arXiv:2601.05146v1 [math.NA] 8 Jan 2026

A 用于半线性抛物型偏微分方程的简单严格积分器

Jan Bouwe van den Berg * Maxime Breden †

2026年1月9日

摘要

由偏微分方程（PDEs）生成的动力系统模拟为初值问题提供近似的数值解。这类模拟在科学计算中无处不在，但其结果的正确性通常无法得到保证。我们提出了一种严格积分抛物型偏微分方程的新方法，即推导数值获得的近似解与精确解之间严格且显式的误差界，并证明精确解在所考虑的整个时间区间内存在。这些有保证的误差界通过后验方法获得，所采用的不动点重构基于对数值解附近线性化的分段时间常数近似。我们的设置带来了相对易于理解的估计，这具有多项优势。最重要的是，它使我们能够优化证明的各个方面，尤其是提供自适应时间步进策略。如果解收敛到稳定双曲平衡点，我们还能够通过采用最终的无限长时间步长使用严格积分器来证明这一收敛性。我们通过斯威夫特–霍恩伯格方程、Ohta–Kawasaki 方程和 Kuramoto–Sivashinsky方程的示例，展示了该方法在相对较长时间区间内进行严格积分并捕捉非平凡动力学的能力。我们预计，这种方法的简洁性和效率将使其能够推广到多种其他抛物型偏微分方程，并应用于边值问题。

关键词

抛物型偏微分方程 · 初值问题· 计算机辅助证明· 后验误差估计 s

数学学科分类（2020）

35K15 · 35K30 · 35K58 · 37L65 · 65G20 · 65M15· 65M70

1 引言

近年来，计算机辅助证明已成为研究偏微分方程（PDE）及其通常错综复杂的动力系统 [49]日益强大的工具。数值实验长期以来一直在帮助我们发现和理解偏微分方程所产生的新行为方面发挥着重要作用，而计算机辅助证明有时可以从此类模拟中获得数学上严格且有保证的定理，尤其是在传统纸笔技术往往更具优势的摄动区域或渐近区域之外。

回溯到先驱性工作 [33, 37], 以来，针对椭圆型偏微分方程的许多计算机辅助证明技术已经得到发展；近期的一些工作可参见 [51, 1, 32, 56, 9]，更广泛的综述则可参见书籍 [35]及其中的参考文献。其他类型的特定解也得到了计算机辅助研究，例如行波 [3, 5, 44, 21, 50, 7]、周期解 [59, 2, 23, 22, 45], ，甚至是某些适定性不良问题的解 [10], ，以及较近研究的自相似解 [6, 11, 4, 18, 19, 27]。关于其他类型的特定解，请参阅综述 [24]。

*VU阿姆斯特丹大学，数学系，阿姆斯特丹动力系统与计算中心，De Boelelaan 1081，1081 HV 阿姆斯特丹，荷兰。janbouwe@few.vu.nl

†CMAP，法国国家科学研究中心，巴黎综合理工学院，巴黎理工学院，91120 帕莱索，法国。maxime.breden@polytechnique.edu

尽管这些是时间依赖解，但在许多情况下，使用适当的试探形式后，可以将问题重新表述为椭圆型问题。

研究抛物型偏微分方程的一般初值问题需要采用不同的方法。在本文中，我们聚焦于以下形式的标量方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = (-1)^{J+1}\dfrac{\partial^{2J} u}{\partial x^{2J}} + \displaystyle\sum_{j=0}^{2J-1} \frac{\partial^j g^{(j)}(u)}{\partial x^j}, & t \in (0,\tau],\ x \in \mathbb{T}, \\ u(0,x) = u^{\mathrm{in}}(x), & x \in \mathbb{T}, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ 是环面， $J \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ 是正整数， $\tau > 0$ 确定积分时间， $g^{(j)}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 $j = 0$、.....、 $2J-1$ 的给定多项式函数，而 $u^{\mathrm{in}}\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ 是一个光滑函数。

注 1.1. 为简化表述，我们将讨论限制在形式为 (1) 的方程，但本文提出的方法适用范围更广。特别是，该方法可以直接推广到方程组，也可以推广到定义在高维环面上的偏微分方程。此外，只要初始数据具有某些由偏微分方程保持的对称性（例如偶对称或奇对称），就可以将这些对称性纳入我们的框架，并分析限制在由对称性诱导的不变子空间上的动力系统。这意味着我们也能够处理定义在有界区间上、满足齐次狄利克雷或诺伊曼边界条件的偏微分方程，相关例子将在后文给出。

在计算机辅助证明领域，能够严格求解形式为 (1) 的初值问题的技术通常称为严格偏微分方程积分器。我们开发严格积分器的主要动机之一，是借助近期开发的局部稳定流形和不稳定流形的严格包络，进一步研究时间边值问题 [38, 48], ，以便在抛物型偏微分方程中求得连接轨道。严格偏微分方程积分器也可用于严格计算庞加莱映射，参见 [30] 及其中的参考文献。

一类严格偏微分方程积分器采用了与本文所讨论方法截然不同的技术，该方法由 [59, 60]提出。它基于使用 [58], 中开发的 Lohner 型算法，对有限维常微分方程系统进行验证积分，并采用 [61] 中引入的自洽界概念。这一方法随后在 [13, 55], 中得到进一步发展，并被用于严格研究多种问题，包括一维 Burgers 方程中的全局吸引解 [17], 、一维 Ohta-Kawasaki 模型中的异宿连接 [16] ，以及近期证明 Kuramoto-Sivashinsky 方程中的混沌 [53, 54]。

第二类严格偏微分方程积分器——本文提出的方法便属于这一类——基于一种不动点重构，它使我们能够以后验方式证明：在数值计算所得近似解的一个小邻域内，存在一个真正的解。为了先非正式地介绍我们方法背后的主要思想，不妨考虑一个抽象的演化方程（仍假设为抛物型）。

$$\begin{cases} \partial_t u = F(u), & t \in (0,\tau], \\ u(t=0) = u^{\mathrm{in}}. \end{cases} \tag{2}$$

为了先让讨论保持简单，我们暂且不具体说明函数空间和范数。不过，读者或许已经猜到，在将下面的非正式讨论转化为实际估计时，选择恰当的空间和范数将至关重要。

将演化方程 (2) 改写为不动点问题的一种自然方法是，考虑一个生成 C_0-半群的（可能依赖于时间的）线性算子 $\mathcal{L}(t)$，以及 $\gamma(t,u) := F(u) - \mathcal{L}(t)u$，由此得到

$$\begin{cases} \partial_t u = \mathcal{L}(t)u + \gamma(t,u), & t \in (0,\tau] \\ u(t=0) = u^{\mathrm{in}}. \end{cases} \tag{3}$$

我们用 $\mathcal{U} = \mathcal{U}(t,s)$ 表示与 $\mathcal{L}$ 相关的演化算子（有时也称为解算子），即满足以下条件的算子：对于所有 $t \geq s \geq 0$，$\mathcal{U}(t,s)\varphi$ 是下列方程的解

$$\begin{cases} \partial_t u = \mathcal{L}(t)u, & t > s \\ u(t=s) = \varphi. \end{cases}$$

方程 (2) 的解 u 于是对应于由 T 给出的算子的一个不动点

$$T(u)(t) = U(t,0)u^{\text{in}} + \int_0^t U(t,s)\gamma(s,u(s))\mathrm{d}s, \qquad t \in [0,\tau]. \tag{4}$$

给定方程 (2) 的一个近似解 $\bar{u}$，我们的目标是证明在 $\bar{u}$ 附近存在一个精确解u，并通过证明形如 (4) 的算子 T 在 $\bar{u}$ 的一个小邻域上是压缩映射，给出 u 与 $\bar{u}$ 之间显式且有保证的误差界。注意，对于形如 (1) 的方程，局部适定性是已知的，但可能发生有限时爆破，因此甚至无法先验保证解至少存在到时间 τ。

在构造 (4) 中的 T 时，$\mathcal{L}$ 的选择至关重要。事实上，对于任意的 $\mathcal{L}$，都没有理由认为 T 在 $\bar{u}$附近是压缩的，尤其当 τ 相当大时。然而，由于 T 在 $\bar{u}$ 处的 Fréchet导数为

$$DT(\bar{u})h(t) = \int_0^t U(t,s)D_u\gamma(s,\bar{u}(s))h(s)\mathrm{d}s, \qquad t \in [0,\tau],$$

一个自然的选择是取 $\mathcal{L}(t) = DF(\bar{u}(t))$，因为这会使得对于所有 t都有 $D_u\gamma(t,\bar{u}(t)) = 0$，从而 $DT(\bar{u}) = 0$。在这种情况下，只要 $\bar{u}$是足够精确的近似解，即 $T(\bar{u}) - \bar{u}$足够小，T 确实应当在 $\bar{u}$ 的一个小邻域上成为压缩映射。不过，要真正证明这一点，需要对演化算子$\mathcal{U}$取得相当精确的定量估计；这是一项具有挑战性的任务，尤其是因为 $\mathcal{L}(t) = DF(\bar{u}(t))$ 通过近似解 $\bar{u}$以一种非平凡的方式依赖于时间。尽管存在这些挑战，这一方法还是成功应用于 [41, 40, 20]。[1] 非常相似的思想也可以从不同的角度在 [25, 26],中找到，另见 [35, 第 5]章。

一种相当激进的替代方案——事实上，这正是早期一些严格偏微分方程积分器所采用的方法——[34, 2], 是直接取 $\mathcal{L} = (-1)^{J+1}\frac{\partial^{2J}}{\partial x^{2J}}$，或取 $\mathcal{L} = DF(0)$。在这些情况下，$\mathcal{L}$不再依赖时间，而演化算子就是 $\mathcal{U}(t,s) = e^{(t-s)\mathcal{L}}$，因此更容易研究（尤其是因为这样的 $\mathcal{L}$ 在傅里叶空间中是对角的）。不过，缺点是只有当 τ 较小时，我们才能期望相应的不动点算子 T 在 $\bar{u}$ 附近是压缩映射。

本文采取一种折中方案，即令 $\mathcal{L}$ 为 $DF(\bar{u}(t))$ 的分段常数近似。作出这一选择的理由如下。我们回顾一下，当$\mathcal{L}$取为 $DF(\bar{u}(t))$ 时，有 $DT(\bar{u}) = 0$。然而，要应用压缩映射，我们实际所需的条件弱得多，即对某个较小邻域 $\bar{u}$中的所有 u，都有 $\|DT(u)\| \leq C < 1$。因此，$\mathcal{L}$的定义还有一定的调整空间，我们应利用这一点，构造出尽可能容易分析的演化算子$\mathcal{U}$；我们对 $\mathcal{L}$ 的选择正是基于这些考虑。事实上，只要时间细分足够精细，将 $\mathcal{L}$ 取为 $DF(\bar{u}(t))$ 的分段常数近似，就能使映射T 在 $\bar{u}$ 附近于较长的积分时间 τ内仍保持压缩映射。此外，通过令 $\mathcal{L}$ 分段时间无关，我们仍能显式描述演化算子$\mathcal{U}$，从而更容易得到其估计。

这种设置简单明了，具有若干具体优势。首先，估计相对容易理解和编写代码，因此更便于我们专注于优化界和实现中的关键方面。一个重要例子是确定时间网格（在该网格上，算子 $\mathcal{L}$ 是分段常数），使其有利于证明顺利进行，参见第 4.5 节。这使我们能够引入自适应时间步进策略，并自动

[1] 确切地说，这些研究利用方程 (1) 的抛物型/耗散结构，对高频部分采用 $DF(\bar{u}(t))$ 的简单近似，这与本文将采用的方法类似；但对于低频部分，它们确实采用了 $\mathcal{L}(t) = DF(\bar{u}(t))$。

在每个子区间上选取一些离散化参数，这也有助于降低证明的计算成本。当证明较长的时间区间，以及将积分器用于研究边值问题时（下文将进一步讨论），这一点尤为重要。简单性的另一项优势是，我们认为该方法有望扩展到（1）式所属类别之外的偏微分方程，例如反应扩散系统、多空间维数情形，以及具有更复杂非线性低阶项的方程。

我们注意到，在 [47] 中，我们已经对 $\mathcal{L}$ 采用了 $DF(\bar{u}(t))$ 的分段常数近似，但当时并没有直接证明在 $\bar{u}$ 附近，式 (4) 中定义的相应不动点算子 T 是压缩映射。相反，我们首先试图弥补 $\mathcal{L}$ 并不完全等于 $DF(\bar{u}(t))$ 这一事实：先将不动点问题转化为求零点问题 $F(u) = u - T(u)$，然后通过牛顿–康托罗维奇 $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$方法回到不动点问题，使用 $DF(\bar{u})$ 的近似逆 A，并考虑 $T(u) = u - AF(u)$。然而，我们现在确信，这种迂回做法并不明智，原因有几个。首先，实际上没有必要进行这种改写，因为如上所述，只要用于定义 $\mathcal{L}$ 的细分足够精细，式 (4) 中的不动点算子 T 本就应当具有压缩性。其次，要使用非平凡的近似逆 A，就需要有限维投影，也就是说，不仅要截断傅里叶模态，还要选择一个时间方向上的投影。无论如何，我们都需要这样的投影来求得近似解，因此我们采用了以下投影：时间方向上的有限维投影定义为在切比雪夫节点处取插值多项式。然而，一旦使用这个投影来定义近似逆，它也必须纳入范数中；该范数必须拆分为时间方向上的有限部分和尾部部分（详情见 [47, 第 3 节。2]）。这种拆分会导致复杂得多的时空估计，而且这些估计不够精确。相比之下，在本研究中，为了证明 T 的压缩性，所有关键估计最终都归结为仅在傅里叶空间中求加权 ℓ^1 算子范数界，而对此可以得到更简单且非常精确的估计。最后，构造和存储近似逆 A所需的计算成本，往往是此类计算机辅助证明在实际应用中的主要瓶颈。因此，去掉近似逆能显著扩大该方法的适用范围。在许多情况下，这并不可行，因为我们研究的不动点算子之所以具有压缩性，唯一的原因就是近似逆。然而，特别是对于初值问题，我们实际上可以在不使用大型近似逆的情况下构造压缩不动点算子，这一点在 [20]中也已被注意到。

本文提出的严格积分器在各方面都优于我们此前在 [47] 中尝试的方法。它不仅速度快得多、内存占用也少得多（具体数据见第 6.1 节），还使我们能够证明初值问题在显著更长的积分时间内的解，以及具有更有趣动力学特征的解。下文的定理 1.2 和第 6 节中给出了相关示例。

如前所述，在计算机辅助证明中，计算线性化问题（的有限维投影）的近似逆在许多情况下都是必要步骤。事实上，当 $\mathcal{L}$ 的选取不那么复杂（例如仅基于偏微分方程的首阶项）时，引入近似逆 A 确有其意义。我们注意到，另一种严格积分器需要近似逆，但其优点是采用完全谱方法；该方法在 [15] 中提出，并在 [8]中得到了显著改进。

我们开发这一用于偏微分方程初值问题的严格积分器，主要是为了研究边界 值问题，尤其是与鞍点到鞍点连接轨道问题相关的问题。正如即将发表的一项工作将要展示的那样，在使用严格积分器求解形如 (1) 的偏微分方程的鞍点到鞍点连接轨道问题时，我们大体上仍能避免使用大型近似逆。

轨道收敛到稳定平衡态这一稍简单的情形也值得关注，并且与许多应用密切相关。在计算机辅助证明中，通常的做法是先独立验证所关注的稳态，再证明它是稳定的，随后推导出该稳态的一个显式邻域，使得任何进入该邻域的解都会收敛到该稳态。这一方法最早在 [57], 中实现，之后又见于许多后续工作，有时采用略有不同的技术。此后，使用严格积分器证明一个可能从远离稳定平衡态处出发的轨道

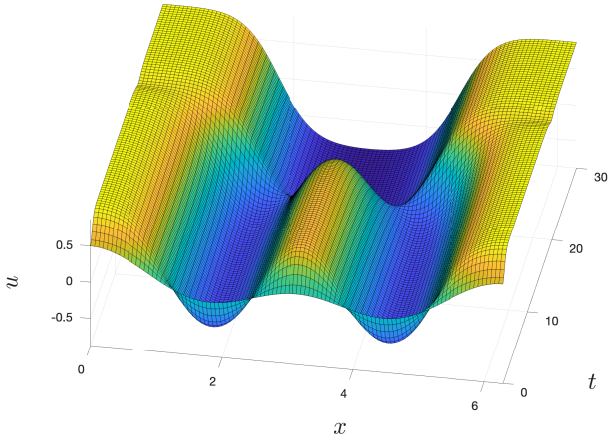

图1：在时间区间 $[0, 30]$ 上表示的 Ohta–Kawasaki 方程 (5) 的全局近似解 $\bar{u}$，该近似解已在定理 1.2 中得到验证。

进入该邻域，近期的一些例子见 [20, 8] 。在所有这些工作中，所考虑的稳定稳态都是双曲的，但这种策略也可以调整后用于存在中心流形的情形 [28]。有时还可以将这些工具与先验耗散估计结合起来，从而得出某个稳态是全局吸引的 [14]。

在这项工作中，我们证明，在存在局部吸引的双曲稳定稳态的情况下，我们的严格积分器具有足够的鲁棒性，能够让我们严格积分至 $\tau = +\infty$。此外，我们证明，如果到 $\tau = +\infty$ 的这一积分步骤成功，那么我们将自动得到一个稳定稳态的存在性，并得到一个显式邻域，在该邻域内所有解都收敛于该稳态，同时还能得到一个显式谱隙。如上所述，我们强调，这些结果中的每一项都可以利用现有技术独立获得。然而，通过严格积分“免费”获得稳态的存在性和局部稳定性，至少在实践中十分便利，同时也很好地证明了我们的严格积分器包含了流的一些重要动力学特征。

下面给出一个例子，展示我们的方法应用于具有齐次诺伊曼边界条件的奥塔–川崎方程时能够得到的结果

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{1}{\gamma^2}\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(u - u^3) - \sigma(u - m), & (t, x) \in (0, \infty) \times (0, L), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(t, L) = \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, 0) = \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, L) = 0, & t \in [0, \infty), \\ u(0, x) = u^{\mathrm{in}}(x), & x \in [0, L], \end{cases} \tag{5}$$

该方程描述二嵌段共聚物熔体 [36] 的演化。以下定理严格验证了图1所示的近似解在无限时间区间 $[0, \infty)$ 上的有效性。值得注意的是，该解呈现出有趣的动力系统特征：它经历了较长的暂态阶段，期间可能在鞍点附近停留，之后才趋向稳定平衡态。本文介绍的严格积分器给出了一个证明，而这显然是我们先前在 [47] 中所用的方法无法做到的。

定理 1.2. *考虑 Ohta–Kawasaki 方程 (5)，其中 $\gamma = \sqrt{8}$、$\sigma = 1/5$、$\bar{m} = 1/10$、$L = 2\pi$和 $u^{\mathrm{in}}(x) = m + \frac{2}{10}\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \frac{2}{10}\cos\left(\frac{4\pi x}{L}\right)$。解 $u = u(t, x)$ 满足*

$$\sup_{t \in [0, \infty)} \sup_{x \in [0, L]} |u(t, x) - \bar{u}(t, x)| \leq 9 \times 10^{-7},$$

其中，关于切比雪夫×傅里叶系数的近似解 $\bar{u} = \bar{u}(t, x)$ 的精确描述可从 *[43]* 下载。该近似解 $\bar{u}$ 在图*1*中给出，适用于$t \in [0, \tau]$ 且满足 $\tau = 30$，并且满足 $\bar{u}(t, x) = \bar{u}(\tau, x)$，对所有 $t \geq \tau$及所有 $x \in [0, L]$均成立。此外，存在 *Otha–Kawasaki* 方程的一个稳态解 $u^{\mathrm{stat}} = u^{\mathrm{stat}}(x)$，使得

$$\sup_{x \in [0,L]} |u^{\mathrm{stat}}(x) - \bar{u}(\tau, x)| \leq 9 \times 10^{-7}.$$

*Fina*因此，(5) 的解 u 收敛到 u^{stat}，当 $t \to \infty$ 时， u^{stat} 是局部渐近稳定的 *e.*

本文其余部分安排如下。在第 2 节中，我们介绍相关函数空间，固定一些记号，并回顾一个不动点定理；该定理将有助于通过算子 T （见式 (4)）严格验证方程 (1) 的解。随后在第 3 节中，我们首先处理这样的情形：在整个时间区间上，逼近 $DF(\bar{u})$ 的算子 $\mathcal{L}$ 取为常数。我们给出$\mathcal{L}$的显式构造，以及满足不动点定理假设的可计算界。接着在第 4 节中讨论一般情形，即$\mathcal{L}$ 仅取分段常数的情形，并在第 4.5 节中讨论自适应步长及其他参数优化。第 5 节介绍向 $\tau = +\infty$ 的扩展，以及这如何蕴含局部稳定稳态的存在。第 6 节则给出多个例子，其中包括与 [47], 的一些比较。

本文中所呈现的所有计算均使用 Matlab 实现，并使用 Intlab 软件包 [39] 进行区间算术。证明中的计算机辅助部分可通过 [43]处提供的代码复现。

2 预备知识

本节将介绍记号，并提供本文所用工具的必要背景知识。

2.1 傅里叶系数的序列空间

我们的相空间将用几何衰减的傅里叶序列来描述

$$\ell^1_\nu \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{ a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n| \, \nu^{|n|} < \infty \right\},$$

其赋有范数 $\|a\|_{\ell^1_\nu} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n| \, \nu^{|n|}$，其中 $\nu \geq 1$ 是稍后选定的某个衰减率。

注 2.1（记号）。 为简化记号，在本文余下部分，我们将用同一个符号表示一个函数及其（离散）傅里叶变换，即我们写作

$$a(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{inx}.$$

根据上下文，应该可以清楚地判断 a 表示函数 $x \mapsto a\,(x)$，还是傅里叶系数序列 $a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$。

回想一下，两个傅里叶展开的乘积的傅里叶系数由离散卷积给出：当 a 和 b 是由 $a(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{inx}$ 和 $b(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n e^{inx}$ 给出的 2π-周期函数时，则

$$(ab)\,(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (a * b)_n \, e^{inx}, \qquad \text{where} \qquad (a * b)_n \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m b_{n-m}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

只要 a 和 b 足够光滑，这些形式计算便是合理的；若它们的傅里叶系数属于 ℓ^1_ν，其中某个 $\nu \geq 1$，则满足这一条件。我们还要指出，离散卷积赋予ℓ^1_ν 巴拿赫代数结构。

引理 2.2. 对于所有 a、$b \in \ell^1_\nu$、 $a * b \in \ell^1_\nu$和 $\|a * b\|_{\ell^1_\nu} \le \|a\|_{\ell^1_\nu} \|b\|_{\ell^1_\nu}$。

注 2.3 （记号，续）。 根据注 *2.1*，给定多项式函数 $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$和 $a \in \ell^1_\nu$，我们仍用 $g(a)$ 表示函数 $g(a)$的傅里叶系数序列。例如，若 $g(x) = x^3 - 2x$ 且 $a \in \ell^1_\nu$，则 $g(a) \text{ 定义为 } = a * a * a - 2a$。

此外，对于写作 $g(x) = \sum_{k=0}^K g_k x^k$的多项式函数 $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，我们用 $|g|$ 表示由 $|g|(x) \text{ 定义为 } = \sum_{k=0}^K |g_k| x^k$给出的多项式。

引理 2.2 的巴拿赫代数性质直接推出以下结论，后文将会用到。

引理 2.4。 设 a、$b \in \ell^1_\nu$ 和 $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为多项式函数。则

$$\|g(a+b)\|_{\ell^1_\nu} \le |g| \left(\|a\|_{\ell^1_\nu} + \|b\|_{\ell^1_\nu} \right).$$

现在我们引入投影，以便处理有限个傅里叶模态。

定义 2.5 （相空间截断）。 设 $N \in \mathbb{N}$ 为截断参数。投影$\Pi^{\le N} : \ell^1_\nu \to \ell^1_\nu$ 定义为

$$\left(\Pi^{\le N}(a)\right)_n \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} a_n, & 0 \le |n| \le N, \\ 0, & |n| > N. \end{cases}$$

此外，令 $\Pi^{>N} \text{ 定义为 } = I - \Pi^{\le N}$，其中 I 是 ℓ^1_ν 上的单位算子。下文中，我们经常将 $\Pi^{\le N}\ell^1_\nu$ 的元素与 $\mathbb{C}^{2N+1}$ 中的向量等同起来；对于 ℓ^1_ν 上的线性算子 L，我们也将 $\Pi^{\le N} L \Pi^{\le N}$ 与一个（$2N+1$） $\times$（$2N+1$） 矩阵等同起来。

最后，我们用一个记号结束本节。

定义 2.6 （空间导数）。 我们用 D 表示 $\dfrac{\partial}{\partial x}$ 的傅里叶变换，即

$$(\mathcal{D}a)_n \overset{\text{def}}{=} ina_n, \qquad \textit{for all } a \in \ell^1_\nu.$$

2.2 函数空间

我们首先将在一个空间中求解 (1)，该空间可视为 $C([0,\tau],\ \ell^1_\nu)$ 的一个子空间； $C([0,\tau],\ \ell^1_\nu)$ 是从 $[0,\tau]$ 到 ℓ^1_ν 的连续函数空间。

定义 2.7。设 $\nu \ge 1$。我们定义

$$\mathcal{X}_\nu \overset{\text{def}}{=} \left\{ u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \left(C([0,\tau],\mathbb{C})\right)^{\mathbb{Z}},\ \|u\|_{\mathcal{X}_\nu} \overset{\text{def}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|u_n\|_{C^0} \nu^{|n|} < \infty \right\},$$

其中，对于任意连续函数 $v\colon [0,\tau] \to \mathbb{C}$，有 $\|v\|_{C^0 \text{def}=} \max_{t\in[0,\tau]} |v(t)|$。特别地，对于任意 $u \in X_\nu$ 和 $t \in [0,\tau]$，$u(t)$ 可视为 ℓ^1_ν 的一个元素。ℓ^1_ν 上的任意线性算子都可以扩展为 X_ν 上的一个常值（关于时间的）线性算子。

请注意， $\left(\mathcal{X}_\nu, \|\cdot\|_{\mathcal{X}_\nu}\right)$ 是一个巴拿赫空间。此外，我们先提醒读者，虽然这个确切的空间确实会在第 3 节的特定情形中使用，其中$\mathcal{L}$取为常数，但在第 4 节中，当$\mathcal{L}$ 仅为分段常数时，实际上会引入一个稍复杂一些的空间。

注2.8 (记号)。 每当将定义在标量或标量函数上的运算应用于 X_ν 的元素时，都应将此运算理解为逐分量运算。例如，对于任意 u属于 X_ν 且 $t \in [0,\tau]$,

$$|u(t)| \overset{\text{def}}{=} \left(|u_n(t)|\right)_{n\in\mathbb{Z}} \qquad \textit{and} \qquad \|u\|_{C^0} \overset{\text{def}}{=} \left(\|u_n\|_{C^0}\right)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

特别需要注意的是$\|u\|_{\mathcal{X}_\nu} = \left\| \|u\|_{C^0} \right\|_{\ell^1_\nu}$。

投影 $\Pi^{\le N}$ 和 $\Pi^{>N}$以及空间导数 D 也以自然的方式延拓到 X_ν，即在每个时刻分别应用它们。也就是说，对于任意 $u \in X_\nu$和 $t \in [0,\tau]$，$(Du)(t) \text{ def } = D(u(t))$。

根据注 2.1，$\mathcal{X}_\nu$ 中的每个 u 都可以与一个函数 $u\colon\ [0,\tau]\times\mathbb{T}\to\mathbb{C}$对应，记作

$$u(t,x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}u_n(t)e^{inx}.$$

这样的函数 u 是连续的，并且我们有

$$\max_{t\in[0,\tau],x\in\mathbb{T}}|u(t,x)|\le\|u\|_{\mathcal{X}_\nu}.$$

此外，如果 $\nu>1$，函数 u 关于第二个变量 x是解析的。

2.3 时间近似

在时间方向上，我们使用分段多项式近似解（即在时间的每个子区间上为多项式），并将其写成切比雪夫基的形式。特别地，我们经常利用下式从上方估计时间方向上的 C^0范数:

$$\max_{t\in[-1,1]}\left|\sum_{k=0}^{K}p_kT_k(t)\right|\le\sum_{k=0}^{K}|p_k|,\tag{6}$$

其中 T_k 是第一类切比雪夫多项式。

在推导估计以证明形如（4）的不动点算子 T是压缩映射时，我们还需要对诸如 $\|\varphi\|_{C^0}$的量给出明确且精确的上界，其中 φ 是一个可能较为复杂但已知的光滑函数，我们可以对其在任意给定点处进行严格计算。在˜这类情况下，对于某个足够大的 $K\in\mathbb{N}$，我们估计

$$\|\varphi\|_{C^0}\le\|P_{\tilde{K}}\varphi\|_{C^0}+\|\varphi-P_{\tilde{K}}\varphi\|_{C^0},\tag{7}$$

˜其中，$P_{\tilde{K}}\varphi$ 是 φ 在 $K+1$ 切比雪夫节点处的拉格朗日插值多项式。该插值多项式本身可以根据对 φ的求值显式计算，从而得到 $\|P_{\tilde{K}}\varphi\|_{C^0}$ 的可计算上界（例如使用（6））。随后，我们需要获得˜插值误差 $\|\varphi-P_{\tilde{K}}\varphi\|_{C^0}$ 的显式估计（例如参见 [42]）。只要 K 取得足够大，$\|\varphi-P_{\tilde{K}}\varphi\|_{C^0}$ 就应当相对于 $\|P_{\tilde{K}}\varphi\|_{C^0}$足够小，而这一过程便可为$\|\varphi\|_{C^0}$给出一个精确的上界。关于如何在我们的语境中获得所需的插值误差估计，详见 [47,第 2.2 节和附录 B 和 C]。

2.4 不动点定理

设 $M\in\mathbb{N}_{\ge1}$、$(X^m、\ \|\cdot\|_{X^m})_{m=1}^{M}$ 为巴拿赫空间，$X=\Pi_{m=1}^{M}X^m$ 为乘积空间，且$\pi^m\colon\ X\to X^m$ 为投影到各分量上的投影。设 $r_*=(r_*^m)_{m=1}^{M}\in\mathbb{R}_{>0}^{M}$ 和 $\bar{x}\in X$。对于任意 $r\in\mathbb{R}_{>0}^{M}$，定义 Box（$\bar{x}$、r）$=\{x\in X:$ $\|\pi^m(x-\bar{x})\|_{X^m}\le r^m$，其中 $1\le m\le M\}$。本节考虑一个映射 $T\in C^1$（Box（$\bar{x}$、r） X）。对于 r、$r_*\in\mathbb{R}_{>0}^{M}$，我们称 $r\le r_*$，如果对所有$1\le m\le M$都有 $r^m\le r_*^m$。最后，我们用 D_i表示偏Fréchet导数。

以下基于巴拿赫不动点定理的命题，给出了使 T 在 Box($\bar{x},r$) 中有唯一不动点的显式条件（其中 r 是某个显式量）。过去几十年来，许多类似版本的定理已用于计算机辅助证明。这里的具体版本首次发表于 [47, 定理 2.12]。其主要特点是，乘积空间X 上的范数并非预先选定，而且我们不试图将集合 Box($\bar{x},r$) 选为该范数下的一个球；这为证明 T 是压缩映射提供了额外的灵活性，详见 [47] 中的深入讨论。

定理 2.9。假设 $Y^m\ge0$、$Z_i^m\ge0$、$W_{ij}^m\ge0$ 对于 $1\le i$、j、$m\le M$ 满足

$$\|\pi^m(T(\bar{x})-\bar{x})\|_{X^m}\le Y^m,\tag{8}$$

$$\|\pi^mD_iT(\bar{x})\|_{B(X^i,X^m)}\le Z_i^m,\tag{9}$$

$$\|\pi^m(D_iT(x)-D_iT(\bar{x}))\|_{B(X^i,X^m)}\le\sum_{j=1}^{M}W_{ij}^m\left\|\pi^j(x-\bar{x})\right\|_{X^j}\quad for\ all\ x\in\mathrm{Box}(\bar{x},r_*).\tag{10}$$

若 r、$\eta \in \mathbb{R}^M_{>0}$ 满足条件，且 $r \le r_*$

$$Y^m + \sum_{i=1}^{M} Z_i^m r^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{M} W_{ij}^m r^i r^j \le r^m \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{M} Z_i^m \eta^i + \sum_{i,j=1}^{M} W_{ij}^m \eta^i r^j < \eta^m, \tag{12}$$

对于 $1 \le m \le M$，则 T 在 $\mathrm{Box}(\bar{x}, r)$ 中有唯一的不动点。

注 2.10. 在 $M = 1$ 的情形下，我们可以省略指数 m 和下标 i、j，从而得到计算机辅助证明文献中常用的一个结论。事实上，此时 Y、Z 和 W 都只是需要满足以下条件的实数：

$$\|T(\bar{x}) - \bar{x}\|_X \le Y, \tag{13}$$

$$\|DT(\bar{x})\|_{B(X,X)} \le Z, \tag{14}$$

$$\|DT(x) - DT(\bar{x})\|_{B(X,X)} \le W \|x - \bar{x}\|_X \quad \textit{for all } x \in \mathcal{B}_X(\bar{x}, r_*), \tag{15}$$

其中，$B_X(\bar{x}, r_*)$ 是 X 中以 $\bar{x}$ 为中心、半径为 r_* 的球。此外，只需存在满足以下条件的 $r \in (0, r_*]$：

$$Y + Zr + \frac{1}{2}Wr^2 \le r \tag{16}$$

$$Z + Wr < 1, \tag{17}$$

即可得出 T 在 $B_X(\bar{x}, r)$ 中有唯一的不动点。这个简化版本将在第 3 节和第 5 节中使用。

3 在整个积分时间内取常数 $\mathcal{L}$

本节将明确地定义 $DF(\bar{u}(t))$ 的一个合适的时间无关近似 $\mathcal{L}$，考察相应的不动点算子 T（见式 (4)），并推导出可计算的界 Y、Z 和 W，使其满足假设 (13)–(15)。

我们必须强调，本节主要是出于教学目的而设置的。事实上，只要积分时间 τ 不是很短，在实践中我们总是取一个仅分段常数而非完全时间无关的算子 $\mathcal{L}(t)$。不过，首先考虑时间无关的 $\mathcal{L}$，可以让我们用少一层记号来推导 Y、Z 和 W 界限；而且，本节中的所有计算实际上都会在第 4 节中派上用场，因为届时我们最终会取分段常数的 $\mathcal{L}(t)$。此外，本节针对单个时间域所作的考察，在第 5 节中也将再次发挥作用，因为届时我们会研究稳定平衡态附近的无限长步进。

在整个本节中，$\bar{u}$ 表示方程 (1) 的一个近似解，并假设其属于$\Pi^{\le N_u}\mathcal{X}_\nu$，其中 $N_u \in \mathbb{N}$。在实践中，我们使用时间多项式来构造近似解，即每个傅里叶系数 $\bar{u}_n \in C^0([0,\tau], \mathbb{C})$ 都是一个多项式。

3.1 $\mathcal{L}$ 的构造

与第 1 节中一样，我们用 F 表示式 (1) 的右端项在傅里叶空间中的写法。也就是说，使用第 2.1 节和第 2.2 节中引入的记号，我们考虑定义在 $\mathcal{X}_\nu$ 上的映射 F：

$$F(u) = (-1)^{J+1}\mathcal{D}^{2J}u + \sum_{j=0}^{2J-1} \mathcal{D}^j g^{(j)}(u).$$

请记住，我们希望 $\mathcal{L}$ 是 $DF(\bar{u})$ 的一个近似，其中，对于 $h \in \mathcal{X}_\nu$，

$$DF(\bar{u})h = (-1)^{J+1}\mathcal{D}^{2J}h + \sum_{j=0}^{2J-1} \mathcal{D}^j \left[\left(\left(g^{(j)} \right)' (\bar{u}) \right) * h \right].$$

由于我们首先希望$\mathcal{L}$与时间无关，因此计算有限向量 $\bar{v}^{(j)} \in \Pi^{\leq N_u}\ell^1_\nu$, $j = 1, \dots, 2J-1$，使得

$$\bar{v}^{(j)} \approx \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \Pi^{\leq N_u} \left[\left(g^{(j)} \right)' (\bar{u}(t)) \right] \mathrm{d}t.$$

注记 3.1. 在实际计算中，我们会数值计算 $\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \Pi^{\leq N_u} \left[\left(g^{(j)} \right)' (\bar{u}(t)) \right] \mathrm{d}t$，并将此次计算的输出作为 $\bar{v}^{(j)}$；不过，接下来所有估计对任意选择的 $\bar{v}^{(j)} \in \Pi^{\leq N_u}\ell^1_\nu$ 都成立。特别地，上方的 $\approx$ 符号仅用于强调，得到 $\bar{v}^{(j)}$ 的这项计算不必严格进行。

利用这些 $\bar{v}^{(j)}$，我们得到 $DF(\bar{u})$ 的一个自然的时间无关近似，定义如下：

$$h \mapsto (-1)^{J+1}\mathcal{D}^{2J}h + \sum_{j=0}^{2J-1} \mathcal{D}^j \left(\bar{v}^{(j)} * h \right).$$

我们进一步简化这个线性算子：在该近似中，对足够大的模态只保留对角项。为了精确定义这一点，令阈值为 $N_{\mathcal{L}} \in \mathbb{N}$，并考虑

$$\lambda_n \overset{\text{def}}{=} -n^{2J} + \sum_{j=0}^{2J-1} (in)^j \bar{v}_0^{(j)}, \qquad \text{for } |n| > N_{\mathcal{L}}, \tag{18}$$

~它们将作为对角项。随后，我们定义作用于$\mathcal{X}_\nu$ 上的（无界）算子$\mathcal{L}$ 如下：

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{L}}\,\Pi^{\leq N_{\mathcal{L}}}u = (-1)^{J+1}\mathcal{D}^{2J}\Pi^{\leq N_{\mathcal{L}}}u + \sum_{j=0}^{2J-1} \mathcal{D}^j\Pi^{\leq N_{\mathcal{L}}} \left(\bar{v}^{(j)} * \Pi^{\leq N_{\mathcal{L}}}u \right) \\ \left(\tilde{\mathcal{L}}\,\Pi^{>N_{\mathcal{L}}}u \right)_n = \begin{cases} 0 & \text{for } |n| \leq N_{\mathcal{L}} \\ \lambda_n u_n & \text{for } |n| > N_{\mathcal{L}}. \end{cases} \end{cases}$$

注记 3.2。 注意， $N_{\mathcal{L}}$ 不必等于 N_u （这决定了近似解 $\bar{u}$所使用的傅里叶模态数量），而在实际应用中，我们通常取 $N_{\mathcal{L}}$，其显著小于 N_u。

~**注记 3.3**。 L 的一个等价定义如下，稍后将证明这一表述很方便：

$$\tilde{\mathcal{L}}u = (-1)^{J+1}\mathcal{D}^{2J}u + \sum_{j=0}^{2J-1} \mathcal{D}^j\Pi^{\leq N_{\mathcal{L}}} \left(\bar{v}^{(j)} * \Pi^{\leq N_{\mathcal{L}}}u \right) + \sum_{j=0}^{2J-1} \bar{v}_0^{(j)}\mathcal{D}^j\Pi^{>N_{\mathcal{L}}}u. \tag{19}$$

注意

$$\tilde{\mathcal{L}} = \Pi^{\leq N_{\mathcal{L}}}\tilde{\mathcal{L}}\,\Pi^{\leq N_{\mathcal{L}}} + \Pi^{>N_{\mathcal{L}}}\tilde{\mathcal{L}}\,\Pi^{>N_{\mathcal{L}}},$$

其中 $\Pi^{>N_{\mathcal{L}}}\tilde{\mathcal{L}}\,\Pi^{>N_{\mathcal{L}}}$是对角的，因此计算 $e^{t\tilde{\mathcal{L}}}$只需计算一个有限矩阵的指数。原则上，可以通过严格地对角化 $\Pi^{\leq N_{\mathcal{L}}}\tilde{\mathcal{L}}\,\Pi^{\leq N_{\mathcal{L}}}$来严格完成这项计算，但也可以只进行近似对角化。也就是说，我们考虑一个对角矩阵 $\Lambda_{N_{\mathcal{L}}} = \mathrm{diag}\,(\lambda_{-N_{\mathcal{L}}}, \dots, \lambda_{N_{\mathcal{L}}})$以及一个可逆矩阵 $Q_{N_{\mathcal{L}}}$，使得

$$\Pi^{\leq N_{\mathcal{L}}}\tilde{\mathcal{L}}\,\Pi^{\leq N_{\mathcal{L}}} \approx Q_{N_{\mathcal{L}}}\Lambda_{N_{\mathcal{L}}}Q_{N_{\mathcal{L}}}^{-1},$$

并定义

$$\mathcal{L}_{N_\mathcal{L}} \overset{\text{def}}{=} Q_{N_\mathcal{L}} \Lambda_{N_\mathcal{L}} Q_{N_\mathcal{L}}^{-1},$$

它表示 $\Pi^{\leq N_\mathcal{L}} \ell^1_\nu$上的线性算子；我们自然地将其理解为整个空间 ℓ^1_ν上的线性算子，以及$\mathcal{X}_\nu$上的常线性算子。最后，我们定义

$$\mathcal{L} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{L}_{N_\mathcal{L}} + \Pi^{>N_\mathcal{L}} \tilde{\mathcal{L}} \Pi^{>N_\mathcal{L}}.$$

换言之，对于所有 $u \in \mathcal{X}_\nu$,

$$\begin{cases} \mathcal{L}\,\Pi^{\leq N_\mathcal{L}} u = \mathcal{L}_{N_\mathcal{L}} \Pi^{\leq N_\mathcal{L}} u \\ \left(\mathcal{L}\,\Pi^{>N_\mathcal{L}} u\right)_n = \begin{cases} 0 & \text{for } |n| \leq N_\mathcal{L} \\ \lambda_n u_n & \text{for } |n| > N_\mathcal{L}. \end{cases} \end{cases}$$

继续之前，请注意， $Q_{N_\mathcal{L}}$ 也可以视为 $\Pi^{\leq N_\mathcal{L}} \mathcal{X}_\nu$上的常算子。考虑定义在整个空间 $\mathcal{X}_\nu$ 上的算子 Q 会很有帮助，我们将其定义为 $Q \overset{\text{def}}{=} Q_{N_\mathcal{L}} + \Pi^{>N_\mathcal{L}}$，即

$$\begin{cases} Q\,\Pi^{\leq N_\mathcal{L}} u = Q_{N_\mathcal{L}} \Pi^{\leq N_\mathcal{L}} u \\ Q\,\Pi^{>N_\mathcal{L}} u = \Pi^{>N_\mathcal{L}} u. \end{cases}$$

于是，我们可以写成

$$\mathcal{L} = Q \Lambda Q^{-1},$$

其中， Λ 是无限对角矩阵，其对角元素对于所有 $n \in \mathbb{Z}$均为 λ_n 。回想一下，这些 λ_n 在 $|n| > N_\mathcal{L}$时由式 (18) 明确定义，而 $|n| \leq N_\mathcal{L}$对应的其余特征值则在确定 $\Lambda_{N_\mathcal{L}}$ 时选取（实际中，我们取$\mathcal{L}\,\Pi^{\leq N_\mathcal{L}}$的数值计算特征值，更多细节请参见注 3.4）。

注意，对于任意 $t \in \mathbb{R}$ ，我们有

$$e^{t\mathcal{L}} = Q\, e^{t\Lambda}\, Q^{-1},$$

其中 Λ 是一个对角矩阵，其各项均可显式确定；此外，我们也知道 Q 和 Q^{-1} 的显式表达式。

现在 $\mathcal{L}$ 已有明确定义，我们可以为算子 T （见式 (4)）、空间 $X = \mathcal{X}_\nu$ 以及近似解 $\bar{x} = \bar{u}$ 推导可计算的界 Y、 Z 和 W ，使其在 $M = 1$ 的情形下满足定理 2.9 的假设 (13)–(15)。注意，由于这里的 $\mathcal{L}$ 与时间无关， $\gamma \overset{\text{def}}{=} F - \mathcal{L}$ 也与时间无关，因此在第 3 节中，我们写作 $\gamma(u(s))$，而不写作 $\gamma(s, u(s))$。现在我们研究算子 $T : \mathcal{X}_\nu \to \mathcal{X}_\nu$ ，其定义如下：

$$T(u)(t) = e^{t\mathcal{L}} u^{\text{in}} + \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{L}} \gamma(u(s))\,\mathrm{d}s, \qquad t \in [0, \tau], \tag{20}$$

这就是一般公式 (4) 在这一特定情形下的形式。

注 3.4. 当特征值的重数较高，或特征值彼此非常接近时，尝试对 $\Pi^{\leq N_\mathcal{L}}\, \tilde{L}\, \Pi^{\leq N_\mathcal{L}}$ 进行近似对角化可能会遇到困难。估计中的主要问题是，当 $Q_{N_\mathcal{L}}$ 条件很差时，其逆矩阵 $Q_{N_\mathcal{L}}^{-1}$ 会很大（按算子范数计）。在代码中，我们应对这类不利情况的一种方法是对 $\Pi^{\leq N_\mathcal{L}}\, \tilde{L}\, \Pi^{\leq N_\mathcal{L}}$ 的一个小扰动进行对角化。这会使缺陷 $\Pi^{\leq N_\mathcal{L}}\, \tilde{L}\, \Pi^{\leq N_\mathcal{L}} - L_{N_\mathcal{L}}$ 略微增大，但可能降低 Q_N^{-1} 的范数，最终有望改善这些界。

此外，尤其当 $\Pi^{\leq N_\mathcal{L}}\, \tilde{L}\, \Pi^{\leq N_\mathcal{L}}$ 非对称时（因此对角化通常会受到更严重的病态影响），Q_N^{-1} 的大小在不同子域之间可能有很大差异，而且还可能对定义子域的网格点位置十分敏感。关于我们如何在优化网格时消除这些不利影响，请参见第 *4.5* 节。

最后，一种替代方案是允许 Λ_N 中存在一些非对角项，例如若尔当标准形中的非对角项，并在估计中直接处理对这类非对角矩阵 Λ_N 求值 $e^{t\Lambda_N}$ 所产生的影响。这种做法可能会提高稳健性，但我们将其留待未来工作。

注 3.5. 当问题 (1) 保持偶对称性或奇对称性时，我们将分析限制在由余弦或正弦张成的子空间上。在这种情况下，也在该子空间上进行（近似）对角化。这在积分至无穷远时尤为重要，参见第 *5* 节，因为在对称子空间中工作可以消除平移不变性，并从稳态的谱中去掉相应的零特征值。从技术层面而言，在代码中，基变换 Q^{-1} 还包含将（双侧）对称傅里叶系数转换为（单侧）正弦系数或余弦系数的平移；对于 Q 则反之。

3.2 Y界

在本小节中，我们处理满足定理 2.9 中假设 **(13)** 的残差界 Y。我们假设 $N_u \geq N_{\mathcal{L}}$，并且存在一个显式的 $\epsilon^{\text{in}} \geq 0$，使得初始数据 u^{in}满足 $\left\|\Pi^{>N_u} u^{\text{in}}\right\|_{\ell^1_\nu} \leq \epsilon^{\text{in}}$。也就是说，我们允许初始数据具有无限傅里叶级数，但要求对其尾部给出显式上界。

随后，我们将 Y 界的计算拆分如下：

$$\begin{aligned}(T(\bar{u}) - \bar{u})(t) &= e^{t\mathcal{L}} u^{\text{in}} + \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{L}} \gamma(\bar{u}(s)) \mathrm{d}s - \bar{u}(t) \\ &= \left(e^{t\mathcal{L}} \Pi^{\leq N_u} u^{\text{in}} + \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{L}} \gamma(\bar{u}(s)) \mathrm{d}s - \bar{u}(t) \right) + e^{t\mathcal{L}} \Pi^{>N_u} u^{\text{in}}.\end{aligned}$$

回顾 $\|\cdot\|_{\mathcal{X}_\nu} = \| \|\cdot\|_{C^0} \|_{\ell^1_\nu}$，注意到

$$\begin{aligned}&\left\| t \mapsto e^{t\mathcal{L}} \Pi^{\leq N_u} u^{\text{in}} + \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{L}} \gamma(\bar{u}(s)) \mathrm{d}s - \bar{u}(t) \right\|_{\mathcal{X}_\nu} \\ &\qquad = \left\| \left\| t \mapsto Q \left(e^{t\Lambda} Q^{-1} \Pi^{\leq N_u} u^{\text{in}} + \int_0^t e^{(t-s)\Lambda} Q^{-1} \gamma(\bar{u}(s)) \mathrm{d}s \right) - \bar{u}(t) \right\|_{C^0} \right\|_{\ell^1_\nu}\end{aligned}$$

可以几乎精确地计算，这意味着能够得到一个紧致且有保证的包围。事实上，该计算只涉及有限个傅里叶模态，因为 $\bar{u}$ 仅包含有限个傅里叶模态，并且 γ 中的所有非线性项都是多项式。随后，我们使用第 2.3 节所述的过程，为这些模态中的每一个模态的 C^0 范数得到一个显式且精确的上界。

注3.6。 我们将上述估计中出现的映射记为 φ，即

$$\varphi(t) \overset{\text{def}}{=} e^{t\mathcal{L}} \Pi^{\leq N_u} u^{\text{in}} + \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{L}} \gamma(\bar{u}(s)) ds - \bar{u}(t).$$

根据第*2.3*节，我们希望通过 $\|P_{\tilde{K}}\varphi\|_{C^0} + \|(I - P_{\tilde{K}})\varphi\|_{C^0}$来估计 $\|\varphi\|_{C^0}$。然而，直接控制插值误差 $(I - P_{\tilde{K}})\varphi$ 可能会比较繁琐，因为这需要在复平面上的椭圆上对 φ 进行严格且显式的界定 *[42]*（C^k型插值误差同样代价高昂，并且会给出较差的界）。如果接受首先将误差估计拆分为

$$\|(I - P_{\tilde{K}})\varphi\|_{C^0} \leq \|(I - P_{\tilde{K}})\varphi_{\text{exp}}\|_{C^0} + \|(I - P_{\tilde{K}})\varphi_{\text{int}}\|_{C^0}, \tag{21}$$

with

$$\varphi_{\text{exp}}(t) = e^{t\mathcal{L}} \Pi^{\leq N_u} u^{\text{in}} \qquad \textit{and} \qquad \varphi_{\text{int}}(t) = \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{L}} \gamma(\bar{u}(s)) ds. \tag{22}$$

˜我们注意到，只要 K 大于用于定义 $\bar{u}$的时间次数，就不会产生 $\bar{u}$ 的插值误差，而在实践中情况总是如此。完成这种拆分后，就更容易为每一项得到可计算的估计，参见 *[47,* 引理 *4.5* 和引理 *4.8],* ；在实践中这种方法效果很好。

然而，采用这种拆分时， $\varphi_{\exp}$ 和 φ_{int} 都可能很大，即使 φ 本身应当很小（假设 $\bar{u}$ 是一个精确的近似解），这意味着可能需要相对较大的 $\tilde{K}$，才能使(21) 右端变小。为减轻这一缺点，我们可以寻找一种不同的拆分，使 φ_{int} 更小，因为这样一来，在使用较小的 K时，我们便可以预期 $\|(I-P_{\tilde{K}})\varphi_{\text{int}}\|_{C^0}$会很小。注意，如果我们实现了这一点，那么另一个插值误差$\|(I-P_{\tilde{K}})\varphi_{\exp}\|_{C^0}$也必须很小（前提是 $\|(I-P_{\tilde{K}})\varphi\|_{C^0}$本身确实很小）。为了定义这种更好的拆分，我们首先引入 $\bar{u}$的时间平均 $\bar{U}\in\ell^1_\nu$：

$$\bar{U}=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \bar{u}(s)ds,$$

然后重写

$$\begin{aligned}\varphi(t)&=e^{t\mathcal{L}}\Pi^{\leq N_u}u^{\text{in}}+\int_0^t e^{(t-s)\mathcal{L}}\gamma(\bar{U})ds+\int_0^t e^{(t-s)\mathcal{L}}\left(\gamma(\bar{u}(s))-\gamma(\bar{U})\right)ds-\bar{u}\,(t)\\&=e^{t\mathcal{L}}\Pi^{\leq N_u}u^{\text{in}}+\mathcal{L}^{-1}\left(e^{t\mathcal{L}}-I\right)\gamma(\bar{U})+\int_0^t e^{(t-s)\mathcal{L}}\left(\gamma(\bar{u}(s))-\gamma(\bar{U})\right)ds-\bar{u}\,(t)\,.\end{aligned}$$

注意

$$\mathcal{L}^{-1}\left(e^{t\mathcal{L}}-I\right)=Q\Lambda^{-1}\left(e^{t\Lambda}-I\right)Q^{-1},$$

其中 Λ 是一个对角矩阵，其元素为 λ_n，并且当 $\lambda_n=0$ 时，必须将 $\lambda_n^{-1}\left(e^{t\lambda_n}-1\right)$ 替换为 t。然后，我们可以重复上述插值误差估计 (21) 的拆分，不过这次使用

$$\varphi_{\exp}(t)=e^{t\mathcal{L}}\Pi^{\leq N_u}u^{\text{in}}+\mathcal{L}^{-1}\left(e^{t\mathcal{L}}-I\right)\gamma(\bar{U})\quad and\quad \varphi_{\text{int}}(t)=\int_0^t e^{(t-s)\mathcal{L}}\left(\gamma(\bar{u}(s))-\gamma(\bar{U})\right)ds. \tag{23}$$

如果对于所有 $t\in[0,\tau]$，$\bar{u}(t)$ 始终与 U 比较接近，那么我们可以预期这种新的拆分 (23) 会比 (22) 效果更好，也就是说，在使用较小的 $\tilde{}$ 时，仍能保持较小的插值误差界，而 K 的取值也可以更小。实际实现这些界时，我们采用的正是这种新的拆分。

关于由初始数据带来的潜在误差项，利用 $N_u\geq N_{\mathcal{L}}$ 可得

$$\begin{aligned}\left\|e^{t\mathcal{L}}\Pi^{>N_u}u^{\text{in}}\right\|_{\mathcal{X}_\nu}&\leq\left\|\left\|Qe^{t\Lambda}Q^{-1}\Pi^{>N_u}\right\|_{C^0}\right\|_{\ell^1_\nu}\epsilon^{\text{in}}\\&=\left\|\left\|e^{t\Lambda}\Pi^{>N_u}\right\|_{C^0}\right\|_{\ell^1_\nu}\epsilon^{\text{in}}\\&=\sup_{|n|>N_u}\max_{t\in[0,\tau]}\left|e^{t\lambda_n}\right|\epsilon^{\text{in}}.\end{aligned}$$

对所有 $N\in\mathbb{N}$，引入

$$\mu_N\overset{\text{def}}{=}\exp\left(\tau\sup_{|n|>N}\Re\left(\lambda_n\right)^+\right), \tag{24}$$

其中 $x^+\overset{\text{定义}}{=}\max(x,0)$，因此我们可以考虑

$$Y\overset{\text{def}}{=}\left\|t\mapsto e^{t\mathcal{L}}\Pi^{\leq N_u}u^{\text{in}}+\int_0^t e^{(t-s)\mathcal{L}}\gamma(\bar{u}(s))\mathrm{d}s-\bar{u}\,(t)\right\|_{\mathcal{X}_\nu}+\mu_{N_u}\epsilon^{\text{in}},$$

which 是可计算的，或者更确切地说，我们可以得到它的一个紧确上界（如注3.6中所述 ），and 满足定理 2.9 的假设 (13)。

3.3 Z界

在本小节中，我们现在重点关注满足定理 2.9 的假设 (14) 的界 Z 。首先，我们为推导该界 Z 时将用到的各种量引入记号。

定义 3.7 （ Z 界的记号）。

- 对所有 $n \in \mathbb{Z}$, $\tilde{b}_n \overset{\text{定义}}{=} \underline{e^{\tau R(\lambda_n)} - 1}\, R(\lambda_n)$ ，约定 $\tilde{b}_n \overset{\text{定义}}{=} \tau$ ，若 $R(\lambda_n) = 0$。
- $B \overset{\text{定义}}{=} |Q|\, R(\Lambda)^{-1} \left(e^{\tau R(\Lambda)} - I\right) = |Q| \mathrm{diag}((\tilde{b}_n)_{n\in\mathbb{Z}})$。
- 对所有 $j = 0, \ldots, 2J-1$, $\chi_{(j)\,N_{\mathcal{L}}} \overset{\text{定义}}{=}$ 上确界 $_{|n|>N_{\mathcal{L}}}$。注意， $\chi_{(j)\,N_{\mathcal{L}}}$ 可计算（参见例如 *[47,* 附录 *D]*）。
- 对所有 $j = 0, \ldots, 2J-1$, $\beta_{(j)} \overset{\text{定义}}{=} \left\| \left(g^{(j)}\right)' (\bar{u}) - \bar{v}_{0}^{(j} \right\|_{C^0} \in \ell^1_\nu$。
- 令 $\bar{N} \in \mathbb{N}$，使得对所有 $|n| > \bar{N}$和所有 $j = 0, \ldots, 2J-1$, $\beta_{(j)n} = 0$。令 Γ 为一个线性算子，使得对所有 $a \in \ell^1_\nu$

$$\Gamma\, \Pi^{\leq \bar{N}+N_{\mathcal{L}}} |a| \geq \left\| Q^{-1} D\gamma(\bar{u}) \right\|_{C^0} \Pi^{\leq \bar{N}+N_{\mathcal{L}}} |a|,$$

and

$$\Gamma\, \Pi^{>\bar{N}+N_{\mathcal{L}}} a \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{2J-1} |\mathcal{D}^j| \left(\beta^{(j)} * \Pi^{>\bar{N}+N_{\mathcal{L}}} a\right).$$

算子 $Q^{-1} D\gamma(\bar{u}) \Pi^{\leq \bar{N}+N_{\mathcal{L}}}$ 可视为一个系数为时间光滑函数的有限矩阵，因此 $\left\| Q^{-1} D\gamma(\bar{u}) \right\|_{C^0} \Pi^{\leq \bar{N}+N_{\mathcal{L}}}$ 是一个实数有限矩阵，可以按照第*2.3*节逐元素求得精确上界。实际应用中，我们用这些上界定义 $\Gamma\, \Pi^{\leq \bar{N}+N_{\mathcal{L}}}$ 。

现在我们可以推导 Z 界了。首先将这个界的推导简化为控制一个 ℓ^1_ν算子范数。

引理 3.8. 采用定义 *3.7* 中的记号，

$$\|DT(\bar{u})\|_{B(\mathcal{X}_\nu, \mathcal{X}_\nu)} \leq \|B\Gamma\|_{B(\ell^1_\nu, \ell^1_\nu)}.$$

证明. 我们考虑任意的 h属于$\mathcal{X}_\nu$，并估计

$$\begin{aligned}
[DT(\bar{u})h](t) &= \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{L}} D\gamma(\bar{u}(s)) h(s) \mathrm{d}s \\
&= Q \int_0^t e^{(t-s)\Lambda} Q^{-1} D\gamma(\bar{u}(s)) h(s) \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

逐分量取时间 C^0 范数，得到

$$\begin{aligned}
\|DT(\bar{u})h\|_{C^0} &\leq |Q| \int_0^t e^{(t-s)\Re(\Lambda)} \mathrm{d}s \left\| Q^{-1} D\gamma(\bar{u}) h \right\|_{C^0} \\
&\leq B \left\| Q^{-1} D\gamma(\bar{u}) \right\|_{C^0} \|h\|_{C^0}.
\end{aligned}$$

现在我们来验证

$$\left\| Q^{-1} D\gamma(\bar{u}) \right\|_{C^0} \|h\|_{C^0} \leq \Gamma \|h\|_{C^0}.$$

¯根据 Γ 的定义，对于模态 $|n| \leq N_{\mathcal{L}} + N$，这一点是自动成立的，我们只需证明

$$\left\|Q^{-1} D\gamma(\bar{u})\right\|_{C^0} \Pi^{>\bar{N}+N_{\mathcal{L}}} \|h\|_{C^0} \leq \Gamma \Pi^{>\bar{N}+N_{\mathcal{L}}} \|h\|_{C^0} .$$

利用 (19)，我们得到

$$\begin{aligned} D\gamma(\bar{u})\Pi^{>\bar{N}+N_{\mathcal{L}}} h &= DF(\bar{u})\Pi^{>\bar{N}+N_{\mathcal{L}}} h - \mathcal{L}\Pi^{>\bar{N}+N_{\mathcal{L}}} h \\ &= DF(\bar{u})\Pi^{>\bar{N}+N_{\mathcal{L}}} h - \tilde{\mathcal{L}}\Pi^{>\bar{N}+N_{\mathcal{L}}} h \\ &= \sum_{j=0}^{2J-1} \mathcal{D}^j \left(\left[\left(g^{(j)} \right)' (\bar{u}) \right] * \Pi^{>\bar{N}+N_{\mathcal{L}}} h \right) - \sum_{j=0}^{2J-1} \mathcal{D}^j \left(\bar{v}_0^{(j)} \Pi^{>\bar{N}+N_{\mathcal{L}}} h \right) \\ &= \sum_{j=0}^{2J-1} \mathcal{D}^j \left(\left[\left(g^{(j)} \right)' (\bar{u}) - \bar{v}_0^{(j)} \right] * \Pi^{>\bar{N}+N_{\mathcal{L}}} h \right), \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \left\|Q^{-1} D\gamma(\bar{u})\right\|_{C^0} \Pi^{>\bar{N}+N_{\mathcal{L}}} \|h\|_{C^0} &\leq |Q^{-1}| \sum_{j=0}^{2J-1} |\mathcal{D}^j| \left(\left\| \left(g^{(j)} \right)' (\bar{u}) - \bar{v}_0^{(j)} \right\|_{C^0} * \Pi^{>\bar{N}+N_{\mathcal{L}}} \|h\|_{C^0} \right) \\ &= |Q^{-1}| \sum_{j=0}^{2J-1} |\mathcal{D}^j| \left(\beta^{(j)} * \Pi^{>\bar{N}+N_{\mathcal{L}}} \|h\|_{C^0} \right). \end{aligned}$$

由于对于所有 j，$\beta^{(j)} \in \Pi^{\leq \bar{N}} \ell^1_\nu$，我们得到

$$\beta^{(j)} * \Pi^{>\bar{N}+N_{\mathcal{L}}} \|h\|_{C^0} = \Pi^{>N_{\mathcal{L}}} \left(\beta^{(j)} * \Pi^{>\bar{N}+N_{\mathcal{L}}} \|h\|_{C^0} \right),$$

并注意到 $|Q^{-1}|\Pi^{>N_{\mathcal{L}}} = \Pi^{>N_{\mathcal{L}}}$，我们推得

$$\begin{aligned} \left\|Q^{-1} D\gamma(\bar{u})\right\|_{C^0} \Pi^{>\bar{N}+N_{\mathcal{L}}} \|h\|_{C^0} &\leq \sum_{j=0}^{2J-1} |\mathcal{D}^j| \left(\beta^{(j)} * \Pi^{>\bar{N}+N_{\mathcal{L}}} \|h\|_{C^0} \right) \\ &= \Gamma \Pi^{>\bar{N}+N_{\mathcal{L}}} \|h\|_{C^0} . \end{aligned}$$

因此，我们已经证明

$$\|DT(\bar{u})h\|_{C^0} \leq B\Gamma \|h\|_{C^0} ,$$

而由 $\|\cdot\|_{\mathcal{X}_\nu} = \||\cdot|\|_{C^0}\|_{\ell^1_\nu}$ 这一事实可直接推出该引理。 □

现在我们为 $\|B\Gamma\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)}$ 给出一个可计算上界。

命题 3.9。我们有

$$\|B\Gamma\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)} \leq \max \left(\left\| B\Gamma \Pi^{\leq \bar{N}+N_{\mathcal{L}}} \right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)}, \sum_{j=0}^{2J-1} \left\| \beta^{(j)} \right\|_{\ell^1_\nu} \chi^{(j)}_{N_{\mathcal{L}}} \right).$$

证明。 根据 ℓ^1 算子范数的性质，我们有

$$\|B\Gamma\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)} = \max \left(\left\| B\Gamma \Pi^{\leq \bar{N}+N_{\mathcal{L}}} \right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)}, \left\| B\Gamma \Pi^{>\bar{N}+N_{\mathcal{L}}} \right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)} \right),$$

我们只需估计第二项。回想一下， $\Gamma \Pi^{>\bar{N}+N_{\mathcal{L}}} = \Pi^{>N_{\mathcal{L}}} \Gamma \Pi^{>\bar{N}+N_{\mathcal{L}}}$，因此

$$\left\| B\Gamma \Pi^{>\bar{N}+N_{\mathcal{L}}} \right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)} \leq \sum_{j=0}^{2J-1} \left\| \Pi^{>N_{\mathcal{L}}} B|\mathcal{D}^j| \right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)} \left\| \beta^{(j)} \right\|_{\ell^1_\nu} .$$

由于 $\Pi^{>N_{\mathcal{L}}} B|\mathcal{D}^j|$ 是对角算子，因此我们直接得到

$$\left\|\Pi^{>N_{\mathcal{L}}} B|\mathcal{D}^j|\right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)} \leq \sup_{|n|>N_{\mathcal{L}}} \tilde{b}_n |n|^j = \chi^{(j)}_{N_{\mathcal{L}}}. \qquad \square$$

注意到 $B\Gamma$ 的每一列都是有限的，因此 $\left\|B\Gamma\,\Pi^{\leq \bar{N}+N_{\mathcal{L}}}\right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)}$ 确实是可计算的。因此我们取

$$Z \stackrel{\text{def}}{=} \max\left(\left\|B\Gamma\,\Pi^{\leq \bar{N}+N_{\mathcal{L}}}\right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)}, \sum_{j=0}^{2J-1} \left\|\beta^{(j)}\right\|_{\ell^1_\nu} \chi^{(j)}_{N_{\mathcal{L}}}\right),$$

它是可计算的，并且满足定理 2.9 的假设（14）。

3.4 W 界

在本小节中，我们最终导出一个可计算的界 W，使其满足定理 2.9 的假设（15）。为了估计 $DT(u) - DT(\bar{u})$ 的范数，对于任意 $u \in B_{\mathcal{X}_\nu}(\bar{u},\ r_*)$，我们写作$v = u - \bar{u}$，并对任意 $h \in \mathcal{X}_\nu$计算，

$$\begin{aligned}
&[(DT(\bar{u}+v) - DT(\bar{u}))\,h](t) \\
&\quad = \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{L}} \Big(D\gamma(\bar{u}(s) + v(s)) - D\gamma(\bar{u}(s)) \Big) h(s)\ \mathrm{d}s \\
&\quad = \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{L}} \int_0^1 D^2\gamma(\bar{u}(s) + \tilde{s}v(s))\,[h(s), v(s)]\ \mathrm{d}\tilde{s}\ \mathrm{d}s \\
&\quad = \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{L}} \sum_{j=0}^{2J-1} \mathcal{D}^j \int_0^1 \left[\left(g^{(j)}\right)'' (\bar{u}(s) + \tilde{s}v(s)) \right] * v(s) * h(s)\ \mathrm{d}\tilde{s}\ \mathrm{d}s. \qquad (25)
\end{aligned}$$

逐分量取 C^0 范数，结合定义 3.7 中定义的 B，得到

$$\|(DT(\bar{u}+v) - DT(\bar{u}))\,h\|_{C^0} \leq B \sum_{j=0}^{2J-1} |\mathcal{D}^j| \left(\left| \left(g^{(j)}\right)'' \right| (\|\bar{u}\|_{C^0} + \|v\|_{C^0}) * \|v\|_{C^0} * \|h\|_{C^0} \right),$$

其中 $\left|\left(g^{(j)}\right)''\right|$ 是按照注 2.3 中的方式定义的多项式。然后我们取 ℓ^1_ν-范数并进行估计，利用引理 2.4 可得，

$$\begin{aligned}
&\|(DT(\bar{u}+v) - DT(\bar{u}))\,h\|_{\mathcal{X}_\nu} \\
&\quad = \left\| \|(DT(\bar{u}+v) - DT(\bar{u}))\,h\|_{C^0} \right\|_{\ell^1_\nu} \\
&\quad \leq \sum_{j=0}^{2J-1} \left\| B\,|\mathcal{D}^j| \right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)} \left| \left(g^{(j)}\right)'' \right| \left(\left\| \|\bar{u}\|_{C^0} \right\|_{\ell^1_\nu} + \left\| \|v\|_{C^0} \right\|_{\ell^1_\nu} \right) \left\| \|v\|_{C^0} \right\|_{\ell^1_\nu} \left\| \|h\|_{C^0} \right\|_{\ell^1_\nu} \\
&\quad \leq \sum_{j=0}^{2J-1} \left\| B\,|\mathcal{D}^j| \right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)} \left| \left(g^{(j)}\right)'' \right| (\|\bar{u}\|_{\mathcal{X}_\nu} + r_*)\, \|v\|_{\mathcal{X}_\nu}\, \|h\|_{\mathcal{X}_\nu}. \qquad (26)
\end{aligned}$$

注意，$\left\| B\,|\mathcal{D}^j| \right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)}$ 可以显式计算（参见命题 3.9 的证明），即

$$\left\| B\,|\mathcal{D}^j| \right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)} = \max\left(\left\| \Pi^{\leq N_{\mathcal{L}}} B\,|\mathcal{D}^j|\,\Pi^{\leq N_{\mathcal{L}}} \right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)}, \chi^{(j)}_N \right).$$

因此

$$W = \sum_{j=0}^{2J-1} \left\| B\,|\mathcal{D}^j| \right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)} \left| \left(g^{(j)}\right)'' \right| (\|\bar{u}\|_{\mathcal{X}_\nu} + r_*)$$

可计算，并满足定理 2.9 的假设（15）。

4 更长的积分时间

在第 3 节中，假设$\mathcal{L}$在整个时间区间 $[0,\tau]$上保持常数，我们为在（20）中定义的 T推导出了估计 Y、 Z 和 W，并证明它们满足定理 2.9 的假设（8）—（10）。然而，由于$\mathcal{L}$ 被设为常数，我们只有在实际解在整个时间区间 $[0,\tau]$内变化不大的情况下，或者等价地说， τ足够小时，才能期待 T 具有收缩性。正如引言中所解释的，要对更长的时间区间进行严格积分，一个自然的选择是令$\mathcal{L}$ 仅为分段常数，从而使$\mathcal{L}$ 能够在整个区间 $[0,\tau]$内更好地逼近 $DF(\bar{u}(t))$。本节将详细介绍这一策略，并推导相应的 Y、Z 和 W 估计。

4.1 如何调整设置

令 $M\in\mathbb{N}_{\geq 1}$，并考虑区间 $[0,\tau]$ 的一个细分，其形式为

$$0=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_M=\tau. \tag{27}$$

对于每个 $m=1,\ldots,M$，令 $\mathcal{L}^{(m)}$ 为一个常算子（其精确定义将在后文给出，且它生成一个 C_0 半群），并定义

$$\mathcal{L}(t)\overset{\text{def}}{=}\mathcal{L}^{(m)},\quad t\in(\tau_{m-1},\tau_m]. \tag{28}$$

在这种情况下，与$\mathcal{L}$ 相关联的演化算子 U 不再是一个简单的指数函数，但仍可表示为有限个指数函数的组合。更确切地说，如果 $0\leq s\leq t\leq\tau$ 满足 $\tau_{m-1}\leq s\leq t\leq\tau_m$，其中某个 m，那么 $U(t,s)=e^{(t-s)\mathcal{L}^{(m)}}$。否则，我们引入

$$\mathfrak{L}^{(m,l)}\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}e^{(\tau_{m-1}-\tau_{m-2})\mathcal{L}^{(m-1)}}e^{(\tau_{m-2}-\tau_{m-3})\mathcal{L}^{(m-2)}}\ldots e^{(\tau_{l+1}-\tau_l)\mathcal{L}^{(l+1)}} & 0\leq l\leq m-2,\\ I, & l=m-1.\end{cases} \tag{29}$$

对于满足 $\tau_{l-1}\leq s\leq\tau_l\leq\tau_{m-1}\leq t\leq\tau_m$ 的 l 和 m，

$$U(t,s)=e^{(t-\tau_{m-1})\mathcal{L}^{(m)}}\mathfrak{L}^{(m,l)}e^{(\tau_l-s)\mathcal{L}^{(l)}}.$$

那么，由 (4) 给出的算子 T 仍然是定义在 $\mathcal{X}_\nu$ 上的良定义算子（回忆定义 2.7），而 T 的不动点给出了 (1) 的一个解。

从本质上说，这就是我们为验证较长时间区间上的解所考虑的设置。不过，在实践中，采用一种略有不同的方法会更方便：基于上述细分中的每个子域，使用多个对应的 $\mathcal{X}_\nu$ 空间副本。因此，对于每个 $m\in\{1,\ldots,M\}$，我们考虑

$$\mathcal{X}_\nu^{(m)}\overset{\text{def}}{=}\left\{u^{(m)}=\left(u_n^{(m)}\right)_{n\in\mathbb{Z}}\in\left(C([\tau_{m-1},\tau_m],\mathbb{C})\right)^{\mathbb{Z}},\ \left\|u^{(m)}\right\|_{\mathcal{X}_\nu^{(m)}}\overset{\text{def}}{=}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left\|u_n^{(m)}\right\|_{C^0}\nu^{|n|}<\infty\right\},$$

其中， C^0 范数取在函数有定义的区间上，即

$$\left\|u_n^{(m)}\right\|_{C^0}\overset{\text{def}}{=}\sup_{t\in[\tau_{m-1},\tau_m]}\left|u_n^{(m)}(t)\right|,$$

以及乘积空间 $\mathcal{X}_\nu^{\text{prod}}\overset{\text{定义}}{=}\prod_{m=1}^{M}\mathcal{X}_{(m)\nu}$.

注4.1. 我们在每个空间 $X_\nu^{(m)}$ 上都定义了范数，但有意没有在乘积空间 X_ν^{prod} 上指定范数。事实上，引入这个乘积空间的主要目的，是让我们能够灵活地为每个子区间选取不同的权重；在尝试应用压缩映射定理时，这些权重将通过后验分析确定，参见定理 *2.9* 及其前面的讨论。

这个乘积空间还有一个次要的优点：它允许我们选取一个近似解 $\bar{u}$ ，该近似解仅为分段连续，而不一定在时间上整体连续。不过，我们将以这样的方式设计与(1) 对应的不动点算子，从而确保其不动点是连续的。

此后， $\bar{u}$ 表示 $\Pi^{\leq N_u}\mathcal{X}_{\text{prod}\nu}$ 中的一个元素，即 $\bar{u}^{(m)} \in \Pi^{\leq N_u}\mathcal{X}_{(m)\nu}$ 对所有 $m = 1, \dots, M$ 均成立，它们表示方程 (1) 的分段多项式（关于时间）近似解。也就是说，我们假设每个 $u_n^{(m)} \in C^0([\tau_{m-1}, \tau_m], \mathbb{C})$ 都是多项式，其中 $|n| \leq N_u$ 且 $m = 1, \dots, M$。

现在，我们可以在每个子区间 $[\tau_{m-1}, \tau_m]$ 上定义一个常算子 $\mathcal{L}^{(m)}$ ，以近似 $DF(\bar{u}^{(m)}(t))$，其构造仿照第 3.1 节。也就是说，对于每个 $m = 1, \dots, M$，我们引入：

- 有限向量 $\bar{v}^{(m,j)} \in \Pi^{\leq N_u}\ell^1_\nu$, $j = 1, \dots, 2J-1$，使得

$$\bar{v}^{(m,j)} \approx \frac{1}{\tau_m - \tau_{m-1}} \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \Pi^{\leq N_u} \left[\left(g^{(j)} \right)' \left(\bar{u}^{(m)}(t) \right) \right] \mathrm{d}t.$$

- 中间常近似 $\tilde{\mathcal{L}}^{(m)} \; DF(\bar{u}^{(m)})$，定义为

$$\tilde{\mathcal{L}}^{(m)} a \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{J+1}\mathcal{D}^{2J} a + \sum_{j=0}^{2J-1} \mathcal{D}^j \Pi^{\leq N_{\mathcal{L}}} \left(\bar{v}^{(m,j)} * \Pi^{\leq N_{\mathcal{L}}} a \right) + \sum_{j=0}^{2J-1} \bar{v}_0^{(m,j)} \mathcal{D}^j \Pi^{> N_{\mathcal{L}}} a,$$

对所有 $a \in \ell^1_\nu$ 均成立。

- 一个对角矩阵 $\Lambda^{(m)\,N_{\mathcal{L}}} = \mathbf{diag}\left(\lambda^{(m)\,-N_{\mathcal{L}}} \dots, \lambda^{(m)\,N_{\mathcal{L}}} \right)$ 以及一个可逆矩阵 $Q^{(m)\,N_{\mathcal{L}}}$，使得

$$\Pi^{\leq N_{\mathcal{L}}} \tilde{\mathcal{L}}^{(m)} \Pi^{\leq N_{\mathcal{L}}} \approx Q^{(m)}_{N_{\mathcal{L}}} \Lambda_{N_{\mathcal{L}}} \left(Q^{(m)}_{N_{\mathcal{L}}} \right)^{-1},$$

and

$$\mathcal{L}^{(m)}_{N_{\mathcal{L}}} \stackrel{\text{def}}{=} Q^{(m)}_{N_{\mathcal{L}}} \Lambda^{(m)}_{N_{\mathcal{L}}} \left(Q^{(m)}_{N_{\mathcal{L}}} \right)^{-1}.$$

- 这些数

$$\lambda_n^{(m)} \stackrel{\text{def}}{=} -n^{2J} + \sum_{j=0}^{2J-1} (in)^j \, \bar{v}_0^{(m,j)}, \qquad |n| > N_{\mathcal{L}},$$

相应的对角算子 $\Lambda^{(m)} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{diag}\left(\left(\lambda_n^{(m)} \right)_{n \in \mathbb{Z}} \right)$，以及算子 $Q^{(m)} \stackrel{\text{def}}{=}$

$Q^{(m)}_{N_{\mathcal{L}}} \Pi^{\leq N_{\mathcal{L}}} + \Pi^{> N_{\mathcal{L}}}$.

- 最终的常数近似 $\mathcal{L}^{(m)} \; DF(\bar{u}^{(m)})$，定义为

$$\mathcal{L}^{(m)} \stackrel{\text{def}}{=} Q^{(m)} \Lambda^{(m)} \left(Q^{(m)} \right)^{-1}.$$

接下来，对于每个 $m = 1, \dots, M$，我们引入与时间无关的函数

$$\gamma^{(m)} : u^{(m)} \mapsto F(u^{(m)}) - \mathcal{L}^{(m)} u^{(m)},$$

并考虑作用于 $T_{\text{乘积}} = \left(T^{(1)}, \dots\dots, T^{(M)} \right)$ 上的算子 $u = \left(u^{(1)}, \dots\dots, u^{(M)} \right) \in \mathcal{X}_{\text{乘积}\nu}$

$$T^{(m)}(u)(t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{(t-\tau_{m-1})\mathcal{L}^{(m)}} \theta^{(m-1)}(u) + \int_{\tau_{m-1}}^{t} e^{(t-s)\mathcal{L}^{(m)}} \gamma^{(m)} \left(u^{(m)}(s) \right) \mathrm{d}s, \tag{30}$$

对于 $t \in [\tau_{m-1}, \tau_m]$ 和 $m = 1, \ldots\ldots, M$，其中递归定义的

$$\theta^{(m)}(u) \overset{\text{def}}{=} e^{(\tau_m - \tau_{m-1})\mathcal{L}^{(m)}} \theta^{(m-1)}(u) + \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} e^{(\tau_m - s)\mathcal{L}^{(m)}} \gamma^{(m)} \left(u^{(m)}(s) \right) \mathrm{d}s, \quad m = 1, \ldots, M-1, \tag{31}$$

其中，$\theta^{(0)}(u) \overset{\text{定义}}{=} u^{\text{in}}$表示在前一个子域端点处的取值。除了定义域被划分为不同部分这一点之外，该算子 T^{prod} 本质上就是由式（4）得到的算子 T，其中$\mathcal{L}$ 按照式（28）取分段常数。特别要注意的是，若 $u = \left(u^{(1)}, \ldots, u^{(M)}\right) \in \mathcal{X}_{\text{prod}\nu}$是 T^{prod}的不动点，那么对所有$m = 1, \ldots, M-1$，都有 $u^{(m)}(\tau_m) = u^{(m+1)}(\tau_m)$；因此，$u$ 也可视为$\mathcal{X}_\nu$的一个元素，它是式（4）中 T 的不动点，因而是式（1）的一个解。

现在，我们可以为算子 T^{prod}、乘积空间$\mathcal{X}_{\text{prod}\nu}$以及上文引入的近似解 $\bar{u} \in \mathcal{X}_{\text{prod}\nu}$推导 Y、Z 和 W 界，使其满足定理2.9的假设（8）—（10）。这些界至少在部分方面与第3节中$\mathcal{L}$ 取完全常数时得到的界相似，但会额外包含一层对应不同子域的结构。

4.2 Y-界

在本小节中，我们处理满足定理 2.9 的假设 (8) 的残差界 $Y^{(m)}$。与第3.2节一样，我们假设存在 $N_u \geq N_{\mathcal{L}}$ 和一个显式的 $\epsilon^{\text{in}} \geq 0$，使得 $\left\| \Pi^{>N_u} u^{\text{in}} \right\|_{\ell^1_\nu} \leq \epsilon^{\text{in}}$。为了便于处理初始条件中这一潜在的无限尾部，我们引入

$$\begin{cases} \bar{\theta}^{(0)}(u) \overset{\text{def}}{=} \Pi^{\leq N_u} u^{\text{in}}, \\ \bar{\theta}^{(m)}(u) \overset{\text{def}}{=} e^{(\tau_m - \tau_{m-1})\mathcal{L}^{(m)}} \bar{\theta}^{(m-1)}(u) + \displaystyle\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} e^{(\tau_m - s)\mathcal{L}^{(m)}} \gamma^{(m)} \left(u^{(m)}(s) \right) \mathrm{d}s, \qquad m \geq 1. \end{cases}$$

将其应用于近似解 $\bar{u} \in \Pi^{\leq N_{\mathcal{L}}} \mathcal{X}_\nu^{\text{prod}}$ 时，这些 $\bar{\theta}^{(m)}(\bar{u})$ 都是可计算的，并且对于所有 $m = 1, \ldots, M$，

$$\theta^{(m)}(u) - \bar{\theta}^{(m)}(u) = \mathfrak{L}^{(m,0)} \Pi^{>N_u} u^{\text{in}}.$$

将 (24) 推广后，对于任意 $N \in \mathbb{N}$、$m \in \{1, \ldots, M\}$ 以及 $l \in \{0, \ldots, m-1\}$</style>，我们引入

$$\mu_N^{(m,l)} \overset{\text{def}}{=} \exp\left(\sup_{|n| > N} \left((\tau_m - \tau_{m-1}) \Re\left(\lambda_n^{(m)} \right)^+ + \sum_{j=l+1}^{m-1} (\tau_j - \tau_{j-1}) \Re\left(\lambda_n^{(j)} \right) \right) \right), \tag{32}$$

其中 $x^+ := \max(x, 0)$，并约定 $\sum_{j=m}^{m-1} = 0$。于是，对于所有 $m = 1, \ldots, M$，我们有

$$\left\| t \mapsto e^{(t - \tau_{m-1})\mathcal{L}^{(m)}} \mathfrak{L}^{(m,0)} \Pi^{>N_u} u^{\text{in}} \right\|_{\mathcal{X}_\nu^{(m)}} \leq \mu_{N_{\mathcal{L}}}^{(m,0)} \epsilon^{\text{in}}.$$

然后我们完全按照第3.2节中的步骤进行，并对所有 $m = 1, \ldots\ldots, M$ 取，

$$Y^{(m)} \overset{\text{def}}{=} \left\| t \mapsto e^{(t - \tau_{m-1})\mathcal{L}^{(m)}} \bar{\theta}^{(m-1)}(\bar{u}) + \int_{\tau_{m-1}}^{t} e^{(t-s)\mathcal{L}^{(m)}} \gamma^{(m)} \left(\bar{u}^{(m)}(s) \right) \mathrm{d}s - \bar{u}^{(m)}(t) \right\|_{\mathcal{X}_\nu^{(m)}} + \mu_{N_u}^{(m,0)} \epsilon^{\text{in}},$$

该量是可计算的，并且满足定理 2.9 的假设 (8)。

注4.2。 注*3.6* 在这里同样适用，并且可以在每个子域上采用类似于 (23) 的分裂，方法是改写

$$\begin{aligned} & e^{(t-\tau_{m-1})\mathcal{L}^{(m)}} \bar{\theta}^{(m-1)}(\bar{u}) + \int_{\tau_{m-1}}^{t} e^{(t-s)\mathcal{L}^{(m)}} \gamma^{(m)} \left(\bar{u}^{(m)}(s) \right) ds - \bar{u}^{(m)}(t) \\ & \qquad = e^{(t-\tau_{m-1})\mathcal{L}^{(m)}} \bar{\theta}^{(m-1)}(\bar{u}) + (\mathcal{L}^{(m)})^{-1} \left(e^{(t-\tau_{m-1})\mathcal{L}^{(m)}} - I \right) \gamma^{(m)}(\bar{U}^{(m)}) \\ & \qquad\qquad + \int_{\tau_{m-1}}^{t} e^{(t-s)\mathcal{L}^{(m)}} \left(\gamma^{(m)} \left(\bar{u}^{(m)}(s) \right) - \gamma^{(m)} \left(\bar{U}^{(m)} \right) \right) ds - \bar{u}^{(m)}(t), \end{aligned}$$

其中 $\bar{U}^{(m)} = \frac{1}{\tau_m - \tau_{m-1}} \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \bar{u}^{(m)}(s) ds$。请注意，按时间进行域分解有助于提高这种分裂的效率，因为对 $\bar{u}^{(m)}$ 采用由 $\bar{U}^{(m)}$ 构成的分段常数近似，会比在整个区间 $[0, \tau]$上采用单一的全局常数近似更加准确。

4.3 Z-界

在本小节中，我们讨论满足定理 2.9 的假设（9）的 $Z_i^{(m)}$ 界。为此，我们先扩展第 3.3 节中引入的记号。

定义 4.3（将定义 3.7 扩展到多个子域）。对于所有 $m \in \{1, \dots, M\}$:

- 对于所有 $n \in \mathbb{Z}$, $\tilde{b}^{(m)}_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{(\tau_m - \tau_{m-1})R(\lambda^{(m)}_n)} - 1}{R(\lambda^{(m)}_n)} \in \mathbb{R}$，约定 $\tilde{b}^{(m)}_n = \tau_m - \tau_{m-1}$当 $R(\lambda^{(m)}_n) = 0$ 时。

- 对于所有 $i \in \{1, \dots, m\}$ 以及 $|n| > N_{\mathcal{L}}$,

$$b_n^{(m,i)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \tilde{b}_n^{(m)} & i = m, \\ \exp\left((\tau_m - \tau_{m-1}) \Re\left(\lambda_n^{(m)}\right)^+ + \sum_{j=i+1}^{m-1} (\tau_j - \tau_{j-1}) \Re\left(\lambda_n^{(j)}\right) \right) \tilde{b}_n^{(i)} & i = 1, \dots, m-1, \end{cases}$$

  约定 $\sum_{j=m}^{m-1} = 0$。

- 对于所有 $i \in \{1, \dots, m\}$, $B^{(m,i)} \colon \ell^1_\nu \to \ell^1_\nu$，定义如下

$$B^{(m,m)} \stackrel{\text{def}}{=} |Q^{(m)}| \, \Re(\Lambda^{(m)})^{-1} \left(e^{(\tau_m - \tau_{m-1}) \Re(\Lambda^{(m)})} - I \right),$$

  并且，对于 $i \le m-1$,

$$B^{(m,i)} \stackrel{\text{def}}{=} |Q^{(m)}| \, e^{(\tau_m - \tau_{m-1}) \Re(\Lambda^{(m)})^+} \left| \left(Q^{(m)}\right)^{-1} \mathfrak{L}^{(m,i)} Q^{(i)} \right| \Re(\Lambda^{(i)})^{-1} \left(e^{(\tau_i - \tau_{i-1}) \Re(\Lambda^{(i)})} - I \right).$$

  注意

$$B^{(m,i)} = \Pi^{\le N_{\mathcal{L}}} B^{(m,i)} \Pi^{\le N_{\mathcal{L}}} + \Pi^{> N_{\mathcal{L}}} B^{(m,i)} \Pi^{> N_{\mathcal{L}}},$$

  其中 $\Pi^{> N_{\mathcal{L}}} B^{(m,i)} \Pi^{> N_{\mathcal{L}}}$ 为对角矩阵，其对角元素由 $b_n^{(m,i)}$给出。

- 对于所有 $j = 0, \dots, 2J-1$, $\chi^{(m,j)}_{N_{\mathcal{L}}} \stackrel{\text{定义为}}{=}$ 上确界 $_{|n| > N_{\mathcal{L}}} |n|^j \tilde{b}_{(m)n}$。注意，$\chi^{(m,j)}_{N_{\mathcal{L}}}$ 可计算（例如，参见 *[47,*附录 *D]*）。

- 对于所有 $j = 0, \dots, 2J-1$, $\beta^{(m,j)} \stackrel{\text{定义为}}{=} \left\| \left(g^{(j)}\right)' (\bar{u}^{(m)}) - \bar{v}^{(m\,j)}_0 \right\|_{C^0} \in \ell^{1,}_\nu$。

- 设 $\bar{N} \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $|n| > \bar{N}$、所有 $m = 1$、……、M 以及所有 $j = 0$、……、$2J-1$, $\beta^{(m,j)n} = 0$。设 $\Gamma^{(m)}$ 是一个线性算子，使得对于所有 $a \in \ell^1_\nu$,

$$\Gamma^{(m)} \Pi^{\le \bar{N} + N_{\mathcal{L}}} |a| \ge \left\| \left(Q^{(m)}\right)^{-1} D\gamma^{(m)} \left(\bar{u}^{(m)}\right) \right\|_{C^0} \Pi^{\le \bar{N} + N_{\mathcal{L}}} |a|,$$

  and

$$\Gamma^{(m)} \Pi^{> \bar{N} + N_{\mathcal{L}}} a \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{2J-1} |\mathcal{D}^j| \left(\beta^{(m,j)} * \Pi^{> \bar{N} + N_{\mathcal{L}}} a \right).$$

备注 4.4。 算子 $B^{(m,i)}$ 对于得到 Z 界至关重要，它们依赖于$\mathfrak{L}^{(m,i)}$。根据 (29)，对于 $i \le m-2$, $\mathfrak{L}^{(m,i)}$ 由下式给出

$$Q^{(m-1)}e^{(\tau_{m-1}-\tau_{m-2})\Lambda^{(m-1)}}\left(Q^{(m-1)}\right)^{-1}Q^{(m-2)}e^{(\tau_{m-2}-\tau_{m-3})\Lambda^{(m-2)}}\cdots e^{(\tau_{l+1}-\tau_l)\Lambda^{(l+1)}}Q^{(l+1)}.$$

实际上，尤其是在使用区间算术计算 $\mathfrak{L}^{(m,i)}$ 时，最好先计算 $\left(Q^{(j)}\right)^{-1}Q^{(j-1)}$ 乘积，因为它们应当与单位算子较为接近。

现在我们可以得到 Z 界，即可计算量 $Z_i^{(m)}$ ，使得对于所有i, $m\in\{1,\dots,M\}$,

$$\left\|D_iT^{(m)}(\bar{u})\right\|_{B(\mathcal{X}_\nu^{(i)},\mathcal{X}_\nu^{(m)})}\le Z_i^{(m)}.$$

首先注意到 T_{prod}是下三角的，即 $D_iT^{(m)}(\bar{u})=0$对于 $i>m$，在这种情况下我们直接取 $Z_i^{(m)}=0$。当 $i\le m$时，我们按照第 3.3 节中的方法进行处理，首先将 $\left\|D_iT_{(m)}(\bar{u})\right\|_{B(\mathcal{X}_\nu^{(i)},\mathcal{X}_{(m)\nu})}$ 归约为控制一个 ℓ^1_ν 算子范数。

引理 4.5. 采用定义 *4.3* 中的记号，对所有 $1\le i\le m\le M$,

$$\left\|D_iT^{(m)}(\bar{u})\right\|_{B(\mathcal{X}_\nu^{(i)},\mathcal{X}_\nu^{(m)})}\le\left\|B^{(m,i)}\Gamma^{(i)}\right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)}.$$

证明. 该证明与引理 3.8 的证明非常相似。我们考虑任意的 $h\in\mathcal{X}_\nu^{(i)}$，并估计

$$\left(D_mT^{(m)}(\bar{u})h\right)(t)=\int_{\tau_{m-1}}^t e^{(t-s)\mathcal{L}^{(m)}}D\gamma^{(m)}(\bar{u}^{(m)}(s))(h(s))\mathrm{d}s,\qquad\text{if } i=m,\tag{33}$$

and

$$\begin{aligned}\left(D_iT^{(m)}(\bar{u})h\right)(t)&=e^{(t-\tau_{m-1})\mathcal{L}^{(m)}}D_i\theta^{(m-1)}(\bar{u})h\\&=e^{(t-\tau_{m-1})\mathcal{L}^{(m)}}\mathfrak{L}^{(m,i)}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}e^{(\tau_i-s)\mathcal{L}^{(i)}}D\gamma^{(i)}(\bar{u}^{(i)}(s))(h(s))\mathrm{d}s,\qquad\text{if } i<m.\end{aligned}\tag{34}$$

对时间取 C^0-范数，并完全按照 $M=1$ 情形中的步骤进行，可得

$$\left\|D_iT^{(m)}(\bar{u})h\right\|_{C^0}\le B^{(m,i)}\Gamma^{(i)}\left\|h\right\|_{C^0},$$

因此

$$\left\|D_iT^{(m)}(\bar{u})h\right\|_{\mathcal{X}_\nu^{(m)}}\le\left\|B^{(m,i)}\Gamma^{(i)}\left\|h\right\|_{C^0}\right\|_{\ell^1_\nu}\le\left\|B^{(m,i)}\Gamma^{(i)}\right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)}\left\|h\right\|_{\mathcal{X}_\nu^{(i)}}.\qquad\square$$

现在我们为$\left\|B^{(m,i)}\Gamma^{(i)}\right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)}$ 给出一个可计算上界。

命题 4.6. 对所有 $1\le i\le m\le M$，都有

$$\left\|B^{(m,i)}\Gamma^{(i)}\right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)}\le\max\left(\left\|B^{(m,i)}\Gamma^{(i)}\,\Pi^{\le\bar{N}+N_{\mathcal{L}}}\right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)},\ \mu_{N_{\mathcal{L}}}^{(m,i)}\sum_{j=0}^{2J-1}\left\|\beta^{(i,j)}\right\|_{\ell^1_\nu}\chi_{N_{\mathcal{L}}}^{(i,j)}\right),$$

其中，如果 $i<m$，则 $\mu_{N_{\mathcal{L}}}^{(m,i)}$ 如 (32) 中所示，且 $\mu_{N_{\mathcal{L}}}^{(m,m)}\overset{\text{def}}{=}1$。

证明。同样，证明与命题 3.9 的证明非常相似。特别是，我们只需手动估计

$$\left\|B^{(m,i)}\Gamma^{(i)}\right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)}\le\sum_{j=0}^{2J-1}\left\|\Pi^{>N_{\mathcal{L}}}B^{(m,i)}|\mathcal{D}^j|\right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)}\left\|\beta^{(i,j)}\right\|_{\ell^1_\nu},$$

其中

$$\begin{aligned}\left\|\Pi^{>N_{\mathcal{L}}} B^{(m,i)}|\mathcal{D}^j|\right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)} &\le \sup_{|n|>N_{\mathcal{L}}} b_n^{m,i}\,|n|^j \\ &\le \sup_{|n|>N_{\mathcal{L}}} \mu_{N_{\mathcal{L}}}^{(m,i)}\,\tilde{b}_n^{(i)}\,|n|^j \\ &\le \mu_{N_{\mathcal{L}}}^{(m,i)}\,\chi_{N_{\mathcal{L}}}^{(i,j)}.\end{aligned}$$

□

因此我们取

$$Z_i^{(m)} \overset{\text{def}}{=} \max\left(\left\|B^{(m,i)}\Gamma^{(i)}\,\Pi^{\le \bar{N}+N_{\mathcal{L}}}\right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)},\ \mu_{N_{\mathcal{L}}}^{(m,i)}\sum_{j=0}^{2J-1}\left\|\beta^{(i,j)}\right\|_{\ell^1_\nu}\chi_{N_{\mathcal{L}}}^{(i,j)}\right),$$

它可计算，并满足定理 2.9 的假设（9）。

4.4 W界

在本小节中，我们最终推导出可计算的界 $W_i^{(m)}$, $_j$ satisfying assumption (10) of The- orem 2.9. For any $u \in \mathcal{X}_\nu^{\text{prod}}$and $r = (r^{(1)}, \ldots, r^{(m)}) \in \mathbb{R}^M_{>0}$, we define

$$\text{Box}(u,r) = \prod_{m=1}^{M} \mathcal{B}_{\mathcal{X}_\nu^{(m)}}\left(u^{(m)}, r^{(m)}\right).$$

根据定理 2.9，我们需要估计

$$\left\|D_iT^{(m)}(u) - D_iT^{(m)}(\bar{u})\right\|_{B(\mathcal{X}_\nu^{(i)},\mathcal{X}_\nu^{(m)})},$$

对所有 $i,\ m = 1, \ldots,\ M$and $u \in$Box$(\bar{u},\ r_*)$ 均成立。因此，我们将对任意 $h \in \mathcal{X}_\nu^{(i)}$ 估计，

$$\left\|\left(D_iT^{(m)}(u) - D_iT^{(m)}(\bar{u})\right)h\right\|_{\mathcal{X}_\nu^{(m)}}.$$

再次利用 T^{prod} 的下三角结构，我们有 $D_iT_{(m)}(u) = D_iT_{(m)}(\bar{u}) = 0$当$i > m$时。否则，从 (33)-(34) 中的一阶导数计算出发，记 $v = u - \bar{u}$，并按照 (25) 中的方法推导，可得

$$\begin{aligned}&\left(\left(D_mT^{(m)}(u) - D_mT^{(m)}(\bar{u})\right)h\right)(t) \\ &= \int_{\tau_{m-1}}^{t} e^{(\tau_m - s)\mathcal{L}^{(m)}} \sum_{j=0}^{2J-1} \mathcal{D}^j \int_0^1 \left(g^{(j)}\right)''\left(\bar{u}^{(m)}(s) + \tilde{s}v^{(m)}(s)\right) * v^{(m)}(s) * h(s)\,\mathrm{d}\tilde{s}\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

对于 $i < m$ 也同理,

$$\begin{aligned}&\left(\left(D_iT^{(m)}(u) - D_iT^{(m)}(\bar{u})\right)h\right)(t) \\ &= e^{(t-\tau_{m-1})\mathcal{L}^{(m)}}\mathfrak{L}^{(m,i)}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} e^{(\tau_i - s)\mathcal{L}^{(i)}} \sum_{j=0}^{2J-1} \mathcal{D}^j \int_0^1 \left(g^{(j)}\right)''\left(\bar{u}^{(i)}(s) + \tilde{s}v^{(i)}(s)\right) * v^{(i)}(s) * h(s)\,\mathrm{d}\tilde{s}\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

逐分量取 C^0 范数，我们得到，对于所有 $i \le m$,

$$\begin{aligned}&\left\|\left(D_iT^{(m)}(u) - D_iT^{(m)}(\bar{u})\right)h\right\|_{C^0} \\ &\qquad \le B^{(m,i)}\sum_{j=0}^{2J-1}|\mathcal{D}^j|\left(\left|\left(g^{(j)}\right)''\right|\left(\|\bar{u}^{(i)}\|_{C^0} + \|v^{(i)}\|_{C^0}\right) * \|v^{(i)}\|_{C^0} * \|h\|_{C^0}\right).\end{aligned}$$

然后我们应用 ℓ^1_ν-范数，并利用引理 2.4 进行估计，

$$
\begin{aligned}
&\left\| \left(D_i T^{(m)}(u) - D_i T^{(m)}(\bar{u}) \right) h \right\|_{\mathcal{X}_\nu^{(m)}} \\
&= \left\| \left\| \left(D_i T^{(m)}(u) - D_i T^{(m)}(\bar{u}) \right) h \right\|_{C^0} \right\|_{\ell^1_\nu} \\
&\le \sum_{j=0}^{2J-1} \left\| B^{(m,i)} |\mathcal{D}^j| \right\|_{B(\ell^1_\nu, \ell^1_\nu)} \left| \left(g^{(j)} \right)'' \right| \left(\| \|\bar{u}^{(i)}\|_{C^0} \|_{\ell^1_\nu} + \| \|v^{(i)}\|_{C^0} \|_{\ell^1_\nu} \right) \| \|v^{(i)}\|_{C^0} \|_{\ell^1_\nu} \, \| \|h\|_{C^0} \|_{\ell^1_\nu} \\
&\le \sum_{j=0}^{2J-1} \left\| B^{(m,i)} |\mathcal{D}^j| \right\|_{B(\ell^1_\nu, \ell^1_\nu)} \left| \left(g^{(j)} \right)'' \right| \left(\|\bar{u}^{(i)}\|_{\mathcal{X}_\nu^{(i)}} + r_*^{(i)} \right) \|v^{(i)}\|_{\mathcal{X}_\nu^{(i)}} \|h\|_{\mathcal{X}_\nu^{(i)}}.
\end{aligned}
$$

注意到 $\left\| B^{(m,i)} |\mathcal{D}^j| \right\|_{\ell^1_\nu}$ 可以显式计算为

$$
\left\| B^{(m,i)} |\mathcal{D}^j| \right\|_{\ell^1_\nu} = \max \left(\left\| \Pi^{\le N_{\mathcal{L}}} B^{(m,i)} |\mathcal{D}^j| \Pi^{\le N_{\mathcal{L}}} \right\|_{B(\ell^1_\nu, \ell^1_\nu)}, \chi_N^{(i,j)} \mu_N^{(m,i)} \right).
$$

因此

$$
W_{i,k}^{(m)} \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{2J-1} \left\| B^{(m,i)} |\mathcal{D}^j| \right\|_{B(\ell^1_\nu, \ell^1_\nu)} \left| \left(g^{(j)} \right)'' \right| \left(\|\bar{u}^{(i)}\|_{\mathcal{X}_\nu^{(i)}} + r_*^{(i)} \right) & \text{if } i \le m \text{ and } k = i \\ 0 \qquad \text{otherwise,} \end{cases}
$$

是可计算的，并且满足定理 2.9 的假设（10）。

4.5 参数的实际考虑与选择

前面各小节中推导出的估计 Y、 Z 和 W 取决于若干参数，而谨慎选择这些参数对于获得足够精确的估计、从而使（11）—（12）成立，可能至关重要。下面我们讨论主要参数的影响，其中有些参数可以由代码自动调整。需要强调的是，此处描述的步骤和论证无需完全严谨，因为我们的目标只是猜测出合适的参数值，希望这些值能够导向一个成功的证明（并且可能使误差界低于某个阈值），同时尽量降低证明的计算成本。

细分的选择。 众所周知，对于常微分方程和某些类别的偏微分方程，使用自适应步长可以使数值近似解的算法更加高效。在我们的语境下情况同样如此，但由于我们关注的是严格验证解，时间步长的调整方式会有所不同。也就是说，细分

$$
0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_M = \tau,
$$

不会以最小化误差为目标来选择，而是作为一种缩小 Z 估计值的手段；通常，借助定理 2.9 进行严格验证时，这正是瓶颈所在。

要精确分析细分如何影响所有 $Z_i^{(m)}$ 界限并不容易，但研究对角项 $Z_m^{(m)}$则很容易。为了说明这些对角元素为何特别重要，我们来看条件 (12)。为简单起见，取 $W = 0$（实际上，只要 r^j 较小， W 的影响就不大），那么存在一个 $\eta \in \mathbb{R}^M_{>0}$，使得条件 (12) 成立，当且仅当矩阵 Z 的谱半径严格小于 1。回顾一下，在我们的问题中， Z 是下三角矩阵，可知要满足条件 (12)， Z 的对角元素必须小于 1。因此，实际做法是让用户选择最终时刻 τ和子域数量 M（具体取决于可用的计算资源，以及人们愿意等待证明所花的时间），然后由代码自动尝试选择一种细分，使 $Z_m^{(m)}$在 m 上大致均匀，从而近似最小化谱半径

Z的谱半径。当然，这种最小化并非严格进行；我们可以自由采用一些启发式方法，加快用于确定子域的近似 $Z_m^{(m)}$的计算。

在时间域的某些部分，误差界可能对网格点的位置相当敏感，尤其是线性算子的对角化条件很差的地方，见注 3.4。我们通过两种方式提高了网格优化代码的稳健性：不仅在时间域的这些部分选取较短的子域（这是将 $Z_m^{(m)}$界对所有 m统一化的直接结果），还采取务实的做法，力求使那里的 $Z_m^{(m)}$值更小。因此，我们接受网格最优性的相应降低。我们的目标是让算法生成适用于高效证明的良好网格，而非最优网格。

第 6.2 节的图3展示了用这一过程生成的一个细分示例，该示例用于证明定理 1.2。

通过调整时间方向的多项式阶数来减小误差界。如前所述，我们选择细分时并不试图让误差界 r^j 尽可能小。不过，误差及误差界较小自然是可取的，因此接下来可以优化 Y 界。回想一下， Y 界控制着残差误差 $T(\bar{u}) - \bar{u}$ 的大小。细分已经固定，但我们仍可通过调整每个子域上用于计算近似解 $\bar{u}^{(m)}$的时间方向多项式近似的阶数（下文记为 $K^{(m)}$），来影响残差误差。此外，即使每个 $K^{(m)}$ 都经过选择，以获得非常精确的近似解 $\bar{u}$， Y 界也只是残差误差的一个上界，它是用第 2.3节所述的过程得到的。为了使这个误差界相对准确，我们需要精确的插值（估计），因此每个子域上都应采用足够大的 $\tilde{K}^{(m)}$，以便像式（7）那样界定 C^0 范数。实践中，用户可以为 Y 界设定一个阈值，代码随后会自动尝试选择尽可能小的 $K^{(m)}$ 和 $\tilde{K}^{(m)}$，同时确保每个 $Y^{(m)}$ 都低于该阈值。

其他重要参数。最后一组值得优化的重要参数是傅里叶空间中的截断级数：用于构造近似解 $\bar{u}$ 的傅里叶模态数量 N_u，以及保留在 $\mathcal{L}$ 有限部分中的模态数量 $N_{\mathcal{L}}$。原则上，这些参数也可以依赖于子域 m，但实际上，我们没有找到简单易行的优化方法，因此决定在所有子域中统一使用一组 N_u 和 $N_{\mathcal{L}}$ 的取值，并由用户进行选择。我们强调，这两个参数对证明的影响截然不同。截断级数 N_u 决定了近似解的精度，因此主要影响 Y 界。尤其要注意，为了使残差误差足够小，必须像上文所述，在时间上充分逼近解，同时还必须选择足够大的 N_u。另一方面， $N_{\mathcal{L}}$ 控制每个算子 $\mathcal{L}^{(m)}$ 对 $DF(\bar{u}^{(m)})$ 的逼近程度，因此会影响 Z 界。

5 一直积分到无穷远

本节考虑一个具体问题：对一条趋向稳定稳态解的轨道进行积分。更准确地说，我们聚焦于双曲稳定稳态，并证明我们的严格积分器足够稳健，有可能一直积分到 $t = +\infty$。此外，我们还将证明，如果这一步积分到 $t = +\infty$ 成功，那么我们便可一次性自动得到稳定稳态的存在性、一个使所有解都收敛到该稳态的显式邻域，以及线性化算子的谱隙。

在第 5.1 节中，我们将展示如何对第 3 节的设置稍作修改，以处理无界时间区间 $[\tau, \infty)$。在第 5.2 节中，我们相应地调整相关的 Y, Z 和 W 界，从而能够在该无界时间区间上执行严格积分步。接着在第 5.3 节中，我们证明，在 $[\tau, \infty)$ 上进行这种严格积分会自动推出稳态的存在、其局部渐近稳定性以及一个明确的谱隙。最后，我们将在第 5.4 节中简要说明，如何将对单个区域的这些考量与第 4 节中引入的时间细分相结合。

5.1 单步设置

我们再次考虑偏微分方程 (1)，但这次是在 $t \in [\tau, \infty)$ 上，并且初始条件给定于 $t = \tau$:$u(\tau, x) = u^{\text{in}}(x)$。我们将考虑该偏微分方程在区间 $t \in [\tau, \infty)$ 上的一个时间无关近似解 $\bar{u}$，并尝试证明附近存在一个精确解。正如我们稍后将看到的，只有当 $\bar{u}$ 附近存在一个稳定稳态（且 u^{in} 接近 $\bar{u}$）时，这种方法才行得通；但我们强调，无须事先知道这一点。相反，这将是严格积分的结果。

我们的方法与第 3 节中的方法相同，只是由于近似解 $\bar{u}$ 已经是时间无关的，因此可以进行简化。具体而言，我们完全按照第 3.1 节的方式定义$\mathcal{L}$，其中 $\bar{v}^{(j)} = \Pi^{\leq N_u}\left[\left(g^{(j)}\right)'(\bar{u})\right]$。在本节中，我们假设$\mathcal{L}$ 的所有特征值都具有负实部；在实际情况下，如果 $\bar{u}$ 确实接近一个双曲稳定稳态，这一条件应该成立。

由于时间域现在是 $[\tau, \infty)$，因此从现在开始

$$\mathcal{X}_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \left(C([\tau,\infty),\mathbb{C})\right)^{\mathbb{Z}},\ \|u\|_{\mathcal{X}_\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|u_n\|_{C^0}\, \nu^{|n|} < \infty \right\},$$

其中，与定义 2.7 的唯一区别在于时间区间；对于任意连续函数$v:\ [\tau, \infty) \to \mathbb{C}$,

$$\|v\|_{C^0} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t\in[\tau,\infty)} |v(t)|\,.$$

不动点算子 T 现在表示为

$$T(u)(t) = e^{(t-\tau)\mathcal{L}} u^{\text{in}} + \int_\tau^t e^{(t-s)\mathcal{L}} \gamma(u(s))\mathrm{d}s, \qquad t \in [\tau, \infty), \tag{35}$$

它与式 (20) 的区别同样仅在于时间域。注意，假设$\mathcal{L}$仅具有负实部的特征值，可确保 T 将$\mathcal{X}_\nu$ 映射到自身。

5.2 界

现在我们为算子 T （定义见式（35））推导适当的界 Y、 Z 和 W。与第 3 节相比，唯一需要稍作调整的估计是 Y 界。事实上，在 Y 界中，我们需要估计时间上的 C^0-范数（见第3.2节）；对于有界时间区间，我们按照第2.3节所述，借助插值多项式和插值误差估计完成了这项工作。如今时间区间是无限的，我们无法再使用这些工具，而必须手动界定这些 C^0-范数。另一方面，在 Z 和 W 界中，所有涉及的量都已是常数，我们只需做几处简单调整，将先前仅针对有界时间区间定义的量以自然的方式加以推广。

先来看 Y界。利用 $\bar{u}$ 与时间无关这一点，对于所有 $t \in [\tau, \infty)$，我们有

$$\begin{aligned}\left(T(\bar{u}) - \bar{u}\right)(t) &= e^{(t-\tau)\mathcal{L}} u^{\text{in}} + \left(e^{(t-\tau)\mathcal{L}} - I\right)\mathcal{L}^{-1}\gamma(\bar{u}) - \bar{u} \\ &= e^{(t-\tau)\mathcal{L}}\left(u^{\text{in}} + \mathcal{L}^{-1}\gamma(\bar{u})\right) - \left(\bar{u} + \mathcal{L}^{-1}\gamma(\bar{u})\right).\end{aligned} \tag{36}$$

回顾一下，$\mathcal{L}$和 γ的定义使得偏微分方程 (1) 写作 $\partial_t u = \mathcal{L}u + \gamma(u)$。由于我们预期 $\bar{u}$接近稳态，因此应有 $\mathcal{L}\bar{u} + \gamma(\bar{u}) \approx 0$，所以 $\bar{u} + \mathcal{L}^{-1}\gamma(\bar{u})$ 应该很小（若 $u^{\text{in}} \approx \bar{u}$成立， $u^{\text{in}} + \mathcal{L}^{-1}\gamma(\bar{u})$ 也应如此）。利用 $\mathcal{L} = Q\Lambda Q^{-1}$，其中 Λ 是一个对角矩阵，且其对角元素的实部均为负，我们得到以下估计

$$\|T(\bar{u}) - \bar{u}\|_{\mathcal{X}_\nu} \leq \left\| |Q| \left| Q^{-1}(u^{\text{in}} + \mathcal{L}^{-1}\gamma(\bar{u})) \right| + \left| \bar{u} + \mathcal{L}^{-1}\gamma(\bar{u}) \right| \right\|_{\ell^1_\nu} \stackrel{\text{def}}{=} Y, \tag{37}$$

由此可得一个可计算的 Y 界，满足 (13)。

为了获得一个 Z 界，我们可以重复使用第 3.3 节中的估计，并针对新的时间域稍作调整。也就是说，与定义 3.7 相比，我们取

$$B \overset{\text{def}}{=} |Q|\left(-\Re(\Lambda)^{-1}\right) = |Q|\left|\Re(\Lambda)^{-1}\right|, \qquad \chi^{(j)}_{N_{\mathcal{L}}} \overset{\text{def}}{=} \sup_{|n|>N_{\mathcal{L}}} \frac{|n|^j}{|\Re(\lambda_n)|} \quad \text{for } j = 0, \dots, 2J-1,$$

并且，每个 $\beta^{(j)}$ 中的 C^0范数都会变成简单的绝对值，因为 $\bar{u}$不再依赖于时间。于是，引理 3.8 和命题 3.9 适用，我们得到

$$\begin{aligned}\|DT(\bar{u})\|_{B(\mathcal{X}_\nu,\mathcal{X}_\nu)} &\leq \left\|B\left|Q^{-1}D\gamma(\bar{u})\right|\right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)} \\ &\leq \max\left(\left\|B\Gamma\,\Pi^{\leq \bar{N}+N_{\mathcal{L}}}\right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)}, \sum_{j=0}^{2J-1}\left|\beta^{(j)}\right|\chi^{(j)}_{N_{\mathcal{L}}}\right) \overset{\text{def}}{=} Z, \end{aligned} \tag{38}$$

由此得到一个可计算的 Z 界，满足（14）。

最后， W 界保持完全不变（其中 B 为上文刚定义的新值），我们取

$$W \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{2J-1}\left\|B\left|\mathcal{D}^j\right|\right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)}\left|\left(g^{(j)}\right)''\right|\left(\|\bar{u}\|_{\ell^1_\nu}+r_*\right), \tag{39}$$

该值可计算，并满足假设（15）。

总之，若存在 $r \in (0, r_*)$，使得本节推导出的界Y、 Z 和 W 满足条件（16）和（17），则式（35）中的不动点算子 T 在$\mathcal{B}_{\mathcal{X}_\nu}(\bar{u}, r)$中有一个不动点；也就是说，具有初始条件 $u^\star(\tau,\cdot)$的偏微分方程（1）的解 $u^\star$ 在所有$t \in [\tau,\infty)$上都有定义，并且在 ℓ^1_ν中保持有界。

5.3 稳定稳态的存在性

现在我们证明，如果能够对 $[\tau,\infty)$ 执行严格积分步，并使用上一小节推导出的估计，那么附近就存在一个局部唯一稳态。回想一下，假设 $\mathcal{L}$ 的所有特征值都具有负实部，因此 $\mathcal{L}$ 可逆，这使我们能够将稳态方程 $\mathcal{L}u+\gamma(u) = 0$改写为不动点问题 $T^{\text{stat}}(u) = u$，其中T^{stat}： $\ell^1_\nu \to \ell^1_\nu$ 定义为

$$T^{\text{stat}}(u) = -\mathcal{L}^{-1}\gamma(u).$$

宽泛地说，算子 T^{stat} 已经包含在式 (35) 中的算子 T 里，这使我们能够根据 T的局部压缩性推导出 T_{stat}的局部压缩性。

定理 5.1. 设 $u^{\text{in}}, \bar{u} \in \ell^1_\nu$。假设 L 的所有特征值都具有负实部，并且对于第 *5.2* 节中推导出的界 Y, Z 和 W，条件 (16) 和 (17) 在某个$r \in (0, r_*)$下成立。那么，偏微分方程 (1) 在 $B^{\ell^1_\nu}(\bar{u}, r)$中存在唯一稳态 u^{stat}。

证明。 正如我们在式（36）中所见，如果 $u \in \mathcal{X}_\nu$ 是时间无关的（或者等价地，如果 $u \in \ell^1_\nu$），那么对所有 $t \geq \tau$

$$\begin{aligned} T(u)(t) &= e^{(t-\tau)\mathcal{L}}\left(u^{\text{in}} + \mathcal{L}^{-1}\gamma(u)\right) - \mathcal{L}^{-1}\gamma(u) \\ &= e^{(t-\tau)\mathcal{L}}\left(u^{\text{in}} - T^{\text{stat}}(u)\right) + T^{\text{stat}}(u). \end{aligned} \tag{40}$$

特别地， $T(u)(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} T^{\text{stat}}(u)$。此外，由于所有涉及$\mathcal{X}_\nu$-范数的估计都是通过取时间上的上确界得到的，我们立即得到

$$\left\|T^{\text{stat}}(\bar{u}) - \bar{u}\right\|_{\ell^1_\nu} \leq \|T(\bar{u}) - \bar{u}\|_{\mathcal{X}_\nu} \leq Y,$$

其中 Y 如式 (37) 所示,

$$\left\|DT^{\mathrm{stat}}(\bar{u})\right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)} \le \|DT(\bar{u})\|_{B(\mathcal{X}_\nu,\mathcal{X}_\nu)} \le Z,$$

其中 Z 如（38）所示，类似地

$$\left\|DT^{\mathrm{stat}}(u) - DT^{\mathrm{stat}}(\bar{u})\right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)} \le W\|u-\bar{u}\|_{\ell^1_\nu}, \qquad \text{for all } u \in \mathcal{B}_{\ell^1_\nu}(\bar{u}, r_*),$$

其中 W 如（39）所示。也就是说，为时间区间 $[\tau,\infty)$ 上的演化偏微分方程（1）在（35）中导出的不动点算子 T所满足的估计 Y、 Z 和 W，同样适用于对应稳态的不动点算子 T^{stat}。因此，我们可以将定理 2.9 应用于 $T_{\text{稳态}}$，从而得到该偏微分方程存在唯一稳态 u^{stat}，使得 $\|u^{\mathrm{stat}}-\bar{u}\|_{\ell^1_\nu} \le r$。 □

不出所料，接下来我们将证明，偏微分方程（1）在初始条件$u^\star(\tau,\cdot)$ 下的全局解 $u^\star$，作为（20）中 T的不动点而得到，收敛于稳态 u^{stat}。

引理 5.2。 在定理 *5.1* 的假设下，记 $u^\star$ 为（35）中的不动点 T，则 $u^\star(t)$ 在 ℓ^1_ν 中收敛于 u^{stat}，当 $t\to\infty$。

证明。 由于 $T(u^\star) = u^\star$，对所有 $t \ge \tau$，我们有

$$u^\star(t) = e^{(t-\tau)\mathcal{L}}u^{\mathrm{in}} + \int_\tau^t e^{(t-s)\mathcal{L}}\gamma(u^\star(s))\mathrm{d}s.$$

我们回顾一下， $u^\star(t)$ 在 ℓ^1_ν 中有界，因为 $\|u^\star(t)-\bar{u}\|_{\ell^1_\nu} \le \|u^\star-\bar{u}\|_{\mathcal{X}_\nu} \le r$，并且 $\mathcal{L}$ 的所有特征值都具有负实部，因此当 $t\to\infty$ 时， $u^\star(t)$ 在 ℓ^1_ν 中收敛，极限为 $u^{\lim}$，且 $u^{\lim}\in\mathcal{B}^{\ell^1_\nu}(\bar{u},r)$。由于 $u^\star$ 是偏微分方程 (1) 的解，且收敛到 $u^{\lim}$，因此 $u^{\lim}$ 必须是该偏微分方程的稳态，即 T_{stat} 的不动点。然而，根据定理 5.1 u^{stat} 是 $\mathcal{B}^{\ell^1_\nu}(\bar{u},r)$ 中 T_{stat} 的唯一不动点，因此 $u^{\lim}=u^{\mathrm{stat}}$。 □

注 5.3。 对于形如 (1) 的抛物型方程，即使解对所有正时间都有定义，也不一定收敛到某个平衡态。例如，它可能收敛到一个周期轨道，甚至呈现更为复杂的（如混沌）动力系统。然而，对于任意解，我们的设定不允许将积分严格地进行到无穷远，而只允许在 L 的所有特征值都具有负实部时这样做（例如，这一假设对于得到 (37) 至关重要）；而这只有在解收敛到一个双曲稳定稳态时才可能发生。

接下来，我们将证明，在略微加强的假设下（即不等式 (16) 为严格不等式），显式邻域 u^{stat} 中的所有初始条件都会导出收敛于 u^{stat} 的全局解。

Theo注 5.4。 令 $u^{\mathrm{in}},\bar{u}\in\ell^1_\nu$。假设 L 的所有特征值均具有负实部，且并且，

对于第 *5.2* 节中推导出的界 Y, Z 和 W，存在 $r_{\min}\in(0,r_*)$ 使得

$$Y + Zr_{\min} + \frac{1}{2}Wr_{\min}^2 < r_{\min},$$
$$Z + Wr_{\min} < 1.$$

然后，令 $r_{\max}\in(r_{\min},r_*]$ 使得

$$Y + Zr_{\max} + \frac{1}{2}Wr_{\max}^2 \le r_{\max},$$
$$Z + Wr_{\max} < 1,$$

并令 $\varepsilon>0$ 使以下两个条件得到满足

$$(1-(Z+Wr_{\min}))^2 - 4W\left\||Q|\,|Q^{-1}|\right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)}\varepsilon > 0, \tag{41}$$

$$\frac{1-(Z+Wr_{\min}) - \sqrt{(1-(Z+Wr_{\min}))^2 - 4W\left\||Q|\,|Q^{-1}|\right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)}\varepsilon}}{2W} \le r_{\max}-r_{\min}. \tag{42}$$

那么，对于任意初始条件 v^{in}，只要其属于 $B^{\ell^1_\nu}(u^{\mathrm{stat}},\varepsilon)$，演化偏微分方程 (1) 在初始条件 $v^\star(\tau,\cdot)$ 下的解 $v^\star$便对所有 $t\ge\tau$都有定义，并且当 $t\to\infty$ 时收敛到 u^{stat}。

证明。首先注意，存在满足 (41)-(42) 的正值 ε，这是由 $Z + Wr_{\min} < 1$ 保证的。另一个预备观察是，定理 5.4 的假设确保定理 5.1 对 $r = r_{\min}$ 和 $r = r_{\max}$ 均成立。也就是说，稳态 u^{stat} 属于球 $\mathcal{B}^{\ell^1_\nu}(\bar{u}, r_{\min})$，并且它是较大球 $\mathcal{B}^{\ell^1_\nu}(\bar{u}, r_{\max})$ 内的唯一稳态。

为了更好地跟踪对初始条件的依赖关系，我们现在将 (35) 中初始条件为 u^{in}的不动点算子记为$T_{u^{\mathrm{in}}}$。首先证明，对于所有 $v^{\mathrm{in}} \in \mathcal{B}^{\ell^1_\nu}(u^{\mathrm{stat}}, \varepsilon)$，算子 $T_{v^{\mathrm{in}}}$在 u^{stat}附近有一个不动点。我们将通过找到一个 $\delta > 0$（与 ε无关），使得 $T_{v^{\mathrm{in}}}$将 $\mathcal{B}\mathcal{X}_\nu(u^{\mathrm{stat}}, \delta)$映射到自身，并且在该球上是压缩映射，从而得到这一结果。根据 (40)，

$$\left(T_{v^{\mathrm{in}}}(u^{\mathrm{stat}}) - u^{\mathrm{stat}}\right)(t) = e^{(t-\tau)\mathcal{L}}\left(v^{\mathrm{in}} - u^{\mathrm{stat}}\right) \qquad \text{for all } t \geq \tau,$$

再次利用$\mathcal{L}$ 的所有特征值都具有负实部这一事实，可得

$$\left\|T_{v^{\mathrm{in}}}(u^{\mathrm{stat}}) - u^{\mathrm{stat}}\right\|_{\mathcal{X}_\nu} \leq \left\||Q|\,|Q^{-1}|\right\|_{B(\ell^1_\nu, \ell^1_\nu)} \varepsilon. \tag{43}$$

然后，注意到 $DT_{v^{\mathrm{in}}}(u)$不依赖于 v^{in}，我们可以利用 (38)-(39) 中关于 $DT_{u^{\mathrm{in}}}$的估计Z和 W来控制 $DT_{v^{\mathrm{in}}}(u)$。更准确地说，只要 $u \in \mathcal{B}\mathcal{X}_\nu(\bar{u}, r_*)$，就有

$$\begin{aligned}
\left\|DT_{v^{\mathrm{in}}}(u)\right\|_{B(\mathcal{X}_\nu, \mathcal{X}_\nu)} &= \left\|DT_{u^{\mathrm{in}}}(u)\right\|_{B(\mathcal{X}_\nu, \mathcal{X}_\nu)} \\
&\leq \left\|DT_{u^{\mathrm{in}}}(\bar{u})\right\|_{B(\mathcal{X}_\nu, \mathcal{X}_\nu)} + \left\|DT_{u^{\mathrm{in}}}(u) - DT_{u^{\mathrm{in}}}(\bar{u})\right\|_{B(\mathcal{X}_\nu, \mathcal{X}_\nu)} \\
&\leq Z + W\left\|u - \bar{u}\right\|_{\mathcal{X}_\nu}.
\end{aligned}$$

特别地，如果 $u \in \mathcal{B}\mathcal{X}_\nu(u^{\mathrm{stat}}, \delta)$ 且 $\delta \leq r_* - r_{\min}$，那么 $u \in \mathcal{B}\mathcal{X}_\nu(\bar{u}, r_*)$，并且

$$\begin{aligned}
\left\|DT_{v^{\mathrm{in}}}(u)\right\|_{B(\mathcal{X}_\nu, \mathcal{X}_\nu)} &\leq Z + W\left(\left\|u^{\mathrm{stat}} - \bar{u}\right\|_{\mathcal{X}_\nu} + \left\|u - u^{\mathrm{stat}}\right\|_{\mathcal{X}_\nu}\right) \\
&\leq Z + W\left(r_{\min} + \delta\right).
\end{aligned} \tag{44}$$

将此估计与 (43) 结合，并使用中值不等式，可得对于所有$u \in \mathcal{B}\mathcal{X}_\nu(u^{\mathrm{stat}},\ \delta)$，其中 $\delta \leq r_* - r_{\min}$，

$$\begin{aligned}
\left\|T_{v^{\mathrm{in}}}(u) - u^{\mathrm{stat}}\right\|_{\mathcal{X}_\nu} &\leq \left\|T_{v^{\mathrm{in}}}(u^{\mathrm{stat}}) - u^{\mathrm{stat}}\right\|_{\mathcal{X}_\nu} + \left\|T_{v^{\mathrm{in}}}(u) - T_{v^{\mathrm{in}}}(u^{\mathrm{stat}})\right\|_{\mathcal{X}_\nu} \\
&\leq \left\||Q|\,|Q^{-1}|\right\|_{B(\ell^1_\nu, \ell^1_\nu)} \varepsilon + \left(Z + Wr_{\min}\right)\delta + W\delta^2.
\end{aligned}$$

再次利用 $Z + Wr_{\min} < 1$，条件 (41) 确保存在 $\delta > 0$，使得

$$\left\||Q|\,|Q^{-1}|\right\|_{B(\ell^1_\nu, \ell^1_\nu)} \varepsilon + \left(Z + Wr_{\min}\right)\delta + W\delta^2 \leq \delta. \tag{45}$$

满足 (45) 的一个合适的 δ 为

$$\delta = \frac{1 - \left(Z + Wr_{\min}\right) - \sqrt{\left(1 - \left(Z + Wr_{\min}\right)\right)^2 - 4W\left\||Q|\,|Q^{-1}|\right\|_{B(\ell^1_\nu, \ell^1_\nu)}\varepsilon}}{2W},$$

由 (42) 可知，我们有 $\delta \leq r_{\max} - r_{\min} \leq r_* - r_{\min}$。特别地，$\mathcal{B}\mathcal{X}_\nu(u^{\mathrm{stat}},\ \delta)$ 包含于 $\mathcal{B}\mathcal{X}_\nu(\bar{u},\ r_*)$ 中，因此由 (45) 可得

$$\left\|T_{v^{\mathrm{in}}}(u) - u^{\mathrm{stat}}\right\|_{\mathcal{X}_\nu} \leq \delta \qquad \text{for all } u \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}_\nu}(u^{\mathrm{stat}}, \delta),$$

也就是说，$T_{v^{\mathrm{in}}}$将 $\mathcal{B}\mathcal{X}_\nu(u^{\mathrm{stat}},\ \delta)$ 映射到其自身。估计 (45) 还意味着

$$Z + Wr_{\min} + W\delta < 1,$$

然后，(44) 表明，对于所有 u属于 $\mathcal{B}\mathcal{X}_\nu(u^{\mathrm{stat}},\ \delta)$ 的元素，

$$\left\|DT_{v^{\mathrm{in}}}(u)\right\|_{B(\mathcal{X}_\nu, \mathcal{X}_\nu)} \leq Z + W\left(r_{\min} + \delta\right) < 1.$$

因此， $T_{v^{\mathrm{in}}}$ 是 $\mathcal{B}\mathcal{x}_\nu(u^{\mathrm{stat}},\ \delta)$ 上的压缩映射，并且在 $\mathcal{B}\mathcal{x}_\nu(u^{\mathrm{stat}},\ \delta)$ 中有唯一的不动点 $v^\star$。

现在，我们用与引理 5.2 类似的论证作结。 $v^\star$ 是演化偏微分方程 (1) 在初始条件 $v^\star(\tau,\ \cdot) = v^{\mathrm{in}}$下的解，因此它在所有时间上均有定义，并且当 $t \to \infty$ 时收敛到偏微分方程 (1) 的一个稳态 v^{lim}。由于 v^{lim} 属于 $\mathcal{B}^{\ell^1_\nu}(u^{\mathrm{stat}},\ \delta)$，且 $\delta \le r_{\max} - r_{\min}$, v^{lim} 也属于 $\mathcal{B}^{\ell^1_\nu}(\bar{u},\ r_{\max})$，根据唯一性， v^{lim} 必定等于u^{stat}。 □

注 5.5. 定理 *5.4* 证明了 $B^{\ell^1_\nu}(u^{\mathrm{stat}}, \varepsilon)$ 包含于 u^{stat}的吸引域，并且证明过程只用到了我们在严格积分过程中已经得到的界。特别是，虽然不等式 (41)和(42) 允许选取半径 ε的一个显式值，但球 $B^{\ell^1_\nu}(u^{\mathrm{stat}}, \varepsilon)$ 的球心不易确定；而且当 $\varepsilon < r_{\min}$时，这个球甚至不包含 $\bar{u}$ 。不过，如果特别关注于获得 u^{stat}的一个经验证的吸引域，则可以稍微调整估计，以获得更好的信息。在此之前，通过令 $Y^\infty = \left\|\bar{u} + L^{-1}\gamma(\bar{u})\right\|_{\ell^1_\nu}$，并计算（与前面相同的 Z 和 W，因为在本分析中将 $\bar{u}$视为固定量），可以改进对 u^{stat} 位置的确定

$$r^{\mathrm{stat}}_{\min} = \frac{(1-Z) - \sqrt{(1-Z)^2 - 2Y^\infty W}}{W}.$$

为简便起见，假设 $r_* \ge \frac{1-Z}{W} = r_{\max}$，那么定理 *5.1* 证明中的分析表明， $u^{\mathrm{stat}} \in B^{\ell^1_\nu}(\bar{u}, r^{\mathrm{stat}}_{\min})$ 是 $B^{\ell^1_\nu}(\bar{u}, r_{\max})$ 内唯一的驻点。这也为定理 *5.4* 中的 ε 提供了略有改进的估计。

现在将 (37) 中定义的 $Y = Y_{u^{\mathrm{in}}}$ 视为一个依赖于初始数据 u^{in} 的界。给定一个点 u^{in}，我们要证明它属于 u^{stat} 的吸引域，于是检查 $Y_{u^{\mathrm{in}}} < \frac{(1-Z)^2}{2W}$。若成立，则根据引理 *5.2* 可知，从 u^{in} 出发的全局解收敛到 u^{stat}。因此集合

$$\left\{ u^{\mathrm{in}} \in \mathcal{B}_{\ell^1_\nu}(\bar{u}, r_{\max}) \,:\, Y_{u^{\mathrm{in}}} < \frac{(1-Z)^2}{2W} \right\}$$

是 u^{stat} 的吸引域的一部分。利用 $Y = Y_{u^{\mathrm{in}}}$、 Z 和 W 的可计算表达式，不难严格验证有某个 u^{in} 属于该集合。

最后，让我们证明，在平衡态 u^{stat} 处，偏微分方程 (1) 的线性化存在谱隙。

定理 5.6. 重复定理 *5.1* 的假设，并令 $F(u) \overset{\mathrm{def}}{=} Lu + \gamma(u)$ 为偏微分方程 (1)的右端项。则存在 $\alpha < 0$ ，使得 $DF(u^{\mathrm{stat}})$ 的谱包含于 $\{z \in \mathbb{C}, R(z) < \alpha\}$。

证明。 首先注意到 $DF(u^{\mathrm{stat}})$ 具有紧预解式，因此其谱仅由特征值组成。回想一下， $\mathcal{L}$ 的特征值记为 $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$，我们考虑

$$\underline{\lambda} \overset{\mathrm{def}}{=} \max_{n\in\mathbb{Z}} \Re(\lambda_n) < 0.$$

对于任意 $\alpha \in (\underline{\lambda}, 0)$，我们知道 $\mathcal{L}$ 的谱位于 α 的左侧，并将通过一个简单的同伦论证证明，只要 $\alpha < 0$ 足够小， $DF(u^{\mathrm{stat}})$ 也仍然如此。更确切地说，对于所有 $s \in [0,1]$，我们考虑

$$\mathcal{L}_s \overset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{L} + s\left(DF(u^{\mathrm{stat}})) - \mathcal{L}\right),$$

并证明，存在某个 $\alpha \in (\underline{\lambda},\ 0)$，使得对所有 $s \in [0,1]$， $\mathcal{L}_s$ 在垂直条带 $\mathcal{S}_{\alpha} \overset{\mathrm{def}}{=} \{z \in \mathbb{C},\ \ |R(z)| \in [\alpha, 0]\}$中没有特征值。证明这一点后，由于 $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$ 的所有特征值都位于该条带左侧，根据谱的上半连续性 [31, IV.3, Theorem 3.16] ，我们便可得知 $\mathcal{L}_1 = DF(u^{\mathrm{stat}})$也具有相同性质。

我们将证明存在 $\alpha < 0$，使得对所有 $a \in [\alpha, 0]$、所有 $\mu \in \mathbb{R}$ 以及所有$s \in [0,1]$，$\mathcal{L}_s - (a + i\mu)I$ 均可逆，从而表明$\mathcal{L}_s$ 在$\mathcal{S}_\alpha$中没有特征值。我们先将其改写为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_s - (a+i\mu)I &= \mathcal{L} - (a+i\mu)I + s\left(DF(u^{\mathrm{stat}})) - \mathcal{L}\right) \\ &= (\mathcal{L} - (a+i\mu)I)\left(I + s\left(\mathcal{L} - (a+i\mu)I\right)^{-1}\left(DF(u^{\mathrm{stat}})) - \mathcal{L}\right)\right).\end{aligned}$$

由于 $DF(u^{\mathrm{stat}}) - \mathcal{L} = D\gamma(u^{\mathrm{stat}})$，只需证明

$$\left\|\left(\mathcal{L} - (a+i\mu)I\right)^{-1} D\gamma(u^{\mathrm{stat}})\right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)} < 1,$$

以得到对所有 $s \in [0,1]$，$\mathcal{L}_s - (a + i\mu)I$ 可逆。为此，我们对所有 $a \in [\alpha, 0]$ 引入

$$B(a) \stackrel{\text{def}}{=} |Q|\left|(\Re(\Lambda) - a)^{-1}\right|, \qquad \text{and} \qquad \chi^{(j)}_{N_\mathcal{L}}(a) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{|n|>N_\mathcal{L}} \frac{|n|^j}{|\Re(\lambda_n) - a|} \quad \text{for } j = 0, \dots, 2J-1,$$

将第 5.2 节中用于 $a = 0$ 的量 B 和 $\chi^{(j)}_{N_\mathcal{L}}$ 推广。于是得到

$$\begin{aligned}\left\|\left(\mathcal{L} - (a+i\mu)I\right)^{-1} D\gamma(u^{\mathrm{stat}})\right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)} &\le \left\||Q|\left|(\Lambda - (a+i\mu))^{-1}\right|\,\left|Q^{-1}D\gamma(u^{\mathrm{stat}})\right|\right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)} \\ &= \left\|B(a)\left|Q^{-1}D\gamma(u^{\mathrm{stat}})\right|\right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)} \\ &\le \left\|B(a)\left|Q^{-1}D\gamma(\bar u)\right|\right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)} \\ &\quad + \left\|B(a)\left|Q^{-1}\left(D\gamma(u^{\mathrm{stat}}) - D\gamma(\bar u)\right)\right|\right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)},\end{aligned}$$

并按照第 5.2 节中的方法推导，最终得到

$$\begin{aligned}&\left\|\left(\mathcal{L} - (a+i\mu)I\right)^{-1} D\gamma(u^{\mathrm{stat}})\right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)} \\ &\qquad \le \max\left(\left\|B(a)\Gamma\,\Pi^{\le \bar N + N_\mathcal{L}}\right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)}, \sum_{j=0}^{2J-1}\left|\beta^{(j)}\right|\chi^{(j)}_{N_\mathcal{L}}(a)\right) \\ &\qquad\quad + \sum_{j=0}^{2J-1}\left\|B(a)\left|\mathcal{D}^j|\right|\right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)}\left|\left(g^{(j)}\right)''\right|\left(\|\bar u\|_{\ell^1_\nu} + r_*\right)\left\|u^{\mathrm{stat}} - \bar u\right\|_{\ell^1_\nu}. \quad (46)\end{aligned}$$

对于 $a = 0$,

$$\left\|\left(\mathcal{L} - i\mu I\right)^{-1} D\gamma(u^{\mathrm{stat}})\right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)} \le Z + Wr < 1,$$

由连续性可知，存在 $\alpha > 0$ 使得

$$\left\|\left(\mathcal{L} - (a+i\mu)I\right)^{-1} D\gamma(u^{\mathrm{stat}})\right\|_{B(\ell^1_\nu,\ell^1_\nu)} < 1 \qquad \text{for all } a \in [-\alpha, 0]. \qquad \square$$

注 5.7. 定理 *5.4* 的证明为我们提供了一种直接求得显式谱隙的方法。事实上，(46) 的右端项可以计算，并且随 a 增大而减小，因此只需找出一个显式的 $a < 0$，使得该表达式仍小于 1，这样我们便可得到定理 *5.4* 在 $\alpha = a$ 下成立。

5.4 多个区域的情形

在第 5.1 节至第 5.3 节中，我们只处理从 τ 到 ∞的单个积分步骤，并假设初始数据已接近某个稳定稳态。不过，这个最后的积分步骤也可以

轻松地纳入第 4 节中引入的多个子域设置中。也就是说，我们可以在式 (27) 中取 $\tau_M = \infty$，并且只要令 $\bar{u}^{(M)}$ 与时间无关，就可以采用与第 4.1 节中相同的分段构造来构造$\mathcal{L}$，从而得到式 (30)–(31) 中定义的不动点算子 T^{prod}。

相应的 Y、Z 和 W 估计可按照第 4.2 节至第 4.4 节中的方法得到，只需对最后一个区域作出第 5.2 节所述的小幅修改。在这种情况下，第 5.3 节的所有结果仍然成立，因为如果定理 2.9 对 $M > 1$ 成立，那么我们特别有

$$Y^M + Z_M^M r^M + \frac{1}{2} W_{M,M}^M \left(r^M\right)^2 \leq r^M,$$
$$Z_M^M \eta^M + W_{M,M}^M r^M \eta^M < \eta^M,$$

也就是说，正如第 5.3 节中的假设，条件 (16)–(17) 对最后一个积分步骤本身成立。

6 应用

本节介绍本文所提出的验证过程的一些应用，并讨论所得结果。首先，在第 6.1 节中，我们考察斯威夫特–霍恩伯格方程，并重新研究一个已在 [47] 中验证过的特定轨道。我们表明，本文提出的方法显著降低了证明的成本。接着，在第 6.2 节中，我们考察 Ohta–Kawasaki 方程，并对一个经过某种亚稳态的解进行严格积分，直至 $t = +\infty$。最后，在第 6.3 节中，我们聚焦于 Kuramoto–Sivashinsky 方程，并在周期轨道附近进行严格积分。用于证明中计算机辅助部分的所有代码均可在 [43] 获取。

6.1 斯威夫特–霍恩伯格方程

我们首先考虑环面 $\mathbb{T}_L = \mathbb{R}/L$（大小为 $L > 0$）上的斯威夫特–霍恩伯格方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + 1\right)^2 u + \alpha u - u^3, & (t,x) \in (0,\tau] \times \mathbb{T}_L, \\ u(0,x) = u^{\mathrm{in}}(x), & x \in \mathbb{T}_L, \end{cases} \tag{47}$$

这是一个众所周知的、能够产生图案形成的抛物型偏微分方程。在 [47, 定理 1.5], 中，它已被用作一个示例，并在其中得到了以下结果。

定理 6.1。考虑带有 $\alpha = 5$、$L = 6\pi$、$\tau = 3/2$ 和$u^{\mathrm{in}}(x) = 0.4\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) - 0.3\cos\left(\frac{4\pi x}{L}\right)$ 的斯威夫特–霍恩伯格方程 (47)。设 $\bar{u} = \bar{u}(t, x)$ 为图 2 中表示的函数，其关于傅里叶–切比雪夫系数的精确描述可从 *[46]* 下载。于是，存在一个光滑解 u 满足 (47)，使得

$$\sup_{t\in[0,\tau]} \sup_{x\in\mathbb{T}_L} |u(t,x) - \bar{u}(t,x)| \leq 4 \times 10^{-8}.$$

我们首先证明，正如引言中所述，本文提出的方法比 [47], 中的方法高效得多：去除近似逆使证明成本大幅降低，同时还能提供相当的误差估计。事实上，保持与 [47] 中完全相同的近似解 $\bar{u}$（包含 $N_u = 30$ 个傅里叶模态、$M = 100$ 个子域，并在每个子域上使用时间阶数为 $K = 5$ 的多项式），但采用第 4 节中的估计，我们得到以下结果。

定理 6.2。考虑斯威夫特–霍恩伯格方程 (47)，其中 $\alpha = 5$、$L = 6\pi$、$\tau = 3/2$ 和$u^{\mathrm{in}}(x) = 0.4$余弦 $\left(\frac{2\pi x}{L}\right) - 0.3$余弦 $\left(\frac{4\pi x}{L}\right)$，如定理 *6.1*所示；再次令 $\bar{u} = \bar{u}(t,x)$ 为图 2 所示的函数，其关于傅里叶–切比雪夫系数的精确描述可从 *[46]* 下载。那么，存在斯威夫特–霍恩伯格方程 (47) 的一个光滑解 u，使得

$$\sup_{t\in[0,\tau]} \sup_{x\in\mathbb{T}_L} |u(t,x) - \bar{u}(t,x)| \leq 2 \times 10^{-9}.$$

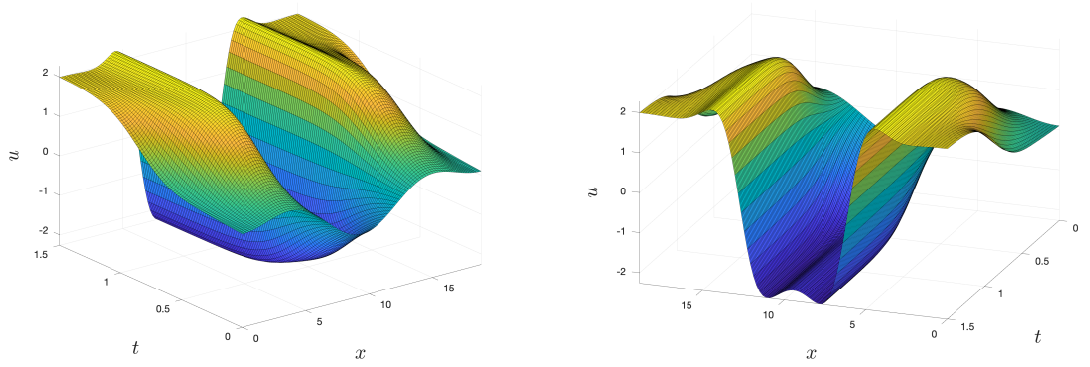

图 2：经过定理 6.1 验证的斯威夫特–霍恩伯格方程 (47) 的近似解 $\bar{u}$ ，以不同视角展示了两次。

尽管定理 6.1 和定理 6.2 的陈述完全相同，只有误差界略有不同，但两者的关键区别在于各自的证明（运行 [43]中的 `runproofs.m` 即可重现定理 6.2 的证明）。实际上，定理 6.1 的证明基于 [47], 中的设置，并且需要计算一个大小约为 $N_u MK \times N_u MK$ 的矩阵作为近似逆。另一方面，在定理 6.2 的证明过程中所需的较大对象仅仅是大小约为 $N_u MK$的向量（用于表示 $\bar{u}$、$\gamma(\bar{u})$ 等），以及 $2M$个大小约为 $N_{\mathcal{L}} \times N_{\mathcal{L}}$的矩阵（分段定义 $\mathcal{L}$中涉及的矩阵$Q^{(m)}$ 和 $\left(Q^{(m)}\right)^{-1}$ ）。这里我们采用了 $N_{\mathcal{L}} = 30$，因为 [47] 中就是这样做的；为了简单起见，我们始终取 $N_u = N_{\mathcal{L}}$，但实际上 $N_{\mathcal{L}}$ 可以取更小的值，而不会对证明产生太大影响。为了说明效率上的差异，使用本文设置的证明速度大约快 25 倍，内存用量减少 50 倍，所需 CPU 数量减少 5 倍（当然，这取决于硬件架构）。

还应注意，去掉近似逆不仅使证明成本大幅降低，实际上也得到了更小的误差界，因为与 [47] 相比，本文提出的框架能够给出更精确的估计。此外，为了进行公平比较，我们在这里选择完全沿用 [47] 中相同的子域和其他计算参数；但若采用第 4.5 节所述策略，自适应地为每个子域选择不同的子域和参数，证明还会更加高效。对于其余示例，我们确实采用了这些策略；而这些示例远非 [47] 中的方法所能处理。

6.2 Ohta–Kawasaki 方程

现在我们简要回到定理 1.2 中介绍的 Ohta-Kawasaki 方程示例，它具有若干值得注意的特点。特别是，如图 1 所示，存在一段亚稳态区间，在此期间解几乎没有变化，之后最终收敛到一个显著不同的状态。这种亚稳态行为并不出乎意料（例如参见 [12, 16, 29, 52]），但从数值（以及严格）积分的角度来看，它带来了挑战。特别是，如果在 $t = 10$ 左右就停止数值模拟，人们可能会以为该解已收敛到某个稳定平衡态，尽管事实完全并非如此。如果图 1 仅仅是一次数值模拟，人们可能会怀疑之后是否还会再次出现类似现象，即该解是否真的已收敛到稳定平衡态。然而，定理 1.2 证明了解确实收敛到一个稳态，该稳态与 $u(\tau, \cdot)$非常接近，这得益于第 5 节中的分析。

我们注意到，偏微分方程问题 (5) 采用诺伊曼边界条件。因此，我们将区域大小加倍，并在扩展区域上的偶周期函数空间中进行研究。图1和定理 1.2 中的解由周期为 4π 的余弦级数描述

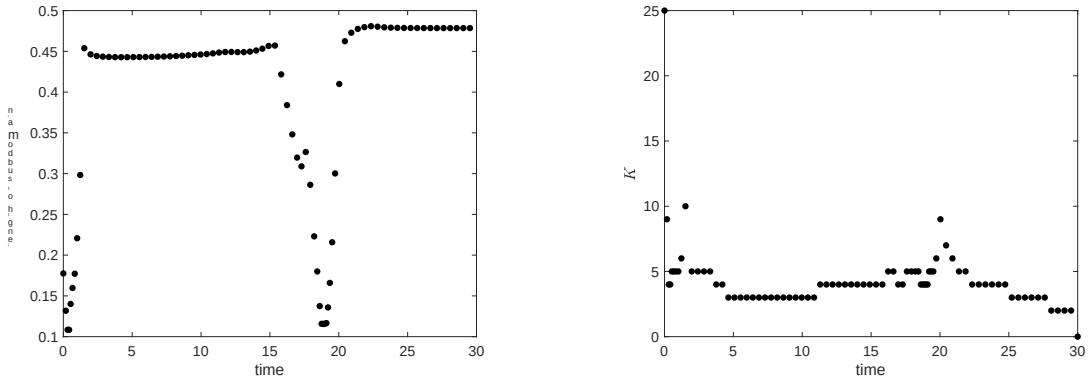

图3：用于证明定理 1.2 的一些重要计算参数示意图。左侧显示了每个子域的长度 $\tau_{m+1} - \tau_m$（最后一个子域的长度为无穷，因此未显示），右侧显示了每个子域上近似解所使用的切比雪夫阶数 $K^{(m)}$ 。

的空间中。如备注 3.5 所述，无穷远积分的证明部分依赖于这种偶对称性。将定义域限制在 $x \in [0, 2\pi]$ 后，此解便满足诺伊曼边界条件。偶4π周期函数类中极限平衡态的稳定性结论，也适用于 $[0, 2\pi]$ 上的诺伊曼问题的稳定性。图1中很容易看出的附加对称性 $u(t,\ x) = u(t,\ 2\pi - x)$，在证明中既未施加，也未使用。不过，由于初始数据满足这种附加对称性，因此它在演化过程中得以保持。

为了证明定理 1.2，我们采用了图3所示的包含 $M = 80$ 个子域的非均匀划分，该划分按照第 4.5 节中所述的过程获得。近似解 $\bar{u}$ 具有 $N_u = 60$ 个傅里叶模态，但时间方向上的多项式阶数 $K^{(m)}$ 取决于子域，如图3所示。图3展示了我们的自适应子域算法能够按预期运行。特别是，当解的变化不是很快时，算法会自动利用这一点，选择更长的时间步长。一旦子域确定，图3中选取并显示的 $K^{(m)}$ 值都接近于使每个 $Y_{(m)}$ 低于给定容差所需的最小值（此处为 10^{-8}，其中 $Y^{(m)}$ 是以非严格方式计算的，即未使用区间算术）。例如，可以注意到，算法检测到我们应当为 $K^{(1)}$ 选择一个相对较大的值。

6.3 Kuramoto–Sivashinsky 方程

最后，我们考虑环面 $\mathbb{T}_L = \mathbb{R}/L$上的 Kuramoto–Sivashinsky 方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x}u^2, & (t,x) \in (0,\tau] \times \mathbb{T}_L, \\ u(0,x) = u^{\mathrm{in}}(x), & x \in \mathbb{T}_L, \end{cases} \tag{48}$$

对于我们的特定严格积分，初始数据 u^{in} 取为奇函数，这一对称性在偏微分方程的演化下得以保持。与前面的例子相比，该方程包含涉及空间导数的非线性项，不对应于梯度流，并且是一个众所周知的例子，说明抛物型偏微分方程能够产生混沌动力学（已在 [53, 54]中得到严格证明）。下一个定理中出现数字 α 的原因将在下文显现。

定理 6.3。令 $\alpha = 0.127$，并考虑 *Kuramoto–Sivashinsky* 方程 (48)，其中 $L = 2\pi\sqrt{\alpha}$, $\tau = 2.245/\alpha$。令 $\bar{u} = \overline{\bar{u}}(t,x)$ 为图 *4* 所示的函数，其关于切比雪夫×傅里叶系数的精确定义可在 *[43],* 下载，并附有相应的

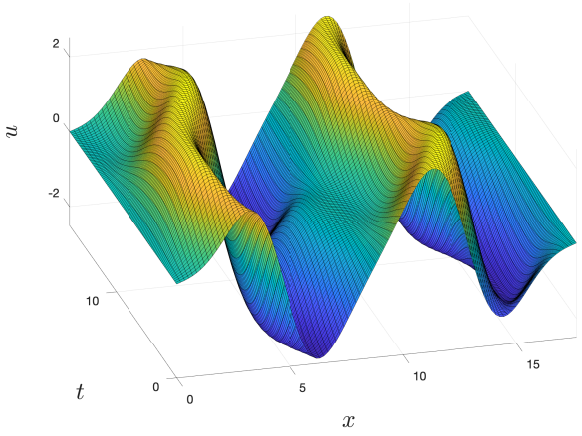

图 4：定理 6.3 中验证的 Kuramoto–Sivashinsky 方程 (48) 的近似解 $\bar{u}$ 。

初始数据 u^{in} 也可在 *[43]*获取。于是，存在 (48) 的一个光滑解 u ，使得

$$\sup_{t\in[0,\tau]}\ \sup_{x\in\mathbb{T}_L} |u(t,x)-\bar{u}(t,x)| \le 1\times 10^{-6}.$$

定理 6.3 中验证的轨道似乎非常接近 Kuramoto–Sivashinsky 方程的一个稳定时间周期解。我们没有尝试用严格积分器证明这个邻近周期轨道的存在性（这需要进行边值问题设置，超出了本工作的范围，但与我们计划在正在进行的工作中研究连接轨道的工作相近）。不过，我们注意到已有若干计算机辅助研究能够直接研究 Kuramoto–Sivashinsky 方程的周期轨道 $[60,\ 23,\ 22]$。特别是，经过重新缩放后

$$u=-2\sqrt{\alpha}v,\quad t=\frac{1}{\alpha}s,\quad x=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}y,$$

Kuramoto-Sivashinsky 方程 (48) 变为

$$\frac{\partial v}{\partial s}=-\alpha\frac{\partial^4 v}{\partial y^4}-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+2v\frac{\partial v}{\partial y},\quad (t,x)\in(0,\alpha\tau]\times\mathbb{T}_{2\pi},$$

而定理 6.3 中得到的轨道接近 $[59]$ 中最早获得的真正时间周期轨道之一。

致谢

MB 由 ANR 项目 CAPPS：ANR-23-CE40-0004-01 资助。

参考文献

[1] G. Arioli、F. Gazzola 和 H. Koch。在 Navier 边界条件下平面稳态 Navier–Stokes 方程的唯一性与分岔分支。数学流体力学杂志，23(3):1–20，2021。

[2] G. Arioli 和 H. Koch. 耗散型偏微分方程的积分：一个案例研究。*SIAM* 应用动力系统杂志，9(3):1119–1133，2010。

[3] G. Arioli 和 H. Koch. FitzHugh-Nagumo 方程行波脉冲解的存在性与稳定性。非线性分析，113:51–70，2015.[4] M. Breden 和 H. Chu. 在 $H^2(e^{|x|^2/4}, \mathbb{R}^d)$ 上若干半线性偏微分方程的构造性证明。《数值数学》，第 1–47 页，2025。[5] B. Breuer、J. Horák、P. McKenna 和 M. Plum. 非线性支撑梁中行波的存在性与多重性计算机辅助证明。微分方程杂志，224(1):60–97，2006。[6] T. Buckmaster、G. Cao-Labora 和 J. Gómez-Serrano. 三维可压缩流体的光滑内爆解。数学论坛：*Pi*，13:e6，2025。[7] M. Cadiot. Whitham方程和毛细-重力Whitham方程中孤立波存在性与稳定性的构造性证明。非线性，38(3):035021，2025。[8] M. Cadiot 和 J.-P. Lessard. 通过完全谱傅里叶-切比雪夫展开严格积分抛物型偏微分方程的最新进展。*arXiv* 预印本 *arXiv:2502.20644*，2025。[9] M. Cadiot、J.-P. Lessard 和 J.-C. Nave. 通过谱方法严格计算无界区域上半线性偏微分方程的解。*SIAM*应用动力系统杂志，23(3):1966–2017，2024。[10] R. Castelli、M. Gameiro 和 J.-P. Lessard. 病态偏微分方程的严格数值计算：Boussinesq方程的周期轨道。理性力学与分析档案，228(1):129–157，2018。[11] J. Chen 和 T. Y. Hou. 光滑初值下二维 Boussinesq 方程和三维欧拉方程稳定的近自相似爆破解：II. 严格数值计算。多尺度建模与仿真，23(1):25–130，2025。[12] R. Choksi、M. Maras 和 J. F. Williams. 具有长程相互作用的Cahn-Hilliard泛函极小元的二维相图。*SIAM* 应用动力系统杂志，10(4):1344–1362，2011。[13] J. Cyranka. 严格向前积分离散偏微分方程的高效通用算法：第一部分。科学计算杂志，59:28–52，2014。[14] J. Cyranka. 恒定外力作用下黏性Burgers方程全局吸引不动点的存在性：计算机辅助证明。非线性分析中的拓扑方法，45(2):655–697，2015。[15] J. Cyranka 和 J.-P. Lessard. 通过切比雪夫级数实现的抛物型偏微分方程验证向前积分格式。非线性科学与数值模拟通讯，109:106304，2022。[16] J. Cyranka 和 T. Wanner. 一维 Ohta–Kawasaki模型中异宿连接的计算机辅助证明。*SIAM*应用动力系统杂志，17(1):694–731，2018。[17] J. Cyranka 和 P. Zgliczynski. 非自治外力作用下的一维黏性Burgers方程全局吸引解的存在性——计算机辅助证明。*SIAM*应用动力系统杂志，14(2):787–821，2015。[18] J. Dahne 和 J.-L. Figueras. 非线性薛定谔方程和复Ginzburg–Landau方程的自相似奇异解。*arXiv* 预印本 *arXiv:2410.05480*，2024。[19] R. Donninger 和 B. Schörkhuber. 三次薛定谔方程的自相似爆破。*arXiv* 预印本 *arXiv:2406.16597*，2024。[20] G. W. Duchesne、J.-P. Lessard 和 A. Takayasu. 通过半群理论构造高维半线性抛物型偏微分方程的严格积分器并证明其整体存在性。科学计算杂志，102(3):62，2025。

[21] A. Enciso、J. Gómez-Serrano 和 B. Vergara。Whitham最高尖点波的凸性。*arXiv*预印本 *arXiv:1810.10935*，2018。[22] J.-L. Figueras 和 R. de la Llave。Kuramoto–Sivashinsky 方程周期轨道的数值计算与计算机辅助证明。*SIAM* 应用动力系统杂志，16(2):834–852，2017。[23] M. Gameiro 和 J.-P. Lessard。演化方程不变对象的后验验证：Kuramoto–Sivashinsky偏微分方程的周期轨道。*SIAM* 应用动力系统杂志，16(1):687–728，2017。[24] J. Gómez-Serrano。偏微分方程中的计算机辅助证明：综述。*SeMA Journal*，76(3):459–484，2019。[25] K. Hashimoto、T. Kimura、T. Minamoto 和 M. T. Nakao。热方程全离散有限元方法的构造性误差分析。《日本工业与应用数学杂志》，36(3):777–790，2019。[26] K. Hashimoto、T. Kinoshita 和 M. T. Nakao。非线性抛物型问题解的数值验证。《数值泛函分析与优化》，41(12):1495–1514，2020。[27] T. Hou、Y. Wang 和 C. Yang。无外力不可压缩三维Navier–Stokes方程的Leray–Hopf解非唯一性。*arXiv*预印本 *arXiv:2509.25116*，2025。[28] J. Jaquette、J.-P. Lessard 和 A. Takayasu。非守恒非线性Schrödinger方程中的全局动力学。《数学进展》，398:108234，2022。[29] I. Johnson、E. Sander 和 T. Wanner。一维二嵌段共聚物模型的分支相互作用与长期动力学。《离散连续动力系统》，33(8):3671–3705，2013。[30] T. Kapela、M. Mrozek、D. Wilczak 和 P. Zgliczyński。CAPD:: DynSys：用于动力系统严格数值分析的灵活C++工具箱。非线性科学与数值模拟通讯，101:105578，2021。[31] T. Kato。线性算子扰动理论，第132卷。Springer Science & Business Media，2013。[32] X. Liu、M. T. Nakao 和 S. Oishi。三维区域上Navier–Stokes方程稳态解存在性的计算机辅助证明。非线性科学与数值模拟通讯，108:106223，2022。[33] M. T. Nakao。椭圆型问题解存在性证明的数值方法。《日本应用数学杂志》，5(2):313，1988。[34] M. T. Nakao。通过结果验证求解非线性抛物型问题。第一部分：一维空间情形。《计算与应用数学杂志》，38(1-3):323–334，1991。[35] M. T. Nakao、M. Plum 和 Y. Watanabe。偏微分方程数值验证方法与计算机辅助证明，施普林格计算数学系列第53卷。新加坡施普林格，2019。[36] T. Ohta 和 K. Kawasaki。嵌段共聚物熔体的平衡形态。《大分子》，19(10):2621–2632，1986。[37] M. Plum。二阶椭圆边值问题解的显式 H^2估计与逐点界。《数学分析与应用杂志》，165(1):36–61，1992。[38] C. Reinhardt 和 J. Mireles James。抛物型偏微分方程不稳定流形的Fourier–Taylor参数化：形式体系、实现与严格验证。《数学研究》，30(1):39–80，2019。

[39] S. M. Rump。INTLAB——区间实验室。《可靠计算的发展》，克鲁维尔学术出版社，多德雷赫特，第77–104页，1999。[40] A. Takayasu、J.-P. Lessard、J. Jaquette 和 H. Okamoto。时间复平面中非线性热方程的严格数值计算。《数值数学》，第1–58页，2022。[41] A. Takayasu、M. Mizuguchi、T. Kubo 和 S. Oishi。半线性热方程解的验证计算精确方法。《可靠计算》，25:75，2017。[42] L. N. Trefethen。逼近理论与逼近实践，第128卷。SIAM，2013。[43] J. B. van den Berg 和 M. Breden。与论文“一种用于半线性抛物型偏微分方程的简单严格积分器”相关的Matlab代码。 https://github.com/jan-bouwe/PDE-IVP，2025。[44] J. B. van den Berg、M. Breden、J.-P. Lessard 和 M. Murray。悬索桥方程中同宿轨道的延拓：一项计算机辅助证明。《微分方程杂志》，264(5):3086–3130，2018。[45] J. B. van den Berg、M. Breden、J.-P. Lessard 和 L. van Veen。纳维–斯托克斯流中的自发周期轨道。《非线性科学杂志》，31(2):1–64，2021。[46] J. B. van den Berg、M. Breden 和 R. Sheombarsing。与论文“半线性抛物型偏微分方程的验证积分”相关的Matlab代码。 https://github.com/MaximeBreden/validated-PDE-integrator，2023。[47] J. B. van den Berg、M. Breden 和 R. Sheombarsing。半线性抛物型偏微分方程的验证积分。《数值数学》，第1–69页，2024。[48] J. B. van den Berg、J. Jaquette 和 J. Mireles James。抛物型偏微分方程稳定流形的验证数值逼近。《动力系统与微分方程杂志》，第1–61页，2022。[49] J. B. van den Berg 和 J.-P. Lessard。动力系统中的严格数值计算。《美国数学会通讯》，62(9)，2015。[50] J. B. van den Berg 和 R. Sheombarsing。多项式向量场中连接轨道的验证计算。《数学研究》，31(2):310–373，2020。[51] J. B. van den Berg 和 J. F. Williams。三维中Ohta–Kawasaki问题对称稳态的严格计算。《SIAM数学分析杂志》，51(1):131–158，2019。[52] T. Wanner。二嵌段共聚物方程的拓扑分析。载于《材料科学新阶段的数学挑战》，《施普林格数学与统计学论文集》第166卷，第27–51页。Springer， [东京], 2016。[53] D. Wilczak 和 P. Zgliczyński。无限维混沌的几何方法：直线上的Kuramoto–Sivashinsky偏微分方程的符号动力学。《微分方程杂志》，269(10):8509–8548，2020。[54] D. Wilczak 和 P. Zgliczyński。直线上的Kuramoto–Sivashinsky偏微分方程符号动力学（II）。arXiv预印本 arXiv:2405.17087，2024。[55] D. Wilczak 和 P. Zgliczyński。耗散型偏微分方程的自洽界方法。arXiv预印本 arXiv:2502.09760，2025。[56] J. Wunderlich。带障碍物的无界条带上Navier–Stokes方程的计算机辅助存在性证明。博士论文，学位论文，卡尔斯鲁厄，卡尔斯鲁厄理工学院（KIT），2022，2022。[57] P. Zgliczynski。Kuramoto–Sivashinsky方程的吸引不动点：一项计算机辅助证明。SIAM应用动力系统杂志，1(2):215–235，2002。

[58] P. Zgliczynski。 C^1 Lohner 算法。计算数学基础，2:429–465，2002。[59] P. Zgliczynski。耗散型偏微分方程的严格数值计算 II：Kuramoto–Sivashinsky偏微分方程的周期轨道——一项计算机辅助证明。《计算数学基础》，4(2):157–185，2004。[60] P. Zgliczyński。耗散型偏微分方程的严格数值计算 III：耗散型偏微分方程严格积分的有效算法。非线性分析中的拓扑方法，第197–262页，2010。[61] P. Zgliczynski 和 K. Mischaikow。偏微分方程的严格数值计算：Kuramoto–Sivashinsky 方程。计算数学基础，1(3):255–288，2001。