arXiv:2601.05136v1 [math.GT] 8 Jan 2026

量子化 $SL_2(\mathbb{C})$ 陈-西蒙斯不变量的态积分

Calvin McPhail-Snyder数学系，杜克大学
calvin@sl2.site

摘要

作者与 N. Reshetikhin 先前的工作定义了纽结 K、表示 $\rho\colon \pi_1(S^3 \setminus K) \to SL_2(\mathbb{C})$ 以及 ρ子午线特征值的对数 μ 的不变量 $Z_N^{\psi}(K, \rho, \mu)$。它可以解释为 Kasahev 不变量的几何扭结，也可以解释为 $SL_2(\mathbb{C})$ 陈-西蒙斯不变量的量子化，并通过涉及量子二重对数的离散态和来定义。本文展示如何将 $Z_N^{\psi}(K, \rho, \mu)$ 表示为在参数化纽结补空间上双曲结构的空间中的一系列围道积分。这类态积分表示是确定量子不变量渐近行为的重要一步，正如体积猜想所预言的那样。我们将讨论这一视角，以及确立 Z_N^{ψ} 指数增长仍面临的障碍。

2020 年数学主题分类：主要分类 57K16，次要分类 57K32、58J28

关键词和短语：复陈-西蒙斯不变量，双曲体积，量子双曲不变量，量子二重对数，体积猜想，态积分

1. 引言

1.1. 背景与动机

Kashaev 的体积猜想 [Kas97] 提出了双曲结的几何与其量子不变量之间一种引人注目的联系。这个猜想似乎与量子 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 陈-西蒙斯理论有关；这是一种拓扑量子场论，可视为更为熟悉的量子 SU(2) 陈-西蒙斯理论的复化 [Guk05]，或其解析延拓 [Wit10]。多位作者 [BB04; BWY21; KR05; McP25a] 构造了几何量子不变量，可将其解释为 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 陈-西蒙斯理论的一种数学实现的候选者。

我们讨论候选数学实现的一些典型特征。[1] 为便于具体说明，设 K 是一个双曲结，且位于 S^3，不过有些版本也适用于闭三维流形或相关对象。数学实现是一个函数族

$$\mathcal{Z}_N : \mathsf{X}(K) \to \mathbb{C}$$

对于与层相关的正整数 N，以及以 $S^3 \setminus K$ 上的双曲结构为参数的空间 $\mathsf{X}(K)$；它通常是 $S^3 \setminus K$ 的 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 特征簇的某种形式。设 K 的典范结构 ρ_{hyp} 的 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 陈-西蒙斯不变量为 $\varsigma_K \in \mathbb{C}/2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$，并将其归一化，使得 K 的双曲体积为 $2\pi \operatorname{Re} \varsigma_K$。体积猜想指出（略去归一化及其他一些细节）

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\log \mathcal{Z}_N(K,\rho)}{N} = \varsigma_K \tag{1.1}$$

对于某个 $\rho \in \mathsf{X}(K)$ 不一定是 ρ_{hyp}。我们将 $N \to \infty$视为半经典极限。令人惊讶的是，除了 ρ_{hyp} 之外的 ρ 也满足这一点；Kashaev 的原始猜想[Kas97] 认为这适用于平凡双曲结构 1。在这种情况下，$\mathcal{Z}_N(K,\ 1)$ 可以对应于 N阶带色 Jones 多项式的一个值，该多项式属于 K [MM01]。有一种用于证明这些猜想的标准设想（在某些特殊情形下已成功），分为两个步骤。

步骤 1（建立积分）。 证明该不变量等价于（或许是渐近等价于）一个 态积分，即一个围道积分

$$\mathcal{Z}_N(K,\rho) \sim \int_\Gamma e^{N\mathcal{S}(\mathbf{t})}\,\mathrm{d}\mathbf{t}$$

其中 $\mathcal{S}$ 是一个全纯函数，可以识别为陈-西蒙斯函数a l.
有时则必须考虑这类积分的和。⌟

更具体地说，给定 $S^3 \setminus K$ 的一个组合描述 $\mathcal{T}$，其定义域 $\mathcal{S}$ 是一个空间 $\Omega_{\mathcal{T}}$，用于参数化 $\mathcal{T}$ 各个组成部分上的双曲结构。$\mathcal{S}$ 的临界点是一些选择，它们组合起来可在整个 $S^3 \setminus K$ 上形成一致的结构，而临界值则是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 陈-西蒙斯不变量。例如，如果 $\mathcal{T}$ 是一个理想三角剖分，那么 $\Omega_{\mathcal{T}}$ 参数化四面体形状，而 $\mathcal{S}$ 的临界点则是 Thurston 粘合方程的解。

步骤 2（移动积分路径）。证明

$$\int_\Gamma e^{N\mathcal{S}(\mathbf{t})}\,\mathrm{d}\mathbf{t} \sim \int_{\Gamma'} e^{N\mathcal{S}(\mathbf{t})}\,\mathrm{d}\mathbf{t}$$

其中 Γ' 是一条处于鞍点位置的积分路径，对应于 ρ_{hyp} 的一个临界点。⌟

的最大临界值为 $\operatorname{Re}\mathcal{S}$，即 $\operatorname{Re}\varsigma_K$。它出现在 $\operatorname{Re}\mathcal{S}$的一个鞍点处，因为 $\mathcal{S}$是全纯函数。如果 Γ' 是以适当方式经过此鞍点的积分路径，那么利用高斯积分进行标准的鞍点近似即可得到所需的渐近行为（1.1）。

[Kas97] R. M. Kashaev，《量子二重对数给出的结的双曲体积》。arXiv doi[Guk05] S. Gukov，《三维量子引力、陈-西蒙斯理论与 A-多项式》。arXiv doi[Wit10] E. Witten，《陈-西蒙斯理论的解析延拓》。arXiv[Wit89] E. Witten，《量子场论与琼斯多项式》。doi[BB04] S. Baseilhac 和 R. Benedetti，《具有 PSL(2,C) 特征的三维流形的量子双曲不变量》。arXiv doi[BWY21]F. Bonahon、H. Wong 和 T. Yang，《曲面微分同胚量子不变量的渐近行为 I：猜想与代数计算》。arXiv[KR05]R. Kashaev 和 N. Reshetikhin，《其补空间带有平坦联络的辫结不变量》。arXiv doi[McP25a]C. McPhail-Snyder，《缠结外部的 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 陈-西蒙斯不变量的量子化》。arXiv[1] 按照第 1.3 节的术语，这些都是正型不变量。此外还有相关但不等价的负型不变量。[MM01] H. Murakami 和 J. Murakami，《彩色琼斯多项式与纽结的单纯体积》。arXiv doi

一般而言，这两个步骤都需要复杂的计算；Ohtsuki 对相关解析问题作了详细讨论 [Oht16]。步骤1 需要将离散求和改写为积分（之和），通常借助泊松求和公式。要确保这一做法成立，必须仔细估计 $\mathcal{S}$ 及相关函数的大小。

[Oht16]T. Ohtsuki，《关于 5_2 纽结的 Kashaev 不变量的渐近展开》。DOI

作者此前的工作 [McP25a] 使用了 R与 N. Reshetikhin 合作定义的全纯矩阵 [MR25]，以定义上述复陈-西蒙斯理论的一种候选数学实现Z_N^ψ。本文证明Z_N^ψ 等于一组态积分之和。我们的方法无需检验任何不等式，并适用于满足自然代数非退化条件的任意表示。据我所知，这是正型不变量的首个精确（非渐近）态积分表示。负型不变量会自动具有此类积分表示；它们是复陈-西蒙斯理论的一种不同但相关的数学实现（第1.3节）。我们的结果或可阐明这两个分支之间的关系。

[McP25a]C. McPhail-Snyder，缠结外部的 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 陈-西蒙斯不变量的量子化。arXiv

[MR25] C. McPhail-Snyder 和 N. Reshetikhin，带有平坦 $\mathcal{U}_\xi(\mathfrak{sl}_2)$连接的循环 $\mathfrak{sl}_2$ 模及其补空间中的纽结不变量。 arXiv

1.2. 我们的结果

设 K 是一个定向带框结，位于 S^3 中，且 ρ 是 K的一个装饰表示，也就是一个表示 $\rho\colon \pi_1(S^3\setminus K)\to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$，并为外围子群在 ρ下的像选定一个特征子空间。特别地，这一选择确定了 m 的子午线的一个特征值 K。一个对数子午线是一个复数 μ，满足 $e^{2\pi\mathrm{i}\mu}=m$。McP25a[的主要结果是定义了一个不变量序列[2]

$$\mathrm{Z}_N^\psi(K,\rho,\mu)\in\mathbb{C}$$

对于整数 $N\geq 2$。我们可以将它们视为 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 陈-西蒙斯不变量的量子化、Kashaev [Kas95] 和 ADO [ADO92]不变量的几何扭结，或者视为 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 陈-西蒙斯理论的一种候选数学实现。此构造（以及我们的结果）同样适用于链环和辫结，但为简便起见，我们仅讨论纽结。

[2] 在 [McP25a]中，我们将 Z_N^ψ写作依赖于某个对数装饰 $\mathfrak{s}$的形式，其中也包括对数经线的选择 λ。此处使用的归一化Z_N^ψ 与之无关，λ因此我们在记号中省略它。

[Kas95] R. M. Kashaev，《一种源自量子二重对数的链环不变量》。 arXiv DOI

[ADO92] Y. Akutsu、T. Deguchi 和 T. Ohtsuki，《带色链环的不变量》。 DOI

设 D 是 K 的一个开纽结图（即一个 1-1 缠结图，其闭包为 K）。设 E为 D的内部线段（边）集合。利用量子二重对数，我们定义一个 作用量$\mathcal{S}_N(D,\mu)\colon \mathbb{C}^E\to\mathbb{C}$ 使得

$$t\mapsto e^{N\mathcal{S}_N(D,\mu|t)}\colon \mathbb{C}^E\to\mathbb{C}$$

是一个亚纯函数。给定一些额外规范数据 u，称为 影着色，则根据定义，[McP25a]的不变量是一个态和

$$\mathrm{Z}_N^\psi(K,\rho,\mu)=\frac{1}{N^{\mathrm{cr}(D)}}\sum_{n\in[N]^E} e^{N\mathcal{S}_N(D,\mu|(\beta+n)/N)}$$

其中 $[N]=\{0,1,\dots,N-1\}$ 且 $\mathrm{cr}(D)$ 是 D的交叉数。向量 $\beta\in\mathbb{C}^E$编码了 (ρ,u)。对于一个 $k\in\mathbb{Z}^E$ 分量为整数的向量[3]，一个 态积分 为

$$J_N(D,\mu,\beta|k):=\int_{[0,1]^E}\exp[N(\mathcal{S}_N(D,\mu|\beta/N+t)-2\pi\mathrm{i}k\cdot t)]\,\mathrm{d}t \tag{1.2}$$

[3] 正如备注 4.5 所讨论的，这与展平的选择有关。

在第 3 节中，我们证明（定理 1），Z_N^ψ 等于所有态积分之和：

$$\mathrm{Z}_N^\psi(K,\rho,\mathfrak{s})=N^{(|E|-1)/2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^E}J_N(D,\mu,\beta|k) \tag{1.3}$$

主要的技术难点在于确保积分路径避开 $e^{N\mathcal{S}_N(D,\ \mu)}$的极点。第2.2节将讨论所需的代数条件。处理好这一点后，使用 [McP25b] 的方法将求和改写为积分，是傅里叶级数的一个初等应用。特别是，无穷级数的收敛性是自动成立的。

将 $N \to \infty$ 函数 $\mathcal{S}_N(D,\mu)$转化为函数 $\mathcal{S}(D)$，我们将其解释为陈-西蒙斯作用量。在文献中，$\mathcal{S}(D)$常被称为（Yokota）势函数 [Yok00]，并记作V。$\mathcal{S}_N(D)$的临界点是 K 的边界抛物表示，而临界值则是它们的陈-西蒙斯不变量。因此，定理 1 完成了证明 Z_N^ψ 的体积猜想所需的第 1 步。我们将在第 4 节准确陈述这一点，解释为何对 $\mathbb{Z}^E$ 求和是自然的，并讨论迈向第 2 步的障碍。

1.3. 负型不变量

复陈-西蒙斯理论似乎存在两种不等价（但或许都很自然）的分支。上文描述了正型不变量 [BB04；BWY21；KR05；McP25a]，它们

- 定义为对有限状态空间求和，
- 被猜想会随 $N \to \infty$ 指数增长，并且
- 对任意（或任意几何非退化的）双曲结构都有明确定义。

相比之下，负型不变量 [AK14；AK13；Liu+25]

- 是通过对非紧连续状态空间上的积分定义的，
- 据猜想会随着 $N \to \infty$而衰减，但
- 只有在双曲结构满足正性条件、从而使积分收敛时才有定义。

尽管这两类不变量在概念上有许多相似之处，但它们之间的确切关系尚不清楚。正型不变量与 Kashaev 不变量及原始体积猜想的关系更为直接。不过，证明负型不变量的体积猜想通常更容易：它们是通过积分定义的，因此在满足正性条件时，步骤 1 自动成立。

正型不变量的渐近增长目前仅在交叉数不超过 7的纽结 [Oht16；Oht17；OY18] 以及扭结 [CZ23] 中得到证明。关于负型不变量，我们已知的结果要多得多：Liu、Ming、Sun、Wu和Yang 的不变量 [Liu+25] 对每个具有全测地边界的双曲流形都满足该猜想，而 Andersen-Kashaev Teichmüller拓扑量子场论对扭结 [AGP23] 以及许多其他流形 [AW24；AGW25；Won25]也满足该猜想。我们希望我们的结果能够通过类似的技术，导出 Z_N^ψ 的渐近增长证明。

此外，我们的工作或许能让人们更深入地理解正型与负型不变量之间的关系。Andersen 和 Kashaev [AK13] 证明，他们的负型拓扑量子场论可以通过对紧致态空间积分来定义。这种形式的配分函数在形式上类似于经 Wick 旋转并改变作用量整体符号后的态积分之和（1.3）。他们通过 Weil-Gel'fand-Zak变换将其重新表述为取值于拟周期函数空间的形式。类似的拟周期函数也用于Z_N^ψ [McP25a] 的定义，这或许能让两种构造之间的关系更加明确。

[McP25b]C. McPhail-Snyder，《来自 Wirtinger 表示的八面体坐标》。arXiv DOI

[Yok00]Y. Yokota，关于双曲结体积猜想。arXiv

[BB04] S. Baseilhac 和 R. Benedetti，“带有 PSL(2,C) 特征的三维流形的量子双曲不变量”。arXiv DOI

[BWY21]F. Bonahon、H. Wong 和 T. Yang，曲面微分同胚的量子不变量渐近行为 *I*：猜想与代数计算。arXiv

[KR05]R. Kashaev 和 N. Reshetikhin，“补空间中带有平坦联络的辫结不变量”。arXiv DOI

[AK14] J. E. Andersen 和 R. Kashaev，“来自量子 Teichmüller 理论的拓扑量子场论”。arXiv DOI

[AK13] J. E. Andersen 和 R. Kashaev，*Teichmüller* 拓扑量子场论的新表述。arXiv

[Liu+25] T. Liu、S. Ming、X. Sun、B. Wu 和 T. Yang，来自 $\mathrm{U}_q\mathfrak{sl}(2;\mathbb{R})$ 的模双 Turaev-Viro 不变量。arXiv

[Oht17]T. Ohtsuki，“关于具有七个交叉的双曲结的 Kashaev不变量的渐近展开”。DOI

[OY18] T. Ohtsuki 和 Y. Yokota，“关于具有 6 个交叉的纽结的 Kashaev不变量的渐近展开”。DOI

[CZ23] Q. Chen 和 S. Zhu，关于各种量子不变量渐近展开的研究 *II*：扭结在根处的带色 *Jones* 多项式 *of unity* $e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N+\frac{1}{M}}}$ *and* $e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}}$。arXiv

[AGP23]F B̨ Aribi、F Guéritaud 和 E Piguet-Nakazawa，“扭结的几何三角剖分与 Teichmüller TQFT 体积猜想”。arXiv DOI

[AW24]F. B. Aribi 和 K. H. Wong，*FAMED* 几何三角剖分的 *Andersen-Kashaev* 体积猜想。arXiv

[AGW25] F. B. Aribi、A. Guilloux 和 K. H. Wong，借助计算机 *FAMED*：证明 *42,000* 个纽结的 *Andersen-Kashaev* 体积猜想。arXiv

[Won25]K. H.Wong，*Teichmüller* 拓扑量子场论关于广义 *FAMED* 半几何三角剖分的渐近行为。arXiv

致谢
I 谨此感谢 Francis Bonahon、Effie Kalfagianni 和 Ka Ho Wong 的宝贵交流。 .

2. 预备知识

这里给出一些关于 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 链环补空间的表示以及八面体分解的预备事实。有关详细内容，参见 [McP22]和 [McP25b]。

[McP22]C. McPhail-Snyder，链环补空间上的双曲结构、八面体分解与量子 $\mathfrak{sl}_2$。arXiv

2.1. 图与着色

定义 2.1。 纽结 K 的装饰表示是一个表示 $\rho\colon\ \pi_1(S^3\backslash K)\to\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$，以及为每个外围子群 K 在 ρ下的像选取一个特征子空间。

更正式地说，给定外围子群 $\Pi\subset\pi_1(S^3\setminus K)$ 的一个选择，装饰是 $\rho(\Pi)$ 的一个特征子空间 $L\subset\mathbb{C}^2$，这里我们取右特征子空间。这不依赖于外围子群的选择：任何其他选择都与之共轭 $y^{-1}\Pi y$，相应的特征子空间为 $L\rho(y)$。 K 的定向确定一条子午线 $\mathbf{m}\in\Pi$，而装饰 L 则确定特征值 $m\in\mathbb{C}^\times$，其定义如下

$$v\rho(\mathbf{m})=m^{-1}v$$

其中 v 是 L 的任意非零元素。逆运算虽然不太理想，但确实如此；选择这种写法是为了与 [MR25；McP25a]的约定保持一致。显然 m 不依赖于 Π的选择。

定义 2.2。设 K 是 S^3 中的一个定向带框结。 开图 K 是一个定向的黑板框缠结图 D，它有一个入边界分支和一个出边界分支，其闭包是 K的一个图。 线段 D 是其底层图的边。我们将与缠结边界相接的两条线段称为边界线段，其余部分称为内部线段，并用 E 表示 D的内部线段集合。记 $\mathrm{cr}(D)$ 为该图的交叉数，则有 $2\mathrm{cr}(D)=|E|+1$。

定义 2.3. 一个 带装饰矩阵 是一个有序对 $(g,[v])\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\times\mathbb{CP}^1$，由矩阵 g 和右特征子空间 $[v]$ 对应于 g组成。 特征值 对于 $(g,[v])$ 是满足以下条件的 $m\in\mathbb{C}^\times$ 数

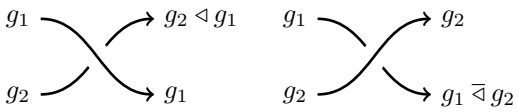
$$vg=m^{-1}v.$$

我们在带装饰矩阵上定义一个二元运算：

$$(g,[v])\triangleleft(h,[w]):=(h^{-1}gh,[vh]) \tag{2.1}$$

一个 带装饰的 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-着色 缠结图 D 为 D的每条弧赋予带装饰矩阵，并满足交叉关系

(2.2)



其中 $\triangleleft$是由 $(g,[v])\triangleleft(h,[w]):=(hgh^{-1},[vh^{-1}])$.定义的 $\triangleleft$的逆运算。我们始终要求，开图的 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-着色将同一个带装饰矩阵赋给两个边界线段；等价地说，它给出了闭包的良定义着色。

[4] 我们的不变量是根据与 D 相关的八面体分解来定义的。这是一种具有两个非理想顶点的半理想三角剖分。额外的自由度与这些顶点位置的选择有关。

$\pi_1(S^3 \setminus K)$ 的 Wirtinger 表示清楚地表明，K 的装饰表示与 D 的装饰 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-着色一一对应，因此我们将二者都记为 ρ。为定义不变量，我们还需要额外选择依赖于图的规范数据。[4] Z_N^{ψ} 的值与这一选择无关。

定义 2.4。 一个 影着色 (ρ, u) 的图 D 是一个带装饰的 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$着色 ρ，其定义在 D上，并附有一个赋值 u： $j \mapsto u_j$ 将列向量 $u_j \in \mathbb{C}^2$ 赋给 j 的区域 D，并满足以下规则

(2.3)
$$(g, [v]) \xrightarrow[gu]{u}$$

在上图中，我们称标记为 u 的区域 位于 该线段上方。

不难看出，影着色由赋给 D （或任意其他区域）最上方区域的向量 $u_0 \in \mathbb{C}^2$唯一确定。

定义 2.5。 图 D 定义出区域参数

(2.4)
$$a_j := \mathbf{e}_1 u_j \text{ for each region } j$$

和线段参数

(2.5)
$$b_i := -\frac{v_i \mathbf{e}_2}{v_i u_{i\uparrow}} \text{ for each segment } i$$

其中 $i^{\uparrow}$ 是线段 i上方的区域:

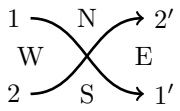
$$(g_i, [v_i]) \xrightarrow{u_{i\uparrow}}$$

如果区域参数或线段参数都不为 0 或 ∞，则称影着色为容许的。定义 2.6。开图 D 的影着色(ρ, u) 是归一化的，如果它是容许的，且赋给开线段的线段参数为 1。

显然，通过对向量 u_i重新缩放，总可以选取一个归一化的着色。这是下文定义的 B 型规范变换的一个特例。

2.2. 规范变换与非退化性

该图 D 确定了一个半理想三角剖分 $\mathcal{T}_D$，其中 $S^3 \setminus K$（含有两个非理想点），称为八面体分解；详细讨论请参阅 [KKY18]，关于它与我们参数之间的关系，请参阅 [McP22; McP25b]。 $\mathcal{T}_D$ 为 D 的每个交叉赋予四个四面体，每个角各有一个。线段参数通过形状参数 z_k自然地为这些四面体上的双曲结构提供参数。将交叉的线段和角标记为

(2.6)


[KKY18] H. Kim、S. Kim 和 S. Yoon，《纽结补空间的八面体展开 I：伪双曲结构》。 arXiv DOI

四面体的形状参数由下式给出

$$z_{\mathrm{N}} = \left(\frac{b_{2'}}{b_1}\right)^{\epsilon} \qquad z_{\mathrm{S}} = \left(\frac{b_2}{b_{1'}}\right)^{\epsilon} \tag{2.7}$$
$$z_{\mathrm{W}} = \left(\frac{b_2}{m b_1}\right)^{\epsilon} \qquad z_{\mathrm{E}} = \left(\frac{m b_{2'}}{b_{1'}}\right)^{\epsilon}$$

其中，ϵ 表示交叉的符号。形状参数是顶点在 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$中的位置的交比。特别地，当四面体的形状参数属于 $\{0, 1, \infty\}$时，该四面体是几何退化的。

如果影着色如上所定义是容许的，那么 $\mathcal{T}_D$ 的形状参数都不为 0 或 ∞。[5] 这是定义 Z_N^{ψ} 的必要条件，并且每个表示 ρ 都与某个容许表示规范等价。由于 Z_N^{ψ} 是规范不变的，因此可以为任意 ρ定义它。

[5] 严格来说，一个形状参数 $z = z^0$ 对应于一个顶点有序四面体的一对边，其余边对分别赋值为 $z^1 = 1/(1-z^0)$ 和 $z^2 = 1-1/z^0$。可容许性意味着某个特定的优选边对不等于 0 或 ∞。

定义 2.7（[McP25b，第 4]节）。设 $(\rho,\ u)$ 是 D 的影着色，线段颜色为$i \mapsto (g_i,\ [v_i])$，区域颜色为 $j \mapsto u_j$。它的规范变换是如下形式的着色

(A) $i \mapsto (h^{-1} g_i h, L_i h)$ and $j \mapsto g^{-1} u_j$

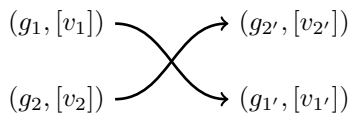
(B) $i \mapsto (g_i, L_i)$ and $j \mapsto h^{-1} u_j$

对于某个 $h \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$。我们称新着色为由 *A* 型和 *B* 型规范变换作用于 h所得的像。

引理 2.8 ([McP25b，定理 2])。设 ρ 是一个装饰表示，D 是 K的一个开图。任意一个 $(\rho,\ u)$ 的影着色 D 都与一个具有可容许影着色的着色规范等价。」

虽然我们可以确保形状参数属于 $\mathbb{C}\backslash\{0\}$，但不一定能确保它们避开 1。形状参数等于 1 与影着色的选择无关，并且等价于装饰表示满足一个自然条件：

定义 2.9. 带有装饰 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-着色的交叉



若 被压扁，当且仅当 $[v_1] = [v_2]$；等价地，对于 $[v_i] = [v_j]$ 任意一对 $(i,\ j)$ 相邻线段。（注意，此条件与影着色的选择无关。）若图的任一交叉被压扁，则称该图的着色为压扁的。若 ρ 是 K 的一个装饰表示，且 D 是一个开图 K，则称 D 为 *ρ*-压扁的，若由 ρ 诱导的着色是压扁的（反过来也成立，即 ρ 是 *D*-压扁的）。

可消去交叉总是压扁的。查阅 Kim 和 Choi 编纂的边界抛物型表示数据库 [KC26] 可知，若 D 是 K的交叉数最少图，且 ρ 是一个非平凡表示，那么 D 通常不会被 ρ压扁，但有时会。不过，如果K 是双曲的，且 ρ_{hyp} 是离散忠实表示（的一个提升），那么我确实知道有一个没有可消去交叉的图 D 被 ρ_{hyp}压扁。

[KC26] S. Kim 和 P. Choi，*Diagram.site*：纽结的边界抛物表示

按照标准术语，非 ρ_{hyp}压扁图称为本质的。[6] 根据 [McP25b，定理 3]，本质性等价于一个称为弧忠实性的纯群论条件。不难看出，如果 D 不是弧忠实的，那么对于每个带装饰的表示，它都是压扁的ρ。自然可以猜想（见 [McP25b，第 5]节），任何双曲结都有一个弧忠实图。已知任何双曲结的约化交替图都是弧忠实的。

[6] 更确切地说，与之关联的八面体分解是本质的。

在任何压扁交叉处，形状参数都为 1，因此定义 Z_N^{ψ} 的 R-矩阵元会遇到量子二重对数的极点和零点。可以证明这些极点和零点会相互抵消，但抵消过程十分微妙，导致我们的态积分无法良好定义。更一般地说，为了避免奇点，我们需要确保没有形状参数的模为 1；如果没有交叉被压扁，我们就可以通过规范变换实现这一点。

引理 2.10（[McP25b，推论 5.3]）。设 ρ 是纽结 K 的一个装饰表示，D 是 K 的一个开图。假设 D 没有被 ρ 压扁。那么存在一个与 ρ 规范等价的表示 ρ'，以及 D 的一个影着色（ρ'，u），使得所有形状参数的模都不等于 1。在这种情况下，我们称（ρ'，u）避开了单位圆。」

2.3. 线段方程

如上所述，线段参数有一种自然的几何解释：它们参数化了八面体分解中理想顶点的位置。沿着 [McP25b] 我们展示了如何从影着色导出线段参数，但也可以反向进行。给定数值 b_i 赋给 D 的各条线段，当且仅当形状参数满足 Thurston 粘合方程时，它们会诱导出一个K 装饰表示。每条线段对应一个方程，便可概括这些方程。

定义 2.11。 选取一个子午线特征值 $m \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$。为切开表示 D 中的每条线段指定一个变量 $b_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$（边界线段的变量照常保持一致）。利用这些变量，按照方程（2.7）为图的每个角指定一个形状参数 z_k；我们假设所选的 b_i 满足没有任何 z_k 等于 1。按照（2.6）标记符号为 ϵ 的交叉时，m 和 b_i 决定每条线段的参数 a_i，其定义如下[7]：

$$
\begin{aligned}
a_1 &= m^{\epsilon}\frac{1-z_{\mathrm{W}}}{1-z_{\mathrm{N}}} \qquad a_{2'} = m^{-\epsilon}\frac{1-z_{\mathrm{E}}}{1-z_{\mathrm{N}}} \\
a_2 &= m^{-\epsilon}\frac{1-z_{\mathrm{S}}}{1-z_{\mathrm{W}}} \qquad a_{1'} = m^{\epsilon}\frac{1-z_{\mathrm{S}}}{1-z_{\mathrm{E}}}
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

[7] 我们将它们记为 a_i，因为它们对应于区域参数 a_j 的比值。

上述构造为每条线段 赋予了两个 参数 a_i 和 a_i'，分别来自两端的交叉。线段方程指出，对于每条线段，这两个参数都相等。

线段方程最早由 Yokota 研究 [Yok00]，并由 Kim、Kim 和 Yoon 详细讨论 [KKY18]。我们的表述遵循 [McP22；McP25b]中的约定。

命题 2.12。对于一个开纽结图 D，以下集合之间存在双射：

(a) D 的线段方程的解，子午线特征值为 m

(b) 子午线特征值为 m 且未被D压扁的影子着色装饰表示（ρ, u）」

证明。 假设我们有一个子午线特征值为 m的线段方程解。根据定义，存在一组良定义的参数赋值 a_i，赋予 D 的线段，从而得到一个非压扁的 八面体着色，着色对象为 D，其含义见 [McP22]。将这类着色组成的集合记为 Y。 Y中的一个点给出线段方程的一个解（通过遗忘 a_i），因此集合 (a) 与 Y之间存在双射。 [McP25b、定理 2.11 和定理 1] 建立了 Y 与集合 (b) 之间的双射。 □

3. 量子化陈-西蒙斯不变量的态积分

3.1. 量子二重对数

对于非零复参数 b，*Faddeev* 非紧量子二重对数 [FKV01] 为

[FKV01] L. D. Faddeev、R. M.Kashaev 和 A.Y. Volkov，《强耦合量子离散 Liouville 理论。I：代数方法与对偶性》。arXiv pol

$$\Phi_{\mathsf{b}}(z) := \exp \int_{\mathbb{R}+\mathrm{i}\epsilon} \frac{\exp(-2\mathrm{i}zw)}{4\sinh(w\mathsf{b})\sinh(w/\mathsf{b})} \frac{dw}{w} \tag{3.1}$$

对于 $|\mathrm{Im}\ z| < |\mathrm{Im}\ c_{\mathsf{b}}|$，其中 $c_{\mathsf{b}} := \frac{i}{2}\left(\mathsf{b}+\mathsf{b}^{-1}\right)$. Φ_{b} 可延拓为定义在 $\mathbb{C}$上的亚纯函数，并在无穷远处有一个本性奇点。我们考虑 $\mathsf{b} = \sqrt{N}$ 且函数 ϕ_N 的情形，其中

$$\exp \phi_N(t) = \Phi_{\sqrt{N}}\left(\mathrm{i}\sqrt{N}t - c_{\sqrt{N}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{N}}\right). \tag{3.2}$$

严格来说，$\phi_N(\zeta)$ 取决于对数分支的选择，但我们的公式仅依赖于定义良好的函数 $e^{\phi_N(\zeta)}$。尽管如此，使用对数记号仍然方便。递推关系

$$\exp \phi_N(t) = \frac{\exp \phi_N(t-1/N)}{1-e^{2\pi\mathrm{i}t}} \tag{3.3}$$

将 ϕ_N 与 q 阶乘联系起来，并表明 $e^{\phi_N(t)}$ 的极点和零点均出现在 $t \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}$和 $t \notin (0, -1)$。

3.2. 作用量与态和

这里我们给出 Z_N^{ψ} 的一个定义，它与 [McP25a]中的定义等价，但略有不同。Se t

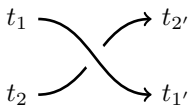
$$\begin{aligned}
\lambda_N^{+}(\mu|t_1,t_2,t_{1'},t_{2'}) &:= \phi_N(t_{2'}-t_1) + \phi_N(t_2-t_{1'}) \\
&\quad - \phi_N(t_2-t_1-\mu/N+1-1/N) - \phi_N(t_{2'}-t_{1'}+\mu/N) \\
\lambda_N^{-}(\mu|t_1,t_2,t_{1'},t_{2'}) &:= -\phi_N(t_1-t_{2'}+1-1/N) - \phi_N(t_{1'}-t_2+1-1/N) \\
&\quad + \phi_N(t_1-t_2+\mu/N) + \phi_N(t_{1'}-t_{2'}-\mu/N+1-1/N)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

并对 $\epsilon \in \{+,-\}$ 定义

$$\begin{aligned}
\kappa_N^{\epsilon}(\mu|t_1,t_2,t_{1'},t_{2'}) &:= \lambda_N^{\epsilon}(\mu|t_1,t_2,t_{1'},t_{2'}) + 2\pi\mathrm{i}\epsilon(1-N)(t_2-t_1-\mu/N) \\
&\quad + \epsilon 2\pi\mathrm{i}\mu(t_2+t_{1'}-t_1-t_{2'})
\end{aligned} \tag{3.5}$$

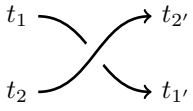
固定一个定向带框结 K 及其开图 D K。为每条内部线段指定一个复变量 t_i，将边界线段指定为 0，并固定一个复数 μ （之后将其视为 K的一个对数子午线）。通过对交叉函数求和，构造一个关于变量 t_i的函数 $\mathcal{S}_N(D,\ \mu|t)$

(3.6)



$$\to \frac{1}{N}\kappa_N^{+}(\mu|t_1,t_2,t_1',t_2')$$

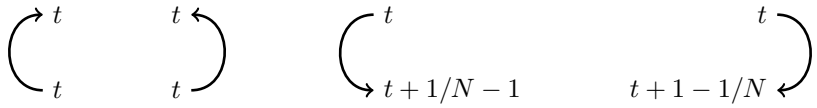
(3.7)



$$\to \frac{1}{N}\kappa_N^{-}(\mu|t_1,t_2,t_1',t_2')$$

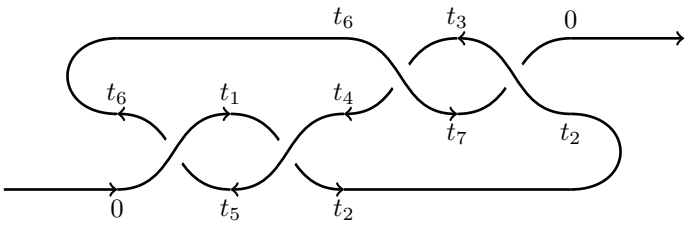
（$1/N$因子在讨论渐近行为时很方便），并为变量中的临界点指定平移（我们也可以将其视为 δ 函数）

(3.8)



定义 3.1. 我们称 $\mathcal{S}_N(D,\mu)$ 为该图的作用量。注意，它取决于图D 和 μ，但不取决于表示的选择。

例 3.2。下面是 8 字结的一个开图 D：



按照图示为线段赋予变量后，作用量为

$$\mathcal{S}_N(D,\mu|t) = \frac{1}{N}\kappa_N^+(\mu|0,t_5,t_1,t_6) + \frac{1}{N}\kappa_N^+\left(\mu\middle|t_4+\frac{1}{N}-1,t_1,t_5+\frac{1}{N}-1,t_2\right) - \frac{1}{N}\kappa_N^-\left(\mu\middle|t_3+\frac{1}{N}-1,t_6,t_4+\frac{1}{N}-1,t_7\right) + \frac{1}{N}\kappa_N^-(\mu|t_7,t_2,0,t_3)$$

参数平移源自利用临界点旋转交叉，如 [McP25a，图13]。

设 ρ 是 K的一个装饰表示。选取一个容许的、归一化的影着色(ρ,u)，其对应于 D，以及一个 对数子午线 μ，它是由装饰确定的子午线特征值 m 的一个对数。（回想一下，规范化阴影着色是指边界线段的线段参数为 1的着色。）假设该着色未被压扁：若被压扁，则 Z_N^ψ 仍有定义，但我们需要对 R矩阵系数使用不同的表达式。

选取线段参数 β_i 的对数 b_i，使得 $e^{2\pi \mathrm{i}\beta_i} = b_i$。由于我们使用的是规范化着色，可以选取 0 作为边界线段的对数参数。它们共同构成 对数着色，其含义见 [MR25; McP25a]。[8] 将对数着色视为一个向量 $\beta \in \mathbb{C}^E$会很有帮助，其中 E 是内部线段的集合。

[8] 对数着色还包括为区域参数选择对数，但这里我们重新写了状态和，省略了这些对数。

定理 3.3。不变量 Z_N^ψ，定义于 [McP25a]，由以下求和给出

$$\mathrm{Z}_N^\psi(K,\rho,\mu) = \frac{1}{N^{|E|/2+1/2}} \sum_{n\in[N]^E} e^{N\mathcal{S}_N(D|(\beta+n)/N)} \tag{3.9}$$

其中 $[N] := \{0,1,\dots,N-1\}$。$\mathrm{Z}_N^\psi(K,\ \rho,\ \mu)$ 是规范不变的，尤其不依赖于影着色和对数着色的选择。⌟

证明。 [McP25a第 6] 节的规则给出一个计算Z_N^ψ的状态和。我们的状态和与之类似，但为基本缠结赋予的矩阵系数略有不同。可以将我们的定义理解为赋予一个正交叉 X 张量系数

$$(n_1,n_2,n_{1'},n_{2'}) \mapsto \frac{1}{N}\exp\kappa_N^+\left(\mu\middle|\frac{\beta_1+n_1}{N},\frac{\beta_2+n_2}{N},\frac{\beta_{1'}+n_{1'}}{N},\frac{\beta_{2'}+n_{2'}}{N}\right)$$

而 [McP25a] 的规则则赋予它相同的张量，乘以涉及区域参数的对数 α_j 以及一些额外常数因子的乘积。通过适当的基变换可以消除这些因子；这一点将在 [McP25a]的后续版本中详细讨论。我们还利用了量子二重对数的拟周期性（如下面引理3.4所述），将一些常数因子吸收到（3.4）中的指标移位中。类似地，我们对与临界点相关的指标移位采用了略有不同的定义，这同样对应于对 α_j因子的不同分配方式。每个交叉的张量系数中 $1/N$ 的因子，总体贡献为 $N^{-(|E|+1)/2}$，因为 $|E|+1$ 是D的交叉数的两倍。对所有内部指标求和后，得到不变量$\mathrm{Z}_N^{\psi}(K,\rho,\mu)$；根据 [McP25a定理 2]，它定义良好且规范不变。

□

引理 3.4. 设 β 是归一化的非挤压阴影着色的对数着色。

(a) $t \mapsto \exp N\mathcal{S}_N(D,\ \mu|t)$ 是格 $\frac{\beta}{N}+\frac{1}{N}\mathbb{Z}^E$. 上的 $\mathbb{Z}^E$-周期函数 —

(b) 若影着色避开单位圆，则函数 $\mathbb{C}^E \to \mathbb{C}$所定义的极点不会出现

$$t \mapsto \exp N\mathcal{S}_N(D,\mu|\beta/N+t)$$

对于 $t \in \mathbb{R}^E$。 ⌟

证明。 (a) 等式 (3.3) 给出拟周期性关系

$$e^{\phi_N(\zeta/N+1)} = \frac{e^{\phi_N(\zeta/N)}}{(1-e^{2\pi\mathrm{i}(\zeta+1)/N})\cdots(1-e^{2\pi\mathrm{i}(\zeta+N)/N})} = \frac{e^{\phi_N(\zeta/N)}}{1-e^{2\pi\mathrm{i}\zeta}}$$

因此，例如，

$$\exp\lambda_N\left(\mu\middle|\frac{\beta_1}{N}+1,\frac{\beta_2}{N},\frac{\beta_{1'}}{N},\frac{\beta_{2'}}{N}\right) = \exp\lambda_N\left(\mu\middle|\frac{\beta_1}{N},\frac{\beta_2}{N},\frac{\beta_{1'}}{N},\frac{\beta_{2'}}{N}\right)\left(\frac{1-b_{2'}/b_1}{1-b_2/mb_1}\right)$$

因此

$$\begin{aligned}\exp\kappa_N^+\left(\mu\middle|\frac{\beta_1}{N}+1,\frac{\beta_2}{N},\frac{\beta_{1'}}{N},\frac{\beta_{2'}}{N}\right) &= \exp\kappa_N^+\left(\mu\middle|\frac{\beta_1}{N},\frac{\beta_2}{N},\frac{\beta_{1'}}{N},\frac{\beta_{2'}}{N}\right)\frac{(1-b_{2'}/b_1)}{m(1-b_2/mb_1)}\\ &= a_1\exp\kappa_N^+\left(\mu\middle|\frac{\beta_1}{N},\frac{\beta_2}{N},\frac{\beta_{1'}}{N},\frac{\beta_{2'}}{N}\right)\end{aligned}$$

其中 a_1 是根据方程（2.8）赋予该线段的参数。同理

$$\exp\kappa_N^+\left(\mu\middle|\frac{\beta_1}{N},\frac{\beta_2}{N},\frac{\beta_{1'}}{N}+1,\frac{\beta_{2'}}{N}\right) = a_{1'}^{-1}\exp\kappa_N^+\left(\mu\middle|\frac{\beta_1}{N},\frac{\beta_2}{N},\frac{\beta_{1'}}{N},\frac{\beta_{2'}}{N}\right)$$

更一般地，入射线段变量的拟周期常数为 a_i，出射线段变量的拟周期常数为 a_i^{-1}。将交叉函数 $\kappa_N^{\epsilon}(\mu)$ 组合成 $\mathcal{S}_N(D,\ \mu)$时，这些因子会相互抵消：a_i 彼此匹配，因为 $b_i = e^{2\pi\mathrm{i}\beta_i}$ 是粘合方程的一组解。

(b) 回顾一下，$e^{\phi_N(z)}$ 的零点和极点都出现在 $z \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}$时。量子二重对数 ϕ_N （3.5）中的自变量形式为 $\zeta/N+t_i-t_j$，其中 $e^{2\pi\mathrm{i}\zeta}$ 是相应四面体的形状参数。由于 (ρ,u) 避开了每个四面体的单位圆 $\mathrm{Im}\,\zeta \neq 0$，因此当 $t \in \mathbb{R}^E$时，我们不会遇到任何奇点。 □

3.3. 态积分

定义 3.5。与对数着色图相关的态积分为

$$J_N(D,\mu,\beta|k) := \int_{[0,1]^E} \exp N\left(\mathcal{S}_N(D,\mu|t+\beta/N) - 2\pi \mathrm{i} k\cdot t\right)\,\mathrm{d}t \tag{3.10}$$

对于每个整数向量 $k\in\mathbb{Z}^E$。

定理 1. 在上述假设下，Z_N^{ψ} 由以下求和给出

$$\mathrm{Z}_N^{\psi}(K,\rho,\mu) = N^{|E|/2-1/2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^E} J_N(D,\mu,\beta|k) \tag{3.11}$$

遍历所有态积分。 ⌟

证明。定义函数 $f\colon\ [0,1)^E\to\mathbb{C}^E$为 $f(t)\colon=\exp(N\mathcal{S}_N(D,\mu|t+\beta/N))$。根据引理 3.4(b)$f$ 在 $(0,1)^E$上光滑，因此可延拓为一个不一定连续的周期函数$f\colon\ \mathbb{C}^E/\mathbb{Z}^E\to\mathbb{C}$ 其有界变差。它的傅里叶系数为

$$a_k := \int_{[0,1]^E} f(t)e^{-2\pi \mathrm{i} k\cdot t}\,\mathrm{d}t$$

而我们的断言是

$$\mathrm{Z}_N^{\psi}(K,\rho,\mu) = N^{|E|/2-1/2}\sum_{k\in(N\mathbb{Z})^E} a_k.$$

因为 f 具有有界变差，其傅里叶级数 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^E} a_k e^{2\pi \mathrm{i} k\cdot t}$ 处处收敛，并且收敛到 $f(t)$，当 t 是 f的连续点时。由引理3.4(a) f在格 $\left(\frac{1}{N}\mathbb{Z}\right)^E$上连续，因此当 $n\in\mathbb{Z}^E$

—

$$f(n/N) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^E} a_k e^{2\pi \mathrm{i} k\cdot n/N}.$$

将其代入态和（3.9）得到

$$\mathrm{Z}_N^{\psi}(K,\rho,\mu) = \frac{1}{N^{|E|/2+1/2}}\sum_{n\in[N]^E} f(n/N) = \frac{1}{N^{|E|/2+1/2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}^E} a_k \sum_{n\in[N]^E} e^{2\pi \mathrm{i} k\cdot n/N}$$

由于 $\sum_{n\in[N]^E} e^{2\pi \mathrm{i} k\cdot n/N}$ 当且仅当 k 的每个分量都能被 N 整除时才等于 $N^{|E|}$，否则为 0，我们得出

$$\mathrm{Z}_N^{\psi}(K,\rho,\mu) = N^{|E|/2-1/2}\sum_{k\in(N\mathbb{Z})^E} a_k. \qquad \square$$

4. 形式渐近

最后，我们将形式化研究态积分的大 N 渐近行为，并讨论严格建立这些结果所面临的障碍。

4.1. 经典二重对数

陈-西蒙斯不变量的计算与一种称为二重对数的特殊函数密切相关，其定义为

$$\mathrm{Li}_2(z) := -\int_0^z \frac{\log(1-t)}{t}\,dt$$

关于二重对数的更多信息，请参阅 Zagier [Zag07]。它在1处有一个分支点，跨越支割会产生一个 $\log(z)$ 项，而该项自身在 0处有一个分支点。对 $e^{\mathrm{Li}_2(z)}$ 进行解析延拓会导出 Neumann 的展平 [Neu04]。为避免全面处理这些情况，记 $X = (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ 并考虑 [MY18，第 4] 由下式定义的全纯函数 $\mathrm{L} : \mathbb{C} \setminus X \to \mathbb{C}$：

$$\mathrm{L}(\zeta) := \begin{cases} \dfrac{\mathrm{Li}_2(e^{2\pi\mathsf{i}\zeta})}{2\pi\mathsf{i}} & \operatorname{Im}\zeta > 0 \\ -\dfrac{\mathrm{Li}_2(e^{-2\pi\mathsf{i}\zeta})}{2\pi\mathsf{i}} - \pi\mathsf{i}\zeta(\zeta-1) - \dfrac{\pi\mathsf{i}}{6} & \operatorname{Im}\zeta < 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

引理 4.1。对于固定的 $\zeta \in \mathbb{C} \setminus X$，

$$\exp \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{L}(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta} = \frac{1}{1-e^{2\pi\mathsf{i}\zeta}}$$

and

$$e^{\phi_N(\zeta)} = \exp\left[\frac{\mathrm{L}(\zeta + 1/2N)}{N} + \mathrm{O}(N^{-1})\right]$$

证明。 第一个断言是一个简单的计算。按照 Murakami 和 Yokota[MY18]的记号 $e^{\phi_N(\zeta)} = \psi_N(\zeta + 1/2N)$，第二个断言由 [MY18，公式 (4.3)]得出。 □

4.2. 经典作用量

这里我们定义一个作用量 $\mathcal{S}(D)$，它对应于 $\mathcal{S}_N(D)$ 的 $N \to \infty$ 极限。令

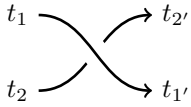
$$\begin{aligned} \lambda^+(t_1, t_2, t_{1'}, t_{2'}) &:= \mathrm{L}(t_{2'} - t_1) + \mathrm{L}(t_2 - t_{1'}) \\ &\quad - \mathrm{L}(t_2 - t_1 + 1) - \mathrm{L}(t_{2'} - t_{1'}) \\ \lambda^-(t_1, t_2, t_{1'}, t_{2'}) &:= -\mathrm{L}(t_1 - t_{2'} + 1) - \mathrm{L}(t_{1'} - t_2 + 1) \\ &\quad + \mathrm{L}(t_1 - t_2) + \mathrm{L}(t_{1'} - t_{2'} + 1) \end{aligned} \tag{4.2}$$

and

$$\kappa^\epsilon(t_1, t_2, t_{1'}, t_{2'}) := \lambda^\epsilon(\mu | t_1, t_2, t_{1'}, t_{2'}) - 2\pi\mathsf{i}\epsilon(t_2 - t_1) \tag{4.3}$$

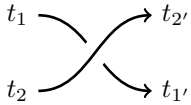
像之前一样为线段赋予复变量 t_i，并通过对交叉函数求和来构造函数 $\mathcal{S}(D|t)$

(4.4)



$\to \kappa^+(t_1, t_2, t_1', t_2')$

(4.5)

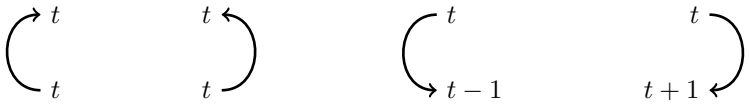


$\to \kappa^-(t_1, t_2, t_1', t_2')$

[Neu04] W. D. Neumann，《扩展布洛赫群与 Cheeger-Chern-Simons 类》。arXiv DOI

[MY18] H. Murakami 和 Y. Yokota，纽结的体积猜想。 DOI

并为变量指定临界点平移（我们也可以将其视为 δ 函数 s)

(4.6) 

定义 4.2。上述构造定义了经典作用量，它是一个全纯函数

$$\mathcal{S}(D) : \Omega_D \to \mathbb{C}$$

其中

$$\Omega_D = \left\{ t \in \mathbb{C}^E \,\middle|\, t_i - t_j \notin X \text{ whenever } i, j \text{ meet at a corner of } D \right\}$$

经典作用量是 Yokota 的势函数的一种变体，后者由 [Yok00]引入，并广泛应用于体积猜想相关文献中。我们更愿意称之为作用量，以符合物理学中的用语，因为若将 Ω_D 视为纽结补空间上平坦$\mathfrak{sl}_2$ 联络的参数化，它本质上就是陈-西蒙斯作用量。我们的作用量包含一些参数平移，这些平移似乎与 Ohtsuki 和 Takata 研究的归一化项 Ω_1,Ω_2 有关 [OT15]。

[OT15] T. Ohtsuki 和 T. Takata，《关于双桥结的 Kashaev不变量与扭曲 Reidemeister 扭率》。DOI

定义 4.3。经典作用量的广义临界点 $\gamma \in \mathbb{C}^E$是满足下列条件的点：

$$\exp \left. \frac{\partial \mathcal{S}(D)}{\partial t_i} \right|_\gamma = 1 \text{ for all } i \in E.$$

或者等价地，是存在一个展平向量 $k \in \mathbb{Z}^E$ 使得

$$\left. \frac{\partial \mathcal{S}(D)}{\partial t_i} \right|_\gamma = k_i \text{ for all } i \in E.$$

命题 4.4。$\mathcal{S}(D)$ 的广义临界点与 D 的归一化非夹挤阴影着色（ρ，u）一一对应，且子午线特征值为 1。在（ρ，u）处的临界值是 ρ 的 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 陈-西蒙斯不变量（其与 u 无关）。

证明。 引理 4.1 表明，广义临界点等价于$m = 1$的线段方程，因此我们可以应用命题 2.12。第二个结论由 Cho、Kim 和 Kim [CKK14]详细推导过；我们将在[McP25a，第 7]节中说明如何按照我们的约定计算陈-西蒙斯不变量。 □

[CKK14] J. Cho、H. Kim 和 S. Kim，《Kashaev 不变量的乐观极限与双曲链环的复体积》。arXiv DOI

注 4.5。Neumann [Neu04] 给出了一种代数方法，用于计算三角剖分流形的 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 陈-西蒙斯不变量。通常，M 上的双曲结构通过 Thurston 粘合方程的一个解来编码，但他的方法还需要额外选择一种称为展平的组合数据。这是对满足粘合方程对数形式的形状参数的对数进行协调选择。对于八面体分解，唯一非平凡的展平方程来自线段方程，其形式为

$$\pm\mu + \log(1 - z_j) - \log(1 - z_{j'}) = \pm\mu + \log(1 - z_l) - \log(1 - z_{l'}) + k_i$$

对于每条线段上的整数 k_i。这些正是上述展平向量中出现的整数。

4.3. 渐近行为

由引理 4.1 可直接得出，$\mathcal{S}_N(D)$ 在 Ω_D 上逐点收敛于 $\mathcal{S}(D)$，当 $N \to \infty$时。这表明我们可以用鞍点近似来逼近 $J_N(D, \mu, \beta|k)$（3.10）中的态积分。Ohtsuki 在 [Oht16第 3]，节中详细阐释了体积猜想背景下的鞍点近似，我们在此概述如下。

设 f 在 $\mathbb{C}^\ell$ 的某个定义域上全纯，且该定义域包含一个孤立临界点 γ。若积分路径 $\Gamma\colon [-1,1]^\ell \to \mathbb{C}^\ell$ 满足 $\Gamma(0) = \gamma$ 经过 γ，并且 处于鞍点位置，即 $f(\Gamma(t)) < \operatorname{Re} f(\gamma)$，除 $t = 0$ 的情形外，并满足额外的定向条件。[9] 鞍点近似指出：

$$\int_\Gamma e^{Nf(t)}\,\mathrm{d}t = N^{-\ell/2} e^{Nf(\gamma)}[\tau + \mathrm{O}(N^{-1})]$$

其中常数 τ 与 γ处 f 的海森矩阵的行列式有关。还可以进一步纳入指数中的高阶项，其系数与 f的导数有关。其基本思想是，在临界点附近，我们可以用高斯函数近似 e^{Nf}。

我们可以应用这一近似来研究$\mathrm{Z}_N^\psi(K,\ \rho,\ u)$ 对于 K 双曲结的渐近行为。假设存在某个图 D，其中 ρ 没有被压扁；如第2.2 节所述，我们可以将此视为关于 ρ的非退化条件。如果我们能够证明步骤2 成立，那么就可以用修正后的积分替换方程（3.10）中的态积分

$$\widetilde{J}_N(D|k) := \int_\Gamma \exp N\left(\mathcal{S}(D|t) - 2\pi \mathrm{i} k \cdot t\right)\,\mathrm{d}t$$

沿某个其他积分路径 Γ进行。对初始表示 ρ 的依赖会消失，因为$\beta/N \to 0$；这是解释式（1.1）中的增长率为何独立于 ρ的一种方式。改变积分路径 Γ 是合理的，因为 $\mathcal{S}(D)$ 是全纯函数，我们可以使用斯托克斯定理（即高维柯西定理），但第4.4节还讨论了其他问题。

目前，假设以下写法成立：

$$\mathrm{Z}_N^\psi(K,\rho,\mu) = N^{|E|/2-1/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^E} \widetilde{J}_N(D|k) + \mathrm{O}(e^{N(\operatorname{Re}\varsigma_K - \delta)}) \tag{4.7}$$

对于某个 $\delta > 0$。由于我们假设 ρ 没有被压扁，完备双曲结构 ρ_{hyp} 也没有被压扁。根据命题4.4，存在一个 γ 的广义临界点 $\mathcal{S}(D)$，其展平向量为 k_0，对应于 ρ_{hyp} 的某个避开单位圆的规范化阴影着色。

我们知道 $\mathcal{S}(D|\gamma) = \varsigma_K$ 是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 陈-西蒙斯不变量，ρ_{hyp} 其归一化方式如方程（1.1）所示，并且 $\operatorname{Re}\varsigma_K$ 在所有广义临界点中取最大值。假设 Γ经过 γ 鞍点位置（这种说法不太准确：见下文）。那么鞍点近似给出

$$N^{|E|/2-1/2}\widetilde{J}_N(D|k_0) = \tau N^{-1/2} e^{N\varsigma_K + \mathrm{O}(N^{-1})}$$

因为 Γ 是一个 $|E|$维积分路径。求和中满足 $k \neq k_0$ 的项不会对渐近行为产生贡献，因为鞍点近似还要求 $\mathcal{S}(D)$ 的导数的虚部为零：若不为零，被积函数相位中的快速振荡会抑制增长。对 k（3.11）中 ς_K的求和，自然体现了计算 ς_K时所用的展平的额外选择。

如上所述，这种分析是不正确的。问题在于 γ 并不是一个孤立临界点，因为存在规范对称性：定义2.7 中的规范变换表明，给定的

[9] 例如，当 $\ell = 1$定向条件表明 Γ 应从山口的一侧走向另一侧，而不是折返时。

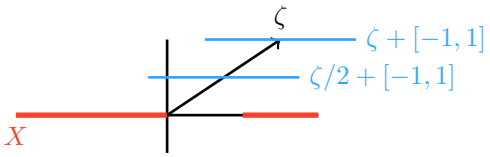


图 1：态积分 $J_N(D,\ \mu,\ \beta|k)$ 中二对数函数的自变量具有$\zeta/N + t_i - t_j$的形式，其中 t_i，$t_j \in [0,1]$。当 $N \to \infty$ 这些自变量变化所经过的线段逐渐接近奇异区域 $X = (-\infty,\ 0] \cup [1, \infty)$ 时。

表示 ρ 对应于位于线段参数空间 $\mathbb{C}^E$ 中的三维流形。如果我们限制为归一化影着色，则固定一个自由度，因此 $\mathcal{S}(D)$ 在 γ 附近的两个坐标方向上是常数。这恢复了 N 的一个整体幂次，从而得到

猜想 1. 设 K 是一个双曲结。假设 ρ 是 D 的一个装饰表示，并且根据如下意义是几何非退化的：对于某个开图 D 的 K，ρ 是非压扁的(见第 4.4节)，则对于某些对数子午线的取值，存在常数 τ 使得

$$\mathrm{Z}_N^{\psi}(D, \rho, \mu) = N^{1/2} e^{N\varsigma_K} [\tau + \mathrm{O}(N^{-1})]$$ ⌟

上述分析给出了一个多项式项 $N^{1/2}$，而非通常对 Kashaev 不变量的体积猜想进行细化时 $N^{3/2}$所出现的项 [Oht16] 。这或许是因为我们从一个足够非退化的表示 ρ出发：通常的体积猜想对应于 $\rho = 1$，它在每个图中都是压扁的。我们的猜想表明，尽管正型不变量的总体指数增长率 ς_K 应当独立于初始表示，但低阶修正项可能取决于 ρ。Gukov 和 Murakami [GM08]也讨论过类似问题。

[GM08]S. Gukov 和 H. Murakami，《$SL(2,\ \mathbb{C})$陈-西蒙斯理论与带色 Jones 多项式的渐近行为》。 arXivDOI

4.4. 移动积分路径的障碍

确立猜想 1的体积渐近行为需要将我们原来的态积分替换为移位后的态积分

$$J_N(D, \mu, \beta|k) := \int_{[0,1]^E} \exp N \left(\mathcal{S}_N(D, \mu|t + \beta/N) - 2\pi \mathrm{i} k \cdot t\right) \mathrm{d}t$$

的态积分

$$\widetilde{J}_N(D|k) := \int_{\Gamma} \exp N \left(\mathcal{S}(D|t) - 2\pi \mathrm{i} k \cdot t\right) \mathrm{d}t.$$

这是 Z_N^{ψ} 的步骤 2。思路是利用斯托克斯定理，将初始积分路径 $[0,1]^E$移至某条新积分路径 Γ，使其位于正确临界点的鞍点位置。显而易见的问题是，斯托克斯定理只能移动积分路径的内部，无法移动边界。[10] 这是一个严重的问题。如图 1 所示，原始态积分中作用量里的量子二重对数的自变量在 $N \to \infty$ 时趋近于实轴。遗憾的是，问题恰恰出在实轴上：当 $N \to \infty$ 时，$e^{\pm\phi_N}$ 的奇点会在 X 中变得稠密。在这一区域附近，$\mathcal{S}_N(D, \mu)$ 可能无法一致收敛到 $\mathcal{S}(D)$，这与二重对数的分支点位于此处有关。虽然可以将积分路径的内部移开，但剩余边界仍会趋近奇异区域。要弄清剩余的边界项为何会相互抵消或不产生贡献，是一个棘手的分析问题。这里可能存在一些细微之处，会阻碍某些 (ρ, μ) 下的猜想 1。

[10] 如果被积函数具有周期性，边界项将相互抵消，但这只在中的格上成立 $\mathbb{C}^E$ 如引理 3.4(a)所示。

这种情况的一个例子早已为人所知。当 ρ为边界抛物型时，实验性证据 [McP25a, 注 6。2]表明 $\mathrm{Z}_N^{\psi}(K,\ \rho,\ \mu)$除非 $2\mu \equiv -1$(模 $N\mathbb{Z}$)，否则为零。这表明，在求和式（3.11）中可能存在非平凡的抵消，和／或说明移动积分路径还存在其他障碍。考察这些问题或许有助于解释为何有时能够移动积分路径并证明渐近增长。

参考文献

[ADO92] Yasuhiro Akutsu、Tetsuo Deguchi 和 Tomotada Ohtsuki。《带色链环的不变量》。载于：纽结理论及其延伸 1.2（1992），第 161–184 页。ISSN：0218-2165。doi：10.1142/S0218216592000094.[AGP23] Fathi Ben Aribi、François Guéritaud 和 Eiichi Piguet-Nakazawa。《扭结的几何三角剖分与 Teichmüller TQFT 体积猜想》。载于：Quantum Topol. 14.2（2023），第 285–406 页。ISSN：1663-487X。doi：10.4171/QT/178。arXiv:1903.09480 [math.GT].[AGW25] Fathi Ben Aribi、Antonin Guilloux 和 Ka Ho Wong。计算机 FAMED：证明 Andersen-Kashaev 体积猜想，涉及 42,000 个纽结。2025。arXiv：2512.17437 [math.GT].[AK13] Jørgen Ellegaard Andersen 和 Rinat Kashaev。Teichmüller TQFT 的一种新表述。2013。arXiv：1305.4291 [math.GT].[AK14] Jørgen Ellegaard Andersen 和 Rinat Kashaev。《源自量子 Teichmüller 理论的拓扑量子场论》。载于：数学物理通讯 330.3（2014），第 887–934 页。ISSN：0010-3616。doi：10.1007/s00220-014-2073-2。arXiv：1109.6295 [math.QA].[AW24] Fathi Ben Aribi 和 Ka Ho Wong。FAMED 几何三角剖分的 Andersen-Kashaev 体积猜想。2024。arXiv：2410.10776 [math.GT].[BB04] Stéphane Baseilhac 和 Riccardo Benedetti。《带有 PSL(2,C) 特征的 3-流形的量子双曲不变量》。载于：Topology 43.6（2004 年 11 月），第 1373–1423 页。doi：10.1016/j.top.2004.02.001。arXiv：math/0306280 [math.GT].[BWY21] Francis Bonahon、Helen Wong 和 Tian Yang。曲面微分同胚量子不变量的渐近行为 I：猜想与代数计算。2021 年 12 月 23 日。arXiv:2112.12852 [math.GT].[CKK14] Jinseok Cho、Hyuk Kim 和 Seonhwa Kim。《Kashaev 不变量的乐观极限与双曲链环的复体积》。载于：J. Knot Theory Ramifications 23.9（2014）。编号 1450049，第 32 页。ISSN：0218-2165。doi：10.1142/S0218216514500497。arXiv:1301.6219 [math.GT].[CZ23] Qingtao Chen 和 Shengmao Zhu。关于各种量子不变量渐近展开的研究 II：单位根处扭结的带色 Jones 多项式 $e^{2\pi\sqrt{-1}\,N+\frac{1}{M}}$ 和 $e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}}$。2023。arXiv：2307.13670 [math.GT].[FKV01] L. D. Faddeev、R. M. Kashaev 和 A. Yu. Volkov。《强耦合量子离散 Liouville 理论 I：代数方法与对偶性》。载于：数学物理通讯 219.1（2001），第 199–219 页。ISSN：0010-3616。doi：10.1007/s002200100412。arXiv：hep-th/0006156。

[GM08] 谢尔盖·古科夫和村上斉。《$SL(2,\mathbb{C})$ 陈-西蒙斯理论与带色 Jones 多项式的渐近行为》。载于：数学物理快报 86.2-3（2008），第 79–98 页。ISSN：0377-9017。doi：10.1007/s11005-008-0282-3。arXiv：math/0608324[math.GT].[Guk05] 谢尔盖·古科夫。《三维量子引力、陈-西蒙斯理论与A-多项式》。载于：数学物理通讯 255.3（2005），第 577–627 页。ISSN：0010-3616。doi：10.1007/s00220-005-1312-y。arXiv：hep-th/0306165[hep-th].[Kas95] R. M. Kashaev。《由量子二重对数构造的链环不变量》。载于：现代物理快报 A 10.19（1995），第 1409–1418 页。ISSN：0217-7323。doi：10.1142/S0217732395001526。arXiv：q-alg/9504020 [math.QA].[Kas97] R. M. Kashaev。《量子二重对数给出的结的双曲体积》。载于：数学物理快报 39.3 （1997），第 269–275 页。ISSN：0377-9017。doi：10.1023/A:1007364912784。arXiv：q-alg/9601025 [math.QA].[KC26] Seonhwa Kim 和 Philip Choi。Diagram.site：纽结的边界抛物表示。2026 年 1 月。网址：https://diagram.site.[KKY18] Hyuk Kim、Seonhwa Kim 和尹锡范。《纽结补空间的八面体展开 I：伪双曲结构》。载于：Geometriae Dedicata 197.1（2018 年 1 月），第 123–172 页。doi：10.1007/s10711-018-0323-8。arXiv：1612.02928 [math.GT].[KR05] R. Kashaev 和 N. Reshetikhin。《补空间带有平坦联络的辫状体不变量》。载于：《数学与理论物理中的图与模式》。美国数学会，2005 年，第 151–172 页。doi：10.1090/pspum/073/2131015。arXiv:1008.1384 [math.QA].[Liu+25] 刘天悦、明爽、孙鑫、吴宝军和 Tian Yang。来自 $U_q\mathfrak{sl}(2;\mathbb{R})$ 模双的 Turaev-Viro 不变量。2025。arXiv：2508.05120 [math.GT].[McP22] Calvin McPhail-Snyder。链环补空间上的双曲结构、八面体分解与量子 $\mathfrak{sl}_2$。2022。arXiv：2203.06042v1 [math.GT].[McP25a] Calvin McPhail-Snyder。$SL_2(\mathbb{C})$ 陈-西蒙斯不变量的量子化及其在缠结外部上的应用。2025。arXiv：2509.02365v1 [math.QA].[McP25b] Calvin McPhail-Snyder。《由 Wirtinger 表示得到的八面体坐标》。载于：Geom. Dedicata 219.4（2025 年 5 月）。doi：10.1007/s10711-025-01012-7。arXiv:2404.19155 [math.GT].[MM01] 村上斉和村上顺。《带色 Jones 多项式与纽结的单纯体积》。载于：Acta Mathematica 186.1（2001），第 85–104 页。doi：10.1007/bf02392716。arXiv：math/9905075 [math.GT].[MR25] Calvin McPhail-Snyder 和 Nicolai Reshetikhin。循环 $\mathcal{U}_\xi(\mathfrak{sl}_2)$-模与具有补空间平坦 $\mathfrak{sl}_2$ 联络的纽结不变量。2025 年 9 月。arXiv：2509.02354v1[math.QA].[MY18] 村上斉和横田佳之。纽结的体积猜想。第 30 卷。施普林格数学物理简明丛书。新加坡：施普林格，2018。ISBN：978-981-13-1149-9；978-981-13-1150-5。doi：10.1007/978-981-13-1150-5.[Neu04] Walter D. Neumann。《扩展布洛赫群与 Cheeger-Chern-Simons 类》。载于：几何与拓扑 8（2004），第 413–474 页。ISSN：1465-3060。doi：10.2140/gt.2004.8.413。arXiv：math/0307092 [math.GT]。

[Oht16] Tomotada Ohtsuki. “关于 5_2纽结的 Kashaev 不变量的渐近展开”。载于：《Quantum Topol.》7.4（2016），第 669–735 页。issn：1663-487X。doi：10.4171/QT/83。[Oht17] Tomotada Ohtsuki. “关于具有七个交叉的双曲纽结的 Kashaev 不变量的渐近展开”。载于：《Int. J. Math.》28.13（2017）。编号 1750096，第 143 页。issn：0129-167X。doi：10.1142/S0129167X17500963。[OT15] Tomotada Ohtsuki 和高田敏江。“关于双桥结的 Kashaev 不变量与扭曲 Reidemeister 扭率”。载于：《Geom. Topol.》19.2（2015），第 853–952 页。issn：1465-3060。doi：10.2140/gt.2015.19.853。[OY18] Tomotada Ohtsuki 和横田佳之。“关于具有 6 个交叉的纽结的 Kashaev 不变量的渐近展开”。载于：《Math. Proc. Camb. Philos. Soc.》165.2（2018），第 287–339 页。issn：0305-0041。doi：10.1017/S0305004117000494。[Wit10] 爱德华·威滕。《陈-西蒙斯理论的解析延拓》。2010年1月18日。arXiv：1001.2933 [hep-th]。[Wit89] 爱德华·威滕。“量子场论与琼斯多项式”。载于：《Commun. Math. Phys.》121.3（1989），第 351–399 页。issn：0010-3616。doi：10.1007/BF01217730。[Won25] Ka Ho Wong。《广义 FAMED 半几何三角剖分的 Teichmüller 拓扑量子场论的渐近性质》。2025年。arXiv：2512.23198 [math.GT]。[Yok00] 横田佳之。《关于双曲纽结的体积猜想》。2000年。arXiv：math/0009165 [math.QA]。[Zag07] 唐·扎吉尔。“二对数函数”。载于：《数论、物理学与几何学前沿 II：关于共形场论、离散群与重整化》。会议论文集，法国莱苏什，2003年3月9日至21日。柏林：施普林格，2007年，第 3–65 页。isbn：978-3-540-30307-7。doi：10.1007/978-3-540-30308-4_1。url：https://people.mpim-bonn.mpg.de/zagier/files/doi/10.1007/978-3-540-30308-4_1/fulltext.pdf。