arXiv:2601.05133v1 [math.NT] 8 Jan 2026

论非阿基米德量子数学与非阿基米德（量子）计算（非阿基米德（量子）数学空间）

Nikolaj M. Glazunov乌克兰国家科学院格卢什科夫控制论研究所，基辅，电子邮箱：*glanm@yahoo.com*

摘要。 我们探讨（非阿基米德）量子数学和非阿基米德（量子）计算的若干方面。

非阿基米德量子物理的动机与历史 （简述）

2025年夏天，举行了两场会议：一场是南丹麦大学 IMADA 量子数学中心举办的“《量子数学中的复兴》”，另一场是在波恩马克斯·普朗克数学研究所举办的纪念 Yu. I. Manin 的会议。

受邀参加这些会议并参与其中，是我作此报告的动机之一。

首先，算术物理学（Arithmetic Physics）的动机与历史。（非常简短）

我们交替使用数论和算术这两个术语（作为同义词）。

一些历史

摘自菲尔兹奖得主迈克尔·阿蒂亚爵士的演讲（ICM2018年）**算术物理**:

我在里约热内卢所作的阿贝尔讲座，旨在破解精细结构常数 α 之谜，这是基础物理学领域一个悬而未决的重要问题。

$\alpha \approx 1/137.035999206$ - 精细结构常数

“在物理学中，精细结构常数又称索末菲常数，通常记作 α（希腊字母 α），是一个基本物理常数，用于量化基本带电粒子之间电磁相互作用的强度。”维基百科。

诺贝尔奖得主理查德·费曼（关于 α）：

α 从何而来？它与 π有关吗？又或者与 e有关？没人知道，这是物理学中最令人费解的谜团之一：一个凭空出现、无人能够理解的神奇数字。你可以说，这是上帝亲手写下的数字，而我们不知道祂是如何挥动铅笔的。

菲尔兹奖得主迈克尔·阿蒂亚爵士：
旨在构建算术物理学理论。

尤里·马宁于*1984*年在波恩提出了一个标题相似的计划 *Atiyah [1985]*。事实上，马宁未能前来，因此我代他作了演讲。这使我有机会提出，马宁的计划过于保守，应当从经典体系提升到量子体系，并以希尔伯特空间为核心。

非阿基米德（量子）数学始于亨泽尔引入 p-进数，这些数属于算术领域。

动机

- 时空结构这一假设认为，在亚普朗克尺度上，时空的几何结构是非阿基米德的。

- 新模型
  非阿基米德数学的应用，为基于不同数系构建现实的数学模型提供了一个新框架

- 统一框架
  一些研究人员正在寻求一种统一框架，将量子数学与引力（量子场论（QFT）、弦理论）结合起来，并可能采用非阿基米德方法

1. p-ADIC NUMBERS

p进数由库尔特·亨泽尔（1861—1941年）于二十世纪初引入。

在编码理论和密码学中，码是在有限域和环上构造并应用的，例如，在素数 p [9, 3] 的 $\mathbb{F}_p$ 和 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$上。

在处理码时，我们必须求解同余式。
设 $n \in \mathbb{N}$。

例 1. $x^2 \equiv 2$ 模 7^n我们有两个解： $x_0 \equiv 3$ 模 7 和 $x_0 \equiv 4$ 模 7。考虑 $x_0 \equiv 3$ 模 7 的情况。令 $n = 2$。那么 $x_1 \equiv 3 + 7 \cdot 1$ 模 7^2。对于 $n = 3$，我们有： $x_2 \equiv 3 + 7 \cdot 1 + 7^2 \cdot 2$ 模 7^3。
依此类推。

定义 1. 令 p 为一个素数。整数序列

$\{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$使得
$x_n \equiv x_{n-1}$ 模 p^n称为 p-
进数。

例 2。 $216 = 0$, 0011011（二进制进数），
$216 = 0$, 0022（三进制进数），$216 = 1$,
331（五进制进数）

2. p-adic is not Archimedean

Let
$a_0 + a_1 p + a_2 p + \cdots, \quad 0 \le a_i < p.$
是一个 p-进整数。
令 $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 为 p-进数的环,

2.1. p-进绝对值。设 $|\,|_p$ 是一个 p-进绝对值。
对于有理数

$$a = p^n \frac{b}{c}, \ (bc, p) = 1 \tag{1}$$

令 $|a|_p = (1/p)^n$。
数 a 的表示式 (1) 中的指数 n 记为 $\nu_p(a)$, 并规定 $\nu_p(0) = \infty$

ν_p 的性质。

- $\nu_p(a) = \infty \iff a = 0$,
- $\nu_p(ab) = \nu_p(a) + \nu_p(b)$,
- *non-Archimedean property:* $\nu_p(a + b) \ge \min\{\nu_p(a), \nu_p(b)\}$

p-进绝对值（p-进范数）由下式给出

$$|\,|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \ a \mapsto \nu_p(a) = \left(\frac{1}{p}\right)^{\nu_p(a)},$$

$|\,|_p$的性质。

- $|a|_p = 0 \iff a = 0$,
- $|ab|_p = |a|_p |b|_p$,
- $|a + b|_p \le$ 最大值$\{|a|_p, |b|_p\}$

$|a|_\infty = |a|$ （实数的通常绝对值）

2.2. 函数域情形。 令 k 为一个有限域。在 $k(x)$ 中有多项式环 $k[x]$ $\mathfrak{p} \neq 0$ ，其首一不可约多项式为 $p(x) \in k(x)$。对于每个这样的 $\mathfrak{p}$, 定义一个绝对值 $|\,|_{\mathfrak{p}}$。

2.3. **乘积公式**。 对于每个有理数 $a \neq 0$，有

$$\prod_p |a|_p = 1, \tag{2}$$

其中， p 取遍所有素数的值，以及符号 ∞。

注记 1。 在函数域情形下也成立的乘积公式。

2.4. **阿代尔**。

3. p-adic codes and their implementation

[21] p-进制算术中使用 r位数字，可以视为等价于模 p^r [5]的剩余类算术。

.

4. Classical quantum mechanics

4.1. 经典量子力学中的自旋及其性质。量子信息的基本单位是量子比特，这是一种具有两个状态的量子系统，其基态 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ （采用狄拉克记号）分别对应二进制的 0 和 1。量子信息由量子比特数组编码，而量子信息的基本变换由量子门控制。用于变换量子信息的群论方法与泡利群和克利福德群有关。二维单位矩阵 σ_0 和泡利矩阵 σ_0、σ_x、 σ_y σ_z 构成了单个量子比特的密度算符空间的一组基。对于由 n 个量子比特组成的数组，使用泡利群以及克利福德群；克利福德群定义为泡利群的正规化子。

4.2. **自旋电子学**。

5. Algebraic quantum circuits and exponential sums

5.1. 关于量子逻辑。 量子逻辑与命题演算并不相同。分配律不成立：$a \wedge (b \vee c) \neq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$。

5.2. 模结构。 模结构是一个集合 L，配备二元运算 $\wedge$、$\vee$，并满足以下条件：

- $\wedge$、$\vee$满足结合律和交换律
- $a \wedge a = a \vee a = a$ 对所有 $a \in L$ 均成立
- 若 $a \wedge b = b$，则 $(a \vee c) \wedge b = a \vee (c \wedge b)$ （模恒等式）

5.3. 关于量子电路。使用指数和分析代数量子电路（algebraicheskie kvantovye cxemy） [2, 20, 14]

6. Analytification of the field of p-adic numbers

设 $\mathbb{Q}_p$ 为 p进数域,

设$\overline{\mathbb{Q}_p}$ 为 $\mathbb{Q}_p$的代数闭包，并且

设 $\mathbb{C}_p$ 为代数闭包的完备化:

$$\mathbb{Q}_p \to \overline{\mathbb{Q}}_p \to \mathbb{C}_p$$

但域 $\mathbb{C}_p$ 不是连通的，因此在其上进行分析会遇到问题。

设 A 为一个环， K 为一个代数闭域，并且关于非阿基米德绝对值是完备的。

环 A 上的乘法半范数是满足以下条件的函数 $|\ |_x : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

- $|0|_x = 0$ 且 $|1|_x = 1$ 。
- $|fg|_x = |f|_x|g|_x$对于所有 f、$g \in A$。
- $|f+g|_x \leq |f|_x + |g|_x$对于所有 f、$g \in A$。

7. Spaces and groups of quantum mathematics

7.1. 关于路径积分。"应当注意，路径积分只有在欧几里得空间中作为对维纳测度的积分时，才具有严格的数学定义。" [11]

欧几里得向量空间的一个典型例子是 $\mathbb{R}^n$ 这样一个向量空间：它配备了作为内积的点积。这一特殊的欧几里得空间例子之所以重要，是因为每个欧几里得空间都与它同构。更确切地说，给定一个维数为 n的欧几里得空间 E ，选取一个称为原点的点以及 $\overrightarrow{E}$ 的一组正交归一基，就定义了从 E 到 $\mathbb{R}^n$. 的欧几里得空间同构（Solomentsev, E.D. (2001) "欧几里得空间"，数学百科全书，EMS Press；维基百科。）

7.2. **量子群（V. Drinfeld, Ju. Manin）**。

8. Formal power series methods and non-Archimedean methods in the theory of resurgence

参见讲座 [10]中关于重生理论的形式幂级数方法。另请参见附录中的一个简单重生例子。

9. 非交换空间与阿兰·孔涅的著作

9.1. 关于 A. Connes、C. Consani、H. Moscovici 的论文"ζ零点与长椭圆波算子：半局部阿代尔算子。这篇引人入胜的论文的核心，是 Connes、Consani [J. Oper. Theory 851, 257-276 (2021年；Zbl 1524.11171)] 在半局部框架下整合了 Connes 的迹公式 [Selecta Math.

(N.S. 5, 1, 29-106, (1999; Zbl 0945.11015)]第一作者和第二作者的两项近期成果 [《数学教学》, 69, 1-2, 93-148 (2023年；Zbl 1537.11121)] 以及第一作者和第三作者的成果 [《美国国家科学院院刊》, 119, 22 (2022年；Zbl 07998560)] “通过引入长椭圆波算子的半局部类比，实现了黎曼ζ函数零点的谱实现”。

基于 Connes 和 Marcolli 的（量子）数学物理著作《非交换几何、量子场与动机》，《Colloquium Publications》，普罗维登斯：美国数学学会，普罗维登斯，（2008；Zbl1209.58007） [上述两篇论文的结果被诠释为黎曼ζ函数零点的红外（低位）部分和紫外行为。

这篇受评论文的主要成果是关于半局部 Hardy–Titchmarsh变换的定理1，以及与“所寻求的 Weil上同调”相关的定理2。论文共分六节。第一节为引言，旨在让读者了解论文的主要思想和结果。第二节介绍循环对及其相关的长椭圆算子。

设 $\mathcal{H}$ 为希尔伯特空间， D 为作用于 $\mathcal{H}$上的自伴算子，$\xi \in \cap_{n\in\mathbf{N}} DomD^n$ 为单位循环向量。令 $\lambda > 0$。对于循环对（D, ξ），受评论文的作者将形式长椭圆算子 ω（D, ξ, λ）定义为 ω（D, ξ, λ）$= -D^2+\lambda^2 N$，其中 N为数算子（$N\xi_j = j\xi_j$）。

令 $\mathcal{C}^*$-代数 $\mathcal{A}:= c_0(\mathbb{N})$ 为在 ∞ 处消失的数列所构成的代数。对于偶循环对 (D, ξ) 和 $\mathbb{Z}/2$ 分次γ，作者定义偶谱三元组 ($\mathcal{A}$, $\mathcal{H}$, D)，其中 $\mathcal{C}^*$-代数 $\mathcal{A}$作用于希尔伯特空间 $\mathcal{H}$。在给出若干初步结果（命题 2.1–2.3）后，作者定义形式长椭圆算子的 Jacobi 矩阵（命题 2.4）。

第 3 节讨论 Hardy–Titchmarsh 变换：阿基米德赋值。“第 4 节致力于将 Hardy–Titchmarsh 变换扩展到半局部情形，其中涉及 Q 的赋值有限集 S，且该集合包含阿基米德赋值，并分析半局部Sonin空间。”第 5 节研究 Jacobi 图景中的亚纯辛表示。第 6 节为附录：p-进数上的傅里叶变换。文中给出了（Weil）正性结果，参见 A. Weil[Comm. Lund., 第 252–267 页（1952；Zbl 0049.03205）]。另参见 H. Yoshida 的论文 [载于：《几何中的 Zeta 函数》（东京，1990年），纯数学高级研究，第 21 卷，第 281–325 页。纪伊国屋，东京（1992；Zbl 0817.11041）]，以及 E. Bombieri 的论文 [Rend. Mat. Acc. Lincei，第 9 辑，第 11 卷：183–233 页（2000；Zbl ）]。

第一作者最近在 CIRM 作了题为《AlainConnes、极值特征向量、谱作用量与ζ谱三元组》的报告，时间为2025年4月10日。

9.2. **关于 S-代数群**。E. Lindenstrauss，《不变测度与算术量子唯一遍历性》。

菲尔兹奖得主 Lindenstrauss [22] "我们对局部齐性空间 $\Gamma\backslash SL(2,\mathbf{R}))\times L$ 上的测度进行分类：这些测度在 $SL(2,\mathbf{R}))$ 的对角子群作用下不变且具有正熵，并且具有 L递归性。"

Lindenstrauss 等人指出："我们回顾一下，若群 L 是 S-代数的，也就是说，它是定义在$\mathbf{R}$、$\mathbf{C}$或$\mathbf{Q}_p$上的代数群的有限直积，其中 S 表示该直积中出现的域的集合。S- 代数齐性空间是一个 S- 代数群除以一个紧子群所得的商空间。"

9.3. **关于绝对代数几何**。 Alain Connes，1982年菲尔兹奖得主，研究算子代数（冯·诺依曼代数）、绝对代数几何和非交换几何。

首先来看一个例子。

例 3。 考虑切瓦莱群 $SL_3(\mathbb{F}_p)$。这是一个李型单群 A_2。它的韦伊群是对称群 S_3。

由 [7]。范畴对象 $\mathbb{F}_1$。一个含一个元素的有限域。

注释 2。V.A. Ustimenko 教授 [25] 探讨后量子密码学问题。在研究中，他发展并应用了对称群和切瓦莱群研究成果。特别是，他（与其他研究者一道）认为，对于切瓦莱群 G，有 $G(\mathbb{F}_1)=W$，即 G 的韦伊群。

考虑仿射概形 $Spec\,\mathbb{Z}$。

在 $Spec\,\mathbb{Z}$ 的每个素有限点 p 上方，都有相应的素有限域 $\mathbb{F}_p$。

令 $q=p^n,\quad n\in\mathbb{N}$。可以将 $\mathbb{F}_q$ 视为 $\mathbb{F}_1$ 经由 q得到的量子变形。

在 $Spec\,\mathbb{Z}$ 的泛点上，我们有有理数域$\mathbb{Q}$。

让我们为每个素有限域 $\mathbb{F}_p$. 构造射影极限 $\mathbb{Z}_p=\varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$

让我们将有理数域 $\mathbb{Q}$ 完备化为实域 $\mathbb{R}$。

在每个 p-进域上，我们定义上述的 p-进赋值 $|\ |_p$，并在有理数域上定义绝对值。将它们相乘，我们得到公式（2）的左侧。

对于域 $\mathbb{F}_1$，会出现以下问题。

问题 1。 域 $\mathbb{F}_1$ 能否完备化为一个完备域？如果可以，这个"1-进完备域"是什么形式？这个完备域的"1-进范数"是什么？

回想一下，存在 Arakelov紧化 $Spec\,\mathbb{Z}$。

问题 2。 如果我们可以通过将对象“1-adic范数”添加到公式（2）的左侧来修改乘积（2），那么我们就可以得到一个类似于乘积（2）的不变量。它是什么样的?

阿代尔也类似。

10. Appendix

关于重生（возрождение）：
这个术语由 J. Ecalle 于1998年引入（定义） [10]。考虑欧拉方程

$$t^2(dy/dt) = t - y \tag{3}$$

根据常微分方程教材，我们尝试用以下方法求解（3）：
$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m$
我们得到
$y = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m m! t^{m+1}$
遗憾的是，这个级数对所有 $t \neq 0$ 都发散。
但是，如果我们考虑齐次方程 $t^2(dy/dt) = -y$ 并求解它，我们得到

$y = ae^{1/t}.$
该解

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m m! t^{m+1} + ae^{1/t}.$$

是式 (3) 的重生解。
我将把这种重生称为陶伯复苏。
还存在阿贝尔复苏。

致谢。 感谢 Jørgen Elleg˚ard Andersen 教授和 Peter Teichner 教授邀请我参加会议。感谢国际科学研讨会“量子计算”的负责人和科学秘书邀请我作报告。感谢 V. Gusynin 院士给予我的咨询。

References

[1] Michael Atiyah, 《算术物理》, 2018年国际数学家大会, [2] D. Bacon、van DamW.、A. Russell, 《使用指数和分析代数量子电路》。 https://www.researchgate.net/publication/255664199[3] A. Beletsky、N. Glazunov、D. Navrotskyi, 《编码理论与密码学的代数基础》, 乌克兰科学与教育部、NAU, 教材, 2018年。[4] V. Berkovich, 《非阿基米德域上的谱理论与解析几何》, 美国数学会（1990年）。[5] Z. Borevich、I. Shafarevich, 《数论》, 学术出版社, 纽约, 1966年。[6] A. Connes, 《非交换几何》, 爱思唯尔, 1998年。[7] A. Connes、C. Consani, 《绝对代数几何：仿射情形》, 《数学进展》, 第390卷, 2021年。

[8] A. Connes、C. Consani、H. Moscovici，《ζ零点与长椭圆波算子：半局部阿代尔算子》，《Ann. Funct. Anal.》15:87（2024年）。[9] J. H. Conway、N. J. A. Sloane，《球堆积、格与群》，Springer（纽约），1999年。[10] Jean Ecalle，《关于超渐近级数、可分析函数及Dulac猜想构造性证明的六讲》，北约高级研究所《向量场的分岔与周期轨道》（编者：Dana Schlomiuk），第408卷，Springer Dordrecht，75–184。[11] V,P, Gusynin、E.B. Gorbar，《规范场量子理论导论》，乌克兰国家科学院，M. M. Bogolyubov理论物理研究所。—基辅：Akademperiodika，2023年。[12] Glazunov M.，《闵可夫斯基球面的最优堆积》，《控制论与系统分析》，第61卷，192–196，Springer，2025年。[13] N.M. Glazunov，《伯努利数、Leopoldt ζ函数及其推广的Voronoi同余》，《*Voronoi*对现代科学的影响》，第2卷，164–184，2025年。[14]N.M. Glazunov，《闵可夫斯基球与球面的算术和代数性质》，arXiv:2407.12048v4 [math.NT],https://doi.org/10.48550/arXiv.2407.12048，2025年。[15] N.M. Glazunov，《闵可夫斯基模空间上的代数动力学与重生》，《第*15*届乌克兰代数会议》。48，2025年。[16] N.M. Glazunov，《代数动力系统及其在等分布中的应用》，2025年乌克兰年终数学会议，30，2025年。[17] N. Glazunov，《平面上由闵可夫斯基球覆盖及其对偶性》，《保加利亚科学院通报》，第77卷，第6期（2024年）。[18] N. Glazunov，《模空间上的极值函数及其应用》。2024年，arXiv:2411.13671v3 [math.NT]。[19]N.M. Glazunov，《源于（量子）空间与群作用的动力系统的随机性质》，《混沌建模与仿真》（CMSIM）3: 395–401，2013年。[20] N. M. Glazunov，《三角和、量子门与二级量子化》，纪念B. M. Bredikhin、V. I. Nechaev和S. B. Stechkin教授诞辰百年的第18届国际会议论文集。Chebyshev文库，图拉，2020年，第154–158页。[21] E. V. KRISHNAMURTHY、F.A.SC.、T. MAHADEVA RAO和K. SUBRA-MANIAN，《具有应用的有限段 p-进制数系：精确计算》，《印度科学院院刊》，第81卷，A辑，第2期，58–79，1975年。[22] Elon Lindenstrauss，《不变测度与算术量子唯一遍历性》，《数学年刊》163，165–219（2006年）。[23] Yu. I. Manin，《几何学的新方向》，《俄罗斯数学调查》，第39卷，第6期，51–83（1984年）。[24] J. Neukirch，《代数数论》，Springer，1999年。[25] V. Ustimenko，《 q-正则树上的二次方程及其应用》，2025年乌克兰年终数学会议，54，2025年。