C^*(A)$。设 N :*C*-Lat*$(A) \to$ *C*-Lat*$(A+I)$ 是归纳映射，并以 R： *C*-Lat*$(A+I) \to$ *C*-Lat*(A)表示限制映射。那么，对于 A 的任意 *C**-覆盖(C,ι)，有

$$RN[C,\iota] = [C,\iota] \vee [C^*(A), \mathrm{id}]$$

是与 *C**-覆盖 C^*（A）的格上确界，其中 A 被具体嵌入。此外，$RNR = R$；对于 $A+I$的任意 *C**-覆盖 $[D,\eta]$，

$$NR[D,\eta] = [D,\eta] \vee N[C^*(A), \mathrm{id}]$$

是与 $[C^*$（A）的归纳的格上确界，id]。

特别地，R 是一个满射保序映射，映到 A的 *C**-覆盖子格，该子格中的元素在序关系下都支配 $[C^*$（A），id] 。

证明。回忆一下，格上确界就是直和

$$[C,\iota] \vee [C^*(A), \mathrm{id}] = [C^*((\iota \oplus \mathrm{id})(A)), \iota \oplus \mathrm{id}].$$

我们有

$$N[C,\iota] = [C^*((\iota p \oplus \mathrm{id})(A+I)), \iota p \oplus \mathrm{id}].$$

限制到 A后，我们有 $p|_A = \mathrm{id}_A$，因此

$$RN[C,\iota] = [C^*((\iota p \oplus \mathrm{id})(A)), (\iota p \oplus \mathrm{id})|_A] = [C^*((\iota \oplus \mathrm{id})(A)), \iota \oplus \mathrm{id}],$$

这恰好是格上确界 $[C,\iota] \vee [C^*(A), \mathrm{id}]$。

现在，我们有：$[C,\iota] \geq [C^*(A), \mathrm{id}]$ 在该序关系中成立，当且仅当 $[C,\iota] \vee [C^*(A), \mathrm{id}] = [C,\iota]$，当且仅当 $RN[C,\iota] = [C,\iota]$；因此，R满射到支配 $[C^*(A), \mathrm{id}]$ 的 C*-覆盖（等价类）集合上。在命题 4.2 中，我们证明了对于 $A+I$ 的任意 C*-覆盖 $[D,\eta]$，都有 $R[D,\eta] \geq [C^*(A)\ \iota]$，因此可得 $RNR = R$。

现在，设 $(C,\ \iota)$ 是 A 的一个 C*-覆盖。那么，由于 N 是格同构

$$NRN[C,\iota] = N([C,\iota] \vee [C^*(A), \mathrm{id}]) = N[C,\iota] \vee N[C^*(A), \mathrm{id}].$$

由于 N 是满射，这证明对于 $A+I$ 的任意 C*-覆盖 $[D,\eta]$，

$$NR[D,\eta] = [D,\eta] \vee N[C^*(A), \mathrm{id}].$$

■

推论 4.7。设 $A \subseteq C^*(A)$ 是一个算子代数，其 *Shilov* 理想为 $I \lhd C^*(A)$。对于 $A+I$ 的任意 *C**-覆盖 (D,η)，我们有 $R[D,\eta] \geq Q[D,\eta]$。事实上，存在一个明确的 A 的 *C**-覆盖态射，其定义为

$$C^*(\eta(A)) \hookrightarrow D \longrightarrow \tfrac{D}{\eta(I)}$$

证明。我们有 $NR[D,\eta] = [D,\eta] \vee N[C^*(A), \mathrm{id}] \geq [D,\eta] = NQ[D,\eta]$，因此应用 $Q = N^{-1}$ 即可得到所述的序关系。独立地，直接验证所述复合是 A 的一个 C*-覆盖态射。

■

现在，我们可以准确地确定，对于 $A+I$ 的 C*-覆盖，限制 R 与商 Q 这两种运算何时相同。

推论 4.8. 设 $A \subseteq C^*(A)$ 是一个算子代数，其 *Shilov* 理想为 $I \lhd C^*(A)$。设 (D,η) 是 $A+I$ 的一个 *C**-覆盖，且 $q\colon D \to D/\eta(I)$ 是商映射。以下条件等价：

(1) $C^*(\eta(A)) \cap \eta(I) = 0$，因此作为向量空间直和有 $D = C^*(\eta(A)) \oplus \eta(I)$。*(2)* 复合的 $*$-同态

$$C^*(\eta(A)) \hookrightarrow D \xrightarrow{q} \tfrac{D}{\eta(I)}$$

是一个 $*$-同构，因此 $Q[D,\eta] = R[D,\eta]$。

(3) 存在一个 $*$-同态

$$\pi : D \to C^*(A)$$

满足 $\pi\eta|_A = \mathrm{id}_A$ 且 $\pi(\eta(I)) = 0$。*(4) C**-覆盖 *(D,η)* 支配 $N[C^*(A), \mathrm{id}] = [C^*((p \oplus \mathrm{id})(A))\ p \oplus \mathrm{id}]$。*(5) C**-覆盖 *(D,η)* 是 *(C,ι)* 的一个 *C**-覆盖的归纳 $N(C,\iota)$，且 A 支配 *(C*(A), id)*。

证明。（1）和（2）的等价性只用到 C*-代数理论中的以下标准事实：若 $A \subseteq B$ 是 C*-代数，且 $I \lhd B$ 是一个理想，则复合

$$A \to B \to \frac{B}{I}$$

与一个 $*$-同构复合后得到

$$A \to \frac{A+I}{I} \cong \frac{A}{A \cap I},$$

当且仅当 $A \cap I = 0$ 时，它是一个同构。此外，若 A 和 I 作为 C*-代数生成 B，则可知作为向量空间，$B = A \oplus I$。

（3）等价于存在一个 $*$-同态 $\tilde{\pi}\colon D/\eta(I) \to C^*(A)$，它是覆盖态射 $Q(D,\eta) \to (C^*(A), \mathrm{id})$。因此，（3）成立当且仅当 $Q[D,\eta] \geq [C^*(A), \mathrm{id}],$，而这当且仅当 $[D,\eta] \geq N[C^*(A), \mathrm{id}],$，即（4）。此外，应用格同构 Q 和 N 可得（4）等价于（5）。因此，（3）、（4）和（5）等价。

现在，(2) 等价于断言推论 4.7 中的态射是一个同构态射，这又等价于断言 $Q[D,\eta] = R[D,\eta]$，因此 $[D,\eta] = NQ[D,\eta] = NR[D,\eta] = [D,\eta] \vee N[C^*(A), \mathrm{id}],$ 这等价于 (4)。

■

5. Uncountability of the C*-cover lattice

人们或许会预期，如果存在一个只有一个 C*-覆盖的非自伴算子代数，那么也会存在一些恰有两个 C*-覆盖的非自伴算子代数。令人意外的是，事实并非如此。更一般地，我们将在本章证明，每个至多有可数个 C*-覆盖的算子代数实际上都恰有一个 C*-覆盖；换言之，C*-覆盖格要么是单元素集，要么是不可数的。下面的引理将对此大有帮助。该引理及其证明引自 [14]。

引理5.1。 设 $\pi:\ \mathcal{A}\to\mathcal{B}(H)$ 是一个完全收缩同态，并设 $\sigma:\mathcal{A}\to\mathcal{B}(K)$ 是一个膨胀 π 的完全收缩同态，其中 $H\subseteq K$。根据 *Sarason*引理， [20]，存在 K 的一个直和分解 $H_1\oplus H\oplus H_2$，使得

$$\sigma=\begin{pmatrix}\pi_1 & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3}\\ 0 & \pi & \sigma_{2,3}\\ 0 & 0 & \pi_3\end{pmatrix}.$$

那么，对于任意选择的 $z\in\overline{\mathbb{D}}$,

$$\sigma_z:=\begin{pmatrix}\pi_1 & z\sigma_{1,2} & z^2\sigma_{1,3}\\ 0 & \pi & z\sigma_{2,3}\\ 0 & 0 & \pi_3\end{pmatrix}$$

仍然是一个膨胀 π 的完全收缩同态。映射

$$\overline{\mathbb{D}}\to ucc(A,B(K)),z\mapsto\sigma_z$$

是范数连续的， $\sigma_1=\sigma$，且 σ_0 是 π 的平凡膨胀。此外，只要 $|z|=|w|$，表示 σ_z 和 σ_w 就酉等价。

证明。如果 $z=0$，那么 σ_0 是完全收缩同态的直和，它仍然是一个完全收缩同态。而且，$\sigma_0=\pi_1\oplus\pi\oplus\pi_2$是 π的平凡膨胀。否则，假设 $z\neq0$。那么，映射 σ_z 由相似变换得到

$$\sigma_z=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & z^{-1} & 0\\ 0 & 0 & z^{-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi_1 & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3}\\ 0 & \pi & \sigma_{2,3}\\ 0 & 0 & \pi_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & z & 0\\ 0 & 0 & z^2\end{pmatrix}.$$

这表明映射 σ_z 是同态，并且映射

$$\mathbb{C}\to\mathcal{B}(K^n)$$
$$z\mapsto\sigma_z(x)$$

对每个 $x\in M_n(\mathcal{A})$都是解析的。因此我们可以应用最大模原理，从而得到

$$\sup_{z\in\overline{\mathbb{D}}}\|\sigma_z(x)\|=\sup_{z\in\mathbb{T}}\|\sigma_z(x)\|=\|\sigma_z(x)\|\leq\|x\|$$

对每个 $x\in M_n(\mathcal{A})$均成立。因此，对所有 $z\in\mathbb{D}$， σ_z 都是完全收缩的。—

最后，如果 $|z|=|w|>0$，那么 $\sigma_w=U\sigma_wU^*$，其中

$$U=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & zw^{-1} & 0\\ 0 & 0 & z^2w^{-2}\end{pmatrix}$$

是酉算子。 ∎

注意，更一般地，对于任意非零的 z， $w\in\mathbb{D}$，表示 σ_z 和 σ_w 通过相似变换 $S=\mathrm{diag}(1,zw^{-1},z^2w^{-2})$ 相似。

例5.2。 设 $\pi\colon A(\mathbb{D}) \to C^*(S)$ 是将生成元 f 映至单侧移位 S的完全等距表示。该表示的最大膨胀将 f 映至 S 的 Sz.-Nagy 膨胀，再映至一个酉算子

$$U = \begin{pmatrix} S & I - SS^* \\ 0 & S^* \end{pmatrix}.$$

将引理5.1中的过程应用于此膨胀（注意，由于 U 延拓了 S，我们可以在 Sarason引理中取 $H_1 = 0$ ），这对应于如下完全等距表示族：它们将 z 映到

$$V_z = \begin{pmatrix} S & z(I - SS^*) \\ 0 & S^* \end{pmatrix}$$

对于 $z \in \overline{\mathbb{D}}$。我们将看到，对于 $|z| \neq |w|$，由 V_z 和 V_w 确定的表示所生成的 C*-覆盖，在 C*-覆盖的序关系下甚至不可比较，除非 $|z| = 1$ 或 $|w| = 1$。

假设存在一个 C*-覆盖态射 $\pi\colon C^*(V_z) \to C^*(V_w)$，这意味着一个（单位）$*$-同态，满足 $\pi(V_z) = V_w$。我们有

$$V_z^* V_z = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & |z|^2(I - SS^*) + SS^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I - SS^* \end{pmatrix} + |z|^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & SS^* \end{pmatrix}.$$

由于右侧的两个矩阵是和为单位元的正交投影，因此谱为

$$\sigma(V_z^* V_z) = \{|z|^2, 1\}.$$

同理， $\sigma(V_w^* V_w) = \{|w|^2, 1\}$。由于 $*$-同态会缩小谱，我们有

$$\sigma(V_w^* V_w) = \sigma(\pi(V_z^* V_z)) \subseteq \sigma(V_z^* V_z),$$

因此 $\{|w|^2, 1\} \subseteq \{|z|^2, 1\}$。所以，我们必有 $|w| = |z|$——此时 V_z和 V_w 酉等价；否则 $|w| = 1$——此时 $C^*(V_w) = C^*(U)$ 是 C*-包络。

例5.2表明，尽管引理5.1中 σ_z 的定义是一个良好的连续映射，但沿着从 $z = 0$ 到 $z = 1$ 的路径所得到的 C*-覆盖，相对于 C*-覆盖序却可能“严重不连续”。在例5.2中，得到的 C*-覆盖始于 σ_0，它生成一个最小C*-覆盖（Toeplitz代数），终于给出 C*-包络的 σ_1；但在此过程中， $0 \leq z < 1$ 对应的表示 σ_z 在 C*-覆盖格的序中彼此都不可比较。

例5.3。 现在，考虑由包含映射给出的完全等距表示 $\pi\colon A(\mathbb{D}) \to C(\mathbb{D})$。这是由正规压缩算子 $f \in C(\mathbb{D})$ 生成的泛 C*-代数，其中$f(z) = z$。到酉算子的最大膨胀由 Schaeffer膨胀给出

$$f \mapsto U := \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & & \\ & & 0 & \sqrt{1-|f|^2} & -\overline{f} & & & \\ & & 0 & f & \sqrt{1-|f|^2} & 0 & & \\ & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \in C(\overline{\mathbb{D}}, B(\ell^2))$$

对于 $z \in \overline{\mathbb{D}}$，引理5.1中的过程所产生的膨胀将生成元 $f \in A(\mathbb{D})$ 映射为

$$f \mapsto V_z := \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & z\sqrt{1-|f|^2} & -z^2\overline{f} & & \\ & & 0 & f & z\sqrt{1-|f|^2} & 0 & \\ & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

容易验证，当 $|z| \neq 0$ 且 $|z| \neq 1$时，算子 V_z 不是正规的。因此，尽管 $C^*(V_0) = C(\mathbb{D})$，且 $C^*(V_1) = C(\mathbb{T})$，对于 $z \in (0,1)$，在 C*-覆盖的序中，没有任何 C*-覆盖 $C^*(V_z)$ 位于 $C(\mathbb{D})$ 与 $C(\mathbb{T})$ 之间。

现在来证明格二分定理。

定理 5.4. 假设算子代数 A 有多个 C*-覆盖，则 C*-覆盖集合的基数至少为连续统 $\mathfrak{c}$。

证明。设 $(C^*_{max}(A)\ i_{max})$ 是 A 的极大 C^*-覆盖，而 $(C^*_e(A)\ i_e)$ 是包络。对于每个完全收缩同态 $\pi : A \to \mathcal{B}(H)$，我们将由 $C^*_{max}(A)$ 的泛性质得到的唯一酉 $*$-同态记作 $\tilde{\pi}$，参见引理 2.2；也就是说，存在一个酉 $*$-同态$\tilde{\pi}$: $C^*_{max}(A) \to \mathcal{B}(H)$，使得 $\tilde{\pi} \circ i_{max} = \pi$。

由于 $(C^*_{\max}(A)\ i_{\max}) \neq (C^*_e(A)\ i_e)$，根据引理 2.6，映射 $i_{\max}$ 不是极大的，因此由命题 2.5，存在 $i_{\max}$ 的一个极大膨胀 σ 。应用 Sarason引理 [20]，我们得到

$$\sigma = \begin{pmatrix} \pi_1 & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} \\ 0 & i_{\max} & \sigma_{2,3} \\ 0 & 0 & \pi_3 \end{pmatrix}.$$

令 σ_z 为引理5.1中的完全收缩同态。由于 π 是完全等距的，因此每个 σ_z也都是完全等距的。回顾一下，根据引理 2.7，将 A 视为 $C^*_{\max}(A)$的子代数时，其 Shilov 理想为

$$I = \bigcap \{\ker(\tilde{\rho}) \mid \rho : A \to \mathcal{B}(H) \text{ u.c.c. and maximal}\},$$

这并非平凡情形，因为 A 有不止一个 C*-覆盖，且由引理 2.4 可知。因此，存在一个 $x \in I$ 满足 $x \neq 0$。根据选取方式， $\sigma = \sigma_1$ 是极大的，因此

$$\tilde{\sigma}_1(x) = \tilde{\sigma}(x) = 0.$$

~ ~但是， $i_{\max}$ 是 $C^*_{\max}(A)$的一个等距表示，因此 $\ker(i_{\max}) = \{0\}$ ；又因为 σ_0 是 $i_{\max}$的一个平凡膨胀，我们得到

$$\tilde{\sigma}_0(x) \neq 0.$$

不失一般性，如有必要，可通过重新缩放 x ，假设 $\|\tilde{\sigma}_0(x)\| = 1$。对于每个 $y \in i_{\max}(A)$，函数δ_y : $\mathbb{D} \to \mathbb{R}, z \mapsto \|\tilde{\sigma}_z(y)\|$ 都是连续的。由于 $\tilde{\sigma}_z$ 是一个 *-同态，我们得到，对于由 $i_{\max}(A)$ 生成的 *-代数中的每个 y ， δ_y 都是连续的。然而， $\tilde{\sigma}_z$ 的压缩性和三角不等式意味着

$$|\delta_y(z) - \delta_y(\omega)| \leq 2\|y - v\| + |\delta_v(z) - \delta_v(\omega)|$$

对于每个 $y, v \in C^*_{\max}(A)$。因此，对于每个 $y \in C^*_{\max}(A)$， δ_y 都是连续的。

我们有 $\|\delta_x(0)\| = \|\tilde{\sigma}_0(x)\| = 1$ ，并且 $\|\delta_x(1)\| = \|\tilde{\sigma}_1(x)\| = 0$。因此，根据介值定理，对于每个 $t \in [0,1]$，存在满足 $\delta_x(z_t) = \|\tilde{\sigma}_{z_t}(x)\| = t$ 的 $z_t \in [0,1]$。我们将证明，对于每个 $t \in [0,1]$，C*-覆盖 $(C^*(\sigma_{z_t}(A))\ \sigma_{z_t})$ 两两不同构。

因此，令 s， $t \in [0,1]$，并假设存在一个 $*$-同构 ρ: $C^*(\sigma_{z_s}(A)) \to C^*(\sigma_{z_t}(A))$，满足 $\rho\sigma_{z_s} = \sigma_{z_t}$。由所涉及的同态扩张到$C^*_{\max}(A)$的唯一性可知，我们有 $\rho\tilde{\sigma}_{z_s} = \tilde{\sigma}_{z_t}$。因此，

$$s = \|\tilde{\sigma}_{z_s}(x)\| = \|\rho\tilde{\sigma}_{z_s}(x)\| = \|\tilde{\sigma}_{z_t}(x)\| = t,$$

因此 $s = t$。反过来说，这表明对于 $s \neq t$ 中属于 $[0,1]$, 的情形，C*-覆盖 $C^*(\sigma_{z_s}(A))$ 彼此不同构。 ∎

注5.5. 上述定理的证明不仅给出了 C*-Lat(A) 基数的一个上界。赋予 C*-Lat(A) 最弱拓扑，使得对每个 $a \in C^*_{max}(A)$，映射

$$\begin{aligned} \mathrm{C}^*\text{-}\mathrm{Lat}(A) &\to \mathbb{R}, \\ [\mathcal{A}, \pi] &\mapsto \|\tilde{\pi}(a)\| \end{aligned}$$

是连续的。在此拓扑下，C*-Lat(A) 是豪斯多夫的。

给定 A 的一个 C^*-覆盖 $(\mathcal{A}, \pi)$，令 $(\sigma_z)_{z\in\mathbb{D}}$ 为定理 5.4 的证明中给出的完全等距同态。定义

$$\begin{aligned} p : [0,1] &\to \mathrm{C}^*\text{-}\mathrm{Lat}(A), \\ t &\mapsto [C^*((\sigma_t \oplus \pi)(A), \sigma_t \oplus \pi]. \end{aligned}$$

则 p连续，且 $p(0) = [C^*_{max}(A)\ i_{max}]$， $p(1) = [\mathcal{A}, \pi]$。由于 $(\mathcal{A}, \pi)$ 是任意的，C*-Lat(A) 是道路连通的。

要推出关于 C*-Lat(A) 的基数结论，只需注意到，道路连通的豪斯多夫空间要么只含一个点，要么其基数至少为 $\mathfrak{c}$。这一事实众所周知；为求完备起见，我们略述其证明。

假设道路连通豪斯多夫空间 X 的基数严格大于 1。那么存在一条道路 γ，满足 $\gamma(0) \neq \gamma(1)$。验证 $\gamma([0,1])$ 是一个皮亚诺空间，即紧致、连通、局部连通且可度量化之后， [**22**, 定理 31.2] 推出 $\gamma([0,1])$ 是弧连通的，也就是说，对于每个 $x \neq y \in \gamma([0,1])$，都存在一条单射道路 $\tilde{\gamma}\colon [0,1] \to \gamma([0,1])$，满足$\tilde{\gamma}(0) = x$ 且 $\tilde{\gamma}(1) = y$。由于 $1 < |\gamma([0,1])|$，存在这样一条单射道路 $\tilde{\gamma}$。因此

$$\mathfrak{c} = |[0,1]| \leq |\gamma([0,1])| \leq |X|.$$

定理 5.6。 设 A 是一个可分算子代数。那么

$$|C^*\text{-}\mathrm{Lat}(A)| = \begin{cases} 1 & or \\ \mathfrak{c}. \end{cases}$$

证明。 我们知道其基数至少为 $\mathfrak{c}$。要证明它不大于 $\mathfrak{c}$，注意到每个 C*-覆盖都对应于 $C^*_{\max}(\mathcal{A})$ 中的一个范数闭理想。但由于 $\mathcal{A}$ 是可分的，$C^*_{\max}(\mathcal{A})$ 也是可分的。因此，关于范数拓扑，$C^*_{\max}(\mathcal{A})$ 是一个第二可数空间，所以 $C^*_{\max}(\mathcal{A})$ 中所有闭集构成的族的基数至多为 $\mathfrak{c}$。 ∎

考察例5.2和例5.3后，人们可能会认为定理 5.4 中得到的 C^*-覆盖构成一个反链，即两两不可比较。然而，下一个例子表明，它们甚至可以构成一条递减链。

例5.7。 根据 [**3**,例2.4], , T_2 的极大 C^*-覆盖为

$$\{f \in C([0,1], M_2) \mid f(0) \text{ is diagonal}\}$$

其嵌入为

$$i_{max} : \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} a & b\sqrt{t} \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

其中 $t\colon\ [0,1] \to [0,1],\ \ x \mapsto x$。

i_{max} 的最大膨胀由下式给出

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 & b\sqrt{1-t} & -b\sqrt{t} \\ 0 & a & b\sqrt{t} & b\sqrt{1-t} \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$

因为

$$\sigma\left(\begin{pmatrix}\sqrt{1-t} & -\sqrt{t}\\ \sqrt{t} & \sqrt{1-t}\end{pmatrix}\right)\subset\mathbb{T}.$$

对于 $s\in[0,1]$，定义

$$A_s=\begin{pmatrix}s\sqrt{1-t} & -s^2\sqrt{t}\\ \sqrt{t} & s\sqrt{1-t}\end{pmatrix}.$$

引理5.1中得到的完全收缩同态为

$$\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}a1 & bA_s\\ 0 & c1\end{pmatrix}.$$

酉共轭表明，由此完全收缩同态诱导的 C^*-覆盖同构类仅取决于 $|A_s|$ 的谱（若 A_s 可逆），而若 A_s 不可逆，则取决于 $\sigma(|A_s|)\cup\{0\}$。因此有

$$A_s^*A_s=\begin{pmatrix}s^2(1-t)+t & (1-s^2)s\sqrt{t}\sqrt{1-t}\\ (1-s^2)s\sqrt{t}\sqrt{1-t} & s^4t+s^2(1-t)\end{pmatrix}=s^21+(1-s^2)\sqrt{t}\begin{pmatrix}\sqrt{t} & s\sqrt{1-t}\\ s\sqrt{1-t} & -s^2\sqrt{t}\end{pmatrix},$$

and

$$\sigma\left(\begin{pmatrix}\sqrt{t} & s\sqrt{1-t}\\ s\sqrt{1-t} & -s^2\sqrt{t}\end{pmatrix}\right)=\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{x}(1-s^2)\pm\sqrt{x(s^2-1)^2+4s^2})\mid x\in[0,1]\}.$$

因此

$$\sigma(|A_s|)=\left\{\sqrt{s^2+\tfrac{1}{2}(1-s^2)(x(1-s^2)\pm\sqrt{x}\sqrt{x(s^2-1)^2+4s^2})}\mid x\in[0,1]\right\}.$$

由于右侧的函数连续，且在 $x=0$ 处相等，因此我们得到谱是一个区间；在 $x=1$ 处求值可得

$$[s^2,1]\subset\sigma(|A_s|).$$

要看出我们已经得到等式，只需注意到

$$A_s=\begin{pmatrix}s & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{1-t} & -\sqrt{t}\\ \sqrt{t} & \sqrt{1-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & s\end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

由于中间的算子是酉算子，我们得到

$$s^41\le A_s^*A_s,$$

因此

$$[s^2,1]=\sigma(|A_s|).$$

所以对于 $0\le u<s\le 1$，$\sigma(|A_s|)\subset\sigma(|A_u|)$；并且由 (5.1) 可知，对于每个 $s\in(0,1]$，A_s 都可逆。因此，定理 5.4 中得到的 C^*-覆盖构成一个递减链。

这一观察引出了以下问题：

问题 5.8. 如果 A 是一个拥有多个 C*-覆盖的算子代数，那么 A 的 C*-覆盖格是否必然不是全序的?

请注意，在例5.7中，通过引理5.1的过程形成的膨胀是全序的。然而，整个 T_2 的 C*-覆盖格并非全序。事实上，$C^*_{\max}(T_2)=\{f\in C([0,1],M_2)\mid f(0)$ 对角线中的 Shilov 理想$\}$ 是

$$C_0([0,1),M_2)=\{f\in C([0,1],M_2)\mid f(1)=0\}.$$

它有许多并非全序的子理想；这些子理想是 T_2 的边界理想，对应于 T_2 的 C*-覆盖，因此这些 C*-覆盖也并非全序。

注 5.9。 也可以运用本节发展的理论，证明 A 在 $C^*_{\max}(A)$ 的 Shilov 理想中的任意元素都必须具有连通谱。事实上，设 x 属于 Shilov 理想，并假设 $\sigma(x)$ 等于两个互不相交的闭集 K_1 和 K_2 的并，且二者均非空。由于该理想不包含 1，我们有 $0 \in \sigma(x)$，并且不失一般性，可以假设 $0 \in K_1$。

于是，定理 5.4 的证明表明，存在一个希尔伯特空间 H 以及一族含幺同态 $\pi_t\colon C^*_{\max}(A) \to \mathcal{B}(H)$，$t \in [0,1]$，使得 $\pi_1(x) = 0$，π_0 是单射，并且

$$t \mapsto \|\pi_t(y)\|$$

对每个 $y \in C^*_{\max}(A)$ 都是连续的。

设 U_1, U_2 是 $\mathbb{C}$ 中的互不相交的开集，且 $K_i \subset U_i, i = 1,2$。设 $f\colon U_1 \cup U_2 \to \mathbb{C}$ 是满足 $f(U_1) = 0$ 且 $f(U_2) = 1$ 的全纯函数。那么

$$f(\pi_t(x)) = \pi_t(f(x))$$

对所有 $t \in [0,1]$ 都成立；特别地，

$$\pi_1(f(x)) = f(\pi_1(x)) = f(0) = 0.$$

注意到 $f(x)^2 = f(x)$，因此，对所有 $t \in [0,1]$，$\pi_t(f(x))^2 = \pi_t(f(x))$。此外，若$\|\pi_t(f(x))\| < 1$，则 $\pi_t(f(x)) = 0$。于是

$$\{t \in [0,1]\colon \|\pi_t(f(x))\| < 1\} = \{t \in [0,1]\colon \pi_t(f(x)) = 0\},$$

尤其是，这些集合既是开集也是闭集。由于它们包含 1，我们可知

$$[0,1] = \{t \in [0,1];\ \pi_t(f(x)) = 0\},$$

这就导致矛盾

$$\{0,1\} = \sigma(f(x)) = \sigma(\pi_0(f(x))) = \{0\}.$$

6. An example with no immediate successor to the C*-envelope

对于任意 C*-代数 $\mathcal{C}$，考虑 $T_2(\mathcal{C})$，即元素取自 $\mathcal{C}$ 的 2×2 上三角矩阵。显然，$T_2(\mathcal{C})$ 是狄利克雷算子代数，因为 $T_2(\mathcal{C}) + T_2(\mathcal{C})^* = M_2(\mathcal{C})$。根据 [**15**,引理 5.2]，唯一的狄利克雷表示就是 C*-包络，因此 $C^*_e(T_2(\mathcal{C})) = M_2(\mathcal{C})$。

假设 φ是 $T_2(\mathcal{C})$ 的完全等距表示。那么它必定具有如下形式

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(a) & \varphi_{12}(b) \\ 0 & \varphi_{22}(d) \end{bmatrix}$$

其中 $\varphi_{11}, \varphi_{22}$ 是 $\mathcal{C}$ 的 $*$-同构，而 φ_{12} 是 $\mathcal{C}$ 上的完全等距线性映射，且满足

$$\varphi_{11}(a)\varphi_{12}(b)\varphi_{22}(d) = \varphi_{12}(abd)\,.$$

命题 6.1. 设 $\mathcal{C}$ 是一个 C*-代数，且 φ 是 $T_2(\mathcal{C})$ 的完全等距表示。若 $\pi\colon C^*(\varphi(T_2(\mathcal{C}))) \to M_2(\mathcal{C})$ 是满足 $\pi(\varphi(A)) = A$ 的唯一满射 $*$-同态，则核 $\pi = \mathcal{I}$ 其中

$$\mathcal{I} = \left\langle (\varphi_{12}(c_1)^*\varphi_{12}(c_2) - \varphi_{22}(c_1^*c_2))E_{22},\ (\varphi_{12}(c_1)\varphi_{12}(c_2)^* - \varphi_{11}(c_1c_2^*))E_{11} \ :\ c_1, c_2 \in \mathcal{C} \right\rangle.$$

证明。 显然，对于所有 $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$，我们有

$$\pi\Big((\varphi_{12}(c_1)^*\varphi_{12}(c_2) - \varphi_{22}(c_1^*c_2))E_{22}\Big) = \pi \circ \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & c_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)^* \pi \circ \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & c_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) - \pi \circ \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_1^*c_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_1^* & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & c_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_1^*c_2 \end{bmatrix} = 0$$

并且 $\pi\Big((\varphi_{12}(c_1)\varphi_{12}(c_2)^* - \varphi_{11}(c_1c_2^*))E_{11}\Big) = 0$ 同理。因此，$\mathcal{I} \subseteq$ 核 π。

现在，令 $\pi_{\mathcal{I}}\colon C^*(\varphi(T_2(\mathcal{C}))) \to C^*(\varphi(T_2(\mathcal{C})))/\mathcal{I}$ 为商映射。于是， $\pi_{\mathcal{I}}\circ\varphi$ 仍然是 $T_2(\mathcal{C})$ 的完全等距表示。现在我们有

$$\begin{aligned}
&\pi_{\mathcal{I}}\circ\varphi\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix}\right)^* \pi_{\mathcal{I}}\circ\varphi\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}\right) \\
&\quad = \pi_{\mathcal{I}}\left(\begin{bmatrix} \varphi_{11}(a_1^*) & 0 \\ \varphi_{12}(b_1)^* & \varphi_{22}(d_1^*) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_{11}(a_2) & \varphi_{12}(b_2) \\ 0 & \varphi_{22}(d_2) \end{bmatrix}\right) \\
&\quad = \pi_{\mathcal{I}}\left(\begin{bmatrix} \varphi_{11}(a_1^*a_2) & \varphi_{12}(a_1^*b_2) \\ \varphi_{12}(a_2^*b_1)^* & \varphi_{12}(b_1)^*\varphi_{12}(b_2)+\varphi_{22}(d_1^*d_2) \end{bmatrix}\right) \\
&\quad = \pi_{\mathcal{I}}\left(\begin{bmatrix} \varphi_{11}(a_1^*a_2) & \varphi_{12}(a_1^*b_2) \\ \varphi_{12}(a_2^*b_1)^* & \varphi_{22}(b_1^*b_2+d_1^*d_2) \end{bmatrix}\right) + \pi_{\mathcal{I}}((\varphi_{12}(b_1)^*\varphi_{12}(b_2)-\varphi_{22}(b_1^*b_2))E_{22}) \\
&\quad = \pi_{\mathcal{I}}\circ\varphi\left(\begin{bmatrix} a_1^*a_2 & a_1^*b_2 \\ 0 & b_1^*b_2+d_1^*d_2 \end{bmatrix}\right) + \pi_{\mathcal{I}}\circ\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & a_2^*b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)^* \\
&\quad \in \pi_{\mathcal{I}}\circ\varphi(T_2(\mathcal{C})) + \pi_{\mathcal{I}}\circ\varphi(T_2(\mathcal{C}))^*\,.
\end{aligned}$$

因此， $\pi_{\mathcal{I}}\circ\varphi$ 是一个半狄利克雷完全等距表示。以完全相同的方式，可以证明 $\pi_{\mathcal{I}}\circ\varphi$ 也是一个半狄利克雷* 表示。因此， $\pi_{\mathcal{I}}\circ\varphi$ 是一个狄利克雷表示；或者等价地说，$\pi_{\mathcal{I}}\circ\varphi(T_2(\mathcal{C}))+\pi_{\mathcal{I}}\circ\varphi(T_2(\mathcal{C}))^*$ 是一个C*-代数。

因此，如上所述，由于狄利克雷表示唯一， $C^*(\pi_{\mathcal{I}}\circ\varphi(T_2(\mathcal{C})))$与 $M_2(\mathcal{C})$作为C*-覆盖是同构的，因此 $\ker\pi = \ker\ \pi_{\mathcal{I}} = \mathcal{I}$。 ∎

Gramsch [8]和Luft [18] 分别独立地确定了非可分情形下 $\mathcal{B}(H)$的理想结构。为此，对任意基数 ω，定义 $t\in\mathcal{B}(H)$为 **ω-紧致** 的，若 $t(H)$的每个闭线性子空间的维数都严格小于 ω。将 $\mathcal{B}(H)$中所有ω-紧致算子构成的集合记为 $K_\omega(H)$，它是 $\mathcal{B}(H)$的一个闭双边理想。Gramsch和Luft证明，这些是仅有的闭双边理想，因此它们构成一条链。

现在考虑算子代数 $A = T_2(K_\omega(H))$，其中 $\dim(H) = \omega$ 是一个严格大于 $\aleph_0$ 的极限基数。注意， $\mathcal{B}(H) = K_{\omega+1}(H)$。 $K_\omega(H)$ 的重要性质是它没有极大闭理想。

命题6.2。 设 φ 是 $T_2(K_\omega(H))$ 的一个完全等距表示，它不生成 C*-包络作为 C*-覆盖。若 $\pi\colon C^*(\varphi(T_2(K_\omega(H)))) \to M_2(K_\omega(H))$ 是满足 $\pi(\varphi(A)) = A$ 且对应某个基数 $\aleph_0<\mu<\omega$ 的唯一满射 $*$-同态，那么

$$\mathcal{I}_\mu = \left\langle (\varphi_{12}(p)^*\varphi_{12}(p)-\varphi_{22}(p))E_{22},\ (\varphi_{12}(p)\varphi_{12}(p)^*-\varphi_{11}(p))E_{11}\ :\ p\in K_\mu(H)\ \textit{projection}\right\rangle$$

是一个理想，但不等于 核π。

证明。 由前一个命题可知 $\mathcal{I}_\mu\subseteq\ker\ \pi$，这意味着它显然是 $\ker\pi$ 的一个理想。若 $\mathcal{I}_\mu=\{0\}$，则结论成立。

A现在假设 $\mathcal{I}_\mu\neq\{0\}$。因此，存在一个投影 $p\in K_\mu(H)$，使得

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & p \\ 0 & -p \end{bmatrix}\right)^*\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & p \\ 0 & p \end{bmatrix}\right)\neq 0 \quad\text{or}\quad \varphi\left(\begin{bmatrix} p & -p \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\varphi\left(\begin{bmatrix} p & p \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)^*\neq 0\,.$$

不失一般性，假设前者非零。设 $q\in K_\mu(H)$ 是任意另一个与 p 等价的投影，因此存在一个部分等距算子 v，满足 $v^*v=p$ 和 $vv^*=q$。

接着注意到

$$\begin{aligned}
0 &\neq \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & p \\ 0 & -p \end{bmatrix}\right)^* \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & p \\ 0 & p \end{bmatrix}\right) \\
&= \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & v^*qv \\ 0 & -v^*qv \end{bmatrix}\right)^* \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & v^*qv \\ 0 & v^*qv \end{bmatrix}\right) \\
&= \varphi\left(\begin{bmatrix} v^* & 0 \\ 0 & v^* \end{bmatrix}\right) \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & q \\ 0 & -q \end{bmatrix}\right)^* \varphi\left(\begin{bmatrix} vv^* & 0 \\ 0 & vv^* \end{bmatrix}\right) \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & q \\ 0 & q \end{bmatrix}\right) \varphi\left(\begin{bmatrix} v & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix}\right) \\
&= \varphi\left(\begin{bmatrix} v^* & 0 \\ 0 & v^* \end{bmatrix}\right) \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & q \\ 0 & -q \end{bmatrix}\right)^* \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & q \\ 0 & q \end{bmatrix}\right) \varphi\left(\begin{bmatrix} v & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix}\right).
\end{aligned}$$

特别地，这意味着

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & q \\ 0 & -q \end{bmatrix}\right)^* \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & q \\ 0 & q \end{bmatrix}\right) \neq 0$$

现在，对于一个投影 $r \in K_\omega(H) \setminus K_\mu(H)$，考虑元素

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & r \\ 0 & -r \end{bmatrix}\right)^* \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & r \\ 0 & r \end{bmatrix}\right),$$

由于 $\mathcal{I}_\mu$ 的构造方式，且 $K_\mu(H)$ 是一个理想，因此

$$\mathcal{I}_\mu \subseteq M_2(C^*(\{\varphi_{11}(K_\mu(H)), \varphi_{12}(K_\mu(H)), \varphi_{22}(K_\mu(H))\})).$$

因此，对于任意 $a \in \mathcal{I}_\mu$，其基数为 $\aleph_0 < \mu$，必定存在 r 的一个子投影 q，它与 p 等价，使得

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}\right) a = a\varphi\left(\begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}\right) = 0.$$

因此，

$$\begin{aligned}
&\left\|\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & r \\ 0 & -r \end{bmatrix}\right)^* \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & r \\ 0 & r \end{bmatrix}\right) - a\right\| \\
&\qquad \geq \left\|\varphi\left(\begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}\right)^* \left(\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & r \\ 0 & -r \end{bmatrix}\right)^* \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & r \\ 0 & r \end{bmatrix}\right) - a\right) \varphi\left(\begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}\right)\right\| \\
&\qquad = \left\|\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & q \\ 0 & -q \end{bmatrix}\right)^* \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & q \\ 0 & q \end{bmatrix}\right)\right\| \\
&\qquad \geq \left\|\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & p \\ 0 & -p \end{bmatrix}\right)^* \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & p \\ 0 & p \end{bmatrix}\right)\right\| > 0.
\end{aligned}$$

因此， $\mathcal{I}_\mu \neq$ 核 π。 ∎

现在我们可以证明本节的主定理。

定理 6.3. 在 C^*-$Lat(T_2(K_\omega(H))$中， $M_2(K_\omega(H))$ 没有直接后继。

证明。 假设 φ 是 $T_2(K_\omega(H))$ 的一个完全等距表示，但它不能作为 C*-覆盖生成 C*-包络。与前面一样，令 $\pi : C^*(\varphi(T_2(K_\omega(H)))) \to M_2(K_\omega(H))$ 为典范的满射 $*$-同态，使得对所有 $A \in T_2(K_\omega(H))$，都有 $\pi \circ \varphi(A) = A$。

现在，由命题 6.1 可知，核 $\pi \neq \{0\}$ 存在 $c_1, c_2 \in K_\omega(H)$，使得

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & c_1 \\ 0 & -c_1 \end{bmatrix}\right)^* \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & c_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}\right) \neq 0 \quad \text{or} \quad \varphi\left(\begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \varphi\left(\begin{bmatrix} c_2 & c_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)^* \neq 0.$$

假设第一个非零，且 $\{p_\lambda\}_\lambda$ 是由投影组成的 $K_\omega(H)$ 的一个近似单位。因此，

$$\begin{aligned}\varphi\left(\begin{bmatrix}0 & c_1\\ 0 & -c_1\end{bmatrix}\right)^*\varphi\left(\begin{bmatrix}0 & c_2\\ 0 & c_2\end{bmatrix}\right) &= \lim_\lambda \varphi\left(\begin{bmatrix}0 & p_\lambda c_1\\ 0 & -p_\lambda c_1\end{bmatrix}\right)^*\varphi\left(\begin{bmatrix}0 & p_\lambda c_2\\ 0 & p_\lambda c_2\end{bmatrix}\right)\\ &= \lim_\lambda \varphi\left(\begin{bmatrix}c_1^* & 0\\ 0 & c_1^*\end{bmatrix}\right)\varphi\left(\begin{bmatrix}0 & p_\lambda\\ 0 & -p_\lambda\end{bmatrix}\right)^*\varphi\left(\begin{bmatrix}0 & p_\lambda\\ 0 & p_\lambda\end{bmatrix}\right)\varphi\left(\begin{bmatrix}c_2 & 0\\ 0 & c_2\end{bmatrix}\right).\end{aligned}$$

特别地，存在某个投影 p 和基数 $\mu<\omega$，使得 $p\in\mathcal{I}_\mu$ 且

$$\varphi\left(\begin{bmatrix}0 & p\\ 0 & -p\end{bmatrix}\right)^*\varphi\left(\begin{bmatrix}0 & p\\ 0 & p\end{bmatrix}\right)\neq 0\,.$$

根据前一个命题，这意味着 I_μ 是 $\ker\pi$的一个真理想。因此，$C^*(T_2(K_\omega(H)))/I_\mu$ 是一个 C*-覆盖，它严格介于 $C^*(T_2(K_\omega(H)))$ 与 $M_2(K_\omega(H))$之间。 ∎

注6.4。也有一些可分、非单的 C*-代数没有极大闭理想的例子，见 [**17**]。因此，很可能可以找到一个可分算子代数，使其在 C*-覆盖格中没有直接后继位于其 C*-包络之上。

7. Semi-Dirichlet C*-covers

下面的论证回答了 [**11**, 问题 3。13]该问题询问 $\mathsf{C}^*_{\max}(A)$ 何时是半 Dirichlet C*-覆盖。显然，这里还需要补充一些背景材料。不过，这与我们目前的结果十分契合，因为它采用了相同的技巧：缩放非对角项以生成新的 C*-覆盖。

按定义，表示 $\rho\colon A\to\mathcal{B}(H)$ 是半狄利克雷的，当且仅当 $\rho(A)^*\rho(A)\subseteq\rho(A)+\rho(A)^*$。若 C*-覆盖 $[\mathcal{C},\iota]$ 是半狄利克雷表示 ι 的像，则称其为半狄利克雷的。当且仅当算子代数 A 有一个半狄利克雷 C*-覆盖时，称其为半狄利克雷的。

定理 7.1。若 A 是非自伴的半狄利克雷算子代数，则最大 C*-覆盖不是半狄利克雷 C*-覆盖。

证明。用反证法，假设 $[\mathsf{C}^*_{\max}(A)\ \iota_{\max}]$ 是半狄利克雷的。设 $\varphi\colon A\to\mathcal{B}(H)$ 是任意一个完全压缩表示。根据泛性质，存在 $\pi:\mathsf{C}^*_{\max}(A)\to C^*(\rho(A))$，使得 $\pi\circ\iota_{\max}=\rho$。那么 ρ 必须是一个半狄利克雷表示：

$$\begin{aligned}\rho(a)^*\rho(b) &= \pi(\iota_{\max}(a)^*\iota_{\max}(b))\\ &= \pi\left(\lim_{n\to\infty}\iota_{\max}(c_n)+\iota_{\max}(d_n)^*\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\rho(c_n)+\rho(d_n)^*\,.\end{aligned}$$

我们将看到，所有表示都为半狄利克雷是不可能的。

现在，由于 A 是非自伴的，根据 [**12**, 命题 3.4], ，存在一个非极大的完全压缩表示 φ: $A\to\mathcal{B}(H)$。非极大性意味着 φ 可以非平凡地延拓或余延拓。

首先，假设 φ 非平凡地延拓为一个完全压缩表示 $\Phi:A\to\mathcal{B}(K)$，其中 $K=H\oplus H^\perp$，且具有分块结构

$$\Phi=\begin{bmatrix}\varphi & \Phi_{12}\\ 0 & \Phi_{22}\end{bmatrix}$$

其中 $\Phi_{12}\neq 0$。定义 $\Phi'\colon A\to\mathcal{B}(K)$

$$\Phi'=\begin{bmatrix}\varphi & \frac{1}{2}\Phi_{12}\\ 0 & \Phi_{22}\end{bmatrix}.$$

根据假设， Φ 和 Φ' 均为半狄利克雷表示。

现在，存在 $a \in A$，使得 $\Phi_{12}(a) \neq 0$。根据 $\iota_{\max}$ 的半狄利克雷性质，存在 $b_n \in A$，使得

$$\iota_{\max}(a)^*\iota_{\max}(a) = \lim_{n\to\infty} \iota_{\max}(b_n) + \iota_{\max}(b_n)^*.$$

由泛性质可知，存在 $*$-同态 π，$\pi' : \mathrm{C}^*_{\max}(A) \to \mathcal{B}(K)$，使得 $\pi \circ \iota_{\max} = \Phi$ 且 $\pi' \circ \iota_{\max} = \Phi'$。沿用本证明开头的论证，

$$\Phi(a)^*\Phi(a) = \lim_{n\to\infty} \Phi(b_n) + \Phi(b_n)^*, \quad \text{and}$$
$$\Phi'(a)^*\Phi'(a) = \lim_{n\to\infty} \Phi'(b_n) + \Phi'(b_n)^*.$$

但这意味着

$$\begin{bmatrix} \varphi(a)^*\varphi(a) & \varphi(a)^*\Phi_{12}(a) \\ \Phi_{12}(a)^*\varphi(a) & \Phi_{12}(a)^*\Phi_{12}(a) + \Phi_{22}(a)^*\Phi_{22}(a) \end{bmatrix} = \lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} \varphi(b_n) + \varphi(b_n)^* & \Phi_{12}(b_n) \\ \Phi_{12}(b_n)^* & \Phi_{22}(b_n) + \Phi_{22}(b_n)^* \end{bmatrix}$$

and

$$\begin{bmatrix} \varphi(a)^*\varphi(a) & \frac{1}{2}\varphi(a)^*\Phi_{12}(a) \\ \frac{1}{2}\Phi_{12}(a)^*\varphi(a) & \frac{1}{4}\Phi_{12}(a)^*\Phi_{12}(a) + \Phi_{22}(a)^*\Phi_{22}(a) \end{bmatrix} = \lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} \varphi(b_n) + \varphi(b_n)^* & \frac{1}{2}\Phi_{12}(b_n) \\ \frac{1}{2}\Phi_{12}(b_n)^* & \Phi_{22}(b_n) + \Phi_{22}(b_n)^* \end{bmatrix}.$$

考察两个等式的 (2,2) 项可知，$\frac{3}{4}\Phi_{12}(a)^*\Phi_{12}(a) = 0$，因此 $\Phi_{12}(a) = 0$，矛盾。

当 φ 有非平凡的共扩张时，基本相同的论证也成立；在这种情况下，涉及的算子矩阵是下三角的，因此我们省略这些细节。

因此，Φ 和 Φ' 不可能都是半狄利克雷表示，这意味着 $[\mathrm{C}^*_{\max}(A)\ \iota_{\max}]$ 不是半狄利克雷 C*-覆盖。 ∎

推论 7.2. 若 A 是一个非自伴半狄利克雷算子代数，则它具有不可数多个 *C**-覆盖组成的格。

证明。根据定义，$[C^*_e(A)\ \iota_e]$ 是一个半狄利克雷覆盖，而 $[\mathrm{C}^*_{\max}(A)\ \iota_{\max}]$ 不是半狄利克雷覆盖。由于格中有两个元素，根据定理 5.4，格中便有不可数多个元素。 ∎

Acknowledgements

第一作者获得了 NSERC 探索资助 2024-03883 的支持。第二作者获得了 NSERC 探索资助 2019-05430 的支持。第三作者获得了德国研究联合会的埃米·诺特计划（DFG 资助 466012782）的支持。

References

[1] W. Arveson, *Subalgebras of C*-algebras*, 《Acta Mathematica》**123** (1969)，第1期，141–224。[2] W. Arveson, *An Invitation to C*-Algebras*, 《数学研究生教材》第39卷，施普林格出版社，纽约，1976。[3] D. Blecher, *Modules over operator algebras and the maximal C*-dilation*, 《函数分析杂志》**169** (1999), 251-288。[4] D. Blecher 和 C. Le Merdy, *Operator algebras and their modules: an operator space approach*, 牛津大学出版社（2004），30。[5] K. Courtney 和 D. Sherman。 *The universal C*-algebra of a contraction*, 《算子理论杂志》**84**(2020)，153-184。[6] K. R. Davidson, *C*-algebras by example*，菲尔兹研究所专著，第6卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1996；MR1402012[7] M. Dritschel 和 S. McCullough, *Boundary representations for families of representations of operator algebras and spaces* 2005 159 167 ，

《算子理论杂志》（），–。[8] B. Gramsch, *Eine Idealstruktur Banachscher Operatoralgebren*, 《纯粹与应用数学杂志》**225** (1967)，97–115。[9] M. Hamana, *Injective envelopes of operator systems*, 《数学科学研究所出版物》**15** (1979)，第3期，773–785。[10] M. Hamidi, *Admissibility of C*-covers and crossed products of operator algebras*，博士论文，https://digitalcommons.unl.edu/mathstudent/95 (2019)。

[11] A. Humeniuk、E. Katsoulis 和 C. Ramsey, *Crossed products and C*-covers of semi-Dirichlet operator algebras* **30** 2025 909 933 ,

《数学文献》（），-。[12] A. Humeniuk 和 C. Ramsey, *The lattice of C*-covers of an operator algebra*, 《加拿大数学杂志》（2025），第1-29页。[13] A. Humeniuk、C. Ramsey 和 I. Thompson, *Coniversality for C*-algebras of residually finite-dimensional operator algebras* 2507 11824 2025 ，预印本 arXiv: 。（）。[14] V. E. Katsnelson, *A remark on canonical factorization in certain spaces of analytic functions*, 《列宁格勒斯捷克洛夫数学研究所科学研讨会纪要》30 (1972)，163–164；MR0338819。[15] E. Katsoulis 和 C. Ramsey, *Crossed products of operator algebras*, 美国数学学会回忆录 258 (2019)，第1240期，vii+85 页。[16] E. Kirchberg 和 S. Wassermann, *C*-algebras generated by operator systems*, 《函数分析杂志》155 (1998)，324-351。[17] H. Leptin, *A separable postliminal C*-algebra without maximal closed ideals*, 《美国数学学会汇刊》159 (1971)，489-496。[18] E. Luft, *The two-sided closed ideals of the algebra of bounded linear operators of a Hilbert space*, 《捷克数学杂志》18 (1968)，595–605。[19] G. J. Murphy, *C*-algebras and operator theory*，学术出版社，波士顿，马萨诸塞州，1990；MR1074574[20] D. Sarason, *On spectral sets having connected complement*, 《塞格德数学科学学报》26，289-299。[21] I. Thompson, *Maximal C*-covers and residual finite-dimensionality*, 《数学分析与应用杂志》514 (2022)，126277。[22] S. Willard, *General topology*，1970年原版重印本 [艾迪生-韦斯利，雷丁，马萨诸塞州；MR0264581], 2004, xii+369，MR2048350。

Department of Mathematics and Computing, Mount Royal University, Calgary, AB, Canada*Email address*: ahumeniuk@mtroyal.ca
Department of Mathematics and Statistics, MacEwan University, Edmonton, AB, Canada *Email address*: ramseyc5@macewan.caFachrichtung Mathematik, Universität des Saarlandes, 66123 Saarbrücken, Germany*Email address*: scherer@math.uni-sb.de