arXiv:2601.05112v1 [math.SP] 8 Jan 2026

¨半直线上具有可积复势的薛定谔算子

ˇ ˇ 亚历山大·普什尼茨基 和 FRANTISEK STAMPACH

谨以此文献给 *Barry Simon*，祝贺他八十岁生日，并钦佩他的学术成就

Abstract. 在此前的工作中，我们为具有有界谱对复势 q 的半直线薛¨定谔算子引入了谱对的概念，作为非自伴情形下谱测度的替代物。本文研究 $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$ 的情形。我们根据与非自伴薛¨定谔算子自然相关的一个二元方程组的约斯特解，推导出谱对的显式公式。我们工作的一个关键部分（本身也具有独立意义），是证明这些约斯特解的存在性并对其进行分析。

Contents

1. 引言 1 2. 厄米化框架 6 3. 主要结果 10 4. 约斯特解的构造 14 5. 约斯特解：解析性、连续性与大尺度 $|k|$ 渐近行为 24 6. 谱对的刻画 26 7. 散射理论视角 32 8. 谱对的玻恩近似 35 附录 A. 具有 $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$ 的薛¨定谔算子 H 37 附录 B. 具有 $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$ 的厄米化算子 $\mathbf{H}$ 40 参考文献 44

1. Introduction

1.1. 正则解与 m-函数。 我们先回顾一下半直线上的 Schrödinger 算子的 m-函数的定义，记法采用适合本文目的的形式。记 $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$。设 q 是定义在 $\mathbb{R}_+$ 上的一个实值 局部可积函数，并设 H 为自伴 Schrödinger 算子

$$Hf = -f'' + qf \tag{1.1}$$

日期：2026年1月9日。

作用于 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 上，其边界条件为

$$f'(0) + \alpha f(0) = 0 \tag{1.2}$$

在原点处，其中 $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$。情形 $\alpha = \infty$ 对应狄利克雷边界条件 $f(0) = 0$。我们进一步假设 q 在无穷远处为极限点型，参见例如 [15,第 X.1]节。

为使下文公式更易阅读，我们引入边界泛函

$$\ell_\alpha(f) = \frac{\alpha f'(0) - f(0)}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \quad \ell_\alpha^\perp(f) = \frac{f'(0) + \alpha f(0)}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \qquad \text{if } \alpha \neq \infty, \tag{1.3}$$

$$\ell_\alpha(f) = f'(0), \qquad \ell_\alpha^\perp(f) = f(0), \qquad \text{if } \alpha = \infty. \tag{1.4}$$

采用这一记号，边界条件 (1.2) 可写为 $\ell_\alpha^\perp(f) = 0$。令 φ, θ 为特征值方程的解

$$-f''(x) + q(x)f(x) = \lambda f(x), \quad x > 0, \tag{1.5}$$

满足边界条件

$$\begin{cases} \ell_\alpha(\varphi) = -1, \\ \ell_\alpha^\perp(\varphi) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \ell_\alpha(\theta) = 0, \\ \ell_\alpha^\perp(\theta) = 1. \end{cases}$$

回忆一下，对于每个非实数 λ，Titchmarsh–Weyl m函数定义为唯一的复数 $m_\alpha(\lambda)$，使得解

$$\chi = \theta - \varphi m_\alpha(\lambda) \in L^2(\mathbb{R}_+). \tag{1.6}$$

1.2.**谱测度与 Borg–Marchenko 唯一性定理**。 m-函数是上半平面中的 Herglotz–Nevanlinna函数，即它在半平面 $\operatorname{Im} \lambda > 0$ 中解析，并且在该半平面内满足 $\operatorname{Im} m_\alpha(\lambda) > 0$。因此，它可表示为

$$m_\alpha(\lambda) = \operatorname{Re} m_\alpha(\mathrm{i}) + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t-\lambda} - \frac{t}{1+t^2} \right) \mathrm{d}\sigma(t), \quad \operatorname{Im} \lambda > 0, \tag{1.7}$$

其中， σ 是唯一的正测度，称为 H的谱测度。“谱测度”这一术语的依据是， H 与在 $L^2_\sigma(\mathbb{R})$中对自变量进行乘法的算子幺正等价；也就是说，该空间由关于测度 σ在 $\mathbb{R}$ 上平方可积的函数构成。特别地， σ 的支撑集与 H的谱一致，而 σ 的点质量与 H的特征值一致。

经典的 Borg–Marchenko 唯一性定理 [2, 12] 指出，谱映射

$$(q, \alpha) \mapsto \sigma$$

是单射，即谱测度 σ 唯一确定势 q 和边界参数 α。关于替代性证明和进一步发展的较新研究包括 [6, 7, 17] 和 [1]。

1.3. 可积势。现在我们进一步假设 $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$。那么关于谱测度 σ，我们可以得知更多：它在 $[0,\infty)$ 上绝对连续，在 $(-\infty,\ 0)$ 上为纯点谱，其中 0 是点质量唯一可能的聚点。此外，σ 可以用约斯特函数表示。下面我们回顾这些众所周知的结果，它们通常是在 $\mathbb{R}_+$ 上的薛定谔算子散射理论框架下讨论的，参见例如 [16,§ XI.8] 和 [20,第 4] 章。

对于任意 $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$，若 $\operatorname{Im} k \geq 0$，则存在一个约斯特解，记为 $f_{+\mathrm{i}}(x,\ k)$；它是满足渐近行为的特征值方程 (1.5) 的唯一解，其中 $\lambda = k^2$

$$f_{+\mathrm{i}}(x,k) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + o(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}), \quad x \to \infty \tag{1.8}$$

（下标 $+\mathrm{i}$ 指数因子中 kx 前面的系数）。朗斯基行列式

$$f'_{+\mathrm{i}}(\cdot,k)\varphi(\cdot,k^2) - f_{+\mathrm{i}}(\cdot,k)\varphi'(\cdot,k^2) = \ell_\alpha^\perp(f_{+\mathrm{i}}(\cdot,k)) \tag{1.9}$$

称为约斯特函数。采用这一记号，谱测度 σ 可描述如下。

在正半轴上：测度 σ 关于勒贝格测度绝对连续，其密度为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda) = \frac{k}{\pi|\ell_\alpha^\perp(f_{+\mathrm{i}}(\cdot,k))|^2}, \quad \text{where } k = \sqrt{\lambda} > 0. \tag{1.10}$$

当 $k > 0$ 时，分母中的约斯特函数不为零。

在负半轴上：对于 $\lambda < 0$，记 $\kappa = \sqrt{|\lambda|}$ 和 $f_{-1}(x,\ \kappa)\ \overline{=} f_{+\mathrm{i}}(x,\ \mathrm{i}\kappa)$。注意，(1.8) 可以改写为

$$f_{-1}(x,\kappa) = \mathrm{e}^{-\kappa x} + o(\mathrm{e}^{-\kappa x}), \quad x \to \infty. \tag{1.11}$$

可知，$\lambda < 0$ 是 H 的特征值，当且仅当 $\ell_\alpha^\perp(f_{-1}(\cdot,\ \kappa))\ = 0$，此时我们有

$$\sigma(\{\lambda\}) = \frac{|\ell_\alpha(f_{-1}(\cdot,\kappa))|^2}{\|f_{-1}(\cdot,\kappa)\|_{L^2}^2}, \quad \text{where } \kappa = \sqrt{|\lambda|} > 0. \tag{1.12}$$

注。事实上，公式 (1.12) 并不要求势 q 一定是可积的。对于 H 的任意特征值，只要将 f_{-1} 替换为特征值方程 (1.5) 的任意一个 L^2-解，公式仍然成立。

1.4. 非自伴情形：概述。本文的主要研究对象是定义在 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 上、具有复值势 q 和非自伴 边界条件的 Schr¨odinger 算子 H

$$f'(0) + \alpha f(0) = 0, \tag{1.13}$$

其中 $\alpha \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$。为简化这部分初步讨论，我们先假设势 q 是有界的 （稍后将取消这一假设）。于是

Schr¨odinger 算子 H 可由公式 (1.1) 在定义域上定义

$$\operatorname{Dom} H = \{f \in W^{2,2}([0,\infty)) : f \text{ satisfies } (1.13)\}.$$

根据此定义， H 在 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 中是稠密定义且闭的。由于 q 和α 都可以是复值函数，算子 H 通常是非自伴的。

在 [14], 中，本文作者提出了 H的谱对概念（见下文定义 2.4），它应被视为谱测度 σ的替代物。我们的谱对是（ν， ψ），其中 ν 是定义在正半轴上的测度，而 ψ 是定义在 ν 支撑集上的复值函数，并且对于 ν-几乎处处的 $\lambda > 0$，有 $|\psi(\lambda)| \leq 1$ 。特别地，如果 H 是自伴且半正定的，那么 $\psi \equiv 1$，并且 ν 退化为 H 的标准谱测度 σ （差一个归一化因子 $1/2$）。

在 [14], 中，建立了 Borg–Marchenko 型唯一性定理，断言映射

$$(q, \alpha) \mapsto (\nu, \psi)$$

is 一个单射，即 q和 α 均由谱对 (ν， ψ唯一确定).

本文的主要目的是研究满足条件$q \in L^1(\mathbb{R}_+)$的算子 H ，其中 q 和 α 均为复值，并推导谱对 (ν, ψ)的公式(1.10) 和 (1.12) 的类似公式。

继续之前，我们需要处理与无界 q相关的两个小技术问题。第一个问题是，在约束条件 $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$下定义算子 H 并不完全简单，因为我们不假设 q 有界。在附录 A 中，我们说明 H 是一个闭算子，其定义域为

$$\begin{aligned}\operatorname{Dom} H = \{f \in L^2(\mathbb{R}_+) : f \text{ and } f' \text{ are absolutely continuous on } \mathbb{R}_+,\\ -f'' + qf \in L^2(\mathbb{R}_+) \text{ and } (1.13) \text{ holds}\}\,. \qquad (1.14)\end{aligned}$$

该定义域在 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 中稠密这一事实并不显然（因为它不一定包含所有光滑紧支撑函数），但确实成立，见附录 A。

第二个技术问题是，严格来说， [14] 的框架不适用于 $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$，因为在 [14] 中假设了 q 有界。在附录 B 中，我们说明如何将 [14] 的构造推广到 $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$ 无界的情形；这里没有显著困难。

撇开这些技术问题不谈，我们可以先非正式地说明主要结果的性质。与经典自伴理论类似，条件 $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$ 确保了特征值方程 H 存在具有指定无穷远渐近行为的 Jost 型解，这与 (1.8) 和 (1.11) 类似。更确切地说，事实证明，我们必须考虑的不是单个特征值方程 (1.5)，而是

一个方程组

$$\begin{cases} -f_1'' + \overline{q} f_1 = k^2 f_2, \\ -f_2'' + q f_2 = k^2 f_1. \end{cases} \tag{1.15}$$

注意第一个方程中 q 上的复共轭！我们证明，对于任意非零的 $k \in \mathbb{C}$，该系统的任意解 f_1, f_2 都具有包含指数项 $\mathrm{e}^{\pm kx}$ 和 $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}kx}$ 的渐近行为，其中 $x \to \infty$。此外，我们确定了在无穷远处具有指定渐近行为的解，见下文定理 3.1。稍微宽泛地使用这一术语，我们将其称为约斯特解。定理 3.1 的证明（见第 4 节）比经典自伴情形更为微妙，因为对于同一谱参数 k^2，“双曲型” $\mathrm{e}^{\pm kx}$ 模式与“椭圆型” $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}kx}$ 模式并存。在技术层面上，这反映为相应的积分方程通常属于 Fredholm 型，而非沃尔泰拉型。我们将系统 (1.15) 的渐近分析视为首个主要结果，它本身也具有独立的研究价值。

我们的第二个主要结果是定理 3.5，其中我们按照 (1.10) 和 (1.12) 的思路，用约斯特解表示 ν 和 ψ。

为了阐述我们的第三个主要结果，我们暂且回到经典自伴情形。我们回顾一下，对于 $k > 0$，约斯特解 $f_{+\mathrm{i}}$ 及其复共轭构成了 (1.5) 的二维解空间的一组基，因此可以将正则解 φ 展开为它们的线性组合，

$$\varphi(x, k^2) = \gamma_{+\mathrm{i}}(k) f_{+\mathrm{i}}(x, k) + \gamma_{-\mathrm{i}}(k) \overline{f_{+\mathrm{i}}(x, k)}.$$

系数 $\gamma_{+\mathrm{i}}(k)$ 和 $\gamma_{-\mathrm{i}}(k)$ 很容易计算得出：

$$\overline{\gamma_{+\mathrm{i}}(k)} = \gamma_{-\mathrm{i}}(k) = \ell_\alpha^\perp(f_{+\mathrm{i}})/(2\mathrm{i}k).$$

由此得到一个不同于 (1.10) 的公式，

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda) = \frac{1}{4\pi k |\gamma_{+\mathrm{i}}(k)|^2}, \quad k = \sqrt{\lambda} > 0, \tag{1.16}$$

用于表示正半轴上的谱测度。

我们的第三个主要结果是定理 3.7，其中我们按照 (1.16) 的思路给出 ν 和 ψ 的另一种表达式。这里的讨论与散射理论有很多共同之处。

最后，为了帮助读者直观理解谱对，我们计算了 ν 和 ψ 在玻恩近似下的公式，也就是小 q 时 ν 和 ψ 的线性化形式。

1.5. **论文结构**。在第 2 节中，我们介绍用于分析系统 (1.15) 的矩阵形式体系（称为厄米化框架），并定义谱对 (ν, ψ)。在第 3 节中，我们引入 (1.15) 的约斯特解，并陈述主要定理 3.5 和 3.7。第 4 节和第 5 节研究约斯特解。第 6 节和第 7 节证明定理 3.5 和 3.7。在第 8 节中，我们计算

ν 和 ψ 的玻恩近似。论文末尾附有附录 A 和 B，其中包含补充结果。

1.6. 矩阵与向量记号。 若 a 和 b是 $\mathbb{C}^2$中的两个向量，我们用 $\{a,b\}$ 表示以 a 和 b为列的 2×2 矩阵，即

$$\{a,b\} := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \quad \text{where } a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ and } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

接下来，我们记

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad e_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{1.17}$$

向量 $e_\pm$ 是泡利矩阵的特征向量

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

它用于定义 H 的厄米化（见下文 (2.3)），并且在本文中频繁出现。我们有 $\epsilon e_\pm = \pm e_+$。我们用 P_+ 和 P_- 表示在 $\mathbb{C}^2$中投影到向量 e_+ 和 e_- 上的正交投影算子，即

$$P_+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad P_- = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.18}$$

2. The hermitisation framework

2.1.薛定谔算子的定义¨ H. 对于复值的 $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$ 和 $\alpha \in \mathbb{C}\cup\{\infty\}$，我们将薛定谔算子 $H = H(q,\alpha)$ 定义在$L^2(\mathbb{R}_+)$ 上为

$$Hf = -f'' + qf$$

定义域为 (1.14)。

命题 2.1。 对于任意 $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$ 和 $\alpha \in \mathbb{C}\cup\{\infty\}$，算子 $H(q,\alpha)$ 是稠定且闭的。其伴随算子满足 $H(q,\alpha)^* = H(\bar{q},\bar{\alpha})$。

我们简述命题 2.1 的证明，并在附录 A 中讨论相关文献。

注。 原则上，可以对任意复数 $q \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ 定义 H。然而，这需要讨论极限点型/极限圆型二分法的非自伴类比，这是一个相当微妙的问题；有兴趣的读者可参阅 [4]。若 $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$，则属于极限点型情形，不过这一术语在非自伴情形下并不常用。

类比于 (1.3) 和 (1.4)，我们在非自伴情形下将边界泛函定义为

$$\ell_\alpha(f) = \frac{\overline{\alpha} f'(0) - f(0)}{\sqrt{1+|\alpha|^2}}, \quad \ell_\alpha^\perp(f) = \frac{f'(0) + \alpha f(0)}{\sqrt{1+|\alpha|^2}}, \qquad \text{if } \alpha \neq \infty, \tag{2.1}$$

$$\ell_\alpha(f) = f'(0), \qquad \ell_\alpha^\perp(f) = f(0), \qquad \text{if } \alpha = \infty. \tag{2.2}$$

与 (1.3) 的差别在于 (2.1) 的第一个公式中对 α 进行了复共轭。用这种记法，边界条件 (1.13) 变为 $\ell_\alpha^\perp(f) = 0$。下文将使用表达式 (2.16)，以这些边界算子表示朗斯基行列式。

2.2. **厄米化算子 H**。我们的方法是借助自伴谱理论的语言，研究非自伴算子 $H = H(q, \alpha)$ 的谱性质。为此，我们考虑对 H 进行厄米化，即得到自伴分块矩阵算子

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & H \\ H^* & 0 \end{pmatrix} \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}_+) \oplus L^2(\mathbb{R}_+)$$

on the domain $\operatorname{Dom} H^* \oplus \operatorname{Dom} H$; the adjoint H^* is described in $\mathrm{P}_{\text{ropos}}$ iti 2 1

在.....上。将 $L^2(\mathbb{R}_+) \oplus L^2(\mathbb{R}_+)$ 视为由 $\mathbb{C}^2$ 取值的函数 $L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)$ 空间，我们可以将 **H** 看作算子

$$\mathbf{H} = -\epsilon \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + Q \quad \text{with } \epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ and } Q = \begin{pmatrix} 0 & q \\ \overline{q} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

a作用于 $L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)$。算子 **H** 配备边界条件

$$F'(0) + AF(0) = 0, \quad \text{where } A = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

若 $\alpha = \infty$，则 (2.4) 应解释为狄利克雷边界条件 $F(0) = 0$。与 (2.1) 和 (2.2) 类似，对于取值于 $\mathbb{C}^2$ 的向量函数，定义边界算子$L_\alpha, L_\alpha^\perp$ 是方便的，其定义如下

$$L_\alpha(F) = \begin{pmatrix} \ell_{\overline{\alpha}}(F_1) \\ \ell_\alpha(F_2) \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad L_\alpha^\perp(F) = \begin{pmatrix} \ell_{\overline{\alpha}}^\perp(F_1) \\ \ell_\alpha^\perp(F_2) \end{pmatrix}, \quad \text{where } F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

或者，我们可以写成

$$L_\alpha(F) = \frac{\overline{A} F'(0) - F(0)}{\sqrt{1+|\alpha|^2}}, \quad L_\alpha^\perp(F) = \frac{F'(0) + AF(0)}{\sqrt{1+|\alpha|^2}}, \qquad \text{if } \alpha \neq \infty, \tag{2.6}$$

$$L_\alpha(F) = F'(0), \qquad L_\alpha^\perp(F) = F(0), \qquad \text{if } \alpha = \infty. \tag{2.7}$$

采用这一记号，边界条件 (2.4) 变为 $L_\alpha^\perp(F) = 0$，且 $\mathbf{H}$ 是 $L^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^2)$ 中的自伴算子，其定义域为

$$\begin{aligned}\operatorname{Dom}\mathbf{H} = \{F \in L^2(\mathbb{R}_+;\,\mathbb{C}^2):\quad & F\text{和 } F' \text{在 } \mathbb{R}_+\text{上绝对连续},\\ & -\epsilon F'' + QF \in L^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^2) \text{ and } L_\alpha^\perp(F) = 0\,\}.\end{aligned}$$

需要注意的是，根据一般的算子理论论证，$\mathbf{H}$ 与以下算子幺正等价：

$$\begin{pmatrix} \sqrt{H^*H} & 0 \\ 0 & -\sqrt{HH^*} \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

特别地，$-\mathbf{H}$与$\mathbf{H}$幺正等价，因此$\mathbf{H}$ 的谱关于反射 $\lambda \mapsto -\lambda$对称。

2.3. **蒂奇马什–韦尔 M函数**。记 Φ，Θ 为特征值方程的 2×2矩阵值解（正则解的基本解系）：

$$-\epsilon F''(x,\lambda) + Q(x)F(x,\lambda) = \lambda F(x,\lambda), \quad x > 0, \tag{2.9}$$

在 $x = 0$处具有以下柯西数据：

$$\begin{cases} L_\alpha(\Phi) = -I, \\ L_\alpha^\perp(\Phi) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} L_\alpha(\Theta) = 0, \\ L_\alpha^\perp(\Theta) = \epsilon, \end{cases} \tag{2.10}$$

其中 $\lambda \in \mathbb{C}$。这里，边界算子 L_α, $L_\alpha^\perp$作用于矩阵 2×2，而非向量，应理解为 (2.6)、(2.7)。注意，Φ（但非 Θ）满足边界条件 (2.4)。

以下陈述是标量 m-函数定义 (1.6) 的直接类比。关于证明的简要讨论，请参见附录 B。

命题 2.2。设 $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$，并设 Q 如 (2.3) 所述。对于每个 $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$，存在唯一的 2×2 矩阵 $M_\alpha(\lambda)$，使得该矩阵的两列

$$X(x,\lambda) = \Theta(x,\lambda) - \Phi(x,\lambda)M_\alpha(\lambda) \tag{2.11}$$

作为 x 的函数，属于 $L^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^2)$。矩阵值函数 M_α 在 $\operatorname{Im}\lambda > 0$ 中解析，并满足

$$\operatorname{Im} M_\alpha(\lambda) > 0 \quad \textit{if } \operatorname{Im}\lambda > 0. \tag{2.12}$$

这里及下文中，我们使用如下记号

$$\operatorname{Re} M = \frac{1}{2}(M + M^*) \quad \text{and} \quad \operatorname{Im} M = \frac{1}{2\mathrm{i}}(M - M^*)$$

对于方阵 M，且 $M > 0$ 表示 M 是正定的。

2.4. **谱测度 Σ 和谱对 $(\nu,\ \psi)$**。 命题 2.2 表明， M_α 是一个矩阵值 Herglotz–Nevanlinna 函数，因此根据一般积分表示定理，参见 $[8,$ 定理 2.3 和 5.$4]$, ，我们有（参见 (1.7)）

$$M_\alpha(\lambda) = \operatorname{Re} M_\alpha(\mathrm{i}) + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t-\lambda} - \frac{t}{1+t^2} \right) \mathrm{d}\Sigma(t), \quad \operatorname{Im}\lambda > 0, \tag{2.13}$$

其中， Σ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的唯一矩阵值测度，称为*H*的**谱测度**。

命题 2.3。 设 $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$ ，并设 Q 如(2.3)中所述。

(i)算子**H** 与希尔伯特空间 $L^2_\Sigma(\mathbb{R};\mathbb{C}^2)$中由自变量定义的乘法算子幺正等价; 该空间由关于测度 Σ 平方可积的 $\mathbb{C}^2$ 值函数构成。(ii) 测度 Σ 具有如下结构

$$\mathrm{d}\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \psi \\ \psi & 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\nu, \tag{2.14}$$

其中， ν 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶测度，而 $\psi \in L^\infty(\nu)$ 是满足 $|\psi(\lambda)| \le 1$ 的奇复值函数，对 ν-几乎处处的 $\lambda \in \mathbb{R}$ 均成立。

(iii) 谱映射

$$L^1(\mathbb{R}_+) \times (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \ni (q, \alpha) \mapsto (\nu, \psi)$$

是一个单射，即这一对（ν、 ψ）唯一确定了 q 和 α。

第 (i) 部分可视为已知，第 (ii) 和 (iii) 部分则归功于 $[14]$。我们在附录 B 中对证明作一些说明。

由于 ν 是奇函数，而 ψ 是偶函数，因此这一对 $(\nu,\ \psi)$ 由其在 $[0,\infty$上的限制唯一确定。

定义 2.4。 我们称 (2.14) 中的 $(\nu,\ \psi)$ 为算子 H 的谱对 .

2.5. **朗斯基记号**。 我们将采用一种适用于微分方程 (2.9) 的朗斯基行列式定义。对于定义在 $\mathbb{R}_+$ 上的 $\mathbb{C}^2$ 值函数 F 和 G，我们写作

$$[F, G] = \langle \varepsilon F', G \rangle_{\mathbb{C}^2} - \langle \varepsilon F, G' \rangle_{\mathbb{C}^2}. \tag{2.15}$$

这里的欧几里得内积 $\langle a,\ b\rangle_{\mathbb{C}^2}$ 对 a 是线性的，对 b是共轭线性的。若 F 和 G 都是方程 (2.9) 的解，且 λ为实数，则 $[F, G]$ 与 x无关。计算表明，任意函数 F 和 G 在零点处的朗斯基行列式可用我们的边界算子 L_α 和 $L_\alpha^\perp$ （见 (2.5)）计算如下:

$$[F, G](0) = \langle \varepsilon L_\alpha(F), L_\alpha^\perp(G) \rangle - \langle \varepsilon L_\alpha^\perp(F), L_\alpha(G) \rangle. \tag{2.16}$$

3. Main results

3.1. 约斯特解。对于 $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$，我们考虑取值于 $\mathbb{C}^2$ 的解 F，它们满足特征值方程

$$-\epsilon F'' + QF = k^2 F \tag{3.1}$$

对于正半轴上的算子 $\mathbf{H}$。当然，这只是用向量记法写出的 (1.15)。注意，如果 $Q = 0$，我们有四个线性无关解

$$\mathrm{e}^{\pm kx} e_-, \quad \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}kx} e_+$$

（$e_\pm$ 的定义见 (1.17)）；需要注意的是 $\epsilon e_\pm = \pm e_\pm$。以下定理在第4节中证明。

定理 3.1。设 $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$ 且 $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$。存在 约斯特解 $\mathbf{F}_{-1}$,$\mathbf{F}_{+1}$, $\mathbf{F}_{+\mathrm{i}}$ 和 $\mathbf{F}_{-\mathrm{i}}$，它们满足微分方程 (3.1)，且具有如下渐近行为

$$\mathbf{F}_{\pm 1}(x,k) = \mathrm{e}^{\pm kx} e_- + o(\mathrm{e}^{\pm kx}), \tag{3.2}$$

$$\mathbf{F}_{\pm \mathrm{i}}(x,k) = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}kx} e_+ + o(\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}kx}), \tag{3.3}$$

当 $x \to \infty$ 时。关于 x 的导数满足如下渐近行为

$$\mathbf{F}'_{\pm 1}(x,k) = \pm k \mathrm{e}^{\pm kx} e_- + o(\mathrm{e}^{\pm kx}), \tag{3.4}$$

$$\mathbf{F}'_{\pm \mathrm{i}}(x,k) = \pm \mathrm{i}k \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}kx} e_+ + o(\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}kx}), \tag{3.5}$$

如 $x \to \infty$。

我们将$\mathbf{F}_{\pm 1}$ 称为指数型约斯特解，将$\mathbf{F}_{\pm \mathrm{i}}$ 称为振荡型约斯特解。

注 3.2。

1. 约斯特解 $\mathbf{F}_{-1}$、$\mathbf{F}_{+1}$、$\mathbf{F}_{-\mathrm{i}}$、$\mathbf{F}_{+\mathrm{i}}$ 线性无关，因此，(3.1) 的任意向量解都是它们的线性组合。
2. 设 $k > 0$；注意，尽管 $\mathbf{F}_{-1}$ 由渐近行为 (3.2) 唯一确定，但其他解并非如此。例如，对于任意 $c \in \mathbb{C}$，解$\mathbf{F}_{+\mathrm{i}} + c\mathbf{F}_{-1}$ 满足与 $\mathbf{F}_{+\mathrm{i}}$相同的渐近行为，因为 $c\mathbf{F}_{-1}$ 可以吸收到 $\mathbf{F}_{+\mathrm{i}}$的误差项中。与经典自伴理论相比，这种非唯一性是我们这一设置中的一个新特征。正因如此，我们的约斯特解 $\mathbf{F}_j$、$j \in \{\pm 1, \pm \mathrm{i}\}$ 更准确地说，应被描述为满足定理中所述渐近行为的解的类。我们有时会使用 $F \in \mathbf{F}_{+\mathrm{i}}$ 这样的记号，表示函数 F 满足微分方程 (3.1) 以及渐近行为 (3.3)、(3.5)。
3. 我们注意到，第4节中对定理 3.1 的证明并不依赖于势 Q的特殊结构 (2.3)，甚至不依赖于 Q 是厄米的。唯一重要的是 Q的可积性。

4. 系统 (3.1) 在结构上类似于一维狄拉克系统，因为泡利矩阵 ϵ 是不定的。然而，与一阶狄拉克系统不同，我们的算子由二阶项 $-\epsilon \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$支配。由于矩阵 ϵ 具有特征值 ± 1，关于 $Q = 0$ 的方程同时存在

对于同一谱参数 k，既有振荡解（$\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}kx}$），也有指数解（$\mathrm{e}^{\pm kx}$）。这种“双曲”模态与“椭圆”模态并存的现象，使我们的情形有别于标准的狄拉克理论，并需要采用第4节中发展的特定分析方法。

回到具有特殊结构（2.3）的 Q，我们将看到，在一个重要的特殊情形下，可以将问题化简为一个标量方程。

命题 3.3。设 $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$，令 Q 如（*2.3*）所示，并设 $k > 0$。则反线性特征值方程存在唯一解 $\mathbf{e} = \mathbf{e}(x, k)$

$$-\mathbf{e}'' + q\mathbf{e} = -k^2\overline{\mathbf{e}} \tag{3.6}$$

（注意右端的复共轭！），且满足以下渐近行为

$$\mathbf{e}(x, k) = \mathrm{e}^{-kx} + o(\mathrm{e}^{-kx}) \quad as \quad x \to \infty. \tag{3.7}$$

定理 *3.1* 中的约斯特解 $\mathbf{F}_{-1}(x, k)$ 和 $\mathbf{F}_{+\mathrm{i}}(x, \mathrm{i}k)$ 可表示为

$$\mathbf{F}_{-1}(x, k) = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{e}(x, k)} \\ -\mathbf{e}(x, k) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F}_{+\mathrm{i}}(x, \mathrm{i}k) = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{e}(x, k)} \\ \mathbf{e}(x, k) \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

点 $k^2 > 0$ 是$\mathbf{H}$ 的特征值，当且仅当$\mathbf{e}$ 满足边界条件

$$\ell_\alpha^\perp(\mathbf{e}) = 0. \tag{3.9}$$

命题 3.3 在第4节末尾证明。我们将$\mathbf{e}$ 称为标量约斯特解。

3.2. **$\mathbf{H}$ 的谱**。首先描述$\mathbf{H}$的谱。

定理 3.4。设 $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$，并设 Q 如(2.3)中所述。

(i) $\mathbf{H}$ 的非零特征值都是单重的。如果特征值有无穷多个，则这些特征值构成一个收敛于零的序列。如果 $\lambda = 0$ 是$\mathbf{H}$的一个特征值，则其重数为二。
(ii) $\mathbf{H}$ 的绝对连续谱与 $\mathbb{R}$ 重合，且重数为一。对于 $\lambda \in \mathbb{R} \setminus (\sigma_{\mathrm{p}}(\mathbf{H}) \cup \{0\})$，拉东–尼科迪姆导数 $\mathrm{d}\Sigma(\lambda)/\mathrm{d}\lambda$是一个关于 $\lambda \in \mathbb{R} \setminus (\sigma_{\mathrm{p}}(\mathbf{H}) \cup \{0\})$连续的秩一矩阵。
(iii) $\mathbf{H}$的奇异连续谱为空。

我们的目标是描述

- 密度 $\mathrm{d}\nu(\lambda)/\mathrm{d}\lambda$ 以及 $\psi(\lambda)$，如果 $\lambda \neq 0$ 不是 ν的点质量，
- $\nu(\{\lambda\})$ 和 $\psi(\lambda)$，如果 $\lambda \neq 0$ 是 ν的点质量，

用约斯特解 $\mathbf{F}_{-1}$、$\mathbf{F}_{+\mathrm{i}}$表示，其中 $k = \sqrt{|\lambda|} > 0$。

3.3. 谱对的公式 (ν,ψ). 现在我们可以给出 (ν,ψ) 的显式公式。由于 ν 是偶函数，且 ψ 是奇函数，只需在正半轴上刻画 (ν,ψ)。回顾命题 3.3 的最后一项结论：$k^2>0$ 是 $\mathbf{H}$ 的特征值，当且仅当 $\ell_\alpha^\perp(\mathbf{e})=0$。

定理 3.5。 设 $q\in L^1(\mathbb{R}_+)$，并设约斯特解 $\mathbf{F}_{+\mathrm{i}}(x,k)$、$\mathbf{F}_{-1}(x,k)$、$\mathbf{e}(x,k)$ 对 $k>0$ 如定理 *3.1* 和命题 *3.3* 所述。

(i) 假设 $\lambda=k^2$ 不是$\mathbf{H}$的特征值。那么

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda)=\frac{2k}{\pi}\frac{|\ell_\alpha^\perp(\mathbf{e})|^2}{|\det\{L_\alpha^\perp(\mathbf{F}_{+\mathrm{i}}),L_\alpha^\perp(\mathbf{F}_{-1})\}|^2},\quad \psi(\lambda)=\frac{\ell_\alpha^\perp(\mathbf{e})}{\overline{\ell_\alpha^\perp(\mathbf{e})}}. \tag{3.10}$$

分母中的行列式定义明确无歧义（即不依赖于约斯特解$\mathbf{F}_{+\mathrm{i}}$的选取），且不为零。

(ii) 假设 $\lambda=k^2$ 是$\mathbf{H}$的特征值。那么 $\ell_\alpha(\mathbf{e})\neq 0$，并且我们有

$$\nu(\{\lambda\})=\frac{|\ell_\alpha(\mathbf{e})|^2}{2\|\mathbf{e}\|^2},\quad \psi(\lambda)=-\frac{\overline{\ell_\alpha(\mathbf{e})}}{\ell_\alpha(\mathbf{e})}. \tag{3.11}$$

特别地，由 (3.10) 和 (3.11) 可知，对于 ν-几乎处处的 $\lambda>0$，$|\psi(\lambda)|=1$，这意味着根据定理 1.5]，$\mathbf{H}$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上的谱是简单的。

注 3.6。 与 (1.12) 类似，公式 (3.11) 实际上并不要求 q 可积。对于 $\mathbf{H}$ 的任意特征值，该公式都成立，其中 $\mathbf{e}$ 是反线性特征值方程 (3.6) 的唯一（除归一化外）L^2-解，参见 [14, 定理 1.13]。

3.4. 散射理论的视角。 这里我们给出定理 3.5 的一个版本，其思路与 (1.16) 相同。对于 $\lambda>0$，令 Φ 为由初始条件 (2.10) 定义的特征值方程 (2.9) 的 2×2 矩阵值解。将 Φ 的列记为 Φ_1 和 Φ_2。换言之，Φ_1 和 Φ_2 是取值于 $\mathbb{C}^2$ 的特征值方程 (2.9) 的解，其柯西数据为

$$\begin{cases} L_\alpha(\Phi_1)=-e_1,\\ L_\alpha^\perp(\Phi_1)=0, \end{cases}\qquad \begin{cases} L_\alpha(\Phi_2)=-e_2,\\ L_\alpha^\perp(\Phi_2)=0. \end{cases} \tag{3.12}$$

由于约斯特解 $\mathbf{F}_{\pm 1}$、$\mathbf{F}_{\pm\mathrm{i}}$（其中 $k=\sqrt{\lambda}>0$）构成一组基，我们可以在这组基下展开 Φ_1、Φ_2：

$$\Phi_1=\gamma_{-1}^1\mathbf{F}_{-1}+\gamma_{+\mathrm{i}}^1\mathbf{F}_{+\mathrm{i}}+\gamma_{-\mathrm{i}}^1\mathbf{F}_{-\mathrm{i}}+\gamma_{+1}^1\mathbf{F}_{+1}, \tag{3.13}$$

$$\Phi_2=\gamma_{-1}^2\mathbf{F}_{-1}+\gamma_{+\mathrm{i}}^2\mathbf{F}_{+\mathrm{i}}+\gamma_{-\mathrm{i}}^2\mathbf{F}_{-\mathrm{i}}+\gamma_{+1}^2\mathbf{F}_{+1}. \tag{3.14}$$

注意，(3.13)、(3.14) 假设我们已经为解类 $F_{+\mathrm{i}}$、$\mathbf{F}_{-\mathrm{i}}$、$\mathbf{F}_{+1}$ 选定了代表元。增长解 $\mathbf{F}_{+1}$ 的系数 γ_{+1}^1 和 γ_{+1}^2 是明确确定的，而其余系数则取决于三个解 $\mathbf{F}_{+\mathrm{i}}$、$\mathbf{F}_{-\mathrm{i}}$、$\mathbf{F}_{+1}$ 的选取。不过，事实证明，系数 γ 的某些组合是明确确定的，并且可以用这些组合表示谱对 (ν,ψ)。

定理 3.7。令 $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$， $k > 0$ 和 $\lambda = k^2$。

(i) 假设 λ 不是**H**的特征值。那么

$$\gamma_{+1}^2 = -\overline{\gamma_{+1}^1} \neq 0 \tag{3.15}$$

于是，表达式 $\gamma_{+1}^2\gamma_{+\mathrm{i}}^1 - \gamma_{+1}^1\gamma_{+\mathrm{i}}^2$ 定义明确且非零。谱对(ν, ψ) 可表示为

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda) = \frac{1}{8\pi k}\frac{|\gamma_{+1}^1|^2}{|\gamma_{+1}^2\gamma_{+\mathrm{i}}^1 - \gamma_{+1}^1\gamma_{+\mathrm{i}}^2|^2}, \quad \psi(\lambda) = \frac{\overline{\gamma_{+1}^1}}{\gamma_{+1}^1}.$$

(ii) 假设 λ 是**H**的特征值。那么 $\gamma_{+1}^1 = \gamma_{+1}^2 = 0$，系数 $\gamma_{\pm\mathrm{i}}^1$、$\gamma_{\pm\mathrm{i}}^2$ 定义明确，并且

$$|\gamma_{+\mathrm{i}}^1| = |\gamma_{-\mathrm{i}}^1| = |\gamma_{+\mathrm{i}}^2| = |\gamma_{-\mathrm{i}}^2| \neq 0$$

and

$$\gamma_{+\mathrm{i}}^2 = \overline{\gamma_{-\mathrm{i}}^1}, \quad \gamma_{-\mathrm{i}}^2 = \overline{\gamma_{+\mathrm{i}}^1}.$$

表达式 $\gamma_{-1}^1\gamma_{-\mathrm{i}}^2 - \gamma_{-\mathrm{i}}^1\gamma_{-1}^2$ 定义明确且非零。谱对(ν, ψ) 可表示为

$$\nu(\{\lambda\}) = \frac{1}{2\|\mathbf{e}\|^2}\frac{|\gamma_{+\mathrm{i}}^1|^2}{|\gamma_{-1}^1\gamma_{-\mathrm{i}}^2 - \gamma_{-\mathrm{i}}^1\gamma_{-1}^2|^2}, \quad \psi(\lambda) = -\frac{\gamma_{-\mathrm{i}}^2}{\gamma_{-\mathrm{i}}^1}.$$

3.5. 谱对的玻恩近似。为了对谱对有一些直观认识，我们在第 8 节中计算 ν和 ψ 在 q较小时的线性化形式；这在散射理论中称为玻恩近似。为简单起见，这里只展示狄利克雷情形 $\alpha = \infty$下的这些公式。在经典自伴情形下，对于取实值的 $q \in L^1$（$\mathbf{R}_+$），密度 **(1.10)** 满足

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda) = \frac{1}{\pi}\left(k - \int_0^\infty \sin(2ky)q(y)\mathrm{d}y\right) + \mathcal{O}(\|q\|_{L^1}^2) \tag{3.16}$$

对于任意 $\lambda = k^2 > 0$。

命题 3.8。设 $\alpha = \infty$。由于 $\|q\|_{L^1} \to 0$，对于任意 $\lambda = k^2 > 0$，我们有

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\left(k - \int_0^\infty \sin(2ky)\,\mathrm{Re}\,q(y)\mathrm{d}y\right) + \mathcal{O}(\|q\|_{L^1}^2) \tag{3.17}$$

and

$$\psi(\lambda) = 1 + \frac{2\mathrm{i}}{k}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ky}\sin(ky)\,\mathrm{Im}\,q(y)\mathrm{d}y + \mathcal{O}(\|q\|_{L^1}^2). \tag{3.18}$$

对于实数 q，公式 **(3.17)** 与 **(3.16)** 仅相差一个 $1/2$ 的归一化因子。这与 [14, 定理 1.7], 一致，该定理指出，对于实数 q，$\mathrm{d}\sigma(\lambda) = 2\mathrm{d}\nu(\lambda)$。我们注意到，**(3.18)** 仅取决于 q 的虚部，并包含指数因子 e^{-ky}。

4. Construction of the Jost solutions

4.1. 预备知识。平面中的扇区 k与斯托克斯线。 本节旨在证明定理 3.1。我们的证明不依赖于矩阵值势 Q 的特殊形式 (2.3)，甚至也不要求 Q 为厄米矩阵。我们只需要 Q 的可积性，即

$$\int_0^\infty \|Q(x)\|\mathrm{d}x < \infty.$$

在此处及下文中，$\|\cdot\|$ 表示作用于 2×2 矩阵集合上的算子范数，即将这些矩阵视为作用于带有欧几里得范数的 $\mathbb{C}^2$ 上的线性算子。

总的来说，我们沿用将微分方程 (3.1) 转化为积分方程的标准策略。不过，我们面临以下挑战。考虑自由方程 ($Q=0$) 的解 $\mathrm{e}^{\pm kx}e_-$、$\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}kx}e_+$。这些解按照增长／衰减速率排列的层级，由四个指数 $\pm k$、$\pm \mathrm{i}k$ 的实部决定。当 k 穿过复平面中的四条斯托克斯线中的任意一条时，这种层级便会改变

$$\operatorname{Re} k = 0, \quad \operatorname{Im} k = 0, \quad \operatorname{Re} k = \operatorname{Im} k, \quad \operatorname{Re} k = -\operatorname{Im} k$$

。这些斯托克斯线将 k平面划分为八个扇区，每个扇区中的约斯特解层级各不相同。因此，我们必须在每个扇区中以不同的方式建立积分方程。换言之，四个约斯特解各自对应的格林函数公式都必须根据所在扇区进行调整。

因此，我们有四个约斯特解和复平面中的八个扇区；要系统地描述所有相应的积分方程颇具挑战。我们记

$$S_0 = \{k \in \mathbb{C}\setminus\{0\} : 0 < \arg k < \pi/4\},$$
$$\overline{S_0} = \{k \in \mathbb{C}\setminus\{0\} : 0 \le \arg k \le \pi/4\}.$$

我们的策略包括以下步骤。

- 在开扇区 S_0中，为 k 构造全部四个约斯特解。对每个约斯特解，都必须采用不同的构造方法。
- 考察 S_0 的边界斯托克斯线，并证明约斯特解在 S_0中的存在性。
- 利用变换$k \mapsto k$，将这一构造扩展到扇区$-\pi/4 \le \arg k \le \pi/4$。
- 利用变换 $k \mapsto \mathrm{i}k$，将这一构造扩展到扇区$-\pi/4 \le \arg k \le 3\pi/4$。
- 通过使用变换 $k \mapsto -k$，将这一构造推广到所有 $k \neq 0$。

证明的关键难点在于第一步。与标准情形 $\epsilon = 1$ 相比，其中微妙之处在于，我们不得不处理通常属于 Fredholm 型而非沃尔泰拉型的积分方程（见（4.22））。这一点使我们的分析在结构上更接近于高维散射理论

$d \geq 2$，而非标准的一维理论。我们将遵循 [13], 的策略，该策略基于 [3], 一书中的一个想法，参见该书第 3 章的问题 29。

4.2. 在 S_0 中建立积分方程。对于 $k \in S_0^{-}$，我们将格林函数的分量定义如下：

$$A(x) = \frac{\mathrm{e}^{-k|x|}}{2k} P_-, \qquad A_\pm(x) = \mp \frac{\sinh(kx)}{k} \chi_\pm(x) P_-,$$
$$B(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x|}}{2\mathrm{i}k} P_+, \qquad B_\pm(x) = \pm \frac{\sin(kx)}{k} \chi_\pm(x) P_+,$$

其中，χ_+（分别为 χ_-）是正（分别为负）半轴的特征函数，而 $P_\pm$ 是（1.18）中定义的投影算子。接下来，我们定义

$$\begin{aligned} L_{-1}(x) &= A_-(x) + B_-(x), \\ L_{+1}(x) &= A(x) + B_+(x), \\ L_{+\mathrm{i}}(x) &= A(x) + B_-(x), \\ L_{-\mathrm{i}}(x) &= A(x) + B(x). \end{aligned} \tag{4.1}$$

我们固定另一个参数 $r \geq 0$，其用途将在稍后说明。现在为约斯特解建立积分方程。这些积分方程定义在区间 $[r, \infty$ 上；由于我们主要关注约斯特解在无穷远处的渐近行为，将 x 限制在 $[r, \infty$ 上并非严格的约束。我们将寻找积分方程的解 F_j、$j \in \{\pm 1, \pm \mathrm{i}\}$：

$$F_{\pm 1}(x) = \mathrm{e}^{\pm kx} e_- + \int_r^\infty L_{\pm 1}(x-y) Q(y) F_{\pm 1}(y) \mathrm{d}y, \quad x \geq r, \tag{4.2}$$

$$F_{\pm \mathrm{i}}(x) = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}kx} e_+ + \int_r^\infty L_{\pm \mathrm{i}}(x-y) Q(y) F_{\pm \mathrm{i}}(y) \mathrm{d}y, \quad x \geq r, \tag{4.3}$$

其中，向量 $e_\pm$ 在（1.17）中定义。如有必要，我们将通过写作 $F_j(x, k)$ 或 $F_j(x, k; r)$ 来标明对 k 和 r 的依赖关系。

注记。
1. 在经典标量自伴情形（即对于约斯特解 (1.8)），相应积分方程中的积分是从 x 到无穷远。2. 我们将证明，当 $k \in S_0$ 和 r 足够大时，积分方程 (4.2)、(4.3) 存在解 F_j。引入参数 r 的目的是使右端积分算子的范数小于 1，从而确保纽曼级数收敛。下文将对此作出精确说明。3. 尽管 (4.2)、(4.3) 是关于 $[r, \infty$ 的积分方程，但我们很快会看到，所有 F_j 都满足微分方程 (3.1)。因此，F_j 可以唯一延拓到 $[0, \infty$。

4. 我们将证明，在开扇区 S_0 内， $F_j \in \mathbf{F}_j$ （即 F_j 满足渐近行为 (3.2)–(3.5)）。在边界斯托克斯射线 $k > 0$ 和 $\arg k = \pi/4$ 上，情况则更为复杂。一般而言，F_j 是来自类别 $\mathbf{F}_j$ 的一个解与另一个解的线性组合。不过，我们主要关注满足 $j = -1$ 和 $j = +\mathrm{i}$ 的解（它们构成了所有关于 $k \in S_0$ 的指数衰减解所成空间的基，并且会出现在我们的主要定理 3.5 中），其中 k 从上方趋近实轴。好消息是，对于 $k > 0$，我们将证明 $F_{-1} \in \mathbf{F}_{-1}$ 和 $F_{+\mathrm{i}} \in \mathbf{F}_{+\mathrm{i}}$。

4.3. **参数 $r \geq 0$ 和 $\delta > 0$ 的纽曼级数**。下文中，我们固定 $\delta > 0$ 并选择 $r \geq 0$ 足够大，使得

$$\frac{2}{\delta} \int_r^\infty \|Q(y)\| \mathrm{d}y < \frac{1}{2}. \tag{4.4}$$

右侧的常数 $1/2$ 可以替换为任意正数< 1。(4.4) 左侧的表达式是在经过适当加权后（见 (4.6)、(4.7)），$|k| > \delta$时 (4.2)、(4.3) 中积分算子范数的上界。对于 $k \in S_0$ 和 $|k| > \delta$，我们将能够以收敛的纽曼级数形式证明 (4.2) 和 (4.3) 的解的存在唯一性。记

$$S_\delta = \{k \in \mathbb{C} : 0 < \arg k < \pi/4, \quad |k| > \delta\},$$
$$\overline{S_\delta} = \{k \in \mathbb{C} : 0 \leq \arg k \leq \pi/4, \quad |k| \geq \delta\}.$$

4.4. **$\mathbf{F}_j$ 和 F_j：约斯特解的类与代表元**。我们总结一下记号约定。如前所述，$\mathbf{F}_j(x, k)$ 表示满足定理 3.1 中所述渐近行为的解类。

我们用 $F_j(x, k; r)$ 表示相应积分方程 (4.2)–(4.3) 的唯一确定的解。解 $F_j(x, k; r)$ 一般依赖于 r。

注。对于 $k \in S_0$，关于 $F_{-1}(x, k; r)$ 的积分方程 (4.2) 是沃尔泰拉型的。因此，在这一范围内的 k 下，解 $F_{-1}(x, k; r)$ 实际上与 r 的选择无关。这与以下事实一致：在这一范围内的 k 下，解类 $\mathbf{F}_{-1}$ 是单点集。

4.5. **中约斯特解的存在性**。定义辅助函数 $w_{\pm 1}$ 和 $w_{\pm \mathrm{i}}$ 如下将会很方便

$$F_{\pm 1}(x) = \mathrm{e}^{\pm kx} w_{\pm 1}(x), \quad F_{\pm \mathrm{i}}(x) = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}kx} w_{\pm \mathrm{i}}(x), \tag{4.5}$$

以及相应的核 $K_{\pm 1}$ 和 $K_{\pm \mathrm{i}}$，定义为

$$K_{-1}(x) = \mathrm{e}^{kx} L_{-1}(x) = \mathrm{e}^{kx}(A_-(x) + B_-(x)),$$
$$K_{+1}(x) = \mathrm{e}^{-kx} L_{+1}(x) = \mathrm{e}^{-kx}(A(x) + B_+(x)),$$
$$K_{+\mathrm{i}}(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} L_{+\mathrm{i}}(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}(A(x) + B_-(x)),$$
$$K_{-\mathrm{i}}(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} L_{-\mathrm{i}}(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}(A(x) + B(x)).$$

为简洁起见，我们省略 w_j 和 K_j 对 k 和 r的依赖。

Th对于 F_j，积分方程 (4.2)–(4.3) 等价于积分方程

$$w_{\pm1}(x) = e_- + \int_r^\infty K_{\pm1}(x-y)Q(y)w_{\pm1}(y)\mathrm{d}y, \tag{4.6}$$

$$w_{\pm\mathrm{i}}(x) = e_+ + \int_r^\infty K_{\pm\mathrm{i}}(x-y)Q(y)w_{\pm\mathrm{i}}(y)\mathrm{d}y. \tag{4.7}$$

在本节余下部分，我们证明这些积分方程的解 w_j 的存在性。记 $x_+ = \max\{x,0\}$ 和 $K_j' = \frac{\partial}{\partial x}K_j$。

引理 4.1. 对于所有指标 $j \in \{\pm1, \pm\mathrm{i}\}$、所有 $x \in \mathbb{R}$ 以及所有 $k \in S_0$，我们有如下估计

$$\|K_j(x)\| \le \frac{2}{|k|} \quad and \quad \|K_j'(x)\| \le 4. \tag{4.8}$$

若 $k \in S_0$，则有如下估计

$$\|K_j(x)\| + \|K_j'(x)\| \le C\mathrm{e}^{-dx_+}, \tag{4.9}$$

其中 $C = C(k)$ 和 $d = d(k)$ 是与 j 和 x无关的正常数。

证明。 我们记

$$k = a + \mathrm{i}b,$$

其中 $0 \le b \le a$ 属于我们的扇区 S_0。每个核 K_j 都是若干指数项之和。只需验证所有指数的实部满足：(i) 对于 $k \in S_0$, $x \in \mathbb{R}$ 均非正；(ii) 对于$k \in S_0$, $x > 0$均严格为负，即可完成证明。为便于核查，我们将结果列成四张表（每个指标j对应一张）。

核 K_{-1}:

$$K_{-1}(x) = \frac{1}{k}\mathrm{e}^{kx}\left(\sinh(kx)P_- - \sin(kx)P_+\right)\chi_-(x).$$

x 的分量定义域	总指数实部（≤ 0）		
P_-项（A_-）	$x<0$	$(k\pm k)x$	$(a\pm a)x$
P_+-项（B_-）	$x<0$	$(k\pm\mathrm{i}k)\ x$	$(a\mp b)\ x$

核 $K_{+\mathrm{i}}$:

$$\begin{aligned} K_{+\mathrm{i}}(x) &= \frac{1}{2k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\left(\mathrm{e}^{-k|x|}P_- - 2\sin(kx)P_+\chi_-(x)\right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2k}\mathrm{e}^{-(k+\mathrm{i}k)x}P_- & \text{for } x>0, \\ \frac{1}{2k}\mathrm{e}^{(k-\mathrm{i}k)x}P_- - \frac{1}{k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\sin(kx)P_+ & \text{for } x<0. \end{cases} \end{aligned}$$

分量定义域 x	总指数实部 (≤ 0)		
P_--项 (A)	$x>0$	$-(k+\mathrm{i}k)x$	$-(a-b)x$
	$x<0$	$(k-\mathrm{i}k)x$	$(a+b)\ x$
P_+ 项（B_-）	$x<0$	$(-\mathrm{i}k\pm\mathrm{i}k)\ x$	$(b\mp b)\ x$

核 $K_{-\mathrm{i}}$:

$$K_{-\mathrm{i}}(x)=\frac{1}{2k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\left(\mathrm{e}^{-k|x|}P_- - \mathrm{i}e^{\mathrm{i}k|x|}P_+\right)$$
$$=\begin{cases}\frac{1}{2k}\left(\mathrm{e}^{-(k-\mathrm{i}k)x}P_- - \mathrm{i}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}kx}P_+\right) & \text{for } x>0,\\ \frac{1}{2k}\left(\mathrm{e}^{(k+\mathrm{i}k)x}P_- - \mathrm{i}P_+\right) & \text{for } x<0.\end{cases}$$

x 总指数实部的分量定义域（≤ 0）			
P_- 项（A）	$x>0$	$-(k-\mathrm{i}k)x$	$-(a+b)x$
	$x<0$	$(k+\mathrm{i}k)x$	$(a-b)x$
P_+项（B）	$x>0$	$2\mathrm{i}kx$	$-2bx$
	$x<0$	0	0

核 K_{+1}:

$$K_{+1}(x)=\frac{1}{2k}\mathrm{e}^{-kx}\left(\mathrm{e}^{-k|x|}P_- + 2\sin(kx)P_+\chi_+(x)\right)$$
$$=\begin{cases}\frac{1}{2k}\mathrm{e}^{-2kx}P_- + \frac{1}{k}\mathrm{e}^{-kx}\sin(kx)P_+ & \text{for } x>0,\\ \frac{1}{2k}P_- & \text{for } x<0.\end{cases}$$

x 总指数实部的分量定义域（≤ 0）			
P_--项（A）	$x>0$	$-2kx$	$-2ax$
	$x<0$	0	0
P_+-项（B_+）	$x>0$	$-(k\pm\mathrm{i}k)\ x$	$-(a\mp b)\ x$

通过检查上述四个表格即可得出证明。 □

引理 4.2。设 $\delta>0$ 和 $r\geq 0$ 满足 (4.4)。那么对于任意 $k\in S_\delta$，积分方程 (4.6)（分别为 (4.7)）在 $L^\infty((r、\infty);\ \mathbb{C}^2)$ 中有唯一解 $w_{\pm 1}$（分别为 $w_{\pm\mathrm{i}}$）。

证明。为明确起见，考虑 (4.6)。设 $\mathcal{K}_{\pm 1}$ 为作用于 (4.6) 右端 $w_{\pm 1}$ 的积分算子；则该积分方程可写为

$$w_{\pm 1}=e_- + \mathcal{K}_{\pm 1}w_{\pm 1}. \tag{4.10}$$

利用 (4.8) 和 (4.4)，我们估计该算子的范数

$$\|\mathcal{K}_{\pm 1}\|_{L^\infty\to L^\infty}=\sup_{x\geq r}\int_r^\infty \|K_{\pm 1}(x-y)Q(y)\|\mathrm{d}y$$

as

$$\|\mathcal{K}_{\pm 1}\|_{L^\infty\to L^\infty} \le \frac{2}{|k|}\int_r^\infty \|Q(y)\|\mathrm{d}y \le \frac{2}{\delta}\int_r^\infty \|Q(y)\|\mathrm{d}y < \frac{1}{2}, \tag{4.11}$$

因此，积分方程 (4.10) 有唯一解，即纽曼级数

$$w_{\pm 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{K}_{\pm 1}^m e_-, \tag{4.12}$$

关于 $k \in S_\delta$ 一致收敛。 □

现在由 (4.5) 定义 $F_j = F_j(x,k;r)$，其中 $k \in S_\delta$，而解 w_j 如前一个引理所述。根据构造， F_j 满足积分方程 (4.2) 和 (4.3)。下一个（标准）引理表明， F_j 也满足微分方程 (3.1)。

Le引理 4.3。 对于所有指标 $j \in \{\pm 1, \pm \mathrm{i}\}$，由 (4.1) 定义的核 L_j 满足

$$\left(-\epsilon\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - k^2\right) L_j(x) = -\delta(x),$$

其中 δ 是 δ 函数。因此，积分方程 (4.2) 和 (4.3) 的解 F_j 在 (r,∞) 上满足微分方程 (3.1) 。

证明。 直接检验以下关系即可得证

$$-\epsilon A''(x) - k^2 A(x) = -\delta(x)P_-, \quad -\epsilon A_\pm''(x) - k^2 A_\pm(x) = -\delta(x)P_-,$$
$$-\epsilon B''(x) - k^2 B(x) = -\delta(x)P_+, \quad -\epsilon B_\pm''(x) - k^2 B_\pm(x) = -\delta(x)P_+.$$

这里， $\epsilon P_+ = P_+$ 和 $\epsilon P_- = -P_-$这一点很重要。 □

由于函数 F_j 在（r， ∞）上满足微分方程（3.1），我们将把它们延拓到整个 $[0,\infty)$，使其成为同一微分方程的解。

4.6. 解的渐近行为 F_j 在无穷远处。首先，为便于参考，我们给出一个初等引理。

引理 4.4。设 $d > 0$。则

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-d(x-y)_+}\|Q(y)\|\mathrm{d}y = 0.$$

证明。 将积分定义域分成 $y \le x/2$ 和 $y > x/2$ ，并估计

$$\int_0^{x/2} \mathrm{e}^{-d(x-y)_+}\|Q(y)\|\mathrm{d}y \le \mathrm{e}^{-dx/2}\int_0^\infty \|Q(y)\|\mathrm{d}y,$$
$$\int_{x/2}^\infty \mathrm{e}^{-d(x-y)_+}\|Q(y)\|\mathrm{d}y \le \int_{x/2}^\infty \|Q(y)\|\mathrm{d}y.$$ □

引理 4.5. 设 $\delta > 0$ 和 $r \ge 0$ 满足 (4.4)。那么对任意 $k \in S_\delta$ 及所有指标 $j \in \{\pm 1, \pm \mathrm{i}\}$，解 F_j 满足渐近行为 (3.2)–(3.5)。采用定理 *3.1* 中的记号，我们有 $F_j(\cdot,k;r) \in \mathbf{F}j(\cdot,k)$。

证明. 我们先讨论解 $F_j(x,k)$的渐近行为 (3.2)–(3.3)；证明的最后一步再处理导数 (3.4)–(3.5)。所求的渐近行为等价于

$$w_{\pm 1}(x) \to e_-, \quad w_{\pm \mathrm{i}}(x) \to e_+, \quad x \to \infty,$$

参见 (4.5)。我们来使用积分方程 (4.6)–(4.7)。由于我们已经知道 $w_j \in L^\infty$，只需验证

$$\lim_{x\to\infty} \int_r^\infty \|K_j(x-y)Q(y)\| \mathrm{d}y = 0.$$

这个极限关系由引理 4.4 和 (4.9) 得出。

接下来，我们来建立导数 $F_j'(x,\ k)$ 的渐近行为 (3.4)–(3.5)。我们需要证明

$$w_j'(x) \to 0, \quad x \to \infty. \tag{4.13}$$

由积分方程 (4.6) 和 (4.7)，可得

$$w_j'(x) = \int_r^\infty K_j'(x-y)Q(y)w_j(y)\mathrm{d}y.$$

由引理 4.4 和 (4.9)，可得

$$\lim_{x\to\infty} \int_r^\infty \left\|K_j'(x-y)Q(y)\right\| \mathrm{d}y = 0.$$

由于我们已经知道 $w_j \in L^\infty$，因此得到 (4.13)。 □

备注。 考虑特殊情形 $j=-1$ 很有启发性；由于积分核具有沃尔泰拉结构，这种情形尤其简单。在这一特殊情形下，无需使用引理 4.4。

阶段性总结：在证明的这一阶段，我们已对开扇区 S_0 内的每个 k 证明了定理 3.1。事实上，我们已在每个解类 $\mathbf{F}j$ 中找到了一个代表元 $F_j(\cdot,k;r)$。

接下来我们考虑边界斯托克斯射线 $\arg\ k=0$（即 $k>0$）以及 $\arg k = \pi/4$。

引理 4.6。

(i) 设 $k>0$。那么，解 F_{-1}、 $F_{+\mathrm{i}}$ 和 F_{+1} 满足渐近行为 (3.2)–(3.5)，而 $F_{-\mathrm{i}}$ 满足

$$F_{-\mathrm{i}}(x,k) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}e_+ + \beta_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}e_+ + o(1), \tag{4.14}$$

$$F_{-\mathrm{i}}'(x,k) = -\mathrm{i}k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}e_+ + \mathrm{i}\beta_1 k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}e_+ + o(1), \tag{4.15}$$

当 $x\to\infty$ 时，具有某些 $\beta_1 \in \mathbb{C}$。

（ii）令 辐角 $k = \pi/4$。那么，解 F_{-1} 和 $F_{-\mathrm{i}}$ 满足渐近行为（3.2）–（3.5），而 $F_{+\mathrm{i}}$ 和 F_{+1} 满足

$$F_{+\mathrm{i}}(x,k) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}e_+ + \beta_2\mathrm{e}^{-kx}e_- + o(\mathrm{e}^{-kx}), \tag{4.16}$$

$$F'_{+\mathrm{i}}(x,k) = \mathrm{i}k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}e_+ - \beta_2 k\mathrm{e}^{-kx}e_- + o(\mathrm{e}^{-kx}), \tag{4.17}$$

$$F_{+1}(x,k) = \mathrm{e}^{kx}e_- + \beta_3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}e_+ + o(\mathrm{e}^{kx}), \tag{4.18}$$

$$F'_{+1}(x,k) = k\mathrm{e}^{kx}e_- - \mathrm{i}\beta_3 k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}e_+ + o(\mathrm{e}^{kx}), \tag{4.19}$$

当 $x \to \infty$ 时，存在某些 β_2、$\beta_3 \in \mathbb{C}$。

证明。 对于解 F_{-1}，积分方程是沃尔泰拉型的，因此前一个引理的相同证明也适用。该证明仅依赖估计式 (4.8)，而该估计对闭扇区 S_0 内的 K_{-1} 均成立，包括两条边界射线。证明的其余部分将讨论 $F_{\pm\mathrm{i}}$ 和 F_{+1}。

（*i*）部分： 设 $k > 0$。考虑 $F_{+\mathrm{i}}$ 和 F_{+1}。检查引理 4.1 证明中的表格可知，

$$\|K_{+\mathrm{i}}(x)\| + \|K'_{+\mathrm{i}}(x)\| + \|K_{+1}(x)\| + \|K'_{+1}(x)\| \le C\mathrm{e}^{-kx_+}, \quad x \in \mathbb{R},$$

存在某个 $C = C(k) > 0$，因此（参见 (4.9)），由前一个引理中的论证可得 $F_{+\mathrm{i}}$ 和 F_{+1} 所需的渐近行为。

考虑 $F_{-\mathrm{i}}$。 $w_{-\mathrm{i}}$ 的积分方程为

$$w_{-\mathrm{i}}(x) = e_+ + \frac{1}{2k}\int_r^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-y)}(\mathrm{e}^{-k|x-y|}P_- - \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-y|}P_+)Q(y)w_{-\mathrm{i}}(y)\mathrm{d}y. \tag{4.20}$$

我们将右端的积分拆分为 $\int_r^x + \int_x^\infty$。第二个积分对渐近行为的贡献为 $o(1)$。第一个积分包含两项：一项带有P_-，另一项带有 P_+。由于积分核的指数衰减（参见 (4.9)），带有 P_- 的项对渐近行为的贡献为 $o(1)$。考虑剩下的积分：

$$\frac{-\mathrm{i}}{2k}\int_r^x \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k(x-y)}P_+Q(y)w_{-\mathrm{i}}(y)\mathrm{d}y = \frac{-\mathrm{i}}{2k}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}kx}\left(\int_r^\infty \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}ky}P_+Q(y)w_{-\mathrm{i}}(y)\mathrm{d}y + o(1)\right),$$

当 $x \to \infty$ 时。方括号中的积分绝对收敛。由于被积函数中含有投影P_+，该积分与向量 e_+ 成正比。因此，我们可以写成

$$\frac{-\mathrm{i}}{2k}\int_r^\infty \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}ky}P_+Q(y)w_{-\mathrm{i}}(y)\mathrm{d}y = \beta_1 e_+$$

其中 $\beta_1 \in \mathbb{C}$。采用这一记号，我们得到

$$w_{-\mathrm{i}}(x) = e_+ + \beta_1\mathrm{e}^{2\mathrm{i}kx}e_+ + o(1), \quad x \to \infty.$$

回到记号 $F_{-\mathrm{i}}$，我们得到渐近行为 (4.14)。对 (4.20) 求导，采用相同的方法可得到导数的渐近行为 (4.15)。

第 *(ii)* 部分：令 $\arg k = \pi/4$；我们设 $k = a + \mathrm{i}a$，其中 $a > 0$。本部分将简要论述，因为论证与第 (i) 部分类似。对于 $F_{-\mathrm{i}}$，我们验证

$$\|K_{-\mathrm{i}}(x)\| + \|K'_{-\mathrm{i}}(x)\| \leq C\mathrm{e}^{-2ax_+}, \quad x \in \mathbb{R},$$

因此，(3.3) 和 (3.5) 的相应渐近行为随之成立。对于 $F_{+\mathrm{i}}$，按照第 (i) 部分的相同思路，我们得到

$$\begin{aligned} w_{+\mathrm{i}}(x) &= e_+ + \int_r^x K_{+\mathrm{i}}(x-y)Q(y)w_{+\mathrm{i}}(y)\mathrm{d}y + o(1) \\ &= e_+ + \frac{1}{2k}\int_r^x \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}a(x-y)}P_-Q(y)w_{+\mathrm{i}}(y)\mathrm{d}y + o(1) \\ &= e_+ + \beta_2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}ax}e_- + o(1), \end{aligned}$$

当 $x \to \infty$ 时，其中 $\beta_2 \in \mathbb{C}$。将其表示为 $F_{+\mathrm{i}}$的形式，我们得到 (4.16)。最后，考虑 F_{+1}。对于 $x > 0$，我们有

$$\begin{aligned} K_{+1}(x) &= \frac{1}{2k}\mathrm{e}^{-2kx}P_- + \frac{1}{2\mathrm{i}k}\mathrm{e}^{-(k-\mathrm{i}k)x}P_+ - \frac{1}{2\mathrm{i}k}\mathrm{e}^{-(k+\mathrm{i}k)x}P_+ \\ &= -\frac{1}{2\mathrm{i}k}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}ax}P_+ + \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-2ax}), \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} w_{+1}(x) &= e_- + \int_r^x K_{+1}(x-y)Q(y)w_{+1}(y)\mathrm{d}y + o(1) \\ &= e_- - \frac{1}{2\mathrm{i}k}\int_r^x \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}a(x-y)}P_+Q(y)w_{+1}(y)\mathrm{d}y + o(1) \\ &= e_- + \beta_3\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}ax}e_+ + o(1), \end{aligned}$$

当 $x \to \infty$。将其表示为 F_{+1}的形式，我们得到 (4.18)。导数的公式 (4.17) 和 (4.19) 可用相同的方法推出。□

4.7. 在闭扇区 k 内证明定理 3.1S_0。只需证明对于任意 $\delta > 0$，定理对 $\overline{k} \in S_\delta$ 成立。我们固定如 (4.4) 中的 $\delta > 0$ 和 $r \geq \overline{0}$。对于我们所取范围内的 k，必须在每个等价类 $\mathbf{F}j(\cdot,\ k)$ 中至少找出一个代表元。

由引理 4.5 可知，$F_j(\cdot, k; r) \in \mathbf{F}j(\cdot, k)$ 属于 S_δ；接下来只需考虑边界斯托克斯射线 $\arg k = 0$ 和 $\arg k = \pi/4$。我们使用引理 4.6，并按以下步骤逐步进行（为简洁起见，略去对 k 和 r 的依赖）：

- $F_{-1} \in \mathbf{F}_{-1}$ 对 $\arg k = 0$ 和 $\arg k = \pi/4$ 均成立；
- $F_{+\mathrm{i}} \in \mathbf{F}_{+\mathrm{i}}$ 当 $\arg k = 0$ 时成立，而 $F_{+\mathrm{i}} - \beta_2 F_{-1} \in \mathbf{F}_{+\mathrm{i}}$ 当 $\arg\ k = \pi/4$ 时成立；
- $F_{-\mathrm{i}} - \beta_1 F_{+\mathrm{i}} \in \mathbf{F}_{-\mathrm{i}}$ 当 $\arg k = 0$ 时成立，而 $F_{-\mathrm{i}} \in \mathbf{F}_{-\mathrm{i}}$ 当 $\arg\ k = \pi/4$ 时成立；
- $F_{+1} \in \mathbf{F}_{+1}$ 当 $\arg k = 0$ 时成立，而 $F_{+1} - \beta_3 F_{-\mathrm{i}} \in \mathbf{F}_{+1}$ 当 $\arg\ k = \pi/4$ 时成立。

这就定义了 S_δ 中的全部四个约斯特解。□

4.8. **通过对称变换扩展到** $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$。到目前为止，我们已经证明，对于任意势 Q，$k \in S_0$ 的约斯特解都存在。在本小节中，我们将利用这种灵活性，通过改变势，将约斯特解的存在性扩展到所有 $k \neq 0$。在本小节中，为了方便起见，我们将约斯特解对势的依赖关系记为 $\mathbf{F}j(x, k; Q)$。

步骤 *1*：延拓至 $-\pi/4 \leq \arg k \leq \pi/4$。我们首先注意到，特征值方程 (3.1) 的解具有如下变换：

$$\text{if } \mathbf{F}(x,k;Q) \text{ is a solution of } (3.1), \text{ then } \overline{\mathbf{F}(x,\overline{k};\overline{Q})} \text{ is a solution of } (3.1).$$

利用这一观察并考察解$\mathbf{F}j$ 在 S_0中的渐近行为，我们得到公式

$$\mathbf{F}_{\pm \mathrm{i}}(x,k;Q) = \overline{\mathbf{F}_{\mp \mathrm{i}}(x,\overline{k};\overline{Q})},$$
$$\mathbf{F}_{\pm 1}(x,k;Q) = \overline{\mathbf{F}_{\pm 1}(x,\overline{k};\overline{Q})},$$

定义了满足定理 3.1 假设的解，其适用范围为 $-\pi/4 \leq \arg k \leq 0$。因此，在证明的这一步，我们已经为所有满足 k 且 $-\pi/4 \leq \arg k \leq \pi/4$ 的非零值构造了约斯特解。

步骤 *2*：延拓至 $\pi/4 \leq \arg k \leq 3\pi/4$。我们记

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

重要的是，$\xi e_+ = e_-$、$\xi e_- = e_+$ 和 $\xi\epsilon\xi = -\epsilon$。这一步依赖于以下变换：

如果$\mathbf{F}(x, k; Q)$是方程 (3.1) 的解，那么 $\xi\mathbf{F}(x, -\mathrm{i}k; -\xi Q\xi)$也是方程 (3.1) 的解。

利用这一点并考察约斯特解的渐近行为，我们得到公式

$$\mathbf{F}_{\pm \mathrm{i}}(x,k;Q) = \xi\mathbf{F}_{\mp 1}(x,-\mathrm{i}k;-\xi Q\xi),$$
$$\mathbf{F}_{\pm 1}(x,k;Q) = \xi\mathbf{F}_{\pm \mathrm{i}}(x,-\mathrm{i}k;-\xi Q\xi),$$

定义了满足定理 3.1 假设的解，对任意非零的 $k$with $\pi/4 \leq \arg k \leq 3\pi/4$ 均成立。

步骤 *3*：扩展至 $3\pi/4 \leq \arg k \leq 7\pi/4$. 最后，注意到特征值方程 (3.1) 在变换 $k \mapsto -k$ 下的不变性，我们可以使用公式

$$\mathbf{F}_{\pm \mathrm{i}}(x,k;Q) = \mathbf{F}_{\mp \mathrm{i}}(x,-k;Q),$$
$$\mathbf{F}_{\pm 1}(x,k;Q) = \mathbf{F}_{\mp 1}(x,-k;Q),$$

以将约斯特解的定义扩展到半平面 $3\pi/4 \leq \arg k \leq 7\pi/4$，从而覆盖完整的穿孔 k- 平面。（这等价于两次应用步骤 2 中的变换。）定理 3.1 的证明完毕。□

4.9. **命题 3.3 的证明：化归为标量反线性方程**。容易验证，若 F 满足微分方程 (3.1)，其中 k^2 为实数，且 Q 如 (2.3) 所示，则 ϵF 满足同一方程。考虑 $F = \mathbf{F}_{-1}(x,k)$；显然，$-\epsilon F$ 具有与 F 相同的渐近行为。由于关于 $k>0$ 的类 $\mathbf{F}_{-1}$ 只包含一个解，我们得出

$$-\epsilon\overline{\mathbf{F}_{-1}(x,k)} = \mathbf{F}_{-1}(x,k),$$

因此，我们可以用某个函数$\mathbf{e}$将$\mathbf{F}_{-1}(x,k)$表示为(3.8)的形式。将$\mathbf{F}_{-1}$ 的微分方程和渐近行为改写为关于$\mathbf{e}$的形式，我们得到(3.6)、(3.7)。类似地，考察 $F = \mathbf{F}_{+\mathrm{i}}(x,\mathrm{i}k)$，可得

$$\epsilon\overline{\mathbf{F}_{+\mathrm{i}}(x,\mathrm{i}k)} = \mathbf{F}_{+\mathrm{i}}(x,\mathrm{i}k)$$

由此我们推得$\mathbf{F}_{+\mathrm{i}}(x,\mathrm{i}k)$可表示为(3.8)的形式，其中某个函数$\mathbf{e}$ 满足(3.6)、(3.7)。

若$\mathbf{e}$ 满足(3.6)和(3.7)，则不难看出，由公式(3.8)定义的$\mathbf{F}_{-1}$ 满足定理 3.1 的条件。由此再结合$\mathbf{F}_{-1}$ 的唯一性，可得$\mathbf{e}$的唯一性。

最后，$\mathbf{e}$ 满足(3.9)，当且仅当$\mathbf{F}_{-1}$ 满足 $L_\alpha^\perp(\mathbf{F}_{-1}) = 0$。命题 3.3 的证明至此完成。□

4.10. **和 的显式积分方程**。对我们的分析而言，最重要的解是 $F_{-1}(x,k)$ 和 $F_{+\mathrm{i}}(x,k)$，见定理 3.5。本节最后显式列出这些解的积分方程，其中 $0 \le \arg k < \pi/4$。

对于 F_{-1}，方程 (4.2) 可写为

$$\begin{aligned} F_{-1}(x,k) =& \mathrm{e}^{-kx}e_- + \frac{1}{k}\int_x^\infty \sinh(k(x-y))P_-Q(y)F_{-1}(y,k)\mathrm{d}y \\ &- \frac{1}{k}\int_x^\infty \sin(k(x-y))P_+Q(y)F_{-1}(y,k)\mathrm{d}y, \quad 0 \le \arg k \le \pi/4. \end{aligned} \tag{4.21}$$

对于 $F_{+\mathrm{i}}$，(4.3) 给出

$$\begin{aligned} F_{+\mathrm{i}}(x,k;r) =& \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}e_+ - \frac{1}{k}\int_x^\infty \sin(k(x-y))P_+Q(y)F_{+\mathrm{i}}(y,k;r)\mathrm{d}y \\ &+ \frac{1}{2k}\int_r^\infty \mathrm{e}^{-k|x-y|}P_-Q(y)F_{+\mathrm{i}}(y,k;r)\mathrm{d}y, \quad 0 \le \arg k < \pi/4 \end{aligned} \tag{4.22}$$

对于 $x > r$，其中 $r \ge 0$ 是满足 (4.4) 的任意参数。我们注意到，(4.22) 是一个 Fredholm 型方程，但不是沃尔泰拉型方程。

5. Jost solutions: analyticity, continuity and large $|k|$ asymptotics

5.1. **关于 k的解析性与连续性**。本节采用与上一节相同的框架和假设。我们讨论约斯特解的解析性、连续性以及当 $|k|$ 趋于无穷大时的渐近行为

$F_j = F_j(x,\ k;\ r)$。回顾一下，F_j最初定义于 $x \geq r$（作为积分方程 (4.2)、(4.3) 的解），随后扩展到 $[0,\infty)$，作为微分方程 (3.1) 的解。下文记 $F_j' = \frac{\partial}{\partial x} F_j$。

定理 5.1。设 $\delta > 0$ 和 $r \geq 0$ 满足 (4.4)。那么，对于任意 $x \geq 0$ 和任意$j \in \{\pm 1, \pm \mathrm{i}\}$，约斯特解 $F_j(x, k;\, r)$ 及其导数 $F_j'(x, k;\, r)$ 关于 $k \in S_\delta$ 是解析的，并关于 $k \in S_\delta$连续。

证明。首先，假设 $x \geq r$。由 (4.6)–(4.7) 可知，函数w_j（其定义见 (4.5)）可表示为纽曼级数

$$w_j = \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{K}_j^m e_\pm,$$

参见 (4.12)。该纽曼级数在 $L^\infty((r,\infty);\, \mathbb{C}^2)$ 中收敛，且关于 $k \in S_\delta$一致。其第 m项为

$$\mathcal{K}_j^m e_\pm(x) = \left(\int_r^\infty K_j(x - x_1) Q(x_1) \cdots \int_r^\infty K_j(x_{m-1} - x_m) Q(x_m) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_m \right) e_\pm.$$

被积函数是关于 k 的解析函数，在 S_δ 中有界，且有如下界

$$\frac{2^m}{|k|^m} \|Q(x_1)\| \cdots \|Q(x_m)\|,$$

见 (4.8)。由此可知，$\mathcal{K}_j^m e_\pm(x)$ 在 $k \in S_\delta$中解析。根据纽曼级数的一致收敛性，我们发现 $w_j(x)$ 在 $k \in S_\delta$中解析。由此可知，$F_j(x,\ k; r)$ 在 $k \in S_\delta$中解析。用同样的推理可以证明，$F_j'(x,\ k;\ r)$ 在 $k \in S_\delta$中解析。

现在考虑 $0 \leq x < r$。注意到，在区间 $[0, r]$ 上的 $F_j(x,\ k; r)$ 可视为一个柯西问题的解，其柯西数据取于点$x = r$。这意味着，在此范围内，x 也解析依赖于 k。

最后，在上述整个论证中，可以用 S_δ 中的连续性替代 S_δ 中的解析性。□

5.2. 的大 F_{-1} 渐近行为 $F_{+\mathrm{i}}$和 $|k| \to \infty$。 在定理 3.4 和命题 B.3 的证明中，我们需要约斯特解$F_{-1}(0,\ k; r)$ 和 $F_{+\mathrm{i}}(0,\ k;\, r)$ 在扇区 S_0中的 $|k| \to \infty$ 渐近行为。尽管可以对其他约斯特解、更一般的 k取值范围以及所有 $x \geq 0$证明类似结论，但这里我们只证明所需的结果。为了简化下面的渐近表达式，我们只考虑具有对称形式 (2.3) 的 Q。注意，当 $|k|$ 足够大时，在定义 F_j时总可以取 $r = 0$，见 (4.4)；下文的陈述将采用这一选择。

引理 5.2。令 $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$，且令 Q 具有(2.3)的形式。记

$$q_0 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \operatorname{Re} q(x) \mathrm{d}x.$$

当 $|k| \to \infty$ 位于扇区 $0 \leq \arg k \leq \pi/4$ 中时，约斯特解 $F_{-1}(x,k) = F_{-1}(x,k;0)$ 和 $F_{+\mathrm{i}}(x,k) = F_{+\mathrm{i}}(x,k;0)$ 满足如下渐近行为

$$F_{-1}(0,k) = e_- + \frac{1}{k} q_0 e_- + o(1/k), \tag{5.1}$$

$$F'_{-1}(0,k) = -k e_- - q_0 e_- + o(1), \tag{5.2}$$

$$F_{+\mathrm{i}}(0,k) = e_+ + \frac{\mathrm{i}}{k} q_0 e_+ + o(1/k), \tag{5.3}$$

$$F'_{+\mathrm{i}}(0,k) = \mathrm{i}k e_+ - q_0 e_+ + o(1). \tag{5.4}$$

证明。 我们从 (5.1) 和 (5.2) 开始。通过对 w_{-1} 的积分方程 (4.6) 进行更详细的分析即可得到证明。我们重新考察 (4.11)，可知积分算子 $\mathcal{K}_{-1}$ 的范数为 $\mathcal{O}(1/k)$，当 $|k| \to \infty$ 时。由此可得，$w_{-1} = e_- + \mathcal{K}_{-1} w_{-1}$ 的解满足一致估计

$$w_{-1} = e_- + \mathcal{K}_{-1} e_- + \mathcal{O}(1/k^2) \quad \text{as} \quad |k| \to \infty.$$

现在让我们回到 F_{-1}，并将最后一个关系改写为

$$\begin{aligned} F_{-1}(x,k) = \mathrm{e}^{-kx} e_- &+ \frac{1}{k} \int_x^\infty \sinh(k(x-y)) P_- Q(y) \mathrm{e}^{-ky} e_- \mathrm{d}y \\ &- \frac{1}{k} \int_x^\infty \sin(k(x-y)) P_+ Q(y) \mathrm{e}^{-ky} e_- \mathrm{d}y + \mathcal{O}(1/k^2), \end{aligned}$$

参见 (4.21)。令 $x = 0$，并利用矩阵恒等式

$$P_+ Q(x) e_- = -\mathrm{i} \operatorname{Im} q(x) e_+, \quad P_- Q(x) e_- = -\operatorname{Re} q(x) e_-. \tag{5.5}$$

这给出

$$\begin{aligned} F_{-1}(0,k) = e_- &+ \frac{1}{k} \int_0^\infty \sinh(ky) \mathrm{e}^{-ky} \operatorname{Re} q(y) \mathrm{d}y \, e_- \\ &- \frac{\mathrm{i}}{k} \int_0^\infty \sin(ky) \mathrm{e}^{-ky} \operatorname{Im} q(y) \mathrm{d}y \, e_+ + \mathcal{O}(1/k^2). \end{aligned}$$

计算此处右端积分的渐近行为，便得到 (5.1)。以类似的方式可得 (5.2)。

对于（5.3）和（5.4），论证非常相似，唯一的区别是从积分方程（4.22）开始。我们略去这一计算的细节。□

6. Characterisation of the spectral pair

本节旨在证明定理3.4和定理3.5。

6.1. 矩阵解 E。我们将两个指数衰减的约斯特解组合起来，构成一个 2×2 矩阵。固定 $\delta>0$ 和 $r\geq 0$，使得式（4.4）成立。对于 $k\in S_\delta$，我们设

$$E(x,k)=\{F_{+\mathrm{i}}(x,k;r),F_{-1}(x,k;r)\}. \tag{6.1}$$

在记号中，我们省略 $E(x,\ k)$ 对 r 的依赖。事实上，r 的选取对下面的论证没有影响，而相关量对 r 的依赖最终也会消失。

对我们至关重要的是，当 k 从上方趋近正半轴时，$E(x,\ k)$ 对 $k\in S_\delta$ 的依赖。回顾定理 5.1，F_{-1} 和 $F_{+\mathrm{i}}$ 在 k 中连续，并可延拓至边界射线 $k>0$。此外，根据引理 4.5 和 4.6，解 F_{-1} 和 $F_{+\mathrm{i}}$ 对所有 $k\in S_0$ 以及 $k>0$ 都满足渐近关系 (3.2)–(3.5)。

我们还记

$$L_\alpha^\perp(E(\cdot,k))=\{L_\alpha^\perp(F_{+\mathrm{i}}),L_\alpha^\perp(F_{-1})\}.$$

For 为了与标量自伴情形进行比较，我们注意到恒等式

$$\epsilon L_\alpha^\perp(E(\cdot,k))=\Phi(0,\overline{k^2})^*\epsilon E'(0,k)-\Phi'(0,\overline{k^2})^*\epsilon E(0,k),$$

应将其与 (1.9) 进行比较。

提醒读者，$\mathbf{H}$ 的谱关于 0 对称，因此只需考虑下面的谱参数 $\lambda>0$。

引理 6.1。固定满足 (4.4) 的 $\delta>0$ 和 $r\geq 0$，并对 $k\in S_\delta$，令解 E 由 (6.1) 定义。

(i) 对所有 $\overline{k}\in S_\delta$，有行列式 $L_\alpha^\perp(E(\cdot,k))=0$，当且仅当 k^2 是 $\mathbf{H}$ 的特征值。(ii) 行列式 行列式 $L_\alpha^\perp(E(\cdot,k))$ 关于 $k\in S_\delta$ 是解析的，并且关于 $k\in S_\delta$ 连续。 —

证明。第 *(i)* 部分：首先假设 $\lambda>\delta^2$ 是 $\mathbf{H}$ 的特征值。令 $k=\sqrt{\lambda}>0$，由定理 3.1 可知，在四个线性无关的约斯特解 $\mathbf{F}_{\pm 1}$、$\mathbf{F}_{\pm\mathrm{i}}$ 中，只有 $\mathbf{F}_{-1}$ 是平方可积的，因此它必须满足零点处的边界条件 $L_\alpha^\perp(\mathbf{F}_{-1})=0$。回忆一下，对于 $k>0$，有 $\mathbf{F}_{-1}=F_{-1}$。由此可得 $\det L_\alpha^\perp(E(\cdot,k))=0$。

反过来，假设对于某个 $k\in S_\delta$，$\det L_\alpha^\perp(E(\cdot,k))=0$。由此可得

$$aL_\alpha^\perp(F_{+\mathrm{i}})+bL_\alpha^\perp(F_{-1})=0$$

对于某些不同时为零的 $a,b\in\mathbb{C}$。我们记

$$\widetilde{F}=aF_{+\mathrm{i}}+bF_{-1}.$$

若 $\operatorname{Im} k>0$，则 $\widetilde{F}$ 是平方可积的。又由于 $L_\alpha^\perp(\widetilde{F})=0$，因此 k^2 将是自伴算子 $\mathbf{H}$ 的非实特征值。这是不可能的，所以 $\operatorname{Im} k=0$。由于 $k\in S_\delta$，我们得出 $k>0$。

接下来，我们运用一种变体的朗斯基行列式恒定性论证。采用~ ~记号 (2.15)，朗斯基行列式 $[F, F](x)$ 与 x 无关（这里~需要注意，k^2 为实数）。利用 F 在 $x \to \infty$ 时的渐近行为，见引理 4.6，可计算得

$$\lim_{x\to\infty} [\widetilde{F}, \widetilde{F}](x) = 4\mathrm{i}k|a|^2.$$

~ ~另一方面，利用 $L_\alpha^\perp(F) = 0$，由 (2.16) 可得 $[F, F](0) = 0$。~因此 $a = 0$，且 F 是指数衰减解 F_{-1} 的非零倍数。由此可知，k^2 是 **H** 的一个特征值。

(*ii*) 部分：由定理 5.1 可知该结论成立，因为 $\det L_\alpha^\perp(E(\cdot, k))$ 是 $F_{-1}(0, k; r)$、$F_{+\mathrm{i}}(0, k; r)$ 以及导数 $F'_{-1}(0, k; r)$、$F'_{+\mathrm{i}}(0, k; r)$ 的线性组合。证明完毕。□

6.2. **用约斯特解表示 M-函数**。设 $\delta > 0$ 和 $r \geq 0$ 满足 (4.4)，并令 E 由 (6.1) 对 $k \in S_\delta$ 定义。

引理 6.2. 对于任意 $k \in S_\delta$，矩阵 $L_\alpha^\perp(E(\cdot, k))$ 均非奇异，并且

$$M_\alpha(\lambda) = L_\alpha(E(\cdot, k))(L_\alpha^\perp(E(\cdot, k)))^{-1}\epsilon, \quad \lambda = k^2. \tag{6.2}$$

证明. 由引理 6.1(i)，矩阵 $L_\alpha^\perp(E(\cdot, k))$ 在 S_δ 中非奇异。考虑由 (2.11) 定义的解 $X(x, \lambda)$。根据 Θ, Φ 的柯西数据 (2.10)，我们注意到

$$L_\alpha(X) = L_\alpha(\Theta) - L_\alpha(\Phi)M_\alpha(\lambda) = M_\alpha(\lambda), \tag{6.3}$$

$$L_\alpha^\perp(X) = L_\alpha^\perp(\Theta) - L_\alpha^\perp(\Phi)M_\alpha(\lambda) = \epsilon, \tag{6.4}$$

因此我们可以写成

$$M_\alpha(\lambda) = L_\alpha(X)(L_\alpha^\perp(X))^{-1}\epsilon. \tag{6.5}$$

接下来，由定理 3.1 的渐近行为可知，解 F_{-1} 和 $F_{+\mathrm{i}}$ 张成了所有属于 $L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)$ 的解构成的二维线性空间，见引理 B.1。因此，存在一个非奇异矩阵 D（它依赖于 k），使得

$$X(x, k^2) = E(x, k)D.$$

代入 (6.5) 后，矩阵 D 抵消，得到 (6.2)。 □

注意，我们对 E 的定义 (6.1) 取决于参数 r 的选择。不过，M-函数与 r 无关。

6.3. **定理 3.4 的证明**。第 *(i)* 部分：首先讨论 $\lambda = 0$。如果 0 是 H 的一个特征值，那么对相应的特征函数取复共轭可知，0 也是 H^* 的特征值。由 **H** 的定义（或由 (2.8)）可知，0 是**H**的特征值，重数为 ≥ 2。但是**H**的特征值的重数不可能为 > 2，因为满足零点处边界条件的特征值方程只有两个线性无关解。

下面证明所有特征值 $\lambda \neq 0$ 都是单特征值。由 (2.8)，只需考虑 $\lambda > 0$。此时，令 $k = \sqrt{\lambda} > 0$，根据定理 3.1 的渐近行为，(3.1) 的四个线性无关解中只有一个属于 $L^2(\mathbb{R}_+;\ \mathbb{C}^2)$，因此 λ 只能是单特征值。此外，$\lambda > 0$ 是特征值，当且仅当 $L_\alpha^\perp(F_{-1}) = 0$。

我们来验证特征值集合是有界的。考察 F_{-1} 在 $k > 0$ 较大时的渐近行为 (5.1) 和 (5.2)，可知条件 $L_\alpha^\perp(F_{-1}) = 0$ 与这些渐近行为不相容。

接下来，我们使用标准的紧性论证，证明特征值不会在零以外的地方聚集。为导出矛盾，假设存在一列互不相同的正特征值 $\lambda_n \to \lambda_*$，满足 $\lambda_* > 0$。记 $k_n = \sqrt{\lambda_n}$、$k_* = \sqrt{\lambda_*}$ 和 $g_n(x) = F_{-1}(x,\ k_n)$、$g_*(x) = F_{-1}(x,\ k_*)$。由于每个 g_n 都满足零点处的边界条件 (2.4)，且根据定理 5.1，$F_{-1}(x,\ k)$ 和 $F'_{-1}(x,\ k)$ 关于 k 连续，我们可知 g_* 也满足该边界条件，因此 λ_* 也是一个特征值。下面证明关系

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \langle g_n(x), g_*(x)\rangle_{\mathbb{C}^2}\, \mathrm{d}x = \|g_*\|_{L^2}^2 > 0; \tag{6.6}$$

这将与特征向量 g_n, g_* 对所有 n 的正交性产生矛盾。回顾 (4.5) 中的记号，我们有

$$g_n(x) = F_{-1}(x, k_n) = \mathrm{e}^{-k_n x}\, w_{-1}(x, k_n).$$

采用这一记号，(6.6) 中的积分可写为

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(k_*+k_n)x} \langle w_{-1}(x, k_n), w_{-1}(x, k_*)\rangle_{\mathbb{C}^2}\, \mathrm{d}x. \tag{6.7}$$

如定理 5.1 的证明中所示，我们有

$$\lim_{n\to\infty} w_{-1}(x, k_n) = w_{-1}(x, k_*)$$

对所有 $x > 0$ 均成立，并且函数 $w_{-1}(\cdot, k_n)$ 一致有界。由控制收敛定理，积分 (6.7) 收敛到 $\|g_*\|_{L^2}^2$。因此，我们得到 (6.6)，且第 (i) 部分的证明完成。

第 *(ii)* 和 *(iii)* 部分：设 $\Delta \subset (0, \infty)$ 为一个不包含任何特征值的紧区间。固定 $\delta > 0$ 使得 $\Delta \subset [\delta^2, \infty)$，并令 $r \geq 0$ 满足 (4.4)。设 λ 属于闭条带 $\mathrm{Re}\ \lambda \in \Delta$ 且 $\mathrm{Im}\, \lambda \in [0, \varepsilon]$，其中 $\varepsilon > 0$ 足够小，并假设 $k^2 = \lambda$ 且 $k \in S_\delta$。

考虑式 (6.2) 中 $M_\alpha(\lambda)$ 的表达式。根据定理 5.1，矩阵 $E(0, k)$ 和 $E'(0, k)$ 关于 k 连续。根据引理 6.1(i)，矩阵 $L_\alpha^\perp(E(\cdot, k))$ 在我们的带状区域内非奇异，因此其逆矩阵也连续。由此可知，$M_\alpha(\lambda)$ 在我们的带状区域内连续，包括实轴上的边界。这意味着测度 Σ 在区间 Δ 上不含奇异部分。因此，$\mathbf{H}$ 的奇异连续谱不存在。剩余的性质

即 Im $M_\alpha(\lambda + \mathrm{i}0)$ 的秩为一，将在下一小节中证明。定理 3.4 的证明完毕。□

6.4.定理 3.5 的证明。 第 *(i)* 部分： 我们首先讨论 (3.10) 右端的行列式 det$\{L_\alpha^\perp$**(F**$_{+\mathrm{i}}$**)** $L_\alpha^\perp$**(F**$_{-1}$**)**$\}$。我们回顾一下，对于 $k > 0$，约斯特解 $\mathbf{F}_{-1}$ 的定义是明确的，而$\mathbf{F}_{+\mathrm{i}}$ 则只定义到加上一个项 $c\mathbf{F}_{-1}$ 为止，其中 $c \in \mathbb{C}$。该项在行列式中相互抵消，因此行列式的定义是明确的。

接下来，将 $\mathbf{F}_{+\mathrm{i}}$ 和 $\mathbf{F}_{-1}$ 视为解类，我们有 $F_{+\mathrm{i}} \in \mathbf{F}_{+\mathrm{i}}$ 和 $F_{-1} \in \mathbf{F}_{-1}$，因此在 (3.10) 中可以用 det$\{L_\alpha^\perp(F_{+\mathrm{i}})$ $L_\alpha^\perp(F_{-1})\}$ 替换 det$\{L_\alpha^\perp$**(F**$_{+\mathrm{i}}$**)** $L_\alpha^\perp$**(F**$_{-1}$**)**$\}$。这里，对于任意满足带有 $\delta = k$ 的 (4.4) 的 r，有 $F_j = F_j(x,\ k;\ r)$。

令 $k > 0$，并假设 $\lambda = k^2$ 不是$\mathbf{H}$的特征值。将 (6.2) 中的量取极限，得到

$$M_\alpha(\lambda + \mathrm{i}0) = L_\alpha(E(\cdot, k))(L_\alpha^\perp(E(\cdot, k)))^{-1}\epsilon,$$

其中 E 与 (6.1) 中相同。如上文定理 3.4 的证明所述，根据定理 5.1，我们可以取极限，因为 E关于 k连续，且 $L_\alpha^\perp(E(\cdot, k))$ 非奇异（由引理 6.1(i) 得出）。取虚部，得到

$$2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\, M_\alpha(\lambda + \mathrm{i}0) = \epsilon(B^*)^{-1}(B^*\epsilon C - C^*\epsilon B)B^{-1}\epsilon,$$

这里我们暂时记

$$B = L_\alpha^\perp(E(\cdot, k)), \quad C = L_\alpha(E(\cdot, k)).$$

利用初等矩阵代数（与 (2.16) 对比），我们计算得

$$B^*\epsilon C - C^*\epsilon B = E(0, k)^*\epsilon E'(0, k) - E'(0, k)^*\epsilon E(0, k).$$

这里等式右边的表达式是朗斯基行列式的一种变体。由于 k^2 为实数，我们得到

$$E(x, k)^*\epsilon E'(x, k) - E'(x, k)^*\epsilon E(x, k) \tag{6.8}$$

与 x 无关。回想一下， E 是用解 F_{-1} 和 $F_{+\mathrm{i}}$ 定义的，而这些解满足定理 3.1 中的大 x 渐近行为（见引理 4.6(i)）。利用这一渐近行为，计算表达式 (6.8) 在 $x \to \infty$ 时的极限，得到其值为 $4\mathrm{i}kP_1$，其中 P_1 是到 e_1 上的投影，即

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

综上可得

$$\mathrm{Im}\, M_\alpha(\lambda + \mathrm{i}0) = 2k\,\epsilon(B^*)^{-1}P_1B^{-1}\epsilon.$$

N注意到右侧的矩阵秩为一。记矩阵元 s

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

由此得到

$$\operatorname{Im} M_\alpha(\lambda+\mathrm{i}0)=\frac{2k}{|\det B|^2}\begin{pmatrix}|b|^2 & -\bar b d\\ -b\bar d & |d|^2\end{pmatrix}.$$

由 (6.1) 和 (3.8),

$$\begin{pmatrix}b\\ d\end{pmatrix}=L_\alpha^\perp(F_{-1})=L_\alpha^\perp(\mathbf{F}_{-1})=\begin{pmatrix}\overline{\ell_\alpha^\perp(\mathbf{e})}\\ -\ell_\alpha^\perp(\mathbf{e})\end{pmatrix}.$$

由此可得

$$\operatorname{Im} M_\alpha(\lambda+\mathrm{i}0)=\frac{2k}{|\det\{L_\alpha^\perp(\mathbf{F}_{+\mathrm{i}}),L_\alpha^\perp(\mathbf{F}_{-1})\}|^2}\begin{pmatrix}|\ell_\alpha^\perp(\mathbf{e})|^2 & \ell_\alpha^\perp(\mathbf{e})^2\\ \overline{\ell_\alpha^\perp(\mathbf{e})}^2 & |\ell_\alpha^\perp(\mathbf{e})|^2\end{pmatrix}.$$

由此我们得到

$$\frac{\mathrm{d}\Sigma}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda)=\frac{1}{\pi}\frac{2k}{|\det\{L_\alpha^\perp(\mathbf{F}_{+\mathrm{i}}),L_\alpha^\perp(\mathbf{F}_{-1})\}|^2}\begin{pmatrix}|\ell_\alpha^\perp(\mathbf{e})|^2 & \ell_\alpha^\perp(\mathbf{e})^2\\ \overline{\ell_\alpha^\perp(\mathbf{e})}^2 & |\ell_\alpha^\perp(\mathbf{e})|^2\end{pmatrix},$$

并利用 (2.14)，我们直接推出公式 (3.10)。

（*ii*）部分：假设 $k>0$ 且 $\lambda=k^2$ 是 $\mathbf{H}$ 的特征值。由 [14, 引理 10.2]，我们有

$$\Sigma(\{\lambda\})=\frac{\langle\cdot,L_\alpha(\mathbf{F}_{-1})\rangle_{\mathbb{C}^2}}{\|\mathbf{F}_{-1}\|_{L^2}^2}L_\alpha(\mathbf{F}_{-1}).$$

利用 $\mathbf{F}_{-1}$ 的公式 (3.8)，我们得到

$$\Sigma(\{\lambda\})=\frac{1}{2\|e\|^2}\begin{pmatrix}|\ell_\alpha(\mathbf{e})|^2 & -\overline{\ell_\alpha(\mathbf{e})}^2\\ -\ell_\alpha(\mathbf{e})^2 & |\ell_\alpha(\mathbf{e})|^2\end{pmatrix},$$

而公式 (3.11) 可直接由 (2.14) 得出。定理 3.5 的证明至此完成。□

6.5. **重新讨论自伴情形**。我们来讨论 $q=q\in L^1(\mathbb{R}_+)$ 和 $\alpha\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 的情形。在这种情况下，谱对的公式 (3.10) 和 (3.11) 得以简化。首先注意到，命题 3.3 中的标量约斯特解 $\mathbf{e}$ 是实值的。

令 $\lambda>0$。首先讨论 $\psi(\lambda)$。由于 (3.11) 中的 $\ell_\alpha(\mathbf{e})$ 和式中的 $\ell_\alpha^\perp(\mathbf{e})$ 都是实数, (3.10) 我们得到

$$\psi(\lambda)=\begin{cases}-1, & \text{if } \lambda\in\sigma_{\mathrm{p}}(\mathbf{H}),\\ 1, & \text{if } \lambda\notin\sigma_{\mathrm{p}}(\mathbf{H}).\end{cases}$$

当 $\lambda>0$ 是 $\mathbf{H}$ 的特征值时，式 (3.11) 中的 $\nu(\{\lambda\})$ 公式保持不变。然而，如果 $\lambda>0$ 不是 $\mathbf{H}$ 的特征值，则式 (3.10) 中的密度 $\mathrm{d}\nu/\mathrm{d}\lambda$ 公式可简化。首先注意，在自伴情形下，我们可以写成

$$f_{+\mathrm{i}}(x,k)e_+\in\mathbf{F}_{+\mathrm{i}}(x,k),\quad k=\sqrt{\lambda}>0,$$

其中 $f_{+\mathrm{i}}$ 是满足渐近行为 (1.8) 的方程 (1.5) 的约斯特解。采用这一记号，$\mathrm{d}\nu/\mathrm{d}\lambda$ 的公式可简化为

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda)=\frac{k}{2\pi}\frac{1}{|\ell_\alpha^\perp(f_{+\mathrm{i}}(\cdot,k))|^2}.$$

注意到，这与谱密度公式 (1.10) 一致，因为根据定理 1.7]，$\mathrm{d}\sigma(\lambda)=2\mathrm{d}\nu(\lambda)$。

7. Scattering theory perspective

本节旨在证明定理 3.7。

7.1. 对称关系和基展开。 我们将使用朗斯基行列式 (2.15)。利用 (2.16) 和边界条件 (3.12)，对于任意 F 和$j=1$，2，我们得到

$$[\Phi_j,F](0)=-\langle\varepsilon e_j,L_\alpha^\perp(F)\rangle=-\langle e_{3-j},L_\alpha^\perp(F)\rangle. \tag{7.1}$$

利用定理 3.1 的渐近行为，我们来计算约斯特解 $\mathbf{F}_{\pm\mathrm{i}}$、$\mathbf{F}_{\pm1}$ 在无穷远处的朗斯基行列式:

$$\begin{aligned}
&[\mathbf{F}_{-1},\mathbf{F}_{-1}]=[\mathbf{F}_{-1},\mathbf{F}_{+\mathrm{i}}]=[\mathbf{F}_{-1},\mathbf{F}_{-\mathrm{i}}]=0,\\
&[\mathbf{F}_{-1},\mathbf{F}_{+1}]=4k,\\
&[\mathbf{F}_{+\mathrm{i}},\mathbf{F}_{+\mathrm{i}}]=-[\mathbf{F}_{-\mathrm{i}},\mathbf{F}_{-\mathrm{i}}]=4\mathrm{i}k,\\
&[\mathbf{F}_{+\mathrm{i}},\mathbf{F}_{-\mathrm{i}}]=[\mathbf{F}_{-\mathrm{i}},\mathbf{F}_{+\mathrm{i}}]=0.
\end{aligned}$$

无法明确计算其余的朗斯基行列式。

利用这一点和 (7.1)，我们分别将 (3.13)、(3.14) 两边与解$\mathbf{F}_{-1}$、$\mathbf{F}_{+\mathrm{i}}$取朗斯基行列式:

$$[\Phi_2,\mathbf{F}_{-1}]: \qquad \langle e_1,L_\alpha^\perp(\mathbf{F}_{-1})\rangle=4k\gamma_{+1}^2, \tag{7.2}$$

$$[\Phi_1,\mathbf{F}_{-1}]: \qquad \langle e_2,L_\alpha^\perp(\mathbf{F}_{-1})\rangle=4k\gamma_{+1}^1, \tag{7.3}$$

$$[\Phi_2,\mathbf{F}_{+\mathrm{i}}]: \qquad -\langle e_1,L_\alpha^\perp(\mathbf{F}_{+\mathrm{i}})\rangle=4\mathrm{i}k\gamma_{+\mathrm{i}}^2+\gamma_{+1}^2[\mathbf{F}_{+1},\mathbf{F}_{+\mathrm{i}}], \tag{7.4}$$

$$[\Phi_1,\mathbf{F}_{+\mathrm{i}}]: \qquad -\langle e_2,L_\alpha^\perp(\mathbf{F}_{+\mathrm{i}})\rangle=4\mathrm{i}k\gamma_{+\mathrm{i}}^1+\gamma_{+1}^1[\mathbf{F}_{+1},\mathbf{F}_{+\mathrm{i}}]. \tag{7.5}$$

接下来，我们将 $\ell_\alpha^\perp(\mathbf{e})$ 与系数 γ 联系起来。根据$\mathbf{F}_{-1}$的特殊结构 (3.8) 和 $L_\alpha^\perp$ 的定义 (2.5)，我们有

$$L_\alpha^\perp(\mathbf{F}_{-1})=\begin{pmatrix}\overline{\ell_\alpha^\perp(\mathbf{e})}\\-\ell_\alpha^\perp(\mathbf{e})\end{pmatrix},$$

因此，由 (7.2) 和 (7.3) 得

$$4k\gamma_{+1}^1=\overline{\langle L_\alpha^\perp(\mathbf{F}_{-1}),e_2\rangle}=-\overline{\ell_\alpha^\perp(\mathbf{e})}, \tag{7.6}$$

$$4k\gamma_{+1}^2=\overline{\langle L_\alpha^\perp(\mathbf{F}_{-1}),e_1\rangle}=\ell_\alpha^\perp(\mathbf{e}), \tag{7.7}$$

由此得出（3.15）。

7.2. **定理 3.7(i) 的证明：** 假设 $\lambda > 0$ 不是**H**的特征值。

公式 (3.10) 包含行列式 $\det\{L_\alpha^\perp(\mathbf{F}_{+\mathrm{i}})\ L_\alpha^\perp(\mathbf{F}_{-1})\}$。让我们用系数 γ 计算它。计算这个行列式的复共轭将会很方便:

$\overline{\det\{L_\alpha^\perp(\mathbf{F}_{+\mathrm{i}})\ L_\alpha^\perp(\mathbf{F}_{-1})\}} = \langle e_1, L_\alpha^\perp(\mathbf{F}_{+\mathrm{i}})\rangle\langle e_2, L_\alpha^\perp(\mathbf{F}_{-1})\rangle - \langle e_2, L_\alpha^\perp(\mathbf{F}_{+\mathrm{i}})\rangle\langle e_1, L_\alpha^\perp(\mathbf{F}_{-1})\rangle$.当我们使用方程 (7.2)–(7.5) 计算行列式时，可以看到包含 $[\mathbf{F}_{+1},\mathbf{F}_{+\mathrm{i}}]$ 的项相互抵消，从而得到

$$\overline{\det\{L_\alpha^\perp(\mathbf{F}_{+\mathrm{i}}), L_\alpha^\perp(\mathbf{F}_{-1})\}} = 16\mathrm{i}k^2(\gamma_{+1}^2\gamma_{+\mathrm{i}}^1 - \gamma_{+1}^1\gamma_{+\mathrm{i}}^2). \tag{7.8}$$

特别地，根据定理 3.5(i)，右端的表达式 $\gamma_{+1}^2\gamma_{+\mathrm{i}}^1 - \gamma_{+1}^1\gamma_{+\mathrm{i}}^2$ 定义明确且不为零。

由于 $\lambda > 0$ 不是**H**的特征值，根据命题 3.3，有 $\ell_\alpha^\perp(\mathbf{e}) \neq 0$，因此由 (7.6) 可知 γ_{+1}^1 不为零。最后，将 (7.8) 和 (7.6) 代入 (3.10)，即可得到定理 3.7 的断言 (i)。

7.3. **定理 3.7(ii) 的证明：** 假设 $\lambda > 0$ 是**H**的特征值。下面将谱对的公式 (3.11) 改写为关于系数 γ 的形式。

回顾一下，$\lambda > 0$ 是特征值，当且仅当 $\ell_\alpha^\perp(\mathbf{e}) = 0$。由 (7.6)、(7.7) 可知，在本例中

$$\gamma_{+1}^1 = \gamma_{+1}^2 = 0,$$

因此，展开式 (3.13)、(3.14) 在右侧不含带有 $\mathbf{F}_{+1}$ 的项。由此可知，系数 $\gamma_{\pm\mathrm{i}}^1$、$\gamma_{\pm\mathrm{i}}^2$ 是唯一确定的，唯一的不确定性在于系数 γ_{-1}^1、γ_{-1}^2。

我们注意到，$\lambda > 0$ 是特征值，当且仅当存在一个非平凡线性组合 $a_1\Phi_1 + a_2\Phi_2$ 属于 $L^2(\mathbb{R}_+)$。这意味着，对于这些 a_1 和 a_2，展开式 (3.13)、(3.14) 中的系数满足

$$a_1\gamma_{+\mathrm{i}}^1 + a_2\gamma_{+\mathrm{i}}^2 = 0, \tag{7.9}$$

$$a_1\gamma_{-\mathrm{i}}^1 + a_2\gamma_{-\mathrm{i}}^2 = 0. \tag{7.10}$$

引理 7.1。 在上述假设下，所有系数 a_1、a_2、$\gamma_{\pm\mathrm{i}}^1$、$\gamma_{\pm\mathrm{i}}^2$ 均非零。此外，我们有

$$\gamma_{+\mathrm{i}}^2 = \overline{\gamma_{-\mathrm{i}}^1}, \quad \gamma_{-\mathrm{i}}^2 = \overline{\gamma_{+\mathrm{i}}^1} \tag{7.11}$$

and

$$|\gamma_{+\mathrm{i}}^1| = |\gamma_{-\mathrm{i}}^1| = |\gamma_{+\mathrm{i}}^2| = |\gamma_{-\mathrm{i}}^2|. \tag{7.12}$$

证明。 我们回顾一下，若 F 是特征值方程 (3.1) 的一个解，其中 k^2 为实数且 Q 如 (2.3) 所示，则 εF 也是同一方程的一个解。将变换 $X \mapsto \epsilon X$ 应用于方程 (3.13) 和 (3.14)，并考察边界条件，可得

$$\varepsilon\overline{\Phi_2} = \Phi_1.$$

由此可得方程 (7.11)。

在方程中

$$a_1\Phi_1 + a_2\Phi_2 = (a_1\gamma^1_{-1} + a_2\gamma^2_{-1})\mathbf{F}_{-1},$$

让我们计算两部分的 L_α 。利用（3.12），并回顾$\mathbf{F}_{-1}$的结构（3.8），可得

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \overline{\ell_\alpha(\mathbf{e})} \\ -\ell_\alpha(\mathbf{e}) \end{pmatrix}, \quad C = -(a_1\gamma^1_{-1} + a_2\gamma^2_{-1}). \tag{7.13}$$

特别地，这意味着 $|a_1| = |a_2|$。由于根据假设， a_1 和 a_2 不同时为零，因此可知它们均非零。

假设 $\gamma^1_{+\mathrm{i}} = 0$。由（7.9）中的第一个方程可得 $\gamma^2_{+\mathrm{i}} = 0$。由（7.11）可得 $\gamma^1_{-\mathrm{i}} = \gamma^2_{-\mathrm{i}} = 0$。回到展开式（3.13）、（3.14），我们看到 Φ_1 和Φ_2 共线，这与这些解所满足的边界条件（3.12）不相容。矛盾，因此 $\gamma^1_{+\mathrm{i}} \neq 0$。同样的论证表明，系数 $\gamma^1_{\pm\mathrm{i}}$、 $\gamma^2_{\pm\mathrm{i}}$ 均不为零。最后，由于 a_1 和 a_2 非零，根据（7.9）、（7.10）和（7.11）可得（7.12）。□

现在我们可以完成定理 3.7(ii) 的证明。让我们回到 (7.13)。注意到 (3.11)，可得

$$\psi(\lambda) = -\frac{\overline{\ell_\alpha(\mathbf{e})}}{\ell_\alpha(\mathbf{e})} = \frac{a_1}{a_2}.$$

由此以及 (7.9)、(7.10)，我们得到

$$\psi(\lambda) = \frac{a_1}{a_2} = -\frac{\gamma^2_{+\mathrm{i}}}{\gamma^1_{+\mathrm{i}}} = -\frac{\gamma^2_{-\mathrm{i}}}{\gamma^1_{-\mathrm{i}}}. \tag{7.14}$$

接下来，让我们用系数 γ 表示 (3.11) 第一个公式中的分子 $|\ell_\alpha(\mathbf{e})|^2$ 。考虑 (7.13) 中的第一个方程:

$$a_1 = -(a_1\gamma^1_{-1} + a_2\gamma^2_{-1})\overline{\ell_\alpha(\mathbf{e})}.$$

两边除以 a_1 并利用 (7.14)，得到

$$1 = -(\gamma^1_{-1} - \frac{\gamma^1_{-\mathrm{i}}}{\gamma^2_{-\mathrm{i}}}\gamma^2_{-1})\overline{\ell_\alpha(\mathbf{e})}.$$

由此可得 $\gamma^1_{-\mathrm{i}}\gamma^2_{-1} - \gamma^1_{-1}\gamma^2_{-\mathrm{i}} \neq 0$ ，并且

$$\overline{\ell_\alpha(\mathbf{e})} = \frac{\gamma^2_{-\mathrm{i}}}{\gamma^1_{-\mathrm{i}}\gamma^2_{-1} - \gamma^1_{-1}\gamma^2_{-\mathrm{i}}}. \tag{7.15}$$

将其代入 (3.11) 中的第一个公式，并利用 (7.12)，我们得到

$$\nu(\{\lambda\}) = \frac{1}{2\|\mathbf{e}\|^2}\frac{|\gamma^1_{+\mathrm{i}}|^2}{|\gamma^1_{-1}\gamma^2_{-\mathrm{i}} - \gamma^1_{-\mathrm{i}}\gamma^2_{-1}|^2}.$$

此外，方程 (7.15) 还证明分母 $\gamma_{-1}^1\gamma_{-\mathrm{i}}^2-\gamma_{-\mathrm{i}}^1\gamma_{-1}^2$ 有明确定义，因为 $\gamma_{-\mathrm{i}}^2$ 和 ℓ_α（e）都有明确定义。定理 3.7 的证明至此完成。

8. The Born approximation for the spectral pair

这里我们证明命题 3.8。事实上，对于任意边界参数 $\alpha\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$，我们给出一组更一般的公式。为便于阅读，下文用 $\mathcal{O}(q^2)$ 代替 $\mathcal{O}(\|q\|_{L^1}^2)$。

8.1. 自伴情形。 作为动机并便于比较，我们首先简要推导具有 $q=q\in L^1(\mathbb{R}_+)$ 和 $\alpha\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 的自伴算子在 $\mathbb{R}_+$ 上的谱测度的玻恩近似。由约斯特解 $f_{+\mathrm{i}}$ 的积分方程,

$$f_{+\mathrm{i}}(x,k)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}-\frac{1}{k}\int_x^\infty q(y)\sin(k(x-y))f_{+\mathrm{i}}(y,k)\mathrm{d}y,$$

我们得到

$$f_{+\mathrm{i}}(x,k)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}-\frac{1}{k}\int_x^\infty q(y)\sin(k(x-y))\mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\mathrm{d}y+\mathcal{O}(q^2),$$

因此

$$\begin{aligned}f_{+\mathrm{i}}(0,k)&=1+\frac{1}{k}\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\sin(ky)q(y)\mathrm{d}y+\mathcal{O}(q^2),\\ f'_{+\mathrm{i}}(0,k)&=\mathrm{i}k-\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\cos(ky)q(y)\mathrm{d}y+\mathcal{O}(q^2).\end{aligned}$$

根据定义 (1.3)，我们得到对于 $\alpha\in\mathbb{R}$,

$$\ell_\alpha^\perp(f_{+\mathrm{i}})=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\left(\alpha+\mathrm{i}k+\frac{1}{k}\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\left[\alpha\sin(ky)-k\cos(ky)\right]q(y)\mathrm{d}y\right)+\mathcal{O}(q^2).$$

经过简短计算，得到展开式

$$\begin{aligned}|\ell_\alpha^\perp(f_{+\mathrm{i}})|^2=\frac{1}{1+\alpha^2}\Bigg(\alpha^2+k^2+\frac{\alpha^2-k^2}{k}\int_0^\infty\sin(2ky)q(y)\mathrm{d}y\\ -2\alpha\int_0^\infty\cos(2ky)q(y)\mathrm{d}y\Bigg)+\mathcal{O}(q^2).\end{aligned}$$

代入（1.10），得到最终公式

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda)=\frac{1}{\pi}\frac{1+\alpha^2}{k^2+\alpha^2}\Bigg(k-\frac{\alpha^2-k^2}{\alpha^2+k^2}\int_0^\infty\sin(2ky)q(y)\mathrm{d}y\\ +\frac{2k\alpha}{\alpha^2+k^2}\int_0^\infty\cos(2ky)q(y)\mathrm{d}y\Bigg)+\mathcal{O}(q^2)\end{aligned}\tag{8.1}$$

适用于 $k \stackrel{-}{=} \sqrt{\lambda} > 0$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}$。当我们形式上令上述公式中的 $\alpha \to \infty$ 趋于极限时，便可恢复狄利克雷情形 $\alpha = \infty$下的正确结果（3.16）。

8.2. 非自伴情形。接下来，我们计算复值 $q \in L^1(\mathbb{R})$ 和 $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$对应的谱对（$\nu$, ψ）的类似于 (8.1) 的展开式。复数 α 的展开式可用相同的计算步骤求得，但得到的公式更为复杂。以下计算在许多方面都类似于引理 5.2 的证明。

我们假设 Q具有 (2.3) 的形式，并记

$$u(x) = \operatorname{Re} q(x) \quad \text{and} \quad v(x) = \operatorname{Im} q(x)$$

为简便起见。关于 F_{-1} 的积分方程 (4.21) 给出

$$\begin{aligned} F_{-1}(x,k) = \mathrm{e}^{-kx} e_- &+ \frac{1}{k}\int_x^\infty \mathrm{e}^{-ky}\sinh(k(x-y))P_-Q(y)e_-\mathrm{d}y \\ &- \frac{1}{k}\int_x^\infty \mathrm{e}^{-ky}\sin(k(x-y))P_+Q(y)e_-\mathrm{d}y + \mathcal{O}(q^2) \end{aligned}$$

对于 $k > 0$。利用 (5.5) 中的恒等式，我们很容易推出

$$\begin{aligned} F_{-1}(0,k) = e_- &+ \frac{1}{k}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ky}\sinh(ky)u(y)\mathrm{d}y\, e_- \\ &- \frac{\mathrm{i}}{k}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ky}\sin(ky)v(y)\mathrm{d}y\, e_+ + \mathcal{O}(q^2) \end{aligned} \tag{8.2}$$

and

$$\begin{aligned} F'_{-1}(0,k) = -ke_- &- \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ky}\cosh(ky)u(y)\mathrm{d}y\, e_- \\ &+ \mathrm{i}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ky}\cos(ky)v(y)\mathrm{d}y\, e_+ + \mathcal{O}(q^2). \end{aligned} \tag{8.3}$$

类似地，从关于 $F_{+\mathrm{i}}$ 的积分方程 (4.22) 出发（当 q 足够小时，我们可以令 $r = 0$），并利用恒等式

$$P_+Q(x)e_+ = u(x)e_+, \quad P_-Q(x)e_+ = \mathrm{i}v(x)e_-,$$

对于 $k > 0$，结果为等式

$$F_{+\mathrm{i}}(0,k) = e_+ + \frac{1}{k}\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\sin(ky)u(y)\mathrm{d}y\, e_+ + \frac{\mathrm{i}}{2k}\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}ky-ky}v(y)\mathrm{d}y\, e_- + \mathcal{O}(q^2), \tag{8.4}$$

$$F'_{+\mathrm{i}}(0,k) = \mathrm{i}ke_+ - \int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\cos(ky)u(y)\mathrm{d}y\, e_+ - \frac{\mathrm{i}}{2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}ky-ky}v(y)\mathrm{d}y\, e_- + \mathcal{O}(q^2). \tag{8.5}$$

回顾式 (3.8)，由式 (8.2) 和 (8.3) 可得

$$\mathbf{e}(0,k) = 1 + \frac{1}{k}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ky}\sinh(ky)u(y)\mathrm{d}y + \frac{\mathrm{i}}{k}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ky}\sin(ky)v(y)\mathrm{d}y + \mathcal{O}(q^2),$$
$$\mathbf{e}'(0,k) = -k - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ky}\cosh(ky)u(y)\mathrm{d}y - \mathrm{i}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ky}\cos(ky)v(y)\mathrm{d}y + \mathcal{O}(q^2).$$

那么，对于 $\alpha \in \mathbb{R}$，我们得到

$$\ell_\alpha^\perp(\mathbf{e}) = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\bigg(\alpha - k + \frac{1}{k}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ky}\left[\alpha\sinh(ky) - k\cosh(ky)\right]u(y)\mathrm{d}y + \frac{\mathrm{i}}{k}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ky}\left[\alpha\sin(ky) - k\cos(ky)\right]v(y)\mathrm{d}y\bigg) + \mathcal{O}(q^2). \quad (8.6)$$

由此以及公式 (3.10)，我们推导出

$$\psi(\lambda) = 1 + \frac{2\mathrm{i}}{k(\alpha-k)}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ky}\left[\alpha\sin(ky) - k\cos(ky)\right]v(y)\mathrm{d}y + \mathcal{O}(q^2), \quad (8.7)$$

该式对 $\lambda = \sqrt{k} > 0$ 和 $k \neq \alpha$ 成立，条件是 $\alpha > 0$。由 (8.6) 也可直接算得

$$|\ell_\alpha^\perp(\mathbf{e})|^2 = \frac{\alpha-k}{1+\alpha^2}\bigg(\alpha - k + \frac{2}{k}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ky}\left[\alpha\sinh(ky) - k\cosh(ky)\right]u(y)\mathrm{d}y\bigg) + \mathcal{O}(q^2).$$

另一方面，计算 $\det\{L_\alpha^\perp(\mathbf{F}_{+\mathrm{i}})\ L_\alpha^\perp(\mathbf{F}_{-1})\}$，则需要较繁琐地应用公式 (8.2)、(8.3)、(8.4) 和 (8.5)。略去计算细节，并利用 (3.10)，我们得到 ν 的密度的最终公式：

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\frac{1+\alpha^2}{k^2+\alpha^2}\bigg(k - \frac{\alpha^2-k^2}{\alpha^2+k^2}\int_0^\infty \sin(2ky)u(y)\mathrm{d}y + \frac{2k\alpha}{\alpha^2+k^2}\int_0^\infty \cos(2ky)u(y)\mathrm{d}y\bigg) + \mathcal{O}(q^2) \quad (8.8)$$

对于 $k = \sqrt{\lambda} > 0$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}$。

在狄利克雷情形 $\alpha = \infty$下，玻恩近似公式可通过在 (8.7) 和 (8.8) 中取极限 $\alpha \to \infty$ 得到，从而导出 (3.17) 和 (3.18)。

Appendix A. The Schrödinger operator H with $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$

A.1. 预备知识。这里我们回顾复势半直线上薛定谔算子谱理论的相关事实，并概述命题 2.1 的证明。我们的主要参考文献是 [4]；我们将在本附录末尾讨论相关历史。

我们用 $\mathrm{AC}(\mathbb{R}_+)$ 表示 $\mathbb{R}_+$ 上绝对连续函数的集合，用 $\mathrm{AC}^1(\mathbb{R}_+)$ 表示满足 $f' \in \mathrm{AC}(\mathbb{R}_+)$ 的 $f \in \mathrm{AC}(\mathbb{R}_+)$。对于 $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$，我们设

$$D_{\max}(q) = \{f \in L^2(\mathbb{R}_+) \cap \mathrm{AC}^1(\mathbb{R}_+) : -f'' + qf \in L^2(\mathbb{R}_+)\}.$$

我们注意到，对于复值 q，一般而言 $D_{\max}(q) \neq D_{\max}(q)$；参见引人注目的例子 [4,引理 4.10(2)]。

根据 [4, 命题 5.1], ，任意 $f \in D_{\max}(q)$ 都可延拓为定义在 $[0,\infty)$ 上的 C^1-光滑函数；特别地，线性泛函 $f(0)$、 $f'(0)$ 和 $\ell_\alpha^\perp(f)$ 均有定义，其值即为相应的极限值。因此，定义域 $H = H(q,\ \alpha)$ 的定义 (1.14) 是有意义的，我们将其写作

$$\operatorname{Dom} H(q,\alpha) = \{f \in D_{\max}(q) : \ell_\alpha^\perp(f) = 0\},$$

有意义。

A.2. **极大算子与格林恒等式**。除了 $H(q,\ \alpha)$ 之外，我们还考虑极大算子 $H_{\max} = H_{\max}(q)$，它由与 H 相同的微分表达式定义，定义域为 $\operatorname{Dom} H_{\max}(q) = D_{\max}(q)$。根据 [4, 定理 4.4(1)],，算子 $H_{\max}(q)$ 是闭且稠定的。

假设 $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$，对于任意 $f \in \operatorname{Dom} H_{\max}(q)$ 和 $g \in \operatorname{Dom} H_{\max}(q)$，我们有格林恒等式 [4,定理 4.4(3)]:

$$\langle H_{\max}(q)f, g\rangle - \langle f, H_{\max}(\overline{q})g\rangle = f'(0)\overline{g(0)} - f(0)\overline{g'(0)}. \tag{A.1}$$

这里至关重要的是无穷远处的边界项消失，这是假设 $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$ 的结果；事实上，只需假设

$$\limsup_{c\to\infty} \int_c^{c+1} |q(x)|\mathrm{d}x < \infty,$$

参见 [4, 命题 5.15]。正是 (A.1) 中无穷远处边界项的消失，构成了极限点条件的非自伴类比。

引理 A.1. 对于任意复数 p_0 和 p_1，存在 $f \in D_{\max}(q)$，满足 $f(0) = p_0$和 $f'(0) = p_1$，且在 $[0,\infty)$ 中紧支撑。

证明。 设给定 p_0 和 p_1 。根据 [4, 命题 2.5], ，存在 $g \in \mathsf{AC}^1([0,\infty))$，使得 $g(0) = p_0$, $g'(0) = p_1$ 且 $-g'' + qg \in L^2(\mathbb{R}_+)$。令 $f = g\varphi$，其中 φ 为 C^2-光滑函数， $\varphi(x) = 1$ （当 $x \leq 1$ 时），且 $\varphi(x) = 0$ （当 $x \geq 2$时）。于是 $f \in \mathsf{AC}^1([0,\infty)) \cap L^2(\mathbb{R}_+)$, f 满足零点处所需的边界条件，并且

$$-f'' + qf = (-g'' + qg)\varphi - 2g'\varphi' - g\varphi'' \in L^2(\mathbb{R}_+).$$

因此， $f \in D_{\max}(q)$，如前所述。 □

A.3. **极小算子**。 采用 [4, 定义 4.3], 的记号，我们用 $H_c(q)$表示 $H_{\max}(q)$在定义域上的限制

$$D_c(q) = \{f \in D_{\max}(q) : f \text{ is compactly supported in } (0,\infty)\}.$$

由于 $H_c(q) \subset H_{\max}(q)$ 且 $H_{\max}(q)$ 是闭的，因此 $H_c(q)$ 是可闭的，我们用 $H_{\min}(q)$ 表示其算子闭包。根据 [4, 的第 (1)、(2) 和 (5) 部分

定理 4.4)], 算子 $H_{\min}(q)$ 是稠定的, $H_{\min}(q)^* = H_{\max}(q)$, $H_{\max}(q)^* = H_{\min}(q)$ 且

$$\operatorname{Dom} H_{\min}(q) = \{f \in D_{\max}(q) : f(0) = f'(0) = 0\}. \tag{A.2}$$

$H_{\min}(q)$ 是 $H_c(q)$ 的闭包这一事实可以改述如下: 集合 $D_c(q)$ 在 H 的图范数下于 $\operatorname{Dom} H_{\min}(q)$ 中稠密。

A.4. 命题 2.1 的证明。在 [4, 定理 4.4(1)], 中证明了 $\operatorname{Dom} H_{\min}(q)$ 在 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 中稠密。因此, $\operatorname{Dom} H(q,\alpha)$ 在 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 中也稠密。 $H(q,\alpha)$ 的闭性将由 $H(q,\alpha)^* = H(q,\alpha)$ 得出, 将其改写为 $H(q,\alpha) = H(q,\alpha)^*$。

让我们证明 $H(q,\alpha)^* = H(q,\alpha)$。设 $f \in \operatorname{Dom} H(q,\alpha)$, $g \in \operatorname{Dom} H(q,\alpha)$。那么 $\ell_\alpha^\perp(f) = \ell_\alpha^\perp(g) = 0$, 因此 (A.1) 中的边界项消失:

$$\langle H(q,\alpha)f, g\rangle = \langle f, H(\overline{q},\overline{\alpha})g\rangle.$$

这证明了 $H(q,\alpha) \subset H(q,\alpha)^*$。

下面证明反向包含关系 $H(q,\alpha)^* \subset H(q,\alpha)$。注意, $H_{\min}(q) \subset H(q,\alpha)$, 因此 $H(q,\alpha)^* \subset H_{\min}(q)^* = H_{\max}(q)$。还需证明, 任意满足边界条件 $\ell_\alpha^\perp(g) = 0$ 的 $g \in \operatorname{Dom} H(q,\alpha)^*$ 都满足。利用引理 A.1, 任取 $f \in \operatorname{Dom} H_{\max}(q)$, 使得

$$\begin{aligned} f(0) = 1, \quad f'(0) = -\alpha, \quad &\text{if } \alpha \in \mathbb{C}, \\ f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad &\text{if } \alpha = \infty. \end{aligned}$$

于是 $f \in \operatorname{Dom} H(q,\alpha)$, 因此我们有

$$\langle H_{\max}(q)f, g\rangle = \langle H(q,\alpha)f, g\rangle = \langle f, H(q,\alpha)^* g\rangle = \langle f, H_{\max}(\overline{q})g\rangle.$$

由 (A.1) 可得

$$f'(0)\overline{g(0)} = f(0)\overline{g'(0)}.$$

代入 $f(0)$ 和 $f'(0)$ 的值, 可得 $\ell_\alpha^\perp(g) = 0$, 证毕。 □

A.5. $(-\infty, \alpha)$ 定义域中的稠密集。 这里给出一个引理, 该引理将在附录 B 中用到。

引理 A.2. 集合

$$\{f \in \operatorname{Dom} H(q,\alpha) : f \textit{ is compactly supported in } [0,\infty)\}$$

在 $H(q,\alpha)$的图范数下, 在 $\operatorname{Dom} H(q,\alpha)$ 中稠密。

证明。令 $f \in \operatorname{Dom} H(q,\alpha)$。根据引理 A.1, 取在 $[0,\infty)$ 中紧支撑的 $g \in D_{\max}(q)$, 并满足 $g(0) = f(0)$, $g'(0) = f'(0)$。于是 $h = f - g$属于 $H_{\min}(q)$, 见 (A.2)。因此, 根据 $H_{\min}(q)$ 的定义, 存在一列元素 $h_n \in D_c(q)$, 使得 $h_n \to h$ 在 H 的图范数下收敛于 $n \to \infty$。记为 $f_n = h_n + g$; 则 $f_n \to f$ 在 H的图范数下收敛。此外, 每个f_n 都在 $[0,\infty)$ 中紧支撑, 属于 $D_{\max}(q)$, 并满足与 g相同的零点边界条件, 即 $\ell_\alpha^\perp(f_n) = 0$。因此, $f_n \in \operatorname{Dom} H(q,\alpha)$。□

A.6. **总结**。当然，本附录讨论的主题是经典问题，其研究可追溯至韦尔和蒂奇马什，他们研究的是实连续 q。即使在实 q的情形下，仅在假设 $q \in L^1_{\mathrm{loc}}$ 成立的条件下，将 H 描述为 L^2上的闭算子，也存在显著的技术困难，因为一般而言，尚无已知的、适用于 H定义域的便利稠密集。据我们所知，与实 $q \in L^1_{\mathrm{loc}}$ 相关的技术困难最早由斯通 [19]解决；有限区间情形另见克рейн [11] ，半直线情形另见格拉兹曼 [9]。将韦尔极限点型/极限圆型分析推广到复势，可追溯至西姆斯 [18]和埃弗里特 [5]。

我们采用 Derezinski–Georgescu [4],这篇较为现代（且非常系统）的论文，它综合了这一主题的早期研究。该文专门致力于描述复 q 的闭扩张 $H_{\min}(q)$，唯一假设为$q \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$（[4] 也考虑了整条实线和有限区间的情形）。我们注意到， [4]采用转置算子 的语言进行表述，而非伴随算子的语言，不过将其论述转换为伴随算子的语言并不困难。

Appendix B. The hermitised operator $\mathbf{H}$ with $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$

这里我们简要评述命题 2.2 和 2.3 的证明。

B.1. **维数引理**。

引理 B.1 (维数引理). 对于任意 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$，空间的维数

$$S(\lambda) = \{F \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2) : F \text{ is a solution of } (2.9)\} \tag{B.1}$$

等于 2。

证明。 $S(\lambda)$ 在上、下半平面中的维数与算子 $\mathbf{H}$ 限制在 $\operatorname{Dom} H_{\min}(q) \oplus \operatorname{Dom} H_{\min}(q)$ 上时的亏格指标一致。特别地，$\dim S(\lambda)$ 在上、下半平面中为常数。¯ 例如，取 λ 属于开第一象限。由定理 3.1 可知，方程 (2.9) 恰有两个线性无关的 L^2-解，因此 $S(\lambda)$ 的维数等于 2。对下半平面也可用同样的论证。□

B.2. **命题 2.2 的证明**。命题 2.2 证明中最困难的部分是矩阵 $M_\alpha(\lambda)$ 的存在唯一性；通常在韦尔极限点理论的框架下证明，参见例如 [14, 附录 A.2] ，其中给出了自成一体的论述。

我们希望说明，在我们的设定 $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$ 中，矩阵 $M_\alpha(\lambda)$ 的存在唯一性可由维数引理轻易推出。固定 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$，并令 $S(\lambda)$ 如 (B.1) 中所示。令 Φ_1 和 Φ_2 为解 Φ 的列，同样地，令 Θ_1 和 Θ_2 为 Θ 的列。注意到 Φ_1 和 Φ_2 线性无关；此外， Φ_1 和 Φ_2 的线性张成与 $S(\lambda)$ 的交集为零，因为非实 λ 不可能是 $\mathbf{H}$ 的特征值。因此，

特征值方程 (2.9) 的任意解都可以唯一地表示为： $S(\lambda)$ 中的一个解与由 Φ_1 和 Φ_2 线性张成的空间中的一个解之和。因此，对于每个非实 λ，存在唯一的一组系数 m_{jk}，使得

$$\Theta_1 + m_{11}\Phi_1 + m_{21}\Phi_2 \in S(\lambda) \quad \text{and} \quad \Theta_2 + m_{21}\Phi_1 + m_{22}\Phi_2 \in S(\lambda).$$

这给出了矩阵 $M_\alpha(\lambda)$。

我们来证明，当 k 位于第一象限时， $M_\alpha(k^2)$ 的解析性。根据引理 6.2 的表示，以及定理 5.1 中证明的解 F_{-1} 和 $F_{+\mathrm{i}}$ 的解析性与连续性性质， k 在扇区 S_0 中具有解析性，并可连续延拓至直线 $\arg k = \pi/4$ 。完全类似地，可以证明 $M_\alpha(k^2)$ 在扇区 $\pi/4 < \arg k < \pi/2$ 中具有解析性，并可连续延拓至直线 $\arg k = \pi/4$。重要的是， M_α 在对角线 $\arg k = \pi/4$ 两侧的极限值相同，这可由 M-函数定义的唯一性得出。通过运用莫雷拉定理的标准论证，我们得到 $M_\alpha(k^2)$ 在开第一象限内是解析的。

为完成命题 2.2 的证明，还需证明性质 (2.12)。该性质由下列恒等式得出

$$\operatorname{Im} M_\alpha(\lambda) = \operatorname{Im}\lambda \int_0^\infty X(x,\lambda)^* X(x,\lambda)\mathrm{d}x, \tag{B.2}$$

其中 $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 和 $X(\cdot,\ \lambda)$ 是由 (2.11) 定义的解。要推导 (B.2)，只需验证恒等式

$$\big(X'(x,\lambda)^*\epsilon X(x,\lambda) - X(x,\lambda)^*\epsilon X'(x,\lambda)\big)' = (\lambda - \overline{\lambda})X(x,\lambda)^* X(x,\lambda),$$

将其在 x 上从 0 积分到 ∞，并考虑 $x = 0$ 处的边界条件 (6.3) 和 (6.4)。

B.3. **命题 2.3(i) 的证明**。令 $L^2_\Sigma(\mathbb{R};\mathbb{C}^2)$ 表示由所有定义在 $\mathbb{R}$ 上的 $\mathbb{C}^2$ 值函数组成的空间，并赋予内积

$$\langle F, G\rangle = \int_{-\infty}^\infty \langle \mathrm{d}\Sigma(\lambda)F(\lambda), G(\lambda)\rangle_{\mathbb{C}^2}.$$

定义算子 $U\colon\ L^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^2) \to L^2_\Sigma(\mathbb{R};\mathbb{C}^2)$ 为

$$(UF)(\lambda) := \int_0^\infty \Phi(x,\lambda)^* F(x)\mathrm{d}x$$

首先定义在光滑紧支撑函数集 F 上，并令 Λ 为 $L^2_\Sigma(\mathbb{R};\mathbb{C}^2)$ 中关于自变量的乘法算子。命题 2.3(i) 可以更精确地表述如下。

命题 B.2. 算子 U 可延拓为从 $L^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^2)$ 到$L^2_\Sigma(\mathbb{R};\ \mathbb{C}^2)$的酉映射。此外， U与$\mathbf{H}$ 交织，即 $U\mathrm{Dom}\mathbf{H} \subset \mathrm{Dom}\ \Lambda$并且

$$U\mathbf{H}F = \Lambda U F \tag{B.3}$$

对所有 $F \in$ 算子$\mathbf{H}$。

应当将此命题视为已知结果；它可以归结为 Hinton 和 Shaw [10]广泛发展的哈密顿系统理论。然而，我们发现，从文献中提取相关事实并将其转化为算子 **H** 的语言并非易事，因此我们在[14, 附录 A.5] 中针对有界 q 给出了一个自成一体的证明。该证明中只有步骤 2（交织关系 (B.3) 的证明）依赖于q的有界性。下面说明困难所在，以及如何在 $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$ 的情形下克服这一困难。证明的核心只是一次简单的分部积分：

$$\begin{aligned} U\mathbf{H}F(\lambda) &= \int_0^\infty \Phi(x,\lambda)^*(\mathbf{H}F)(x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty (\mathbf{H}\Phi(x,\lambda))^* F(x)\mathrm{d}x \\ &= \lambda \int_0^\infty \Phi(x,\lambda)^* F(x)\mathrm{d}x = \lambda U F(\lambda) \end{aligned}$$

在一组适当的函数 F 上。难点在于选择一组合适的函数 F，使得一方面可以证明分部积分的合理性，另一方面这组函数在 **H** 的图范数下稠密于 Dom**H** 。对于有界的 q，只需取光滑函数 F，使其在所有充分大的 x 处均为零，并满足 **H** 在原点处的边界条件。对于 $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$，上述选择未必有效。不过，根据引理 A.2，可以改为取所有在 $[0,\infty)$ 中紧支撑的 $F \in \mathrm{Dom}\,\mathbf{H}$，从而解决这一难题。

B.4. **命题 2.3(ii) 的证明**。 命题 2.3 的第 (ii) 部分就是 [14] 的定理 1.2。该定理在 [14] 中针对 $q \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ 陈述，但实际上，他们的证明并未用到 q 的有界性。事实上， [14] 的定理 1.2 可由 (2.3) 中矩阵 Q 的对称性推出。

B.5. **命题 2.3(iii) 的证明**。 命题 2.3 的 (iii) 部分是 [14,定理 1.1]。 [14] 中给出的证明有一步 q 依赖于有界性（见 [14]的引理 A.5）。下面我们给出 [14, 定理 1.1] 的一个修改版证明，该证明适用于 $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$，并依赖于我们构造的约斯特解。

首先，我们给出 [14, 命题 3.3]的一个修改版本。

命题 B.3。 假设 $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$。令 $\alpha \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 和 $\lambda = k^2$ 满足$0 \leq \arg k \leq \pi/4$。那么，当 $|k| \to \infty$ 沿任意射线趋近时， M-函数满足

$$M_\alpha(\lambda) = \epsilon A + \frac{1+|\alpha|^2}{k}(\mathrm{i}P_+ - P_-) + \frac{1+|\alpha|^2}{k^2}(\mathrm{i}P_+ - P_-)\epsilon A(\mathrm{i}P_+ - P_-) + o(1/k^2), \tag{B.4}$$

若 $\alpha \neq \infty$，且

$$M_\infty(\lambda) = k(\mathrm{i}P_+ + P_-) + o(1), \tag{B.5}$$

如果 $\alpha = \infty$。

如果 $\alpha = 0$，表达式 (B.4) 可简化为

$$M_0(\lambda) = \frac{1}{k}(\mathrm{i}P_+ - P_-) + o(1/k^2). \tag{B.6}$$

证明。不同 α 值对应的 M-函数之间由以下显式变换联系（见 [14, 引理 8.2]）：

$$\begin{aligned} M_\alpha(\lambda) &= (\epsilon A + M_0(\lambda))(I - \epsilon A M_0(\lambda))^{-1}, \quad \text{if } \alpha \neq \infty, \\ M_\infty(\lambda) &= -\epsilon M_0(\lambda)^{-1}\epsilon, \qquad\qquad\qquad\quad \text{if } \alpha = \infty. \end{aligned}$$

这一变换和一些简单的代数运算将证明归结为 $\alpha = 0$ 的情形。因此，只需在 $|k| \to \infty$ 且 $0 \leq \arg k \leq \pi/4$ 的条件下证明 (B.6)。我们使用公式 (6.2)，它在 $\alpha = 0$ 的情形下可简化为

$$M_0(\lambda) = -E(0,k)(E'(0,k))^{-1}\epsilon. \tag{B.7}$$

我们回顾一下，$E = \{F_{+\mathrm{i}}, F_{-1}\}$，以及约斯特解 F_{-1} 和 $F_{+\mathrm{i}}$ 在扇区 $0 \leq \arg k \leq \pi/4$ 中的大 $|k|$ 渐近行为已在引理 5.2 中求得。将引理 5.2 的渐近行为代入 (B.7)，经过一些直接的代数运算后，我们得到 (B.6)。□

设$\mathbf{H}$（分别为 $\widehat{\mathbf{H}}$）是势为 $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$（分别为 $\widehat{q} \in L^1(\mathbb{R}_+)$）、边界参数为 α（分别为 $\widehat{\alpha}$）的算子 (2.3)。我们用带帽符号表示与$\mathbf{H}$相关的各种 $\widehat{\ }$ 量，例如 $\widehat{A}$、$\widehat{M_\alpha}(\lambda)$ 等。我们假设$\mathbf{H}$和$\widehat{\mathbf{H}}$ 的谱测度相同，即 $\Sigma = \widehat{\Sigma}$。我们的首要目标是证明 $\widehat{\alpha} = \alpha$，以及 $\widehat{M_\alpha}(\lambda) = M_\alpha(\lambda)$。下面的引理是对 [14,引理 5.4] 的略微改写版本。

引理 B.4. </style}若，则对所有，都有 和 (λ) $= M_\alpha(\lambda)$。

证明。利用积分表示式 (2.13)，由 $\Sigma = \widehat{\Sigma}$ 可得

$$\widehat{M_\alpha}(\lambda) - M_\alpha(\lambda) = \mathrm{const}. \tag{B.8}$$

根据命题 B.3，考察无穷远处的渐近行为，可知有两种可能：要么 $\widehat{\alpha} = \alpha = \infty$，要么 $\widehat{\alpha} \neq \infty$ 和 $\alpha \neq \infty$同时成立。

情形 *1*：$\widehat{\alpha} = \alpha = \infty$。此时，由 (B.5) 可得 $M_\infty = \widehat{M}_\infty$，证明完毕。

情形 *2*：$\widehat{\alpha} \neq \infty$ 且 $\alpha \neq \infty$。将 $\widehat{M_\alpha}(\lambda)$ 对应的渐近展开从 $M_\alpha(\lambda)$ 的相同渐近展开中相减，并利用 (B.8)。考察 $\mathcal{O}(1/k)$ 项，可得 $|\widehat{\alpha}| = |\alpha|$。利用这一事实并考察 $\mathcal{O}(1/k^2)$ 项，可得 $\widehat{A} = A$，即 $\widehat{\alpha} = \alpha$。现在重新考察 $\mathcal{O}(1)$ 项，可见它们相互抵消，因此 $\widehat{M_\alpha}(\lambda) - M_\alpha(\lambda) = 0$。□

《定理 1.1》在 [14]（$M_\alpha = \widehat{M}_\alpha$ 意味着 $Q = \widehat{Q}$）中的证明剩余部分完全基于对解 Φ 和 Θ 以及相应沃尔泰拉积分方程的分析；该分析不要求 q 的有界性。

References

[1] *C. Bennewitz*，《局部 *Borg–Marchenko* 定理的一个证明》，《数学物理通讯》*218*（*2001*），*131–132*。[2] *G. Borg*，《 $y'' + (\lambda - q(x))y = 0$谱理论中的唯一性定理》，第 *11* 届斯堪的纳维亚数学家大会，特隆赫姆，*1949*年，第 *276–287* 页。[3] *E. A. Coddington, N. Levinson*，《常微分方程理论》，麦格劳-希尔图书公司，纽约-多伦多-伦敦，*1955*年。[4] *J. Derezi´nski, V. Georgescu*：《具有复势的一维 *Schr¨odinger* 算子》，《亨利·庞加莱年刊》*21*（*2020*年），*1947–2008*。[5] *W. N. Everitt*，《常微分方程的平方可积解》，《牛津数学季刊》*10*（*2*）（*1959*年），*145–155*；*II*，《牛津数学季刊》*13*（*2*）（*1962*年），*217–220*；*III*，《牛津数学季刊》*14*（*2*）（*1963*年），*170–180*。[6] *F. Gesztesy, B. Simon*，《一维 *Schr¨odinger* 算子的逆谱理论中的唯一性定理》，《美国数学会汇刊》*348*（*1996*年），*349–373*。[7] *F. Gesztesy, B. Simon*，《逆谱理论的新方法，*II*：一般实势及其与谱测度的联系》，《数学年刊》*152*（*2000*年），*593–643*。[8] *F. Gesztesy, E. Tsekanovskii*，《关于矩阵值 *Herglotz* 函数》，《数学新闻》*218*（*2000*年），*61–138*。[9] *I. M. Glazman*，《关于奇异微分算子理论》，《俄罗斯数学调查》*5*（*1950*年），第 *6* 期，*102–135*。[10] *D. Hinton, K. Shaw*，《线性哈密顿系统的 *Titchmarsh-Weyl* $M(\lambda)$ 函数》，《微分方程杂志》*40*（*1981*年），*316–342*。[11] *M. G. Krein*，《半有界厄米变换的自伴扩张理论及其应用，*II*》，《数学文集》*63*，第 *3* 期（*1947*年），*365–404*。[12] *V. A. Marchenko*，《一维二阶线性微分算子理论中的若干问题，*I*》，《莫斯科数学会会刊》*1*（*1952*年），*327–*420 [俄文]；《美国数学会译丛》*101*（*1973*年），*1–104*。.[13] *J. Ostensson, D. Yafaev*，《任意阶微分算子的迹公式》，《算子理论：进展与应用》*218*（*2012*年），*541–570*。[14] *A. Pushnitski, F. ˇ Stampach*，《复势的 *Borg–Marchenko* 唯一性定理》，预印本（*2025*年），*arXiv:2503.03248*。[15] *M. Reed, B. Simon*，《现代数理物理方法。*II*：傅里叶分析、自伴性》，学术出版社，纽约，*1975*年。[16] *M. Reed, B. Simon*，《现代数理物理方法。*III*：散射理论》，学术出版社，纽约，*1979*年。[17] *B. Simon*，《逆谱理论的新方法，*I*：基本形式体系》，《数学年刊》*150*（*1999*年），*1029–1057*。[18] *A. R. Sims*，《二阶线性微分算子的次级条件》，《数学与力学杂志》*6*，*247–285*（*1957*年）。[19] *M. H. Stone*，《希尔伯特空间中的线性变换及其在分析中的应用》，美国数学会（*1932*年）。[20] *D. Yafaev*，《数学散射理论：解析理论》，《数学调查与专著》，美国数学会，第 *158* 卷，*2010*年。

Department of Mathematics, King's College London, Strand, London, WC2R 2LS, U.K.
电子邮箱地址: alexander.pushnitski@kcl.ac.uk

Department of Mathematics, Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engi-neering, Czech Technical University in Prague, Trojanova 13, 12000 Prague 2,Czech Republic.

电子邮箱地址: frantisek.stampach@cvut.cz