arXiv:2601.05121v1 [math.NT] 8 Jan 2026

¨布吕德恩–Robert 丢番图方程组中的强稀少性

TREVOR D. WOOLEY

谨以此文献给 *Roger Heath-Brown* 七十五岁寿辰

Abstract. 设 k 为满足 $k \geqslant 2$ 的自然数，且令 $\varepsilon > 0$。我们考察丢番图联立方程组的整数解个数 $V_k^*(P)$

$$x_1^{2j-1} + \ldots + x_{k+1}^{2j-1} = y_1^{2j-1} + \ldots + y_{k+1}^{2j-1} \quad (1 \leqslant j \leqslant k),$$

其中 $1 \leqslant x_i,\ y_i \leqslant P (1 \leqslant i \leqslant k+1)$。记 $L_k^*(P)$ 为满足 $\{x_1, \ldots, x_{k+1}\} = \{y_1, \ldots, y_{k+1}\}$ 的对角解个数，因此 $L_k^*(P) \sim (k+1)!P^{k+1}$，我们证明

$$V_k^*(P) - L_k^*(P) \ll P^{\sqrt{8k+9}-1+\varepsilon}.$$

这确立了一个强稀疏性结果，改进了 Br¨udern 和 Robert 先前的工作。

1. Introduction

Thi本回忆录致力于研究丢番图联立方程组

$$\sum_{i=1}^{2k+2} z_i^{2j-1} = 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant k). \tag{1.1}$$

当 k 为自然数且 P 为较大的实数时，我们用 $V_k(P)$ 表示满足 $|z_i| \leqslant P (1 \leqslant i \leqslant 2k+2)$ 的方程组 (1.1) 的整数解个数。$k = 1$ 的情形过于平淡，不足以引起我们的关注，因此我们转而聚焦于满足 $k \geqslant 2$ 的那些情形。方程组 (1.1) 存在仿射维数为 $k+1$ 的解的线性空间，以下列方程定义的空间为例

$$z_{2i-1} + z_{2i} = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant k+1).$$

考虑底层指标 $\{1, 2, \ldots, 2k+2\}$ 的适当排列后，稍加思索便可发现，这类线性空间的数量等于

$$c_k = 2^{-k-1}\frac{(2k+2)!}{(k+1)!} = \prod_{j=1}^{k+1}(2j-1).$$

我们用 $L_k(P)$ 表示满足 $|z_i| \leqslant P (1 \leqslant i \leqslant 2k+2)$ 的方程组 (1.1) 中落在所有这类线性空间上的整数解个数。因此，我们有

$$L_k(P) = c_k(2P+1)^{k+1} + O(P^k).$$

我们将位于此类线性空间上的解视为平凡解，并将任何不属于此类的整数解称为非平凡解。本文的目标是证明

2020 数学主题分类。11D45、11D72、11L15、11P05。关键词和短语。稀缺性、对角方程、多变量丢番图方程。

当 $k \geqslant 2$时，方程组 (1.1) 的非平凡解具有稀缺性，而且这种稀缺性尤为显著。

为了描述我们的主要结论，我们定义指数

$$\alpha_k = \min_{\substack{r\in\mathbb{N}\\ 2\leqslant r\leqslant 2k+1}} \Big(r-1+\frac{2k+2}{r}\Big). \tag{1.2}$$

定理 1.1。当 $k \geqslant 2$ 时，有

$$V_k(P) - L_k(P) \ll P^{\alpha_k+\varepsilon}.$$

特别地，有

$$V_k(P) - L_k(P) \ll P^{\sqrt{8k+9}-1+\varepsilon}.$$

定理 1.1 的结论表明，当 $P \to \infty$ 时，有渐近公式

$$V_k(P) \sim c_k(2P+1)^k,$$

只要 $k \geqslant 6$ 即成立。十多年前，Br¨udern 和 Robert [2] 就得出了这一结论（见 [2] 引言的倒数第三段），不过后两位作者主要关注定理 1.1 的一个类似结果，该结果针对下文的方程组 (1.3)，其中变量被限制为正数。事实上，他们证明了，

$$V_k(P) - L_k(P) \ll P^{\lambda_k+\varepsilon},$$

其中 $\lambda_k < k+1$ 当 $k \geqslant 2$时成立，尤其是 $\lambda_k = \frac{6}{7}k + O(1)$ 如 $k \to \infty$所示。作为比较，我们在定理 1.1 中记录的新估计表明，可以取 $\lambda_k = \sqrt{8k+9}-1$；当 k 取较大值时，这比 Br¨udern 和 Robert 的界锐利得多。我们在此指出，自己的工作也能成功处理 k 取较小值的情形，但若不付出大得多的努力，便无法做到优于 Br¨udern 和 Robert 的工作。特别是，他们允许的指数 $\lambda_3 = 34/9$ 似乎比通过本文所引入思想的变体可以直接得到的结论更优。最后，我们指出，Vaughan 和 Wooley [4]的工作表明

$$V_2(P) - L_2(P) \asymp P^2(\log P)^5,$$

一个关系，经过改进后得到了一个渐近公式，见 la Bret`eche [1].

为求完整起见，我们记录定理 1.1 的一个版本，该版本适用于类似的问题，其中变量被限制为取正值。我们用 $V_k^*(P)$ 表示方程组的整数解的个数

$$\sum_{i=1}^{k+1} x_i^{2j-1} = \sum_{i=1}^{k+1} y_i^{2j-1} \quad (1 \leqslant j \leqslant k), \tag{1.3}$$

其中 $1 \leqslant x_i,\ y_i \leqslant P (1 \leqslant i \leqslant k+1)$。此外，我们用 $L_k^*(P)$ 表示满足以下条件的整数 $(k+1)$ 元组 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y}$ 的数量：x_1、……、x_{k+1} 是 y_1、……、y_{k+1} 的一个排列，且 $1 \leqslant x_i,\ y_i \leqslant P (1 \leqslant i \leqslant k+1)$。因此，我们有

$$L_k^*(P) = (k+1)!P^{k+1} + O(P^k).$$

定理 1.2。当 $k \geqslant 2$ 时，有

$$V_k^*(P) - L_k^*(P) \ll P^{\alpha_k+\varepsilon}.$$

特别地，有

$$V_k^*(P) - L_k^*(P) \ll P^{\sqrt{8k+9}-1+\varepsilon}.$$

我们对定理 1.1 的证明所采用的方法，基于我们与 Vaughan [5] 合作的工作中所采用的方法，该工作涉及相应的 Vinogradov 系统

$$\sum_{i=1}^{k+1} x_i^j = \sum_{i=1}^{k+1} y_i^j \quad (1 \leqslant j \leqslant k). \tag{1.4}$$

记 $J_{k+1,k}(P)$ 为满足 $1 \leqslant x_i, y_i \leqslant P (1 \leqslant i \leqslant k+1)$ 的方程组 (1.4) 的解的数量。于是 Vaughan 和 Wooley [5, 定理 1] 表明

$$J_{k+1,k}(P) - L_k^*(P) \ll P^{\sqrt{4k+5}+\varepsilon}.$$

通过证明方程组 (1.4) 的解满足具有丰富乘法结构的辅助方程，可以得到这一界。后者促成了对解进行参数化，从而能够对非平凡解的数量实施相当程度的控制。对于方程组 (1.1)，也可以采用类似的方法，正如第 2 节的讨论所示。我们将在第 3 节讨论如何利用这种解的参数化，并在那里完成定理 1.1 和 1.2 的证明。第 4 节将介绍若干改进主定理的思路。在第 5 节，我们描述方程组 (1.1) 的一个推广的强稀疏性结果，以进一步说明定理 1.1 的证明中所采用的策略。最后，在第 6 节，我们记录一个日后使用的初等离散不等式，该不等式用于证明定理 1.1 的第二个断言。

我们的基本参数是 P，一个充分大的正整数。每当 ε 在某个陈述中出现时，无论是隐含还是显式出现，我们都断言该陈述对每个$\varepsilon > 0$都成立。在全文中，符号 $\ll$和 $\gg$ 表示 Vinogradov 著名的记号。Vinogradov 和 Landau 记号中的隐含常数至多依赖于 ε、 k 和 r。我们经常使用如下形式的向量记号：$\mathbf{x} = (x_1, \ldots\ldots, x_r)$。这里，维数 r 取决于论证的进展。

作者在撰写本文期间获得了 NSF 资助项目 DMS- 2502625 和 Simons 数学奖学金 SFM-00011955 的支持。作者感谢普林斯顿高等研究院接待他进行学术休假，本文正是在此期间完成的。

历史注记：作者对这篇回忆录主题的兴趣及相关研究可追溯至其博士阶段；当时作者读到了 Roger Heath-Brown 的论文 [3]，该文运用了丢番图方程组的准稀疏性估计

$$\left.\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 &= y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= y_1 + y_2 + y_3 \end{aligned}\right\}.$$

这启发了作者在其于 1990 年完成的论文中开展的研究： [6, 第 3], 章定理 1.3，该论文是在 Bob Vaughan 的指导下完成的，给出了关于任意次数方程对的类似结论。作者感谢 Roger 的这项贡献，以及他做出的许多其他贡献；近四十年来，这些贡献一直是作者的灵感源泉。

2. Multiplicative identities

我们采用了 Br¨udern 和 Robert [2],的研究中提出的多项式恒等式，不过将其改写成更对称的形式，以便更好地配合后续论证。定义多项式 $t_j(\mathbf{x})$ 如下：

$$t_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k-1} x_i^{2j-1} \quad (1 \leqslant j \leqslant k).$$

于是，根据 Br¨udern 和 Robert [2, 引理 1]，我们发现存在一个非零多项式 $\Upsilon(\mathbf{w}) \in \mathbb{Z}[w_1, \dots, w_k]$，它具有如下性质：

$$\Upsilon(t_1(\mathbf{x}), \dots, t_k(\mathbf{x})) = 0.$$

$\Upsilon(\mathbf{w})$ 的加权次数为 $k(k+1)/2$，其含义是，在 $\Upsilon(\mathbf{w})$ 中每个形如 $c_{\boldsymbol{\alpha}} w_1^{\alpha_1} \cdots w_k^{\alpha_k}$、满足 $c_{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathbb{Z}$ 且 $\alpha_i \geqslant 0\,(1 \leqslant i \leqslant k)$ 的单项式中，都有

$$\sum_{i=1}^{k} (2i-1)\alpha_i = k(k+1)/2. \tag{2.1}$$

接下来，定义多项式 $\tau_j(\mathbf{x})$，令

$$\tau_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k+1} x_i^{2j-1} \quad (1 \leqslant j \leqslant k). \tag{2.2}$$

然后，如同在关于 [2], 的相应讨论中一样，我们发现，当作特殊化 $x_k + x_{k+1} = 0$时，有

$$\Upsilon(\tau_1(\mathbf{x}), \dots, \tau_k(\mathbf{x})) = \Upsilon(t_1(\mathbf{x}), \dots, t_k(\mathbf{x})) = 0,$$

因此，多项式 $\Upsilon(\tau_1(\mathbf{x}) \dots, \tau_k(\mathbf{x}))$ 可被 $x_k + x_{k+1}$ 整除。注意到 (2.1)，通过对称论证可知，存在一个非零整数 $C = C_k$，使得

$$\Upsilon(\tau_1(\mathbf{x}), \dots, \tau_k(\mathbf{x})) = C \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k+1} (x_i + x_j). \tag{2.3}$$

假设$\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^{2k+2}$ 是方程组 (1.1) 的一个解。记作$z_i' = z_{k+1+i}\,(1 \leqslant i \leqslant k+1)$。于是，利用记号 (2.2)，我们有

$$\tau_j(z_1 \dots, z_{k+1}) = \tau_j(-z_1', \dots, -z_{k+1}') \quad (1 \leqslant j \leqslant k).$$

因此，由 (2.3) 可知

$$\begin{aligned} C \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k+1} (z_i + z_j) &= \Upsilon(\tau_1(\mathbf{z}), \dots, \tau_k(\mathbf{z})) \\ &= \Upsilon(\tau_1(-\mathbf{z}'), \dots, \tau_k(-\mathbf{z}')) \\ &= (-1)^{k(k+1)/2} C \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k+1} (z_i' + z_j'). \end{aligned}$$

因此我们推断

$$\prod_{1 < l \leqslant k+1} (z_1 + z_l) \prod_{2 \leqslant i < j \leqslant k+1} (z_i + z_j) = (-1)^{k(k+1)/2} \prod_{1 < l \leqslant k+1} (z_1' + z_l') \prod_{2 \leqslant i < j \leqslant k+1} (z_i' + z_j'). \tag{2.4}$$

交换 z_1 和 z_1' 的角色后，同样可得

$$\prod_{1<l\leqslant k+1}(z_1'+z_l)\prod_{2\leqslant i<j\leqslant k+1}(z_i+z_j)=(-1)^{k(k+1)/2}\prod_{1<l\leqslant k+1}(z_1+z_l')\prod_{2\leqslant i<j\leqslant k+1}(z_i'+z_j'). \quad (2.5)$$

乘法关系式 (2.4) 和 (2.5) 可以提取出更为简单的关系式；这些关系式以略有不同的形式，也出现在 Br¨udern 和 Robert [2, Lemma3] 的工作中。为完整起见，我们说明这些关系式的推导过程。

引理 2.1。 设$\mathbf{z}\in\mathbb{Z}^{2k+2}$ 满足方程组(1.1)，并且有$z_i+z_j\neq 0\,(1\leqslant i<j\leqslant 2k+2)$。则有

$$\prod_{i=3}^{2k+2}(z_1+z_i)=\prod_{i=3}^{2k+2}(z_2+z_i). \quad (2.6)$$

证明。 鉴于引理假设中施加的非零条件 $z_i+z_j\neq 0$，对 (2.4) 和 (2.5) 的左右两端分别作除法可得

$$\prod_{1<l\leqslant k+1}\Big(\frac{z_1+z_l}{z_1'+z_l}\Big)=\prod_{1<l\leqslant k+1}\Big(\frac{z_1'+z_l'}{z_1+z_l'}\Big),$$

因此

$$\prod_{1<l\leqslant k+1}(z_1+z_l)(z_1+z_l')=\prod_{1<l\leqslant k+1}(z_1'+z_l')(z_1'+z_l).$$

回忆 $z_l'=z_{k+1+l}\,(1\leqslant l\leqslant k+1)$。于是我们看到

$$\prod_{\substack{1\leqslant l\leqslant 2k+2\\ l\notin\{1,k+2\}}}(z_1+z_l)=\prod_{\substack{1\leqslant l\leqslant 2k+2\\ l\notin\{1,k+2\}}}(z_{k+2}+z_l).$$

将对称性应用于互换z_{k+2} 和 z_2的作用，即可得出引理的结论。□

我们希望构造大量相互作用的乘法关系，以此约束整数元组$\mathbf{z}$。为了说明我们将要研究的方程组，我们先观察到，方程 (2.6) 可以写成更具对称性的形式

$$\Big(\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ i\neq 1}}z_i\Big)\Big(\prod_{j=1}^{2k+2}(z_1+z_j)\Big)=\Big(\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ i\neq 2}}z_i\Big)\Big(\prod_{j=1}^{2k+2}(z_2+z_j)\Big).$$

现在我们引入满足 $2\leqslant r\leqslant 2k+2$ 的参数 $r\in\mathbb{N}$，并利用对称性得到联立方程组

$$\Big(\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ i\neq l}}z_i\Big)\Big(\prod_{j=1}^{2k+2}(z_l+z_j)\Big)=\Big(\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ i\neq m}}z_i\Big)\Big(\prod_{j=1}^{2k+2}(z_m+z_j)\Big)\quad(1\leqslant l<m\leqslant r). \quad (2.7)$$

为了更好地理清方程组 (2.7) 的乘法结构，当 $1 \leqslant m \leqslant r$ 时，我们引入整数

$$u_{0m} = \Big(\prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ i \neq m}} z_i \Big) \Big(\prod_{j=1}^{r} (z_m + z_j) \Big) \tag{2.8}$$

and

$$u_{lm} = z_m + z_{r+l} \quad (1 \leqslant l \leqslant 2k+2-r). \tag{2.9}$$

为简洁起见，我们记

$$\kappa = 2k + 2 - r. \tag{2.10}$$

方程组 (2.7) 现在呈现为

$$\prod_{i_1=0}^{\kappa} u_{i_1 1} = \prod_{i_2=0}^{\kappa} u_{i_2 2} = \ldots = \prod_{i_r=0}^{\kappa} u_{i_r r}. \tag{2.11}$$

注意，方程 (2.9) 意味着

$$u_{lm} - z_m = z_{r+l} \quad (1 \leqslant l \leqslant \kappa),$$

由此

$$u_{i1} - z_1 = u_{i2} - z_2 = \ldots = u_{ir} - z_r \quad (1 \leqslant i \leqslant \kappa). \tag{2.12}$$

给定整数 r 元组 $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_r)$ 的一个固定取值，我们用 $\Psi_k(P; \mathbf{z})$ 表示满足联立方程 (2.11) 和 (2.12) 的整数解的数量，其中

$$1 \leqslant |u_{ij}| \leqslant 2P \quad (1 \leqslant i \leqslant \kappa,\, 1 \leqslant j \leqslant r).$$

于是我们定义

$$\Psi_k(P) = \max_{\mathbf{z}} \Psi_k(P; \mathbf{z}),$$

其中，最大值取遍所有满足以下条件的 r 元组$\mathbf{z}$

$$1 \leqslant |z_i| \leqslant P \quad (1 \leqslant i \leqslant r) \qquad \text{and} \qquad z_l^2 \neq z_m^2 \quad (1 \leqslant l < m \leqslant r). \tag{2.13}$$

引理 2.2。 设 r 是满足 $2 \leqslant r \leqslant 2k+1$ 的整数。那么

$$V_k(P) - L_k(P) \ll P^{r-1} + P^r \Psi_k(P).$$

证明。 我们将由 $V_k(P) - L_k(P)$ 计数的方程组 (1.1) 的解$\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_{2k+2})$ 分为三类。

首先，我们考虑由 $V_k(P) - L_k(P)$ 计数的 (1.1) 的解$\mathbf{z}$，其中对于满足 $1 \leqslant l < m \leqslant 2k+2$ 的某些指标 l 和 m，有 $z_l + z_m = 0$。如有必要，通过重新标记变量，我们可以假设存在满足 $0 \leqslant u \leqslant k-1$ 的整数 u，且具有以下性质：

$$z_{2i-1} + z_{2i} = 0 \quad (u+2 \leqslant i \leqslant k+1),$$

并且使得

$$z_l + z_m \neq 0 \quad (1 \leqslant l < m \leqslant 2u+2). \tag{2.14}$$

于是有

$$\sum_{i=1}^{2u+2} z_i^{2j-1} = 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant k). \tag{2.15}$$

我们考虑两种可能的情形。在第一种情形中，我们有 $2u+2 \geqslant k+1$。这里，我们写作

$$\mathbf{v} = (z_1, \dots, z_{k+1}) \quad \text{and} \quad \mathbf{w} = (z_{k+2}, \dots, z_{2u+2}, 0, \dots, 0).$$

由于 $u \leqslant k-1$，由恒等式 (2.3) 可得

$$\Upsilon(\tau_1(\mathbf{v}), \dots, \tau_k(\mathbf{v})) = (-1)^{k(k+1)/2} \Upsilon(\tau_1(\mathbf{w}), \dots, \tau_k(\mathbf{w})) = 0,$$

由此

$$\prod_{1 \leqslant l < m \leqslant k+1} (z_l + z_m) = 0.$$

然而，条件 (2.14) 排除了这种可能情况。当 $2u+2 < k+1$ 时，我们将方程组 (2.15) 替换为其所蕴含的子方程组后，可以类似地进行推导

$$\sum_{i=1}^{2u+2} z_i^{2j-1} = 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant 2u+1).$$

在这种情形下，(2.3) 的类似结果表明

$$\prod_{1 \leqslant l < m \leqslant 2u+2} (z_l + z_m) = 0,$$

于是我们得到了类似的矛盾。因此，我们得出结论：对于由 $V_k(P) - L_k(P)$ 计数的 (1.1) 的所有解 $\mathbf{z}$，$z_l + z_m \neq 0$ for$1 \leqslant l < m \leqslant 2k+2$。注意，这一结论还确保至多存在一个指标 i，使得 $1 \leqslant i \leqslant 2k+2$ 具有 $z_i = 0$ 的性质。

方程组 (1.1) 的第二类解$\mathbf{z}$，由 $V_k(P) - L_k(P)$ 计数，是指其中 z_i 的不同值少于 r 个且满足 $1 \leqslant i \leqslant 2k+2$ 的解。显然，此类解的总数为 $O(P^{r-1})$。

剩下的是第三种情形，涉及方程组 (1.1) 的解$\mathbf{z}$，由 $V_k(P) - L_k(P)$ 计数，且既不属于第一类，也不属于第二类。在这种情况下，我们可以重新标记变量，使得 $z_i \neq 0$ 对于 $1 \leqslant i \leqslant r$ 成立。此外，我们可以假设 $z_1, \dots, z_r$ 两两不同，且 $z_l + z_m \neq 0$ 对于 $1 \leqslant l < m \leqslant 2k+2$ 成立。特别地，我们可以假设条件 (2.13) 均适用。每个这样的方程组 (1.1) 的解$\mathbf{z}$都会生成联立方程 (2.11) 和 (2.12) 的一个解$\mathbf{u}$。我们固定满足 (2.13) 的 $z_1, \dots, z_r$ 的 $O(P^r)$ 种可能取值中的任意一种。由关系式 (2.8)，这一选择确定了整数 u_{0m} $(1 \leqslant m \leqslant r)$，其中

$$0 < |u_{0m}| \leqslant 2^r P^{2r-1}.$$

接下来，考虑对应于这一固定的 $z_1, \dots, z_r$ 选择的方程组 (2.11) 和 (2.12) 的一个固定解 u_{lm} $(1 \leqslant l \leqslant \kappa,\ 1 \leqslant m \leqslant r)$。这样的选择至多有$O(\Psi_k(P))$ 种。但对于每一个固定的选择

$$z_1, \dots, z_r \qquad \text{and} \qquad u_{lm} \quad (1 \leqslant l \leqslant \kappa,\ 1 \leqslant m \leqslant r),$$

由 (2.9) 可知，整数 z_{r+l} $(1 \leqslant l \leqslant \kappa)$ 是固定的。这便固定了 z_i for$1 \leqslant i \leqslant 2k+2$，因此我们推得第三类解的总数为 $O(P^r \Psi_k(P))$。

将由 $V_k(P) - L_k(P)$ 计数的方程组 (1.1) 的三类解 $\mathbf{z}$ 所作的贡献合并起来，我们便得到引理的结论，证明也就完成了。□

3. Multiplicative parameterisations

本节将着手讨论如何从关系式 (2.11) 中提取并利用其中蕴含的乘法结构。在这里，我们基本沿用 [5,§2] 所开辟的路径，并根据 [7, §4] 中的修改和调整加以改进。由于当前情形在细节上有所不同，我们将较为完整地阐述这一方法。

定理 *1.1* 的证明。我们首先固定满足条件 (2.13) 的 $z_1, \dots, z_r$，使得

$$\Psi_k(P; \mathbf{z}) = \Psi_k(P).$$

接下来，我们引入一些记号，以精确描述变量之间公因子的提取。令 $\mathcal{I}$ 表示指标 $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_r)$ 的集合，其中$0 \leqslant i_m \leqslant \kappa$ （$1 \leqslant m \leqslant r$）。我们定义映射 $\phi\colon\ \mathcal{I} \to [0, (\kappa+1)^r)$，方法是令

$$\phi(\mathbf{i}) = \sum_{m=1}^{r} i_m(\kappa+1)^{m-1}.$$

于是 ϕ 是双射的，因此我们可以通过令$\mathbf{i}+1$ 为指标$\mathbf{i}$ 的后继来定义它：

$$\mathbf{i}+1 = \phi^{-1}\big(\phi(\mathbf{i})+1\big).$$

当 $h \in \mathbb{N}$ 时，我们通过令$\mathbf{i}+h\ +(h+1)\ =(\mathbf{i}+h)\ +1$ 来归纳定义$\mathbf{i}+h$。最后，我们将 $\mathcal{J}(\mathbf{i})$ 记作具有如下性质的 r-元组 $\mathbf{j} \in \mathcal{I}$ 的集合：对于某个 $h \in \mathbb{N}$，有$\mathbf{j}+h = \mathbf{i}$。

现在，我们通过如下方式定义整数 $\alpha_{\mathbf{i}}$，其中 $\mathbf{i} \in \mathcal{I}$：定义由整数构成的$r$-元组的最大公因数。令 $\alpha_{\mathbf{0}} = (u_{01}, u_{02}, \dots, u_{0r})$，并假设在阶段 $\mathbf{i}$，对于 $\mathbf{j} \in \mathcal{J}(\mathbf{i})$，$\alpha_{\mathbf{j}}$ 已经定义。于是，我们令 $\beta^{(m)}{}_{\mathbf{i}}$ 为

$$\beta_{\mathbf{i}}^{(m)} = \prod_{\substack{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(\mathbf{i})\\ j_m = i_m}} \alpha_{\mathbf{j}} \quad (1 \leqslant m \leqslant r),$$

然后定义

$$\alpha_{\mathbf{i}} = \left(\frac{u_{i_1 1}}{\beta_{\mathbf{i}}^{(1)}}, \frac{u_{i_2 2}}{\beta_{\mathbf{i}}^{(2)}}, \dots, \frac{u_{i_r r}}{\beta_{\mathbf{i}}^{(r)}}\right).$$

这里，按照空乘积领域的惯例，我们将空乘积视为等于 $\mathbf{1}$。记

$$\widetilde{\alpha}_{lm}^{\pm} = \pm \prod_{\substack{\mathbf{i}\in\mathcal{I}\\ i_m = l}} \alpha_{\mathbf{i}}. \tag{3.1}$$

那么可知，当 $0 \leqslant l \leqslant \kappa$ 且 $1 \leqslant m \leqslant r$ 时，可以选择符号 $\pm$，使得 $u_{lm} = \widetilde{\alpha}_{lm}^{\pm}$。注意，当 $1 \leqslant m \leqslant r$ 时，鉴于我们对u_{lm}的限制，有

$$1 \leqslant |\widetilde{\alpha}_{0m}^{\pm}| \leqslant 2^r P^{2r-1} \qquad \text{and} \qquad 1 \leqslant |\widetilde{\alpha}_{lm}^{\pm}| \leqslant 2P \quad (1 \leqslant l \leqslant \kappa).$$

我们将变量 $\alpha_{\mathbf{i}}$（$\mathbf{i} \in \mathcal{I}$）视为变量，并注意到 $\widetilde{\alpha}_{0m}^{\pm} = u_{0m}$ 已由我们对 z_1、……、z_r 的选择确定。因此，通过标准除数函数估计可知，对于每个满足 $1 \leqslant m \leqslant r$ 的指标 m，满足 $\mathbf{j} \in \mathcal{I}$ 且 $j_m = 0$ 的 $\alpha_{\mathbf{j}}$ 的可能选择数为 $O(P^{\varepsilon})$。我们为这些特定变量固定任意一个这样的选择

$\alpha_{\mathbf{j}}$ 满足 $j_m = 0$，并选择一个使 $\widetilde{\alpha}_{0m}^{\pm} = u_{0m}$ 成立的符号。此时，我们看到$\Psi_k(P; \mathbf{z}) \ll X_r(P)$，其中 $X_r(P)$ 表示方程组的整数解数量

$$\widetilde{\alpha}_{i1}^{\pm} - z_1 = \widetilde{\alpha}_{i2}^{\pm} - z_2 = \ldots = \widetilde{\alpha}_{ir}^{\pm} - z_r \quad (1 \leqslant i \leqslant \kappa), \tag{3.2}$$

with

$$1 \leqslant |\widetilde{\alpha}_{ij}^{\pm}| \leqslant 2P \quad (1 \leqslant i \leqslant \kappa,\, 1 \leqslant j \leqslant r). \tag{3.3}$$

这里，我们回顾一下，可以假设条件 (2.13) 仍然成立，因此$z_l^2 \neq z_m^2$ $(1 \leqslant l < m \leqslant r)$ 且 $z_i \neq 0$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$。由引理 2.2 可推得

$$V_k(P) - L_k(P) \ll P^{r-1} + P^{r+\varepsilon} X_r(P). \tag{3.4}$$

现在我们可以仿照 [5, §2], 中的类似讨论，并借鉴 [7, §4]中采用的修改。当 $1 \leqslant p \leqslant r$ 时，令

$$A_p = \prod_{\substack{\mathbf{i} \in \mathcal{I} \\ i_l > i_p \geqslant 1 \,(l \neq p)}} \alpha_{\mathbf{i}}.$$

于是有

$$\left| \prod_{p=1}^{r} A_p \right| \leqslant \prod_{\substack{\mathbf{i} \in \mathcal{I} \\ i_m \geqslant 1 \,(1 \leqslant m \leqslant r)}} |\alpha_{\mathbf{i}}| \leqslant \prod_{l=1}^{\kappa} |\widetilde{\alpha}_{l1}^{\pm}| \leqslant (2P)^{\kappa}.$$

因此，对于任意一个由 $X_r(P)$ 计数的解 $\boldsymbol{\alpha}$，都存在一个指标 p 的取值，使得 $1 \leqslant p \leqslant r$，且有

$$1 \leqslant |A_p| \leqslant (2P)^{\kappa/r}.$$

此外，给定一个满足 $1 \leqslant m \leqslant r$的指标 m，由 (3.2) 可知，对于每个由 $X_r(P)$ 计数的解 $\boldsymbol{\alpha}$，当 $1 \leqslant j \leqslant r$ 且 $j \neq m$ 时，有

$$\widetilde{\alpha}_{im}^{\pm} - \widetilde{\alpha}_{ij}^{\pm} = z_m - z_j \quad (1 \leqslant i \leqslant \kappa).$$

如有必要，对变量重新标记后可得 $X_r(P) \ll Y_r(P)$，其中 $Y_r(P)$ 表示方程组的解的数量

$$\widetilde{\alpha}_{im}^{\pm} - \widetilde{\alpha}_{i1}^{\pm} = z_m - z_1 \quad (2 \leqslant m \leqslant r,\, 1 \leqslant i \leqslant \kappa), \tag{3.5}$$

其中 $z_m - z_1$ 固定且非零，满足 $|z_m - z_1| \leqslant 2P$，并且 $\alpha_{\mathbf{i}}$ 满足 (3.3) 和不等式

$$1 \leqslant |A_1| \leqslant (2P)^{\kappa/r}. \tag{3.6}$$

此外，由 (3.4) 可得

$$V_k(P) - L_k(P) \ll P^{r-1} + P^{r+\varepsilon} Y_r(P). \tag{3.7}$$

我们断言，当变量 $\alpha_{\mathbf{i}}$ 满足

$$\mathbf{i} \in \mathcal{I} \qquad \text{and} \qquad i_m > i_1 \quad (2 \leqslant m \leqslant r) \tag{3.8}$$

固定时，满足 (3.3) 和 (3.5) 的变量 $\alpha_{\mathbf{i}}$ 有 $O(P^{\varepsilon})$ 种可能取值。暂且假设确实如此，结合 (3.6) 和 (3.7)，再利用约数函数的一个标准估计，可得

$$V_k(P) - L_k(P) \ll P^{r-1} + P^{r+\kappa/r+\varepsilon}. \tag{3.9}$$

回顾 (2.10) 中的 $\kappa = 2k + 2 - r$，参照定义 (1.2) 即可得到定理 1.1 的第一个结论。

我们通过如下归纳法验证这一论断。固定一组变量 $\alpha_{\mathbf{i}}$，其指标 $\mathbf{i}$ 满足 (3.8)。假设在这次归纳的第 t 步，这些变量 $\alpha_{\mathbf{i}}$ 有 $O(P^{t\varepsilon})$ 种可能取值，使得指标 $\mathbf{i}$ 满足条件：$i_m < t$ 对某个满足 $1 \leqslant m \leqslant r$ 的指标 m 成立。当 $t = 1$ 时，这一结论显然成立，因为变量 $\alpha_{\mathbf{i}}$（其中 $\mathbf{i} \in \mathcal{I}$ 且 $i_m = 0$）已固定，这里 m 是满足 $1 \leqslant m \leqslant r$ 的某个指标。现在假设对某个满足$t \geqslant 1$的 t，归纳假设成立，并固定变量 $\alpha_{\mathbf{i}}$ 的 $O(P^{t\varepsilon})$ 种可能取值之一，使得$i_m < t$ 对某个满足 $1 \leqslant m \leqslant r$ 的指标 m 成立。由 (3.5) 可得

$$\widetilde{\alpha}_{tm}^{\pm} = \widetilde{\alpha}_{t1}^{\pm} + z_m - z_1 \quad (2 \leqslant m \leqslant r). \tag{3.10}$$

我们考察由 (3.1) 定义的乘积 $\widetilde{\alpha}_{t1}^{\pm}$，并注意到，如果

$$i_1 = t \qquad \text{and} \qquad i_m \neq t \quad (2 \leqslant m \leqslant r), \tag{3.11}$$

那么，要么对于某个满足 $2 \leqslant m \leqslant r$ 的指标 m，有 $i_m < t$；要么对于所有满足 $2 \leqslant m \leqslant r$ 的指标 m，都有 $i_m > t$。在前一种情形下，根据归纳假设的推论，即 (3.10) 之前的假设，变量 $\alpha_{\mathbf{i}}$ 已经被固定。另一方面，在后一种情形下，变量 $\alpha_{\mathbf{i}}$ 由我们的假设 (3.8) 确定。因此，对于满足 (3.11) 的指标 $\mathbf{i}$，相应的变量 $\alpha_{\mathbf{i}}$ 也可以认为是固定的。此外，参照 (3.1) 可知，对于每个满足 $2 \leqslant m \leqslant r$ 的指标 m，使得 $i_1 = i_m = t$ 的所有变量 $\alpha_{\mathbf{i}}$ 都同时整除 $\widetilde{\alpha}_{t1}^{\pm}$ 和 $\widetilde{\alpha}_{tm}^{\pm}$。于是，根据 (3.10)，这些变量也都整除相应的固定非零整数 $z_m - z_1$。因此，借助初等约数函数估计可知，满足以下条件的变量 $\alpha_{\mathbf{i}}$ 有 $O(P^{\varepsilon})$ 种可能取值：对于某个满足 $2 \leqslant m \leqslant r$ 的指标 m，有 $i_1 = i_m = t$。固定其中任意一种取值后，我们现在可以假定，当 $i_1 = t$ 时，$\alpha_{\mathbf{i}}$ 已被固定。由 (3.1) 可知，因而可以假定 $\widetilde{\alpha}_{t1}^{\pm}$ 现在已经固定；再由 (3.10) 可知，当 $2 \leqslant m \leqslant r$ 时，$\widetilde{\alpha}_{tm}^{\pm}$ 也已被固定。再次结合 (3.1) 和约数函数的初等估计，我们得到：当对于某个满足 $1 \leqslant m \leqslant r$ 的指标 m 有 $i_m = t$ 时，$\alpha_{\mathbf{i}}$ 已被固定。因此可以断定，满足以下条件的变量 $\alpha_{\mathbf{i}}$ 有 $O(P^{(t+1)\varepsilon})$ 种可能取值：对于某个满足 $1 \leqslant m \leqslant r$ 的指标 m，有 $i_m \leqslant t$。这就以 $t+1$ 替代 t 验证了归纳假设。归纳由此完成，其中 $t = \kappa + 1$ 的情形确立了我们在证明上界 (3.9) 时所用的断言。定理 1.1 的第一项结论得证。

利用定理 1.1 的第一个结论，我们得到

$$V_k(P) - L_k(P) \ll P^{r+(2k+2-r)/r+\varepsilon}.$$

然而，　　下面定理 6.1 给出的初等离散不等式表明

$$\min_{2 \leqslant r \leqslant 2k+1} \Big(r + \frac{2k+2}{r} \Big) \leqslant \sqrt{4(2k+2)+1}.$$

定理 1.1 的第二个结论现在显而易见。 □

证明　　定理 1.2 的证明可由定理 1.1 的证明经过一个简单的特化得到　　n.

定理 *1.2* 的证明。由于数量 $V_k^*(P) - L_k^*(P)$ 统计了方程组 (1.1) 中由 $V_k(P) - L_k(P)$ 计数的非平凡解，其中 $z_1, \dots, z_{k+1}$ 为正且 $z_{k+2}, \dots, z_{2k+2}$

为负，我们利用定理 1.1 得到

$$0 \leqslant V_k^*(P) - L_k^*(P) \leqslant V_k(P) - L_k(P) \ll P^{\alpha_k+\varepsilon} \ll P^{\sqrt{8k+9}-1+\varepsilon}.$$

定理 1.2 的结论可由这些不等式推出。 □

4. Speculative and realisable improvements

本节借此机会探讨如何改进定理 1.1 和定理 1.2 给出的稀少性估计。当然，可行的改进本身就值得关注；另一方面，在合理假设下能够实现的改进，则有助于洞察未来可能的研究方向，或许还能揭示此类进展的局限。

我们首先更仔细地探讨如何更有效地利用方程 (2.11) 和 (2.12)。在第 3 节证明定理 1.1 的论证中，我们固定了 z_1、……、z_r，随后将这些固定整数吸收到关系式 (2.11) 中的因子里，

$$u_{0m} = \Bigg(\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ i\neq m}} z_i\Bigg)\Bigg(\prod_{j=1}^{r}(z_m+z_j)\Bigg) \quad (1\leqslant m\leqslant r)$$

但之后并未利用这些因子对其余变量隐含施加的任何约束。从某种意义上说，这些固定变量在后续论证中成了累赘。人们或许有理由预期，作为这些整数因子的最大公因数 $\alpha_{\mathbf{i}}$，u_{0m} 应当按照其在所有满足 $l\geqslant 1$ 且整除变量全集 u_{lm} 的 $\alpha_{\mathbf{j}}$ 中所占的比例，分担相应的权重。毕竟，与这一设想相反的极端情形是：对于 $j\geqslant 1$，有 $(u_{0j}, u_{lm}) = 1$，其中 $l\geqslant 1$ 和 $1\leqslant m\leqslant r$。在这种情况下，必有

$$\prod_{\substack{1\leqslant l\leqslant r\\ l\notin\{i,j\}}} (z_i+z_l) = \pm \prod_{\substack{1\leqslant l\leqslant r\\ l\notin\{i,j\}}} (z_j+z_l) \quad (1\leqslant i<j\leqslant r),$$

因此，$z_1,\dots,z_r$ 受到严格约束。事实上，运用本文第 2 节和第 3 节中的思想可知，满足这些关系式的 $z_1,\dots,z_r$ 可能取值应有 $O(P^{\sqrt{4r+1}+\varepsilon})$ 种，而非第 3 节中采用的上界 $O(P^r)$。读者不妨验证，若这一对基本策略的改进切实可行，就能将定理 1.1 和 1.2 中的指数 $\sqrt{8k+9}-1$ 替换为更优的指数，其大小为 $O(k^{1/3})$。

实际情况肯定远不如上一段所描述的情形那么理想。人们有理由希望，因子 $z_l+z_m (1\leqslant l<m\leqslant r)$ 能在彼此之间，以及与因子 u_{ij}、$i\geqslant 1$ 和 $1\leqslant j\leqslant r$ 之间，公平地共享公因子。这一推理思路表明，一旦固定了 z_1、……、z_r，那么用第 3 节的记号，或许能得到大致如下形式的界

$$\left|\prod_{p=1}^{r} A_p\right| \ll P^{\kappa-\frac{1}{2}r^2}.$$

于是可以选取一个指标 p，使得 $1 \leqslant p \leqslant r$ 满足

$$|A_p| \ll P^{\frac{\kappa}{r}-\frac{r}{2}}.$$

指数 α_k 在定理 1.1 中将由一个大致等于 t 的表达式给出

$$\min_{2\leqslant r\leqslant 2k+1}\Big(\frac{r}{2}+\frac{2k+2}{r}\Big) \leqslant \tfrac{1}{2}\sqrt{16k+17}.$$

因此，若这一方法可行，那么通过改进第 3 节中的进攻路线，定理 1.1 中取得的指数将约减少一个因子 $\sqrt{2}$。

后一项改进只是推测性的。可实现的改进源于重新考察 A_p的定义，并更仔细地核算那些指标为$\mathbf{i}$ 且满足 $i_m > i_p$ 的因子 $\alpha_{\mathbf{i}}$（其中 $m \neq p$）。在维诺格拉多夫均值定理的背景下，[5, §2]的最后一段讨论了这种改进。回想一下，每个变量 $\alpha_{\mathbf{i}}$（其性质是，对于某个满足 $1 \leqslant m \leqslant r$ 的指标 m，有 $i_m = 0$），都已由我们对 $z_1, \dots, z_r$的选择固定。因此，在第 3 节的背景下，采用类似于 [5, §2] 结尾处的处理方法，可以假定

$$\Big|\prod_{p=1}^{r} A_p\Big| \leqslant \Big(\prod_{\substack{\mathbf{i}\in\mathcal{I}\\ i_m\geqslant 1\ (1\leqslant m\leqslant r)}} |\alpha_{\mathbf{i}}|\Big)^{r\psi(\kappa)/\kappa^r},$$

其中

$$\psi(\kappa) = \sum_{i=1}^{\kappa-1} i^{r-1} < \kappa^r/r.$$

那么，我们可以选择 p，使其满足 $1 \leqslant p \leqslant r$，从而

$$|A_p| \leqslant \big((2P)^{\kappa}\big)^{\psi(\kappa)/\kappa^r}.$$

在当前情形下，这样的处理会将定理 1.1 的结论替换为以下界

$$V_k(P) - L_k(P) \ll P^{\beta_k+\varepsilon},$$

其中

$$\beta_k = \min_{2\leqslant r\leqslant 2k+1}\bigg(r + \frac{1}{(2k+2-r)^{r-1}}\sum_{i=1}^{2k+1-r} i^{r-1}\bigg).$$

因此，例如，可以得到 $\beta_4 = 5 - \frac{1}{7}$。然而，当 k 较大时，指数 β_k 相较于定理 1.1 和 1.2 的陈述中所记录的指数 α_k，并没有明显的优势。

5. A generalisation of the Brüdern-Robert system

本节考虑由以下联立方程给出的方程组 (1.3) 的推广

$$\sum_{i=1}^{k+1} x_i^{(2j-1)d} = \sum_{i=1}^{k+1} y_i^{(2j-1)d} \quad (1 \leqslant j \leqslant k), \tag{5.1}$$

其中 d 是一个固定的自然数。我们用 $V_{k,\,d}^{*}(P)$ 表示方程组 (5.1) 在 $1 \leqslant x_i,\ y_i \leqslant P$（$1 \leqslant i \leqslant k+1$）下的整数解数量，并再次用 $L_k^{*}(P)$ 表示按照定理 1.2 的前言中所定义的相应对角解数量

的表述。当然，方程组 (5.1) 是通过将 (1.3) 中的 x_i 和 y_i 始终替换为 x_i^d 和 y_i^d 而得到的。因此，由定理 1.2 立即可得

$$V_{k,d}^*(P) - L_k^*(P) \ll (P^d)^{\alpha_k+\varepsilon} \ll P^{d\sqrt{8k+9}-d+d\varepsilon}.$$

因此，只要满足 $1 \leqslant d \leqslant \sqrt{k}/8$，渐近公式 $V_{k,\,d}^*(P) \sim (k+1)!P^{k+1}$ 便成立。按照第 2 节和第 3 节的思路进行更细致的分析，可以得到更精确的结论。

定理 5.1. 当 $k \geqslant 2$ 和 $d \geqslant 1$ 时，有

$$V_{k,d}^*(P) - L_k^*(P) \ll P^{\alpha_{k,d}+\varepsilon},$$

其中

$$\alpha_{k,d} = \min_{\substack{r\in\mathbb{N}\\ 2\leqslant r\leqslant 2k+1}} \Big(r - d + \frac{(2k+2)d}{r}\Big).$$

特别地，有

$$V_{k,d}^*(P) - L_k^*(P) \ll P^{\sqrt{8d(k+1)+1}-d+\varepsilon}.$$

设 $\beta = 3 - 2\sqrt{2} = 0.1715\ldots$。那么不难验证，只要有$1 \leqslant d \leqslant \beta(k-1)$，就有

$$\sqrt{8d(k+1)+1} - d < k+1,$$

由此再次得到 $V_{k,\,d}^*(P) \sim (k+1)!\ P^{k+1}$. 因此，定理 5.1 的结论将 d 中方程组 (5.1) 呈现稀缺性的范围从 $1 \leqslant d \leqslant \sqrt{k}/8$ 扩展至$1 \leqslant d \leqslant \beta(k-1)$。

定理 5.1 的证明。 我们先将方程组 (5.1) 改写为以下形式

$$\sum_{i=1}^{2k+2} z_i^{2j-1} = 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant k), \tag{5.2}$$

其中 $z_i = x_i^d$和 $z_{k+1+i} = -y_i^d (1 \leqslant i \leqslant k+1)$。在这一情形下，我们可以再次运用引理 2.1 给出的恒等式及其对称形式。这促使我们再次采用记号 (2.8)、(2.9) 和 (2.10)。给定一个固定的r-元组 $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_r)$，现在我们用 $\Psi_{k,\,d}(P; \mathbf{z})$ 表示满足以下条件的联立方程 (2.11) 和 (2.12) 的整数解数量

$$1 \leqslant |u_{ij}| \leqslant 2P^d \quad (1 \leqslant i \leqslant \kappa,\ 1 \leqslant j \leqslant r).$$

于是我们定义

$$\Psi_{k,d}(P) = \max_{\mathbf{z}} \Psi_{k,d}(P; \mathbf{z}),$$

其中，最大值取遍所有满足 $z_i = \pm w_i^d$ 的 r 元组 $\mathbf{z}$，其中某个整数 w_i 满足 $1 \leqslant w_i \leqslant P$ ($1 \leqslant i \leqslant r$)，并且

$$z_l^2 \neq z_m^2 \quad (1 \leqslant l < m \leqslant r).$$

在当前情形下，我们得到一个类似于引理 2.2 中估计的结果，此时假设其形状为

$$V_{k,d}^*(P) - L_k^*(P) \ll P^{r-1} + P^r \Psi_{k,d}(P). \tag{5.3}$$

我们仿照引理 2.2 的证明即可得到这一结果，同时注意到需要计数的 z_1、……、z_r 可能选择的数量为 $O(P^r)$。我们注意到，这些讨论中隐含着

我们应用了方程 (5.2) 关于变量 z_1、……、z_{2k+2} 的对称性。这种对称性可能需要重新标记变量，其中 z_1、……、z_r 与 x_i 以及整数 $-y_j$ 的选择相关，且 i 和 j 需作适当选择。

显然，$\Psi_{k,\,d}(P;\mathbf{z}) \ll \Psi_k(P^d;\mathbf{z})$。因此，经由前言中的 (3.2)，我们得到估计式 $\Psi_{k,\,d}(P;\mathbf{z}) \ll X_r(P^d)$；进而通过 (5.3) 以及导出 (3.7) 的论证，得到界

$$V_{k,d}^*(P) - L_k^*(P) \ll P^{r-1} + P^r Y_r(P^d).$$

因此，第 3 节中导出 (3.9) 的讨论给出了界

$$V_{k,d}^*(P) - L_k^*(P) \ll P^{r-1} + P^{r+\varepsilon}(P^d)^{\kappa/r}.$$

再次回想 (2.10) 中的 $\kappa = 2k+2-r$，我们得出结论：

$$V_{k,d}^*(P) - L_k^*(P) \ll P^{r-1} + P^{\alpha_{k,d}+\varepsilon},$$

其中 $\alpha_{k,\,d}$ 是定理 5.1 陈述中引入的指数。这证实了定理 5.1 的第一个断言。按照定理 1.1 证明结尾处的做法应用定理 6.1，即可得到定理 5.1 的第二个断言。定理 5.1 的证明至此完成。□

6. 附录： Appendix: an elementary discrete inequality

中小学生很早就会学到，当 $\lambda > 0$ 时，函数 $x + \lambda/x$ 在 $x = \sqrt{\lambda}$ 时于 x 的正值范围内取得最小值，此时构成该函数的两项相等。事实上，

$$x + \lambda/x = 2\sqrt{\lambda} + \left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{x}}\right)^2 \geqslant 2\sqrt{\lambda},$$

结论显而易见。如果不再是在所有正实数值的 x 中求最小值，而是限定为正整数，那么可以通过选择最接近 $\sqrt{\lambda}$ 的两个正整数之一作为 x，来近似这一论证。内行人士想必早已熟知这一结论的精确形式，而作者显然在 25 年前就已知道它（近期应用参见 [5]，和 [7]）。本附录旨在唤起作者的记忆，同时也让这一结论更容易为人所知。

定理 6.1. 当 $\lambda > 0$ 时，有

$$\min_{r\in\mathbb{N}} (r + \lambda/r) \leqslant \sqrt{4\lambda+1},$$

当且仅当对某个正整数 m，有 $\lambda = m(m-1)$ 时等号成立。

证明。令 r 为满足条件的唯一整数

$$\sqrt{\lambda+\tfrac{1}{4}} - \tfrac{1}{2} < r \leqslant \sqrt{\lambda+\tfrac{1}{4}} + \tfrac{1}{2}.$$

那么，当且仅当 $r + \lambda/r \leqslant \sqrt{4\lambda}+1$ 时

$$r^2 + 2\lambda + \lambda^2/r^2 \leqslant 4\lambda + 1,$$

且该不等式当且仅当 $(r-\lambda/r)^2 \leqslant 1$ 时成立。因此可见，只需验证 $|r-\lambda/r| \leqslant 1$，即可证实该定理的第一个结论。

令 $\delta = r - \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}}$，并注意到 $-\frac{1}{2} < \delta \leqslant \frac{1}{2}$。于是我们有

$$\begin{aligned}\left| r - \frac{\lambda}{r} \right| &= \left| \frac{\left(\sqrt{\lambda + \frac{1}{4}} + \delta \right)^2 - \lambda}{\sqrt{\lambda + \frac{1}{4}} + \delta} \right| \\ &= \left| 2\delta + \frac{\frac{1}{4} - \delta^2}{\sqrt{\lambda + \frac{1}{4}} + \delta} \right|.\end{aligned}$$

当 $\delta > 0$ 时，现在令 $\tau = \frac{1}{2} - \delta$。于是我们得到

$$0 < 2\delta + \frac{\frac{1}{4} - \delta^2}{\sqrt{\lambda + \frac{1}{4}} + \delta} \leqslant 1 - 2\tau + \frac{\tau - \tau^2}{1 - \tau} \leqslant 1.$$

当 $\delta \leqslant 0$ 时，同时令 $\tau = \frac{1}{2} + \delta$。于是，类似的论证可得

$$-\left(2\delta + \frac{\frac{1}{4} - \delta^2}{\sqrt{\lambda + \frac{1}{4}} + \delta} \right) \leqslant 1 - 2\tau - \frac{\tau - \tau^2}{\sqrt{\lambda + \frac{1}{4}}} \leqslant 1$$

and

$$-\left(2\delta + \frac{\frac{1}{4} - \delta^2}{\sqrt{\lambda + \frac{1}{4}} + \delta} \right) \geqslant 1 - 2\tau - \frac{\tau - \tau^2}{\tau} \geqslant -\frac{1}{2}.$$

因此，无论哪种情况，我们都有 $|r - \lambda/r| \leqslant 1$。鉴于前面的讨论，这就证明了定理的第一个结论。

只有当存在一个整数 r 满足方程 $r + \lambda/r = \sqrt{4\lambda + 1}$ 时，定理第一个结论中所述的上界才取等号。此关系成立当且仅当

$$(r - \tfrac{1}{2}\sqrt{4\lambda + 1})^2 = r^2 - r\sqrt{4\lambda + 1} + \lambda + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4},$$

而该方程成立当且仅当

$$r = \pm\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{4\lambda + 1}.$$

因此，有 $(2r \pm 1)^2 = 4\lambda + 1$，从而 $\lambda = r^2 \pm r$。所以，定理的第一个结论取等号当且仅当对于某个正整数m，有 $\lambda = m(m-1)$。□

References

[1] R. de la Bret`eche, $R\acute{}$塞格雷三次曲线上有理点的分布, 伦敦数学会会刊 (3)**95** (2007), 第 1 期, 69–155.[2] J. Br¨udern 和 O. Robert, 与奇数次牛顿和相关的稀少性估计, Mathematika**58** (2012), 第 2 期, 225–235.[3] D. R. Heath-Brown, 韦尔不等式、华罗庚不等式与华林问题, 伦敦数学会杂志 (2)**38** (1988), 第 2 期, 216–230。

[4] R. C. Vaughan 和 T. D. Wooley, 关于某个九元三次型及相关方程, 《杜克数学杂志》**80** (1995), 第 3 期, 669–735.[5] R. C. Vaughan 和 T. D. Wooley, 维诺格拉多夫均值定理的一个特殊情形, 《算术学报》**79**(1997), 第 3 期, 193–204.[6] T. D. Wooley, 关于同步加法方程与华林问题, 博士论文, 伦敦大学, 1990.[7] T.D. Wooley, 稀少问题及维诺格拉多夫均值定理的一些相关问题, 《剑桥哲学学会数学会刊》**175**(2023), 第 2 期, 327–343。

Department of Mathematics, Purdue University, 150 N. University Street, West Lafayette,IN 47907-2067, USA电子邮件地址：twooley@purdue.edu