arXiv:2601.05089v1 [math.RT] 8 Jan 2026

带有对合的箭图上的 Horn 不等式

Antoine M´edoc

摘要。— Derksen 和 Weyman 描述了与箭图 [**DW00**] 相关的半不变量锥。我们给出了该锥的归纳描述，并以一个例子说明了在带有对合的箭图情形下刻画反不变权重的不等式的细化。

摘 ´要 ´（**带有对合的箭图上的 Horn 不等式**）

Derksen 和 Weyman 描述了与箭图 [**DW00**] 相关的半不变量锥。我们给出了该锥的归纳描述，并以一个例子说明了在带有对合的箭图情形下刻画反不变权重的不等式的细化。

目录

1. 引言 . 1
2. 锥的归纳描述 . 5
3. 带有.....的箭图 an 对合 . 15
4. Examples . 21
参考文献 . 23

1. 引言

箭图是一种有限有向图，由有限集的顶点Q_0、有限集的箭 Q_1 以及两个映射 h、t 从 Q_1 到 Q_0描述：任意

关键词. — 半不变量，箭图对合。

´我谨此感谢我的博士生导师 Paul-Emile Paradan，在撰写这篇论文期间，他提出了许多想法并给予我持续的帮助。

箭 $a \in Q_1$ 有起始顶点 $ta \in Q_0$ （其尾）和终止顶点 $ha \in Q_0$（其头）。我们只考虑没有有向环的箭图。

对于所有的 $m, n \in \mathbb{N}^*$，我们用 $\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{C})$（分别用 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$）表示所有具有复系数的 $m \times n$ 矩阵（分别表示所有具有复系数的 n 阶可逆方阵）的集合。Q 上的一个**维数** 是一个映射 $\alpha \in \mathbb{N}^{Q_0}$。$Q$ 中维数为 α 的**表示** 的集合为

$$\mathrm{Rep}_\alpha(Q) = \bigoplus_{a \in Q_1} \mathrm{Mat}_{\alpha(ha),\alpha(ta)}(\mathbb{C})$$

Q 的一个维数为 α 的表示是一个元素 $V \in \mathrm{Rep}_\alpha(Q)$。$V \in \mathrm{Rep}_\alpha(Q)$中维数为 $\beta \in \mathbb{N}^{Q_0}$ 的子表示是一个集合 $(W(x))_{x \in Q_0}$，满足：对于所有顶点 x，$W(x)$ 是 $\beta(x)$ 维线性子空间，且对于所有箭 a，$V(a)W(ta) \subset W(ha)$。

定义 *1.1*. — 如果对于所有 $x \in Q_0$，$\beta(x) \leqslant \alpha(x)$，我们记作 $\beta \leqslant \alpha$。若 $\alpha \in \mathbb{N}^{Q_0}$ 的任意维数为 α 的表示都含有一个维数为 β 的子表示，则称 $\beta \in \mathbb{N}^{Q_0}$ 是 $\alpha \in \mathbb{N}^{Q_0}$ 的**一般子维数**；此时记作$\beta \hookrightarrow \alpha$。

注意，$\beta \hookrightarrow \alpha \Rightarrow \beta \leqslant \alpha$。我们用 $\mathrm{GL}_\alpha(Q)$ 表示约化代数群 $\prod_{x \in Q_0} \mathrm{GL}^{\alpha(x)}(\mathbb{C})$。$\mathrm{GL}_\alpha(Q)$ 在 $\mathrm{Rep}_\alpha(Q)$ 上的自然作用，在多项式函数环（或坐标环）$\mathbb{C}[\mathrm{Rep}_\alpha(Q)]$上诱导出一个作用：对于所有 $f \in \mathbb{C}[\mathrm{Rep}_\alpha(Q)]$、$g \in \mathrm{GL}_\alpha(Q)$ 和 $V \in \mathrm{Rep}_\alpha(Q)$,

$$g \cdot V = (g_{ha} V(a) g_{ta}^{-1})_a,$$
$$(g \cdot f)(V) = f(g^{-1} \cdot V).$$

在 Q 上的一个权 σ 是 $\mathbb{Z}^{Q_0}$ 的一个元素。对于 Q 上的任意权 σ，我们关联一个乘法特征

$$\chi_\sigma : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_\alpha(Q) & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ g & \longmapsto & \prod_{x \in Q_0} \det(g_x)^{\sigma(x)} \end{array} \right.$$

以及一个环同态 $\mathbb{Z}^{Q_0} \to \mathbb{Z}$，它将 $\alpha \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ 映射为以下和

$$\sigma(\alpha) = \sum_{x \in Q_0} \sigma(x)\alpha(x).$$

多项式函数 $f \in \mathbb{C}[\text{表示空间}_\alpha(Q)]$ 是权σ 为α的 $\mathrm{GL}_\alpha(Q)$-半不变量，如果对所有 $g \in \mathrm{GL}_\alpha(Q)$，都有 $g \cdot f = \chi_\sigma(g) f$.。我们用 $\mathrm{SI}(Q, \alpha)_\sigma$ 表示所有 GL $\mathbb{C}$-线性

子空间中权 σ为α的 GL$_\alpha(Q)$-半不变量。我们关注半群

$$\Sigma(Q,\alpha)=\left\{\sigma\in\mathbb{Z}^{Q_0}\middle|\,\mathrm{SI}(Q,\gamma)_\sigma\neq\{0\}\right\}.$$

1994年，Alistair King 证明了该半群中的元素满足一个齐次线性方程和有限个齐次线性不等式 [**Kin94**，定理 4.1]。2000年，Harm Derksen 和 Jerzy Weyman 证明，满足 King 条件的权是该半群中的一个元素 [**DW00**，定理 3]。

定理 ***1.2***（**Derksen-Weyman**）。— 对于所有权 $\sigma\in\mathbb{Z}^{Q_0}$，当且仅当满足以下两个条件时，有$\sigma\in\Sigma$（$Q,\alpha$）。

1. σ（α）$=0$; *2.* σ（β）$\leqslant 0$ 对所有 $\beta\hookrightarrow\alpha$。

随后，两位作者完整描述了该锥的各个面 [**DW11**，定理 5.1]; Nicolas Ressayre 后来为这一描述给出了另一种证明[**Res12**，定理 3]。

根据定理 1.2，半群 $\Sigma(Q,\ \alpha)$ 在格 $\mathbb{Z}^{Q_0}$ 中是饱和的。将这一关于箭图的一般结果应用于三重旗箭图 [**DW00**，第 3]，节可得由 Allen Knutson 和 Terence Tao [**KT99**] 得到的 Littlewood-Richardson 系数的饱和性。

与箭图 Q 相关的 ***Euler-Ringel*** 形式 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 定义如下：对所有 $\alpha,\ \beta\in\mathbb{Z}^{Q_0}$,

$$\langle\alpha,\beta\rangle=\sum_{x\in Q_0}\alpha(x)\beta(x)-\sum_{a\in Q_1}\alpha(ta)\beta(ha)\in\mathbb{Z}.$$

对于所有 $\alpha\in\mathbb{Z}^{Q_0}$，我们用 $\langle\alpha,\ \cdot\rangle$ 表示与 $\beta\mapsto\langle\alpha,\ \beta\rangle$ 相关的权。本文的第一个结果是对半群 $\Sigma(Q,\ \alpha)$ 的归纳描述，其思路源自 Horn 猜想 [**Hor62, Ful98**]。这是对定理 1.2 的细化，也是定理 2.17 的推论。

定理 ***1.3***。——对于所有权 $\sigma\in\mathbb{Z}^{Q_0}$, $\sigma\in\Sigma(Q,\alpha)$ 当且仅当以下两个条件成立。

1. $\sigma(\alpha)=0$; *2.* $\sigma(\beta)\leqslant 0$ 对于所有满足 $\langle\beta,\cdot\rangle\in\Sigma(Q,$ $\alpha-\beta)$的 $\beta\leqslant\alpha$。

在第2节中，我们给出定理 1.3 的证明，其灵感来自 Prakash Belkale 在 [**Bel06**] 中发展的技巧（另见 [**BVW18**]）。这一证明

很有意思，因为它自然地适用于配备对合的箭图这一特定情形。在第3节中，我们运用第2节引入的技巧证明定理 1.6。该定理讨论的正是这一特定情形，也是本文的主要结果。

定义 ***1.4***。— 箭图 Q 的对合 τ 是一个二元组 (τ_0, τ_1)，满足τ_0： $Q_0 \to Q_0$ 和 τ_1： $Q_1 \to Q_1$ 是自反映射，并满足 $h \circ \tau_1 = \tau_0 \circ t$和 $t \circ \tau_1 = \tau_0 \circ h$。

见下文例 1.7。我们在第3.1节给出其他具有对合的箭图例子。另见 [**DW02**，命题 4.2]。对于所有矩阵$M \in \mathrm{Mat}_{m,\ n}(\mathbb{C})$，我们将其在 $\mathrm{Mat}_{n,\ m}(\mathbb{C})$ 中的共轭转置记为 M^*。设τ 是 Q 上的一个对合。它导出：

– 环 $\mathbb{Z}^{Q_0}$ 上的一个对合 τ，定义为 $\tau \cdot \alpha = (\alpha(\tau x))_x$；– 一个反线性同构 $\mathrm{Rep}_\alpha(Q) \to \mathrm{Rep}_{\tau\cdot\alpha}(Q)$，定义为

$$\tau \cdot V = (V(\tau \cdot a)^*)_a;$$

– 一个群同构 $\mathrm{GL}_\alpha(Q) \to \mathrm{GL}_{\tau\cdot\alpha}(Q)$，定义为 $\tau \cdot g = (g(\tau \cdot x)^{*,\ -1})x$；– 一个反线性代数同构 $\mathbb{C}[\mathrm{Rep}(Q,\ \alpha)] \simeq \mathbb{C}[\mathrm{Rep}(Q,\ \tau \cdot \alpha)]$，定义为

$$(\tau \cdot f)(V) = \overline{f(\tau \cdot V)}.$$

其限制为 $\mathrm{SI}(Q,\ \alpha)_\sigma \simeq \mathrm{SI}(Q,\ \tau \cdot \alpha)_{-\tau\cdot\sigma}$。

那么，若 $\alpha = \tau \cdot \alpha$, τ 在 $\mathrm{Rep}_\alpha(Q)$ 上诱导出一个对合，则 $\mathrm{GL}_\alpha(Q)$ 和

$$\mathbb{C}[\mathrm{Rep}(Q, \alpha)] = \bigoplus_{\sigma \in \mathbb{Z}^{Q_0}} \mathrm{SI}(Q, \alpha)_\sigma$$

而 $-\tau$ 在饱和半群 $\Sigma(Q,\ \alpha)$ 上诱导出一个对合。

定义***1.5***。— Q 的一个 τ-对称表示是一个表示 V，其中 Q 满足 $V = \tau \cdot V$，即对所有 $a \in Q_1$, $V(a)$，均有 $= V(\tau a)^*$。

特别地，若 V是一个 τ-对称表示，则 $\dim\ V = \tau \cdot \dim\ V$。我们对对称表示的定义不同于 Harm Derksen 和 Jerzy Weyman 在 [**DW02** 第 2] 节研究的正交补表示和辛表示，因为 $\mathrm{Rep}_\alpha(Q)$ 上的对合是反线性的。

本文的主要结果是定理 1.6。该定理表明，若某个维数满足 $\alpha = \tau \cdot \alpha$，则满足 $\sigma = -\tau \cdot \sigma$ 的元素 $\sigma \in \Sigma(Q, \alpha)$ 可以用比定理 1.3 中更小的一组不等式来刻画。它是

定理 3.7 的推论。

定理 ***1.6***.—设 $\alpha \in \mathbb{N}^{Q_0}$ 和 $\sigma \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ 满足 $\alpha = \tau\cdot\alpha$ 和 $\sigma = -\tau\cdot\sigma$。那么，当且仅当对所有满足以下条件的 $\beta \in \mathbb{N}^{Q_0}$，$\sigma \in \Sigma(Q,\alpha)$ $\sigma(\beta) \leqslant 0$ 时，

1. $\gamma : = \alpha - \beta - \tau\cdot\beta \in \mathbb{N}^{Q_0}$; *2.* $\langle\beta,$
$\cdot\rangle \in \Sigma\ (Q,\ \gamma)\ \cap \Sigma\ (Q,\ \tau\cdot\beta)$。

定理 1.2、1.3 和 1.6 的条件是算术条件，使我们能够给出刻画该锥的不等式的明确例子：见第 4 节。下面的例 1.7 展示了为刻画半群中的反不变元素所需的不等式数量如何减少。

例 ***1.7***。——设 Q_0 为 $\{x_i;\ 1 \leqslant i \leqslant 6\}$ 一个由六个顶点组成的集合，Q_1 为$\{a_i;$ $1 \leqslant i \leqslant 5\}$ 一个由五支箭组成的集合，并且 $t,\ h:\ Q_1 \to Q_0$ 两个映射，由 $ta_1 = x_1$、$ta_2 = x_2$、$ha_1 = ha_2 = ta_3 = x_3$、$ha_3 = ta_4 = ta_5 = x_4$、$ha_4 = x_5$ 和 $ha_5 = x_6$ 定义。由 $\tau_0 = (x_1\ x_5)(x_3\ x_4)(x_2\ x_6)$ 和 $\tau_1 := (a_1\ a_4)(a_2\ a_5)$ 在循环表示法中定义的置换是箭图 $(Q_0,\ Q_1,\ h,\ t)$ 的一个对合（在箭图同构意义下唯一）。见图1。

令 α 为一个维数向量，使得 $(\alpha(x_i))_{1\leqslant i\leqslant 6} = (2,3,4,4,3,2)$。我们有 $\alpha = \tau\cdot\alpha$。定理 1.2 用 244 个方程刻画 $\Sigma(Q,\alpha)$，定理 1.3 用 57 个方程刻画该对象。映射 $\sigma \mapsto (\sigma(x_4)\ \sigma(x_5)\ \sigma(x_6))$ 是从 $\left\{\sigma \in \mathbb{Z}^{Q_0} | \sigma = -\tau\cdot\sigma\right\}$ 到 $\mathbb{Z}^3$ 的环同构。定理 1.6 用以下 9 个方程刻画 $\Sigma(Q,\alpha)$（我们省略 $\sigma(0) \leqslant 0$）：对于所有满足 $\sigma = -\tau\cdot\sigma$ 的 $\sigma \in \mathbb{Z}^{Q_0}$，$\sigma \in \Sigma(Q,\alpha)$ 当且仅当

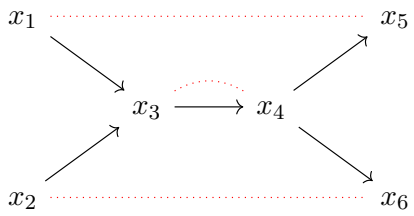
$$\begin{aligned}
\sigma(x_6) &\leqslant 0, & \sigma(x_5) &\leqslant 0\\
3\sigma(x_5) + 2\sigma(x_6) &\leqslant 0, & \sigma(x_4) + \sigma(x_6) &\leqslant 0\\
\sigma(x_4) + 2\sigma(x_6) &\leqslant 0, & \sigma(x_4) + \sigma(x_5) &\leqslant 0\\
2\sigma(x_4) + 3\sigma(x_5) &\leqslant 0, & 3\sigma(x_4) + 2\sigma(x_5) + \sigma(x_6) &\leqslant 0\\
4\sigma(x_4) + 3\sigma(x_5) + 2\sigma(x_6) &\leqslant 0. &&
\end{aligned}$$

这些不等式并非相互独立：$\sigma(x_6) \leqslant 0$ 和 $\sigma(x_5) \leqslant 0$ 蕴含$3\sigma(x_5) + 2\sigma(x_6) \leqslant 0$。

2. 锥的归纳描述

记号。— 我们主要采用书籍 [**DW17**] 中的记号。非负整数集记作 $\mathbb{N}$，正整数集

FIGURE 1. 带有对合的箭图。



记作 $\mathbb{N}^*$。对于所有 $i \in \mathbb{N}$，我们记 $[i] = \{j \in \mathbb{N} | 1 \leqslant j \leqslant i\}$。若上下文没有歧义，指标集为 I 的族 $(\alpha_i)_{i\in I}$ 将仅记为 (α_i)。我们固定一个不含有向环的箭图 $Q := (Q_0, Q_1, h, t)$。对于所有 $\alpha \in \mathbb{Z}^{Q_0}$，$\langle \alpha, \cdot \rangle$ 是与 $\beta \mapsto \langle \alpha, \beta \rangle$ 相关联的权；$\langle \cdot, \alpha \rangle$ 是与 $\beta \mapsto \langle \beta, \alpha \rangle$ 相关联的权。对于所有 k，$n \in \mathbb{N}$，我们用 $\mathrm{Gr}(k, n)$ 表示由 $\mathbb{C}^n$ 中所有 k 维线性子空间构成的射影簇。对于所有满足 $\beta \leqslant \alpha$ 的 α，$\beta \in \mathbb{N}^{Q_0}$，我们考虑射影簇 $\mathrm{Gr}(\beta, \alpha) = \prod_{x\in Q_0} \mathrm{Gr}(\beta(x)\ \alpha(x))$。

此后，α，β，γ，$\delta \in \mathbb{N}^{Q_0}$ 表示箭图 Q 上的维数；i，j，k，l，m，$n \in \mathbb{N}$ 表示非负整数；V，W 表示箭图 Q 的表示；$\mathcal{U}$，$\mathcal{V}$，$\mathcal{W}$ 表示 Q 的表示集合；$\sigma \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ 表示 Q 上的一个权。从第3节开始，箭图 Q 具有一个对合 τ。

2.1. 同调维数。—设 α，$\beta \in \mathbb{N}^{Q_0}$。对于两个表示空间 $V \in \mathrm{Rep}_\alpha(Q)$ 和 $W \in \mathrm{Rep}_\beta(Q)$，我们关联如下线性映射

$$d_W^V : \left| \begin{array}{ccc} \prod_{x\in Q_0} \mathrm{Mat}_{\beta(x),\alpha(x)}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \prod_{a\in Q_1} \mathrm{Mat}_{\beta(ha),\alpha(ta)}(\mathbb{C}) \\ \varphi & \longmapsto & (\varphi(ha)V(a) - W(a)\varphi(ta)) \end{array} \right. ;$$

由所有态射 $\varphi : V \to W$ 组成的集合 $\mathrm{Hom}_Q(V, W)$ 定义为 d_W^V 的核；V 与 W 的（Yoneda）扩张群是 d_V^W 的余核，记作 $\mathrm{Ext}_Q(V, W)$（它可与 V 被 W 扩张的等价类集合相识别）。二者均为有限维线性空间，我们将其最小值记为

$$\hom_Q(\alpha, \beta) = \min_{(V,W)\in \mathrm{Rep}_\alpha(Q)\times \mathrm{Rep}_\beta(Q)} \dim \mathrm{Hom}_Q(V, W),$$
$$\mathrm{ext}_Q(\alpha, \beta) = \min_{(V,W)\in \mathrm{Rep}_\alpha(Q)\times \mathrm{Rep}_\beta(Q)} \dim \mathrm{Ext}_Q(V, W).$$

由于映射 $\mathrm{Hom}_Q(\cdot, \cdot)$ 在 $\mathrm{Rep}_\alpha(Q) \times \mathrm{Rep}_\beta(Q)$ 上的 Zariski拓扑下是上半连续的，因此整数 $\hom_Q(\alpha, \beta)$（分别为 $\mathrm{ext}_Q(\alpha, \beta)$）是 $\mathrm{Rep}_\alpha(Q) \times \mathrm{Rep}_\beta(Q)$ 上 $\dim \mathrm{Hom}_Q(\cdot, \cdot)$（分别为 $\dim \mathrm{Ext}_Q(\cdot, \cdot)$）的一般值。

同构是一个态射 φ ，满足对所有顶点 x， $\varphi(x)$ 都是双射。注意，表示 V 的一般线性群$\alpha(Q)$-轨道是所有与 V 同构的表示所构成的集合。态射 φ 的核是 $(\operatorname{Ker}\varphi(x))_{x\in Q_0}$ ，其像是 $(\operatorname{Im}\varphi(x))_{x\in Q_0}$。

注意，若 $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^{Q_0}$，对所有 $V\in\operatorname{Rep}_\alpha(Q)$ 和 $W\in\operatorname{Rep}_\beta(Q)$，$\langle\alpha,\beta\rangle$ 是 d_W^V 的陪域维数与其定义域维数之差，即

$$\langle\alpha,\beta\rangle=\dim\operatorname{Hom}_Q(V,W)-\dim\operatorname{Ext}_Q(V,W)$$

根据秩定理；由此我们推得

$$\langle\alpha,\beta\rangle=\hom_Q(\alpha,\beta)-\operatorname{ext}_Q(\alpha,\beta). \tag{1}$$

2.2. Schofield 多项式。 — Harm Derksen 和 Jerzy Weyman 在 [**DW00** 定理 1] 中证明，Schofield 多项式 [**Sch91** 第 1] 节张成了半不变量有限维向量空间 $\operatorname{SI}(Q,\gamma)_\sigma$ ，其中维数为 γ，权为 σ。由此我们推得互反性质[**DW00** 推论 1]：对所有 $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^{Q_0}$,

$$\dim\operatorname{SI}(Q,\beta)_{\langle\alpha,\cdot\rangle}=\dim\operatorname{SI}(Q,\alpha)_{-\langle\cdot,\beta\rangle} \tag{2}$$

这促成了以下定义。设 $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^{Q_0}$。

定义 ***2.1***。— 我们将 $\alpha\circ\beta=\dim(\operatorname{SI}(Q,\beta)_{\langle\alpha,\cdot\rangle})$ 记为 $\in\mathbb{N}$。

正如 [**DW11** 中所述，注记 4]， [**DW00** 的另一个推论是定理 1] 。

推论 ***2.2***. — 下列断言等价：

(i) $\alpha\circ\beta\neq 0$;(ii) 同态$_Q(\alpha,\beta)$ $=$ 扩张$_Q(\alpha,\beta)$ $=0$;(iii) $\langle\alpha,\cdot\rangle\in\Sigma(Q,\beta)$;$(iv)$ $-\langle\cdot,\beta\rangle\in\Sigma(Q,\alpha)$.

2.3. 一般滤过维数。 — 令 $\alpha\in\mathbb{N}^{Q_0}$ 且 $r\geqslant 2$。

2.3.1. 定义。——对于所有表示 $V\in$表示空间$_\alpha(Q)$， V的一个长度为 $r-1\in\mathbb{N}^*$的滤过是由 V的子表示构成的序列 $F=(F_i)_{i\in[r-1]}$，满足对于所有 $i\in[r-2]$, $F_i\subset F_{i+1}$；若记 $F_r=V$和 $F_0=\{0\}$，则该滤过 F的维数为序列 $(\dim F_i-\dim F_{i-1})_i\in(\mathbb{N}^{Q_0})^r$。

设 $(\alpha_i) \in (\mathbb{N}^{Q_0})^r$ 为一个由 r 维数组成的序列，使得

$$\alpha = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i.$$

我们将 $\mathrm{Rep}_{(\alpha_i)}(Q)$ 记为所有满足存在一个维数为 (α_i) 的 V 的滤过的 $V \in \mathrm{Rep}_\alpha(Q)$ 的集合。例如，若 $Q_1 = \emptyset$，则 $\mathrm{Rep}_{(\alpha_i)}(Q) = \mathrm{Rep}_\alpha(Q)$。以下引理见 [**DW11**，引理 3.5]。

引理 ***2.3***。—集合 表示空间$_{(\alpha_i)}(Q)$ 在 表示空间$_\alpha(Q)$ 中是扎里斯基闭的。

证明。—我们改编 [**Sch92** 中引理 3.1]，的证明，该引理对应于情形 $r = 2$。对于所有 $i \in [r]$，我们记 $\beta_i = \sum_{j\in[i]} \alpha_j$。考虑集合 Z，它由所有满足 R 是 V 的一个滤过的 $(V, (R_i)) \in \mathrm{Rep}_\alpha(Q) \times \prod_{i\in[r-1]} \mathrm{Gr}(\beta_i, \beta_{i+1})$ 构成。它是 $\mathrm{Rep}_\alpha(Q) \times \prod_{i\in[r-1]} \mathrm{Gr}(\beta_i, \beta_{i+1})$ 的一个子簇，因此通过投影到 $\mathrm{Rep}_\alpha(Q)$ 上得到的像 $\mathrm{Rep}_{(\alpha_i)}(Q)$ 是闭的。

□

定义 ***2.4***。——序列 (α_i) 是一个一般滤过维数，当 $\mathrm{Rep}_{(\alpha_i)}(Q) = \mathrm{Rep}_\alpha(Q)$。

2.3.2. Schofield 定理。——注意，对所有 $\beta \leqslant \alpha$，$(\beta,\ \alpha - \beta)$ 是一般滤过维数，当且仅当 $\beta \hookrightarrow \alpha$。例如，引理 2.3 表明，一般表示 $V \in \mathrm{Rep}_\alpha(Q)$ 的任意子表示 W 都满足 $\dim W \hookrightarrow \alpha$。这是一种传递关系：对所有 β, $\gamma \in \mathbb{N}^{Q_0}$，若 $\beta \hookrightarrow \alpha$ 且 $\gamma \hookrightarrow \beta$，则 $\gamma \hookrightarrow \alpha$。以下刻画出自 Schofield 定理[**Sch92**，定理 3.3]：对所有 $\beta \in \mathbb{N}^{Q_0}$，

$$\alpha \hookrightarrow \alpha + \beta \Leftrightarrow \mathrm{ext}_Q(\alpha, \beta) = 0 \tag{3}$$

2.3.3. Ressayre 的支配态射。——一般滤过维数对应于某个态射的支配性质：这将给出其定义域和陪域维数之间一个有用的不等式。我们处于与 [**Res11** 第 4]，节相同的背景下，该情形是 [**Res11** 第 2.1] 节的一个特例。设 $(\alpha_i) \in (\mathbb{N}^{Q_0})^r$ 是一个由 r 个维数组成的序列，使得

$$\alpha = \sum_{i\in[r]} \alpha_i.$$

我们记作 $\beta_0 = (0)_x \in \mathbb{N}^{Q_0}$，并且对所有 $i \in [r]$，$\beta_i = \sum_{j\in[i]} \alpha_j$。我们定义一个单参数子群 $\lambda\colon\ \mathbb{C}^* \to$ 一般线性群$_\alpha(Q)$，如下：对所有 $x \in Q_0$ 和 $t \in \mathbb{C}^*$，

$$(\lambda)_x(t) = \mathrm{diag}(t^i \,\mathrm{Id}_{\alpha_i(x)}; i \in [r]) \in \mathrm{GL}_{\alpha(x)}(\mathbb{C}).$$

对所有 $x \in Q_0$，我们用 $(e_j(x))_j$ 表示 $\mathbb{C}^{\alpha(x)}$ 的典范基。对所有 $i \in [r]$，我们记作

$$E_i^\lambda = \left\{ v \in \prod_{x \in Q_0} \mathbb{C}^{\alpha(x)} | \forall t \in \mathbb{C}^*, \lambda(t)v = t^i v \right\}$$

即对所有 $x \in Q_0$, $E_i^\lambda(x)$, $= \mathrm{span}\{e_j(x);\ 1 + \beta_{i-1}(x) \leqslant j \leqslant \beta_i(x)\}$。我们有

$$\prod_{x \in Q_0} \mathbb{C}^{\alpha(x)} = \bigoplus_{i \in [r]} E_i^\lambda.$$

并且，对所有 $i \in [r]$, $\alpha_i = \dim E_i^\lambda$。考虑与 λ 关联的 $\mathrm{GL}_\alpha(Q)$ 的抛物子群

$$P(\lambda) := \left\{ p \in \mathrm{GL}_\alpha(Q) | \exists p_0 \in \mathrm{GL}_\alpha(Q), \lambda(t) p \lambda(t)^{-1} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} p_0 \right\},$$

不动表示的集合

$$C^0(\lambda) := \{ V \in \mathrm{Rep}_\alpha(Q) | \forall t \in \mathbb{C}^*, \lambda(t) \cdot V = V \}$$

以及相应的 Bia-lynicki-Birula 胞腔 [**BB73**]

$$C^+(\lambda) = \left\{ V \in \mathrm{Rep}_\alpha(Q) | \exists V_0 \in C^0(\lambda), \lambda(t) \cdot V \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} V_0 \right\}.$$

这最后两个集合 $C^0(\lambda)$ 和 $C^+(\lambda)$ 是 $\mathrm{Rep}_\alpha(Q)$ 的两个线性子空间，并满足 $C^0(\lambda) \subset C^+(\lambda)$。胞腔 $C^+(\lambda)$ 在子群 $P(\lambda)$ 的作用下保持不变。由此可知，群 $\mathrm{GL}_\alpha(Q) \times P(\lambda)$ 按如下方式作用于 $\mathrm{GL}_\alpha(Q) \times C^+(\lambda)$：对所有 $(g, p) \in \mathrm{GL}_\alpha(Q) \times P(\lambda)$ 以及 $(g', V) \in \mathrm{GL}_\alpha(Q) \times C^+(\lambda)$,

$$(p, g) \cdot (g', V) = (gg'p^{-1}, p \cdot V).$$

我们将 $\mathrm{GL}_\alpha(Q) \times_{P(\lambda)} C^+(\lambda)$ 记作 $\mathrm{GL}_\alpha(Q) \times C^+(\lambda)$ 关于 $P(\lambda)$ 作用的商。自然的 $P(\lambda)$-不变态射

$$\rho_\lambda : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_\alpha(Q) \times C^+(\lambda) & \longrightarrow & \mathrm{Rep}_\alpha(Q) \\ (g, V) & \longmapsto & g \cdot V \end{array} \right.$$

得到一个 $\mathrm{GL}_\alpha(Q)$-等变态射 $\eta_\lambda : \mathrm{GL}_\alpha(Q) \times_{P(\lambda)} C^+(\lambda) \to$ 表示空间$_\alpha(Q)$。对于所有 $j \in [r]$，我们记

$$F_j^\lambda := \bigoplus_{i \in [j]} E_i^\lambda.$$

我们有

$$C^0(\lambda) = \left\{ V \in \mathrm{Rep}_\alpha(Q) | \forall i \in [r], E_i^\lambda < V \right\},$$

$$C^+(\lambda) = \left\{ V \in \mathrm{Rep}_\alpha(Q) | \forall j \in [r], F_j^\lambda < V \right\}, \tag{4}$$

$$P(\lambda) = \left\{ g \in \mathrm{GL}_\alpha(Q) | \forall j \in [r], g(F_j^\lambda) < F_j^\lambda \right\}, \tag{5}$$

$$\mathrm{Im}(\eta_\lambda) = \mathrm{Im}(\rho_\lambda) = \mathrm{Rep}_{(\alpha_i)}(Q). \tag{6}$$

与 [**Res11** 定理 3] 的证明一样，我们计算 $\delta(\lambda)$ η_λ 的陪域与定义域维数之差:

$$\begin{aligned}\delta(\lambda) &= \dim \mathrm{Rep}_\alpha(Q) - \dim \mathrm{GL}_\alpha(Q) \times_{P(\lambda)} C^+(\lambda) \\ &= \dim \mathrm{Rep}_\alpha(Q) - \dim \mathrm{GL}_\alpha(Q) + \dim P(\lambda) - \dim C^+(\lambda).\end{aligned}$$

with

$$\dim \mathrm{Rep}_\alpha(Q) = \sum_a \sum_{i,j} \alpha_i(ta)\alpha_j(ha), \quad \dim \mathrm{GL}_\alpha(Q) = \sum_x \sum_{i,j} \alpha_i(x)\alpha_j(x)$$

由方程（4）和（5），

$$\dim C^+(\lambda) = \sum_a \sum_{j \leqslant i} \alpha_i(ta)\alpha_j(ha), \qquad \dim P(\lambda) = \sum_x \sum_{j \leqslant i} \alpha_i(x)\alpha_j(x)$$

由此可推得

$$\delta(\lambda) = -\sum_{i<j} \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle.$$

然而，根据方程（6），(α_i) 是一般滤过维数，当且仅当 η_λ 是满射（根据引理 2.3，当且仅当 η_λ 支配）。由此得到以下引理。

引理 ***2.5***. — 如果(α_i) 是一般滤过维数，那么

$$\sum_{i<j} \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \geqslant 0.$$

这可以与余维条件 [**Bel06**，公式 0.1]进行比较，并将与引理 2.12 一起使用。

2.4. 子表示的数量。— 设 $\alpha,\ \beta \in \mathbb{N}^{Q_0}$。在 [**Res11** 的第 4 节中, Nicolas Ressayre 考虑了以下定义：如果维数为 $\alpha+\beta$ 的一般表示有有限多个维数为 α 的子表示，则将这个数量记为 $\alpha \circ' \beta$；否则，记为 $\alpha \circ' \beta = 0$。从这个角度看，$\alpha \circ' \beta$ 是一般纤维的基数。以下定理表明，若 $\langle \alpha,\ \beta \rangle = 0$ 则 $\alpha \circ \beta = \alpha \circ' \beta$。回顾一下，若 $\alpha \circ \beta \neq 0$，则 $\langle \alpha,\ \beta \rangle = 0$。定理 2.6 出自 [**DSW07**，定理 1]，并将与引理 2.11 一起使用。

定理 ***2.6*** **(Derksen-Schofield-Weyman)**。— 若 $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$，则一般表示 $V \in$ 表示空间$_{\alpha+\beta}(Q)$ 恰有 $\alpha \circ \beta$ 个维数为 α 的子表示。

在某种意义上，一般表示的子表示也处于一般位置 [**DSW07**，命题 13]。

命题 ***2.7***。— 假设 $\beta \leqslant \alpha$ 且 $\langle \beta, \alpha - \beta \rangle = 0$。令 $\mathcal{U}_\beta$ 为 一般线性群$_\beta$-稳定的、非空的 *Zariski* 开集 表示空间$_\beta(Q)$。则存在 $\mathcal{U}_\alpha$，使得 表示空间$_\alpha(Q)$ 中存在一个非空的 *Zariski* 开集，使得对所有 $V \in \mathcal{U}_\alpha$，V 的任意子表示都属于 $\mathcal{U}_\beta$。

由此以及上一个定理可得推论 2.8，关于子表示的子表示的一般子表示数。

推论 ***2.8***。——设 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \in \mathbb{N}^{Q_0}$ 使得

$$\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = \langle \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_3 \rangle = 0.$$

存在一个非空开子集 $\mathcal{U}$，它属于表示空间$_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}(Q)$，使得，对于所有 $V \in \mathcal{U}$ 以及所有维数为 $\alpha_1+\alpha_2$ 的子表示 $W < V$，W 恰好有 $\alpha_1 \circ \alpha_2$ 个维数为 α_1 的子表示。

证明。——根据 Derksen-Schofield-Weyman 的定理 2.6，存在表示空间 $_{\alpha_1+\alpha_2}(Q)$ 的一个非空开子集 $\mathcal{U}'$，使得对于所有 $W \in \mathcal{U}'$，W都恰好有 $\alpha_1 \circ \alpha_2$ 个子表示。轨道 GL$_{\alpha_1+\alpha_2}(Q)\ \cdot \mathcal{U}'$ 的并集是表示空间 $_{\alpha_1+\alpha_2}(Q)$ 的一个非空开子集，并且在 GL$_{\alpha_1+\alpha_2}(Q)$ 的作用下保持不变。由命题 2.7 可得结论。□

我们以如下乘法公式结束本节，该公式由 Nicolas Ressayre 得到 [**Res11**，定理 B] （另见 [**DW11**，第 7.4] 节）。

命题 ***2.9***。—— 假设 $\langle\beta_1、\ \beta_2\rangle = \langle\beta_1、\ \beta_3\rangle = 0$ 和 $\beta_2 \circ \beta_3 = 1$。我们有 $\beta_1 \circ (\beta_2 + \beta_3) = (\beta_1 \circ \beta_2) \times (\beta_1 \circ \beta_3)$。

2.5. 差异。—— 下面 disc(V， σ) 的定义和记号来自 [**CK21**，定义 29]。

定义 ***2.10***。—— 表示 V 关于权 $\sigma \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ 的差异为

$$\operatorname{disc}(V, \sigma) = \max_{W<V} \sigma(\dim W)$$

而 (V， σ) 的见证是达到此最大值的子表示 $W < V$：σ(维数 W) $=$disc(V，σ)。维数 $\alpha \in \mathbb{N}^{Q_0}$ 关于权 $\sigma \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ 的差异为

$$\operatorname{disc}(\alpha, \sigma) = \max_{\beta \hookrightarrow \alpha} \sigma(\beta).$$

注意，根据引理 2.3，存在一个非空的 Zariski 开集 $\mathcal{V} \subset$ 表示空间$_\alpha(Q)$，使得对于所有 $V \in \mathcal{V}$，disc(V， σ) $=$disc(α， σ)。下一个引理是 Harder-Narasimhan 类型的引理，见 [**Hus21**，命题 3.1]。它可与 [**Bel01**，引理 5] 进行比较

引理 ***2.11***。— 若 W_1、W_2 是 (V, σ) 的见证，则 $W_1 \cap W_2$和 $W_1 + W_2$也都是见证。特别地，关于包含关系，存在唯一的最小（分别为最大）见证。

证明。——设 W_1， W_2 是 (V， σ) 的两个见证。由于 disc(V， σ) 是最大值，我们有

$$\begin{aligned}\sigma(\dim(W_1 + W_2)) &= \sigma(\dim W_1) + \sigma(\dim W_2) - \sigma(\dim(W_1 \cap W_2)) \\ &\geqslant 2\operatorname{disc}(V, \sigma) - \operatorname{disc}(V, \sigma) = \operatorname{disc}(V, \sigma),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\sigma(\dim(W_1 \cap W_2)) &= \sigma(\dim W_1) + \sigma(\dim W_2) - \sigma(\dim(W_1 + W_2)) \\ &\geqslant 2\operatorname{disc}(V, \sigma) - \operatorname{disc}(V, \sigma) = \operatorname{disc}(V, \sigma),\end{aligned}$$

因此 $\sigma(\dim(W_1+W_2)) = \sigma(\dim(W_1\cap W_2)) = \operatorname{disc}(V,\sigma)$。第一点得证。我们来考虑维数

$$d : x \in Q_0 \mapsto \min_{W<V,\sigma(\dim W)=\operatorname{disc}(V,\sigma)} W(x) \in \mathbb{N}.$$

对于所有 $x \in Q_0$，存在 $W_x < V$，使得 $d(x) = \dim W_x(x)$。根据引理的第一点，$m := \bigcap_{x\in Q_0} W_x$ 是 (V,σ) 的一个见证，使得 $\dim m \leqslant d$。令 W 为一个见证。对于所有 $x \in Q_0$，由于 $m\cap W$ 是一个见证，因此 $d(x) \leqslant \dim(W\cap m)(x)$。由此可知 $m \leqslant d \leqslant \dim m\cap W$ 且 $m = m\cap W$，即 $m < W$。类似地，存在一个最大见证。

□

引理 ***2.12***。——令 W 为 (V,σ) 的最小见证，$\beta =$ 维数 W 为其维数。我们有 同态$_Q(\beta, \alpha-\beta) = 0$。

证明。——令 $\varphi \in \operatorname{Hom}_Q(W, V/W)$，$i = \dim \operatorname{Im}\varphi$，$k := \dim \operatorname{Ker}\varphi$。令$\pi$: $V \twoheadrightarrow V/W$ 为到商 V/W 上的典范投影，I 为子表示 $\pi^{-1}(\operatorname{Im}\varphi) < V$。我们有

$$\operatorname{disc}(V,\sigma) \geqslant \sigma(\dim \tilde{I}) = \sigma(i)+\sigma(\beta) = \sigma(i)+\operatorname{disc}(V,\sigma)$$

因此 $\sigma(i) \leqslant 0$。然而，根据秩定理，$\beta = i+k$ 以及

$$\operatorname{disc}(V,\sigma) = \sigma(\beta) = \sigma(i)+\sigma(k) \leqslant \sigma(k)$$

因此，核 $\operatorname{Ker}\varphi$ 是 (V,σ) 的一个见证，也是最小见证 W 的一个子表示，即 $K = W$，也就是说 $\varphi = 0$。由此我们推得 $\hom_Q(\beta, \gamma-\beta) = 0$。

□

最后，我们证明定义 α 相对于 σ 的差异时所取的最大值，可在有限多个维数上达到。

引理 ***2.13***。—— 我们有

$$\operatorname{disc}(\alpha,\sigma) = \max_{\beta\circ(\alpha-\beta)=1} \sigma(\beta).$$

证明。——只需证明存在 $\beta \leqslant \alpha$，使得 $\beta\circ(\alpha-\beta) = 1$ 且 $\sigma(\beta) = \operatorname{disc}(\alpha,\sigma)$。根据引理 2.3，存在 $\operatorname{Rep}_\alpha(Q)$ 的一个非空开子集$\mathcal{U}$，使得对于所有不满足 $\beta \hookrightarrow \alpha$ 的 β，以及所有$V \in \mathcal{U}$，V 均不含维数为 β 的子表示。对于所有满足 $\langle\beta,\alpha-\beta\rangle = 0$ 的 $\beta \leqslant \alpha$，根据命题 2.7，存在 $\mathcal{V}_\beta$ 一个非空

开子集 $\mathrm{Rep}_\alpha(Q)$，使得对于所有 $V \in \mathcal{V}_\beta$， V 恰有 $\beta \circ (\alpha - \beta)$ 个维数为 β的子表示。我们考虑交集

$$\mathcal{V} := \bigcap_{\langle \beta, \alpha - \beta \rangle = 0} \mathcal{V}_\beta.$$

存在 $V \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$。令 W 为（V， σ）的最小见证，并令 $\beta := \dim W$ 为其维数。由于 $V \in \mathcal{U}$，我们知道 $\mathrm{disc}(\alpha, \sigma) = \sigma(\beta)$，且 $\beta \hookrightarrow \alpha$。根据 Schofield 定理 3，$\mathrm{ext}_Q(\beta, \alpha - \beta) = 0$。然而，利用引理 2.12，$\mathrm{hom}_Q(\beta, \alpha - \beta) = 0$。特别地，$\langle \beta, \alpha - \beta \rangle = 0$（我们也可以用引理 2.5 代替定理 3）。然而，根据引理 2.11，我们还知道 V 有一个维数为 β 的唯一子表示，即（由于 $V \in \mathcal{V}$）$\beta \circ (\alpha - \beta) = 1$。 □

2.6. Schofield 关于差异的方程。— 设 α， $\beta \in \mathbb{N}^{Q_0}$ 是两个维数，$\sigma \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ 是 Q 上的一个权。以下方程见于 [**Sch92**，定理 5.4]:

$$\mathrm{ext}_Q(\alpha, \beta) = \mathrm{disc}(\alpha, -\langle \cdot, \beta \rangle) = \mathrm{disc}(\beta, \langle \alpha, \cdot \rangle) - \langle \alpha, \beta \rangle. \tag{7}$$

另一方面，结合 Schofield 定理 3，可得到一个算法[**Sch92**，第 5] 节，用于计算整数 $\mathrm{ext}_Q(\alpha, \beta)$（从而计算 $\mathrm{hom}_Q(\alpha, \beta)$）以及断言 $\beta \hookrightarrow \alpha$。另一方面，结合推论 2.2，我们可推出广义饱和定理 [**DW11**，推论 2.19]。特别地，半群 $\Sigma(Q, \alpha)$ 在格 $\mathbb{Z}^{Q_0}$ [**DW00**，定理 3] 中是饱和的。

2.7. King 关于半稳定性的判据。——设 $\alpha \in \mathbb{N}^{Q_0}$ 和 $\sigma \in \mathbb{Z}^{Q_0}$。以下定义对应于几何不变理论中元素 $(V, 1) \in$ 表示空间 $\mathrm{Rep}_\alpha(Q) \oplus \chi_\sigma$ 的一般线性群 $\mathrm{GL}_\alpha(Q)$-半稳定性。

定义 ***2.14***. — 若存在 $n \in \mathbb{N}$ 和 $f \in \mathrm{SI}(Q, \dim V)_{n\sigma}$，使得 $f(V) \neq 0$，则表示 V 是 σ-半稳定的 。

特别地，若 $\sigma \in \Sigma(Q, \alpha)$，则存在一个维数为 α的 σ-稳定表示。根据 [**DW00**，定理 1], 的逆命题成立。这将在第2.8节中与引理 2.13 一起使用。

引理 ***2.15*** **(Derksen-Weyman)**。— 当且仅当存在一个维数为 α 的 σ-半稳定表示 V，使得 $\sigma \in \Sigma(Q, \alpha)$ 。

下面的 King 判据 2.16 是 [**Kin94**，定理 4.1]，它建立了表示 V 的 σ-半稳定性与数对 (V, σ) 的差异之间的联系。

定理 ***2.16*** **(King 判据)**。——表示 V 是 σ-半稳定的，当且仅当 σ(维数 V) $= \operatorname{disc}(V, \sigma) = 0$。

2.8. 半不变量上的 Horn 型不等式。——设 $\alpha \in \mathbb{N}^{Q_0}$。引理 2.3、2.15 和 King 判据 2.16 推出 Derksen-Weyman 定理 1.2：对所有 $\sigma \in \mathbb{Z}^{Q_0}$,

$$\sigma \in \Sigma(Q, \alpha) \Leftrightarrow \operatorname{disc}(\alpha, \sigma) = \sigma(\alpha) = 0.$$

Derksen-Weyman 定理 1.2 和引理 2.13 推出定理 2.17；定理 2.17 和推论 2.2 推出定理 1.3 中所述的 $\Sigma(Q, \alpha)$ 的归纳描述。事实上，引理 2.13 的证明表明，证明定理 1.3 并不需要定理 2.6。

定理 ***2.17***。——对所有权 $\sigma \in \mathbb{Z}^{Q_0}$, $\sigma \in \Sigma(Q, \alpha)$ 当且仅当满足以下两个条件：

1. $\sigma(\alpha) = 0$; *2.* $\sigma(\beta) \leqslant 0$ 对所有满足 $\beta \circ (\alpha - \beta) = 1$的 $\beta \leqslant \alpha$。

第2节以及最后一个定理的证明，使我们得以引入一些有用的工具，以便在下一节证明定理 1.6。

3. 带对合的箭图

3.1. 例子。— 另请参见 [**DW02**，命题 4.2] 以及例 1.7，其中给出了带对合的箭图的例子。一个箭图存在对合，当且仅当其相反箭图存在对合。定向直线箭图$A_n^{\rightarrow}$（见图 2）和 n-Kronecker 箭图 Θ_n （见图 3）都存在对合。

FIGURE 2. 定向直线箭图 $A_n^{\rightarrow}$

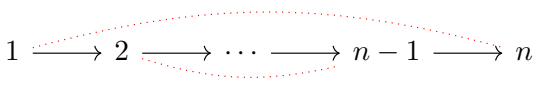
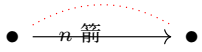
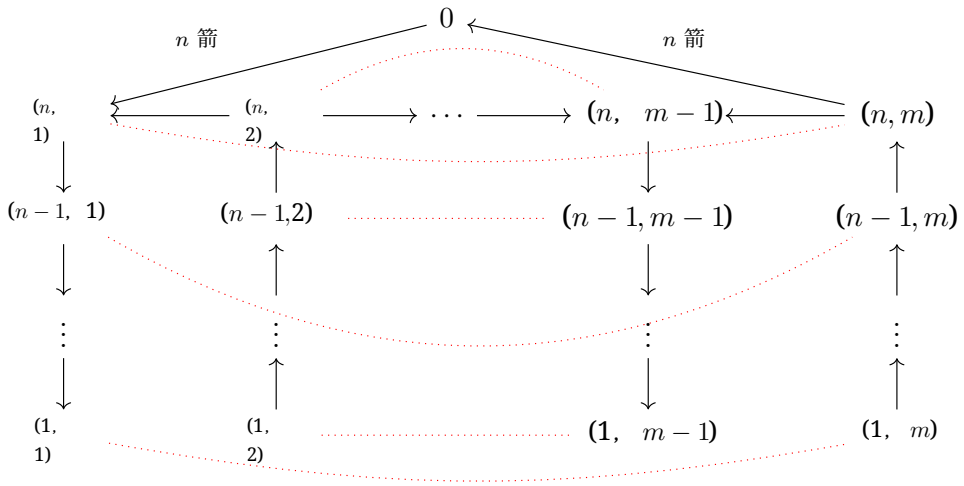


FIGURE 3. n-克罗内克箭图 Θ_n



Sun 箭图（见第 4.3 节）存在对合。若 m 为偶数，则 [**Chi09**第 3] 节中定义的箭图（见图 4）存在对合。我们

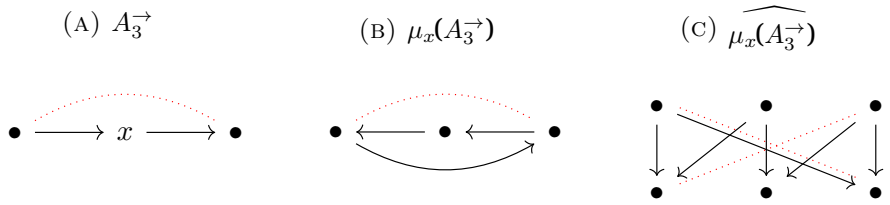
FIGURE 4. 当 m 为偶数时的（n，m）-Chindris 箭图



简要提及图5中含有向环的箭图这一情形。如果一个不含有向环的箭图Q 具有对合（见图5a），那么相对于一个固定顶点x，其变异箭图 $\mu_x(Q)$ [**Fom10**，第 9] 页（见图5b）也具有对合（但可能含有向环）。如果 Q（可能含有向环）具有对合，那么 [**DW11** 第6节中定义的 $\hat{} Q$ （见图5c）具有对合且不含有向环。

3.2. 对合的作用。— 在第3节的其余部分，我们假设 Q （不含有向环）具有一个对合 τ。如引言中所述，对合 τ 作用于许多与箭图Q相关的对象。首先，回顾一下，τ 在 $\mathbb{Z}^{Q_0}$ 上诱导出一个对合，并注意到，对于所有

FIGURE 5. 定向直线箭图 $A_3^{\rightarrow}$的突变与加倍



σ、 α、 $\beta \in \mathbb{Z}^{Q_0}$,

$$\begin{aligned}\langle \alpha, \beta \rangle &= \langle \tau \cdot \beta, \tau \cdot \alpha \rangle, \\ (\tau \cdot \sigma)(\beta) &= \sigma(\tau \cdot \beta), \\ \tau \cdot \langle \alpha, \cdot \rangle &= \langle \cdot, \tau \cdot \alpha \rangle.\end{aligned}$$

设 $\alpha \in \mathbb{N}^{Q_0}$。若 $\alpha = \tau \cdot \alpha$, τ 是复向量空间 $\mathrm{Rep}_\alpha(Q)$上的反线性对合，则由此在其上得到一个实结构：这就给出了引理 3.1。

引理 ***3.1***. — 若 $\alpha = \tau \cdot \alpha$，则所有 τ-对称表示组成的集合 表示空间$_\alpha(Q)^\tau$ 在表示空间$_\alpha(Q)$中扎里斯基稠密。

例***3.2***. — 我们考虑 Q 是 $A_2^{\rightarrow}$（见图 2）的情形，它带有唯一的对合 τ，并且 $\alpha \in \mathbb{N}^{Q_0}$ 满足 $\alpha = \tau \cdot \alpha$。集合 $\mathrm{Rep}_\alpha(Q)^\tau$ 是由所有厄米矩阵构成的扎里斯基稠密集合。另一方面， [**DW02**第2] 节中定义的正交（分别为辛）表示所成的集合，是由所有对称矩阵（分别为反对称矩阵）构成的扎里斯基闭集合（而非稠密集合）。

对于所有的 $n \in \mathbb{N}$ 和 $A \subset \mathbb{C}^n$，我们用 $A^\perp$ 表示相对于标准厄米内积 $(z,\ z') \mapsto \sum_{i\in[n]} z_i z_i'$, A 在 $\mathbb{C}^n$中的正交补。对于所有表示空间$\urcorner V$及其子表示 $W < V$，我们定义 W 的 τ-正交补为

$$W^\perp = (W(\tau x)^\perp)_x < \tau \cdot V,$$

它是 $\tau \cdot V$的一个子表示，维数为

$$\dim W^\perp = \tau \cdot (\dim V - \dim W)^{\cdot}$$

定义 ***3.3***. — τ-各向同性子表示是 τ-对称表示 V 的一个子表示 $W < V$，满足 $W < W^\perp$。

更一般地，我们有一个从 V 的长度为 r 的滤过到 $\tau\cdot V$ 的长度为 r 的滤过的双射：对于维数为 $(\alpha_i)_i$ 的滤过 $(F_i)_i$，我们对应到维数为 $\tau\cdot(\alpha_i)=(\tau\cdot\alpha_{r+1-i})$ 的 $\tau\cdot F=(F^\perp_{r+1-i})$。由此可知，$(\alpha_i)_i$ 是一般滤过维数，当且仅当 $\tau\cdot(\alpha_i)_i$ 是一般滤过维数。特别地，当且仅当 $\tau\cdot(\alpha-\beta)\hookrightarrow\tau\cdot\alpha$ 时，$\beta\hookrightarrow\alpha$。

对于所有表示 V 和 W，τ 定义了一个反线性同构 $\mathrm{Hom}_Q(V,W)\to\mathrm{Hom}_Q(\tau\cdot W,\tau\cdot V)$（当 $W=\tau\cdot V$ 时为自逆同构），其定义为 $\tau\cdot\varphi=(\varphi(\tau x)^*)_x$。由此以及公式（1），我们推得

$$\hom_Q(\alpha,\beta)=\hom_Q(\tau\cdot\beta,\tau\cdot\alpha), \tag{8}$$

$$\mathrm{ext}_Q(\alpha,\beta)=\mathrm{ext}_Q(\tau\cdot\beta,\tau\cdot\alpha). \tag{9}$$

由于 τ 给出了一个反线性同构 $\mathrm{SI}(Q,\alpha)_\sigma\simeq\mathrm{SI}(Q,\tau\cdot\alpha)_{-\tau\cdot\sigma}$，由公式（2）可得

$$\alpha\circ\beta=(\tau\cdot\beta)\circ(\tau\cdot\alpha). \tag{10}$$

3.3. 最小见证。 — 假设 $\alpha=\tau\cdot\alpha$，$V\in\mathrm{Rep}_\alpha(Q)$ 是一个 τ-对称表示，并且 $\sigma=-\tau\cdot\sigma$。令 W 为 (V,σ) 的最小见证，$\beta:=\dim W$ 以及 $\gamma:=\alpha-\beta-\tau\cdot\beta$。

引理 ***3.4***。— *(V,σ) 的最大见证为 $W^\perp$。特别地，W 是 τ-各向同性的，$\gamma\geqslant 0$、$\gamma=\tau\cdot\gamma$，并且对于所有满足 $\tau x=x$ 的 $x\in Q_0$，$\beta(x)=0$。此外，我们还有 $\hom_Q(\beta,\tau\cdot\beta)=\hom_Q(\beta,\gamma)=0$.*

证明。— 令 M 为最大见证。我们有

$$\sigma(\dim W)=\sigma(\dim W^\perp)=\sigma(\dim M)=\sigma(\dim M^\perp)$$

因此 $W^\perp<M$ 且 $W<M^\perp$，即 $M=W^\perp$ 且 $W<W^\perp$。

下文中，态射 φ 的核（分别为像）记作 K（分别为 I），其维数 $k:=\dim K$（分别为 $i:=\dim I$）。

令 $\varphi\in\mathrm{Hom}_Q(W,V/W^\perp)$，$\pi\colon V\twoheadrightarrow V/W^\perp$ 为典范投影，且 $\tilde{I}:=\pi^{-1}(I)$。那么 $\tilde{I}$ 是 V 的一个子表示，其维数为 $\dim I+\dim W^\perp$，并且我们有

$$\mathrm{disc}(V,\sigma)\geqslant\sigma(\dim\tilde{I})=\sigma(i)+\sigma(\dim W^\perp)=\mathrm{disc}(V,\sigma)+\sigma(i).$$

于是 $\sigma(i)\leqslant 0$。然而，根据秩定理，$\beta=i+k$ 且

$$\mathrm{disc}(V,\sigma)=\sigma(\beta)=\sigma(i)+\sigma(k)\leqslant\sigma(k)$$

因此 $\mathrm{disc}(V,\ \sigma)\ \leqslant \sigma(k)$。于是，核 K 是 $(V,\ \sigma)$ 的一个见证，也是最小见证 W 的子表示，即 $K=W$，也就是 $\varphi=0$。由此我们推出第一个等式 $\hom_Q(\beta,\ \tau\cdot\beta)=0$.

设 $\varphi\in \mathrm{Hom}_Q(W,W^\perp/W)$，$\pi\colon\ W^\perp\twoheadrightarrow W^\perp/W$ 典范投影，且 $\tilde{I}:=\pi^{-1}(I)$。那么 $\tilde{I}$ 是 $W^\perp<V$ 的一个子表示，其维数为 $\dim I+\dim W$，并且有

$$\mathrm{disc}(V,\sigma)\geqslant \sigma(\dim \tilde{I})=\sigma(i)+\mathrm{disc}(V,\sigma)$$

因此 $\sigma(i)\leqslant 0$。和之前一样，由秩定理可得

$$\mathrm{disc}(V,\sigma)=\sigma(\beta)=\sigma(i)+\sigma(k)\leqslant\sigma(k).$$

和之前一样，由此可推出 $K=W$，即 $\varphi=0$ 且 $\hom_Q(\beta,\gamma)=0$。 □

注意，Schofield 的公式（7）表明，$\hom_Q(\cdot,\cdot)$ 和 $\mathrm{ext}_Q(\cdot,\cdot)$ 关于每个变量都是次可加的。由此，利用引理 3.4 和公式（8），可得

$$\hom_Q(\gamma,\tau\cdot\beta)=\hom_Q(\beta,\tau\cdot\beta+\gamma)=\hom_Q(\gamma+\beta,\tau\cdot\beta)=0.$$

3.4. 反对称元素。—— 设 $\alpha\in\mathbb{N}^{Q_0}$ 满足 $\alpha=\tau\cdot\alpha$。回顾一下，$\Sigma(Q,\alpha)$ 在 τ 下稳定。我们研究由所有满足 $\sigma=-\tau\cdot\sigma$ 的 $\sigma\in\Sigma(Q,\alpha)$ 构成的子半群 $\Sigma(Q,\alpha)^{-\tau}$。

定义 ***3.5***。——令 $\mathcal{I}^{00}(Q,\alpha,\tau)$ 表示所有满足 $\alpha=\beta+\gamma+\tau\cdot\beta$ 且 $\beta\circ\gamma=\beta\circ\tau\cdot\beta=1$ 的 $(\beta,\gamma)\in(\mathbb{N}^{Q_0})^2$ 的集合。

对于所有 (β,γ)，$(\beta',\gamma')\in\mathcal{I}^{00}(Q,\alpha,\tau)$，$\beta=\beta'\Rightarrow\gamma=\gamma'$；考虑维数对只是一种避免每次重新定义 γ 的方法。注意，$\mathcal{I}^{00}(Q,\alpha,\tau)$ 取决于 τ_0，但不取决于 τ_1。根据公式 (10) 和命题 2.9，对于所有 $(\beta,\gamma)\in\mathcal{I}^{00}(Q,\alpha,\tau)$，

$$\gamma\circ\tau\cdot\beta=\beta\circ(\gamma+\tau\cdot\beta)=(\gamma+\beta)\circ\tau\cdot\beta=1$$

并且特别地：$(\beta,\gamma,\tau\cdot\beta)$ 是一个一般滤过维数，$\beta\hookrightarrow\alpha$ 且 $\langle\beta,\cdot\rangle-\langle\cdot,\tau\cdot\beta\rangle\in\Sigma(Q,\gamma)^{-\tau}$。这组维数对于下面的引理很重要。

引理 ***3.6***。——对于所有满足 $\sigma=-\tau\cdot\sigma$ 的 $\sigma\in\mathbb{Z}^{Q_0}$，我们有

$$\mathrm{disc}(\alpha,\sigma)=\max_{(\beta,\gamma)\in\mathcal{I}^{00}(Q,\alpha,\tau)}\sigma(\beta)=\max_{(\beta,\gamma)\in\mathcal{I}^{00}(Q,\alpha,\tau),\gamma\in\overline{\Sigma}(Q,\sigma)}\sigma(\beta).$$

证明。——Derksen-Weyman 定理 1.2 得出

$$\operatorname{disc}(\alpha,\sigma) \geqslant \max_{(\beta,\gamma)\in\mathcal{I}^{00}(Q,\alpha,\tau),\gamma\in\overline{\Sigma}(Q,\sigma)} \sigma(\beta)$$

现在我们将证明反向不等式。根据引理 2.3，存在一个非空开子集 $\mathcal{U}$，它属于表示空间 $\mathrm{Rep}_\alpha(Q)$，使得对所有 $V\in\mathcal{U}$ 和所有 $\beta\in\mathbb{N}^{Q_0}$，

1. 如果 V 有一个维数为 β 的子表示，那么 $\beta\hookrightarrow\alpha$；2. 如果 V 有一个维数为 $(\beta,\ \alpha-\beta-\tau\cdot\beta,\ \tau\cdot\beta)$ 的滤过，那么它就是一般滤过维数。

我们将 $\mathcal{I}(Q,\alpha,\tau)$ 记为所有满足 $\alpha=\beta+\gamma+\tau\cdot\beta$ 和 $\langle\beta,\gamma\rangle=\langle\beta,\tau\cdot\beta\rangle=0$ 的 $(\beta,\gamma)\in(\mathbb{N}^{Q_0})^2$ 的集合。根据 Derksen-Weyman-Schofield 定理 2.6，对于所有 $(\beta,\gamma)\in\mathcal{I}(Q,\alpha,\tau)$，存在一个非空开子集 $\mathcal{V}_\beta\subset\mathrm{Rep}_\alpha(Q)$，使得其中任一元素都恰有 $\beta\circ\gamma+\tau\cdot\beta$ 个维数为 β 的子表示。根据推论 2.8，对于所有 $(\beta,\gamma)\in\mathcal{I}(Q,\alpha,\tau)$，存在一个非空开子集 $\mathcal{W}_\beta\subset\mathrm{Rep}_\alpha(Q)$，使得对所有 $V\in\mathcal{W}_\beta$ 以及所有 $(\beta+\gamma)$ 维子表示 $W<V$，W 都恰有 $\beta\circ\gamma$ 个维数为 β的子表示。令

$$\mathcal{V}=\bigcap_{(\beta,\gamma)\in\mathcal{I}(Q,\alpha,\tau)}\mathcal{V}_\beta,\qquad\qquad \mathcal{W}=\bigcap_{(\beta,\gamma)\in\mathcal{I}(Q,\alpha,\tau)}\mathcal{W}_\beta.$$

由引理 3.1，存在一个 τ-对称表示 $V\in\mathcal{U}\cap\mathcal{V}\cap\mathcal{W}$。令 $\sigma\in\mathbb{Z}^{Q_0}$，使得 $\sigma=-\tau\cdot\sigma$。令 W为 (V,σ) 的最小见证，$\beta=\dim W$ 为其维数，且 $\gamma=\alpha-\beta-\tau\cdot\beta$。由于 $V\in\mathcal{U}$,

$$\sigma(\beta)=\operatorname{disc}(\alpha,\sigma).$$

由引理 3.4，子表示 W 是 τ-各向同性的，并且 V 具有维数为 $(\beta,\gamma,\tau\cdot\beta)$ 的滤过。由于 $V\in\mathcal{U}$，$(\beta,\gamma,\tau\cdot\beta)$ 是一个一般滤过维数。于是由引理 2.5 得

$$2\langle\beta,\gamma\rangle+\langle\beta,\tau\cdot\beta\rangle\geqslant 0.$$

然而，由公式（1）和引理 3.4,

$$\langle\beta,\gamma\rangle,\langle\beta,\tau\cdot\beta\rangle\leqslant 0.$$

由此可知，$(\beta,\gamma)\in\mathcal{I}(Q,\alpha,\tau)$。

由于 $V\in\mathcal{V}$，于是由引理 2.11，$\beta\circ\gamma+\tau\cdot\beta=1$。由于 $V\in\mathcal{W}$，于是由引理 2.11 和引理 3.4，$\beta\circ\gamma=1$，即 $\gamma\circ\tau\cdot\beta=1$。于是由推论 2.9，$\beta\circ\tau\cdot\beta=1$，且 $(\beta,\gamma)\in\mathcal{I}^{00}(Q,\alpha,\tau)$。

还需证明 $\sigma\in\Sigma(Q,\ \gamma)$。我们考虑商 $W^\perp/W$和 $\pi:\ W^\perp\twoheadrightarrow W^\perp/W$典范投影。令 X为 $W^\perp/W$的子表示，并令 $\tilde{X}:=\pi^{-1}(X)<W^\perp<V$为维数 $\dim X+\beta$的表示。由于 $\tilde{X}$

˜是 V的子表示， $\sigma(\dim X) \leqslant \sigma(\beta)$，即 $\sigma(X) \leqslant 0$。根据 King 判据 2.16， $W^{\perp}/W$ 是 σ- 半稳定的。根据引理 2.15，这表明 $\sigma \in \Sigma(Q, \gamma)$。 □

引理 3.6 与引理 2.13 类似。结合 Derksen-Weyman 的 1.2，它推出下文的定理 3.7，这是本文的主要结果，并推出定理 1.6。

定理 ***3.7***。—设 $\alpha \in \mathbb{N}^{Q_0}$和 $\sigma \in \mathbb{Z}^{Q_0}$满足 $\alpha = \tau \cdot \alpha$和 $\sigma = -\tau \cdot \sigma$。当且仅当对所有满足条件的 $\beta \in \mathbb{N}^{Q_0}$，都有 $\sigma \in \Sigma(Q, \alpha)^{-\tau}$ 和 $\sigma(\beta) \leqslant 0$ 。

1. $\gamma := \alpha - \beta - \tau \cdot \beta \in \mathbb{N}^{Q_0}$;
2. $\beta \circ \gamma = \beta \circ \tau \cdot \beta = 1$; 3. $\sigma \in \Sigma(Q, \gamma)^{-\tau}$。

4. 例子

4.1. 记号。—设 Q 为一个箭图， τ 为 Q和 α上的一个对合（见定义 1.4）。我们用 $\mathcal{I}^0(Q, \alpha, \tau)$ 表示所有满足条件的 $(\beta, \gamma) \in (\mathbb{N}^{Q_0})^2$ 的集合，其中 $\alpha = \beta + \gamma + \tau \cdot \beta$、 $\beta \circ \gamma \neq 0$ 且 $\beta \circ \tau \cdot \beta \neq 0$.。有一种算法可计算以下整数:

$$\begin{aligned} n_1(Q, \alpha) &= \operatorname{Card}\{\beta \leqslant \alpha | \beta \hookrightarrow \alpha\}, \\ n_2(Q, \alpha) &= \operatorname{Card}\{\beta \leqslant \alpha | \beta \circ (\alpha - \beta) \neq 0\}, \\ n_3(Q, \alpha, \tau) &= \operatorname{Card} \mathcal{I}^0(Q, \alpha, \tau). \end{aligned}$$

注意， $n_1(Q, \alpha)$（分别为 $n_2(Q, \alpha)$）是 Derksen-Weyman 定理 1.2（分别为定理 1.3）给出的、用于刻画 $\Sigma(Q, \alpha)$ 的不等式数量；而 $n_3(Q, \alpha, \tau)$ 是定理 1.6 给出的、用于刻画 $\Sigma(Q, \alpha)^{-\tau}$ 的不等式数量。

ˆ4.2. 型为 D_5的箭图。—图 6 给出了例 1.7 中定义的箭图及对合所对应的映射 n_1、 n_2 和 n_3 的一些取值。维数$\alpha \in \mathbb{N}^{Q_0}$ 记作 $(\alpha(x_i))_{i \in [6]}$: 于是

$$\left\{\alpha \in \mathbb{N}^{Q_0} | \alpha = \tau \cdot \alpha\right\} = \{(a, b, c, c, b, a); a, b, c \in \mathbb{N}\}.$$

FIGURE 6. 例 1.7 的不等式数量。

α	$n_1(Q,\ \alpha)$	$n_2(Q,\alpha)$	$n_3(Q,\alpha,\tau)$
(1, 1, 1, 1, 1, 1)	9	9	5
(2, 2, 2, 2, 2, 2)	43	9	5
(3, 3, 3, 3, 3, 3)	147	9	5
(4, 4, 4, 4, 4, 4)	406	9	5
(0,1,2,2,1,0)	12	9	4
(0, 2, 1, 1, 2, 0)	16	12	6
(2, 1, 0, 0, 1, 2)	36	16	9
(1, 2, 3, 3, 2, 1)	59	25	7
(2, 3, 2, 2, 3, 2)	112	20	9
(2, 3, 4, 4, 3, 2)	244	57	10

4.3. Sun 箭图。—这里我们定义第3节[Col20中引入的 Sun 箭图。2]。令 $k \geqslant 2$ 和 $n \geqslant 1$。令 $Q_0 = \mathbb{Z}/2k\mathbb{Z} \times [n]$ 为顶点集，且 $Q_1 = \{a_{i,j};\ (i,\ j) \in Q_0\}$ 为箭集。由于 $2k$ 是偶数，我们可以讨论 $\mathbb{Z}/2k\mathbb{Z}$ 中元素的奇偶性。我们定义 $t,\ h: Q_1 \to Q_0$ 如下：对所有 $i \in \mathbb{Z}/2k$，若 i 为奇数，则

$$\begin{aligned} ta_{i,n} &= (i+1,n), & ha_{i,n} &= (i,n),\\ \forall j \in [n-1], ta_{i,j} &= (i,j+1), & ha_{i,j} &= (i,j), \end{aligned}$$

并且若 i为偶数，则

$$\begin{aligned} ta_{i,n} &= (i,n), & ha_{i,n} &= (i+1,n),\\ \forall j \in [n-1], ta_{i,j} &= (i,j), & ha_{i,j} &= (i,j+1). \end{aligned}$$

那么 (Q_0, Q_1, h, t) 称为 $(2k,n)$-Sun 箭图。令 τ_0：$Q_0 \to Q_0$和τ_1：$Q_1 \to Q_1$ 为仅有的自反映射，其定义如下：对于所有 $i \in [\![0,k]\!]$ 和$j \in [n]$, $\tau_0(i,j) = (1-i,j)$, $\tau_1 a_{i,n} = a_{-i,n}$ 并且，若 $j \leqslant n-1$, $\tau_1 a_{i,n} = a_{1-i,j}$。这对 (τ_0,τ_1) 定义了唯一的对合 τ，使得 $\tau(0,n) = (1,n)$。参见图 7a。这两个映射

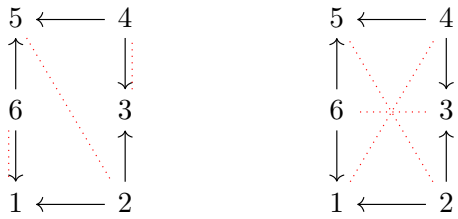
$$\rho_0 : \left| \begin{array}{ccc} Q_0 & \longrightarrow & Q_0 \\ (i,j) & \longmapsto & (i+k,j) \end{array} \right., \qquad \rho_1 : \left| \begin{array}{ccc} Q_1 & \longrightarrow & Q_1 \\ a_{i,j} & \longmapsto & a_{i+k,j} \end{array} \right.$$

定义 ρ 上的对合，当且仅当 k 为奇数：见图 7b。

我们考虑 $(k,\ n) = (3,\ 1)$ 的情形，[**BVW23** 第 9] 节研究了这一情形。图 8 给出了此前定义的两个对合下，(6，1)-Sun 箭图对应的整数 n_1、n_2 和 n_3 的一些取值。一个维数

FIGURE 7. (6，1)-Sun 箭图上的对合。

(A) 对合 τ　　(B) 对合 ρ



$\alpha \in \mathbb{N}^{Q_0}$ 记作 $(\alpha(i，1))^{i\in[6]}$。采用这一记号，我们有

$$\left\{\alpha \in \mathbb{N}^{Q_0} | \alpha = \tau \cdot \alpha\right\} = \{(a, a, b, c, c, b); a, b, c \in \mathbb{N}\},$$
$$\left\{\alpha \in \mathbb{N}^{Q_0} | \alpha = \rho \cdot \alpha\right\} = \{(a, b, c, a, b, c); a, b, c \in \mathbb{N}\},$$
$$\left\{\alpha \in \mathbb{N}^{Q_0} | \alpha = \tau \cdot \alpha = \rho \cdot \alpha\right\} = \{(a, a, a, a, a, a); a \in \mathbb{N}\}.$$

FIGURE 8. (6，1)-Sun 箭图的不等式数量。

α	$n_1(Q, \alpha)$	$n_2(Q, \alpha)$	$n_3(Q, \alpha, \tau)$	$n_3(Q, \alpha, \rho)$
(1，1，2，3，3，2)	159	48	12	
(1，1，3，2，2，3)	155	32	11	
(2，2，2，4，4，2)	396	30	11	
(2，2，3，4，4，3)	717	54	14	
(1，2，3，1，2，3)	190	56		25
(2，1，3，2，1，3)	190	56		25
(2，4，2，2，4，2)	464	32		17
(3, 2,4, 3, 2,4)	924	112		32
(2，2，2，2，2，2)	129	19	10	12
(3，3，3，3，3，3)	571	20	10	12

参考文献

[BB73] A. BIAŁYNICKI-BIRULA– “代数群作用的一些定理”，《数学年刊》**98** (1973), no. 3, p. 480–497 (en).[Bel01] P. BELKALE – “关于有限集 S 上 P1-S 的局部系统”，《数学汇刊》**129**(2001), no. 1, p. 67–86 (en).

[Bel06] ———, “Horn 猜想与饱和猜想的几何证明”, 《代数几何杂志》15 (2006), no. 1, p. 133–173 (en).[BVW18] N. Berline, M. Vergne & M. Walter – “ 从几何视角看 Horn 不等式 ”, L’Enseignement Math´ématique 63 (2018), no. 3, p. 403–470 (en).[BVW23] V. Baldoni, M. Vergne & M. Walter– “箭图子表示的 Horn 条件与矩映射”, 《纯粹与应用数学季刊》19 (2023), no. 4, p. 1687–1731 (en).[Chi09] C. Chindris – “箭图、长正合序列与 Horn 型不等式 II”, 《格拉斯哥数学杂志》51 (2009), no. 2, p. 201–217 (en).[CK21] C. Chindris & D. Kline– “箭图表示的同时稳健子空间恢复与半稳定性”, 《代数杂志》577 (2021), p. 210–236 (en).[Col20] B. Collins – “GL(n) 分支法则与极端权晶体的广义 Littlewood–Richardson 系数”, 《代数组合》3 (2020), no. 6, p. 1365–1400 (en).[DSW07] H. Derksen, A. Schofield & J. Weyman– “关于一般箭图表示的子表示数量”, 《伦敦数学会杂志》76 (2007), no. 1, p. 135–147 (en).[DW00] H. Derksen & J. Weyman – “箭图的半不变量与 Littlewood-Richardson 系数的饱和性”, 《美国数学会杂志》13 (2000), no. 3, p. 467–479 (en).[DW02] ———, “约化群所关联的广义箭图”, 《数学讨论会》94 (2002), no. 2, p. 151–173 (en).[DW11] ———, “箭图表示的组合学”, 《傅里叶研究所年刊》61 (2011), no. 3, p. 1061–1131 (en).[DW17] ———, 《箭图表示导论》, 《数学研究生丛书》第184卷, 美国数学会, 2017 (en).[Fom10] S. Fomin– “ 全正性与簇代数 ”, 2010, arXiv:1005.1086[math].[Ful98] W. Fulton – “ Bourbaki 报告 845：厄米矩阵之和的特征值， [根据 A. Klyachko 的工作]”, Ast´erisque 1997/98 (1998), no. 252, p. 255–269 (en).[Hor62] A. Horn – “厄米矩阵之和的特征值”, 《太平洋数学杂志》12 (1962), no. 1, p. 225–241 (en).[Hus21] A. Huszar – “非交换秩与箭图表示的半稳定性”, 2021, arXiv:2111.00039 [math].[Kin94] A. D. King – “有限维代数的表示模空间”, 《数学季刊》45 (1994), no. 4, p. 515–530 (en).[KT99] A. Knutson & T. Tao – “ $GL_n(\mathbb{C})$ 张量积的蜂窝模型 I：饱和猜想的证明”, 《美国数学会杂志》12 (1999), no. 4, p. 1055–1090 (en).[Res11] N. Ressayre– “舒伯特演算与箭图表示中的乘法公式”, 《数学探究》22 (2011), no. 1, p. 87–102 (en).

[Res12] ———, “GIT 锥与箭图”，《数学杂志》**270**(2012)，第 1-2 期，第 263–275 页（英文）。[Sch91] A. Schofield –“箭图的半不变量”，《伦敦数学会杂志》**s2-43** (1991)，第 3 期，第 385–395 页（英文）。[Sch92] ———, “箭图的一般表示”，《伦敦数学会会刊》**s3-65** (1992)，第 1 期，第 46–64 页（英文）。

*8 January 2026*A. Médoc，IMAG，蒙彼利埃大学，法国国家科学研究中心，法国蒙彼利埃*E-mail* :antoine.medoc@umontpellier.fr