arXiv:2601.05153v1 [math.MG] 8 Jan 2026

分数阶 L^p 极投影体的幂律渐近

TRÍ MINH LÊ

摘要。 s–分数阶 L^p 极投影体的概念由 Haddad 和 Ludwig 最近提出（《数学年刊》388:1091–1115，2024年），为分数阶 Sobolev 理论与凸几何搭建了桥梁。本文研究其闵可夫斯基函数在两种自然渐近情形下的极限：

(a) 先令 $p \to \infty$ 趋于极限，再令 $s \to 1^-$趋于极限；
(b) 先令 $s \to 1^-$ 趋于极限，再令 $p \to \infty$趋于极限。

我们的主要结果表明，这两种极限过程可以交换。由此，我们推导出相关体积和对偶混合体积的精确渐近行为，从而将（分数阶）L^p 极投影体与新近引入的（分数阶） L^∞ 极投影体联系起来。这些结果还带来了新的几何不等式，包括端点利普希茨/赫尔德型等周不等式，以及 L^∞ 情形下波利亚–塞格ő不等式的变体。

关键词。 星体，分数阶 Sobolev 空间，对偶混合体积，波利亚–塞格ő不等式。

美国数学学会数学主题分类 主要分类46E35, 52A40次要分类35R11,26D10

1 引言

固定 $p \in [1, +\infty)$ 和 $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$。 L^p 极体投影体 $\Pi_p^* f$是一个星体，其规范函数由下式确定：

$$\|\xi\|^p_{\Pi_p^* f} := \int_{\mathbb{R}^n} |\langle \nabla f(x), \xi\rangle|^p \, dx \quad \text{for every } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

这些星体已被用于将仿射 Sobolev 不等式转化为几何不等式，这也为等号情形提供了更自然的理解。因此，它们体现了仿射 Sobolev 不等式背后的几何本质，参见例如 [18, 25, 30, 32]。受这种几何联系的启发，Haddad 和 Ludwig 最近在 [19, 20]中引入了 s–分数阶 L^p 极投影体 $\Pi^*_{,p}{}^s f$，其中 $s \in (0,1)$，其规范函数定义如下：

$$\|\xi\|^{sp}_{\Pi_p^{*,s} f} := p(1-s) \int_0^\infty t^{-sp-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+t\xi) - f(x)|^p \, dx \, dt \quad \text{for every } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

这个星体在将函数不等式转化到几何框架中发挥着根本作用，因为它使仿射分数阶 L^p Sobolev 不等式能够等价地表述为几何不等式。他们还证明，在 Minkowski 函数层面， $\Pi^*_{,p}{}^s f$ 当 $s \to 1^-$ 时的极限恰为$\Pi_p^* f$，由此建立了分数阶 L^p 极投影体与其经典

L^p 对应物之间的联系。一个重要动机来自 Bourgain–Brezis–Mironescu公式 [5], , 它将 Gagliardo 半范数与梯度的 L^p 范数联系起来：

$$\lim_{s\to 1^-} p(1-s)\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}}\,dx\,dy=\alpha_{n,p}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla f(x)|^p dx \quad \text{for every } f\in W^{1,p}(\mathbb{R}^n),$$

其中常数 $\alpha_{n,\ p}$ 通过以下方式确定：

$$\alpha_{n,p}=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|\langle\xi,\eta\rangle|^p\,d\xi,\ \text{for every } \eta\in\mathbb{S}^{n-1}.$$

超出这一渐近范围后，Gagliardo 半范数的极限（在适当的缩放下） $s\to 0^+$ 、非对称/各向异性 аналог物，以及在 Γ–收敛框架下的类似观察也已被发现，见 [1, 14, 21, 26, 27]。

研究 L^p 空间中泛函和方程在 $p\to\infty$ 下的极限，是变分法和偏微分方程中普遍存在的问题；在极限情形下，它往往揭示出极值结构和退化方程（无穷拉普拉斯方程），例如见 [2, 31]。在分数阶情形下，已有证明表明，分数阶 p–拉普拉斯方程的解收敛于所谓的赫尔德无穷拉普拉斯方程的解，见 [12]。

此外，极限的可交换性是分析学中的一个经典且重要的问题，例如 Moore–Osgood 定理。过去二十年间，这类现象也在均匀化理论中引起了广泛关注；在该理论中，人们常研究两个极限过程之间的相互作用——小尺度参数与 p 在 L^p–之间的相互作用——以便通过 Γ–收敛捕捉局部/非局部积分泛函的正确渐近行为，例如见 [4, 7, 11, 15, 17]。例如，人们常考虑如下形式的变分能量（在 Ω 和 H满足适当假设的条件下）：

$$f\mapsto\int_\Omega H(x/\varepsilon,\nabla f(x))^p\,dx$$

并观察极限 $\varepsilon\to 0$ 和 $p\to\infty$ 是否可交换。类似现象近来已在最优传输的背景下得到研究，参见 [8]。

鉴于这些例子，自然会问，在 s–分数 L^p 极投影体的框架下，是否也会出现类似的两个参数极限交换现象。若固定 f 于 $W^{1,\ 1}(\mathbb{R}^n)\cap W^{1,\ \infty}(\mathbb{R}^n)$，不难看出， ∇f 的 L^p 范数收敛于 ∇f的 L^∞ 范数。这一简单观察结合 Haddad–Ludwig 的结果表明，先令 $s\to 1^-$取极限、再令 $\Pi^{*,\ s}_{p}f$时取 $p\to\infty$ 的过程，单独来看已相当清楚；然而，两者结合后的行为尚未得到充分研究。正如我们所说，这类 ″双重极限″ 问题往往会产生微妙的相互作用——一般而言，交换极限的顺序可能会导致不同的结果。这引出了本文的核心问题：

Can the limit process of $\Pi^{*,s}_p f$ as $s\to 1^-$ and $p\to\infty$ be interchanged?
What are the respective limits?

解决这一双重极限问题不仅仅是技术上的改进。参数 s 与 p 之间的相互作用揭示了分数阶 L^p 极性投影体的结构刚性，确保理论能够连贯地推广到 L^∞ 情形。从这个意义上说，证明

两个极限过程的可交换性是一项必要的进展：它完善了渐近图景，并为各向异性 L^∞ 情形中的几何不等式奠定了基础。

主要贡献。

我们的第一项贡献研究了图 1 中的极限 (2)、(3) 和 (4)，补充了 [19, 20]的结果；该结果确立了图 1 和图 2 中的极限 (1)。

对于固定函数 $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$，关于 s–分数 L^p 极投影体$\Pi^*_p f$，我们的第一个主要结果表明，以下两种极限过程：

$$\text{“first } p \to \infty \text{ then } s \to 1^- \text{”} \qquad \text{and} \qquad \text{“first } s \to 1^- \text{ then } p \to \infty \text{”}$$

在闵可夫斯基函数的层面上求值时可交换。这一相容性结果将分数 L^p 极投影体 $\Pi^*_p f$（以及它们的 L^p 对应体 $\Pi^*_p f$）与新引入的 L^∞ 变体 $\Pi^*_\infty f$（以及 $\Pi^*_\infty f$）联系起来，见定义 3.1 和 3.4。

以下条件之一成立：

(a) $q > n$和 K 是星体；

(b) $q \in (-\infty, n) \setminus \{0\}$ 且 K 是一个有界星体。

在这些假设下，体积 $|\Pi^*_p f|$ 和对偶混合体积$\widetilde{\mathrm{V}}_q(K, \Pi^*_p f)$（见定义 (2.2)）的完整渐近图景总结于图 1 中，其中箭头表示极限的次序。严格的陈述见定理 4.1–4.2。

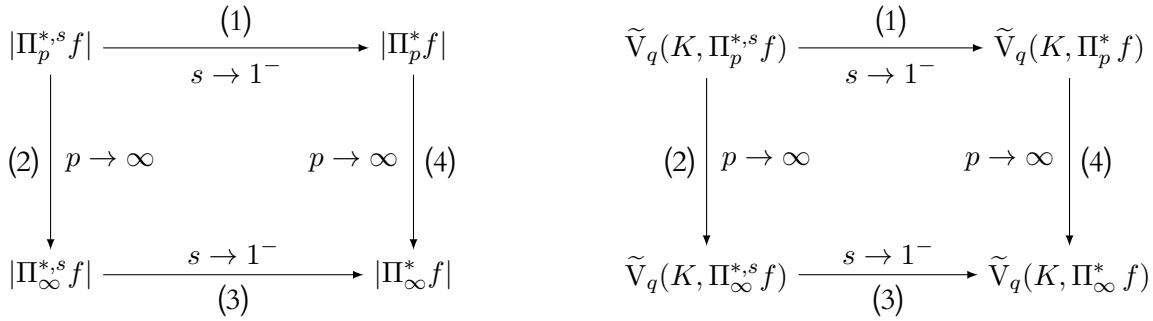


图 1：与 $\Pi^*_p f$相关的体积/对偶混合体积幂律极限图

对于任意有界星体 K，我们的第二个主要结果描述了其渐近行为

$$\widetilde{V}_{-sp}(K, \Pi^{*,s}_p f)^{1/p}$$

为此，我们引入 s–缩放膨胀因子 $\mathrm{d}_s(K, L)$ 的概念（见定义 4.3）。图 2 展示了 $\widetilde{V}_{-sp}(K, \Pi^*_p f)^{1/p}$ 的完整渐近行为，详情参见定理 4.4。我们进一步将渐近分析扩展到 s–分数阶 L^p 极投影体的非对称变体，并由此建立了相应的几何不等式，见第 5 节。

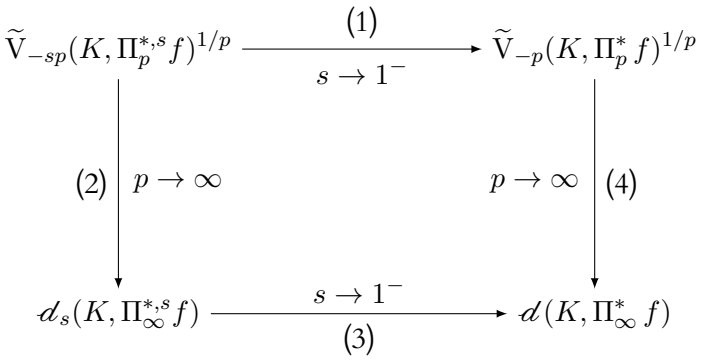


图 2： $\widetilde{\mathrm{V}}_{-sp}(K,\ \Pi^{*,}{}_p{}^s f)^{1/p}$ 的幂律极限图。

本文其余部分安排如下。第2节回顾星体和索伯列夫空间的基本知识。第 3 节介绍（对称） s–分数阶 L^∞ 极投影体，并确立它们与 L^p 对应对象之间的联系。第 4 节介绍关于体积和对偶混合体积渐近行为的主要结果，并证明两个极限过程的相容性。第 5 节将该理论扩展至非对称的 L^∞ 极投影体，并推导出 L^∞ 波利亚–塞格ő不等式的各向异性版本。

2 预备知识

本文中，我们用 $|\cdot|$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的欧几里得范数。对于可测集 $A\subset\mathbb{R}^n$，我们用 $|A|$ 表示其体积（即勒贝格测度）。对于每个 $x\in\mathbb{R}^n$ 和 $r>0$，我们用 $B_r(x)$ 表示以 x 为球心、半径为 r 的球。当 $x=0$ 且 $r=1$ 时，以原点为球心的单位球记为 $B^n:=B_1(0)$，其边界——单位球面——记为 $\mathbb{S}^{n-1}=\partial B^n$。接下来，我们将介绍一些关于星体和索伯列夫空间的基本事实。

星体、对偶混合体积与施瓦茨对称化。

我们回顾星体及凸几何中相关量的定义，更多细节见 [29] 。若集合 $K\subset\mathbb{R}^n$ 对每个 $x\in K$ 和 $\lambda\in[0,1]$ 均满足 $\lambda x\in K$，则称其关于原点星形。与这样的集合相对应的规范函数 $\|\cdot\|_K:\ \mathbb{R}^n\to[0,\infty]$ 定义为

$$\|x\|_K:=\inf\{\lambda>0:x\in\lambda K\},$$

以及径向函数 $\rho_K:\ \mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to[0,\infty]$ 定义为

$$\rho_K(x):=\sup\{\lambda>0:\lambda x\in K\}=\|x\|_K^{-1}.$$

使用这些记号， K 的体积可通过以下公式计算

$$|K|=\frac{1}{n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\|\xi\|_K^{-n}d\xi=\frac{1}{n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\rho_K(\xi)^n d\xi. \tag{2.1}$$

K 若星形集的径向函数在 $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 上严格为正且连续，则称其为 星体 。

设 K 和 L 为星体，并固定 $q \in \mathbb{R} \setminus \{0, n\}$。$K$ 和 L 的 对偶混合体积 定义为

$$\widetilde{\mathrm{V}}_q(K,L) = \frac{1}{n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \rho_K(\xi)^{n-q}\rho_L(\xi)^q d\xi = \frac{1}{n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \|\xi\|_K^{-n+q}\|\xi\|_L^{-q} d\xi. \tag{2.2}$$

~特别地，当 $K = L$ 时，我们得到体积 $\mathrm{V}_q(K,\ K) = |K|$. 对偶混合体积理论是作为凸几何中经典内在体积的对偶理论发展起来的，参见 [22, 23, 24]。设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个可测集。E 的施瓦茨对称化体记为 $E^\star$，它是与 E 具有相同体积的中心欧几里得球。回忆一下，对于 $\mathbb{R}^n$ 上的任意非负可测函数 f，可以通过层蛋糕公式恢复其值

$$f(x) = \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{f \geq t\}}(x)\, dt, \quad \text{for almost every } x \in \mathbb{R}^n.$$

对于这样的函数 f，其 施瓦茨对称化体 $f^\star$ 由公式确定

$$f^\star(x) := \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{f \geq t\}^\star}(x)\, dt.$$

关于 $f^\star$ 的更多详细信息，请参见 [10] 。

索伯列夫空间。

设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是一个博雷尔可测集。对于 $1 \leq p < \infty$，我们用 $L^p(A)$ 表示可测函数 f 的空间：$A \to \mathbb{R}$，其范数由下式给出

$$\|f\|_{L^p(A)} := \left(\int_A |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} < \infty,$$

并用 $L^\infty(A)$ 表示具有有限本性上确界的可测函数空间，其范数为

$$\|f\|_{L^\infty(A)} := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in A} |f(x)|.$$

我们将索伯列夫空间记为

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) := \{f \in L^p(\mathbb{R}^n) :\ |\nabla f| \in L^p(\mathbb{R}^n)\}, \quad \text{for any fixed } p \in [1,\infty]. \tag{2.3}$$

Fu此外，当 $p \in [1,\infty)$ 且 $s \in (0,\ 1)$ 时，分数阶索伯列夫空间定义为 as

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}^n) :\ [f]_{s,p}^p := \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\, dx\, dy < +\infty \right\},$$

而对于 $p = \infty$，我们定义

$$W^{s,\infty} := \left\{ f \in L^\infty(\mathbb{R}^n) :\ f \text{ is } s\text{–Hölder continuous} \right\}.$$

请务必牢记以下包含关系：

$$W^{1,1}(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n) \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset W^{s,p}(\mathbb{R}^n), \quad \text{for every } s \in (0,1) \text{ and } p \geq 1, \tag{2.4}$$

例如，第二个结论可参见 [28,命题 2.2]。此外，由莫雷嵌入可得，

$$W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset W^{s,\infty}(\mathbb{R}^n), \quad \text{for every } s \in (0,1), \tag{2.5}$$

其中，$\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$中的利普希茨函数空间。

3 种（s–分数阶） L^∞ 极投影体

本节介绍（s-分数阶） L^∞ 极投影体的变体，它们在理解其 L^p 对应物的极限时发挥着核心作用。我们分析它们的基本结构性质，并证明相关规范函数在 $s \to 1^-$ 和 $p \to \infty$时的收敛性，这些结果将作为后文渐近分析的基础工具。

定义 3.1 （s–分数阶 L^p 极投影体）。 固定 $p \in [1, \infty)$ 以及 $s \in (0, 1)$。

- 对于任意 $f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$，其 s–分数阶 L^p 极投影体 $\Pi^{*,s}_p f$ 是一个通过规范函数定义的星体

$$\|\xi\|^{ps}_{\Pi^{*,s}_p f} = p(1-s)\int_0^\infty t^{-ps-1}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+t\xi) - f(x)|^p \, dx\, dt, \quad \text{对于每个 } \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.1}$$

- 对于任意 $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$，其 L^p 对偶投影体 $\Pi^*_p f$ 是通过规范函数定义的星体 n

$$\|\xi\|^p_{\Pi^*_p f} = \int_{\mathbb{R}^n} |\langle \nabla f(x), \xi\rangle|^p dx. \tag{3.2}$$

注 3.2。 Gagliardo 半范数和 Sobolev 范数的各向异性版本，是在其定义中分别用凸体 K 的规范函数 $\|\cdot\|_K$ 替代欧几里得范数 $|\cdot|$ 而得到的，参见例如 [21]。此外，相应的 Gagliardo 半范数可以用对偶混合体积表示（参见 [19,第 1098]页）：

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{\|x-y\|_K^{n+ps}}\, dx\, dy = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \rho_K(\xi)^{n+ps}\, \rho_{\Pi^{*,s}_p f}(\xi)^{-ps}\, d\xi = \frac{n}{p(1-s)}\, \widetilde{V}_{-ps}(K, \Pi^{*,s}_p f),$$

其中 K 是一个星体。

注 3.3。 为方便记号起见，我们将因子 $p(1-s)$ 纳入凸体 Π^*的规范函数定义中，$_p{}^s f$。这一选择使公式更加简洁；否则，当 $s \to 1^-$ 时，极限表达式会变得更加繁琐。根据 [19, 定理 9] 和 [20, 定理 3], 可知，对于任意 $p \in [1, \infty)$，

$$\lim_{s\to 1^-} \|\xi\|_{\Pi^{*,s}_p f} = \|\xi\|_{\Pi^*_p f} \quad \text{and} \quad \lim_{s\to 1^-} |\Pi^{*,s}_p f| = |\Pi^*_p f|.$$

设 K $q > n$ $\xi \mapsto$ 为一个星体，且原点位于其内 $\|\xi\|_K^{-n+q}$ $\mathbb{S}^{n-1}$ 部。注意，对于任意 ，映射 在 中有界。因此，我们有

$$\lim_{s\to 1^-} \widetilde{V}_q\big(K, \Pi^{*,s}_p f\big) = \widetilde{V}_q\big(K, \Pi^*_p f\big), \text{ for every } q > n,\ p \in [1, +\infty).$$

此外，若考虑 K 为有界星体，则上述极限对每个 $q \in (-\infty, n) \setminus \{0\}$ 以及 $p \in [1, +\infty)$ 都成立。

定义 3.4 （s–分数阶 L^∞ 极投影体）。 设 $s \in (0, 1)$。

- 对于任意函数 $f \in W^{s,\infty}(\mathbb{R}^n)$，其 s–分数阶 L^∞ 极投影体 $\Pi^{*,s}_\infty f$ 是一个通过规范函数定义的星形集

$$\|\xi\|^s_{\Pi^{*,s}_\infty f} = \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,+\infty)} \frac{1}{t^s}|f(x+t\xi) - f(x)|. \tag{3.3}$$

• 对于任意函数 $f \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$，其 L^∞ 极投影体 $\Pi^*_\infty f$ 是一个通过规范函数定义的星形集

$$\|\xi\|_{\Pi^*_\infty f} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} |\langle \nabla f(x), \xi\rangle|. \tag{3.4}$$

命题 3.5. 设 $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 均非零。以下断言成立：

(i) 对任意固定的 $s \in (0,1)$，存在足够大的 $c = c(s,f) > 0$ 和 $\bar{p} = \bar{p}(s,f) > 1$，使得 $\Pi^*_p f \subset cB^n$ 对每个 $p \geq \bar{p}$ 均成立。

(ii) 对任意固定的 $s \in (0,1)$，集合 $\Pi^*_\infty f$ 是关于原点对称的星体，且原点位于其内部。此外，存在 $c = c(f) > 0$ 和 $\bar{s} = \bar{s}(f) \in (0,1)$，使得 $\Pi^*_\infty f \subset cB^n$ 对每个 $s \in (\bar{s}, 1)$ 均成立。

(iii) 集合 $\Pi^*_\infty f$ 是有界的关于原点对称的凸体，且原点位于其内部。

证明。*(i)* 对于任意固定的 $\alpha \in (0,1)$，记

$$\mathcal{S}_\alpha := \left\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq \alpha \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\right\}.$$

断言 3.6。对于任意固定的 $\alpha \in (0,1)$，集合 $\mathcal{S}_\alpha$ 是有界的。

断言 *3.6* 的证明

令 $L := \mathrm{Lip}(f)$ 为 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lipschitz 常数，由于 $f \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 以及莫雷嵌入，该常数是有限的。固定 $\bar{x} \in S_\alpha$ 和 $\bar{r} = \dfrac{\alpha\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}}{2L}$。$f$ 的利普希茨连续性导致

$$|f(x)| \geq |f(\bar{x})| - L|x-\bar{x}| \geq \alpha\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} - L\bar{r} = \frac{\alpha}{2}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \text{ for every } x \in B_{\bar{r}}(\bar{x}).$$

因此，$B_{\bar{r}}(\bar{x}) \subset S_{\alpha/2}$。为证明 S_α 的有界性，我们采用反证法，假设存在一个序列 $\{x_k\} \subset S_\alpha$，满足当 $k \to \infty$ 时 $|x_k| \to \infty$。进一步可假设，对于每个 k，$k' \in \mathbb{N}$，$|x_k - x_{k'}| > 2\bar{r}$ 且 $B_{\bar{r}}(x_k) \cap B_{\bar{r}}(x_{k'}) = \varnothing$。根据上述观察，我们注意到，对于每个 k，$B_{\bar{r}}(x_k) \subset S_{\alpha/2}$。于是

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx \geq \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{B_{\bar{r}}(x_k)} |f(x)|dx \geq \frac{\alpha}{2}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \sum_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{|B_{\bar{r}}(x_k)|}_{=\bar{r}^n|B^n|} = \infty,$$

这与 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 的事实相矛盾。 ◊

我们继续证明（*i*）。根据断言 3.6，集合 $S_{1/4}$ 有界，因此存在 $r_o > 0$ 使得 $S_{3/4} \subset S_{1/4} \subset r_o B^n$。注意到 $0 < |S_{3/4}| < +\infty$，并且对于任意 $p \in [1, +\infty)$，我们有

$$\|f\|_{L^p(\mathcal{S}_{3/4})} \geq \frac{3}{4}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} |\mathcal{S}_{3/4}|^{1/p}.$$

固定 $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$。对于任意 $t > 2r_o$，集合 $r_o B^n$ 和 $S_{3/4} - t\xi$ 不相交，因此我们得到

$$\|f\|_{L^p(\mathcal{S}_{3/4}-t\xi)} \leq \frac{1}{4}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} |\mathcal{S}_{3/4} - t\xi|^{1/p} = \frac{1}{4}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} |\mathcal{S}_{3/4}|^{1/p}.$$

利用三角不等式，对于任意 $t > 2r_o$，我们有

$$\begin{aligned}\|f(\cdot+t\xi)-f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\geq \underbrace{\|f(\cdot+t\xi)-f\|_{L^p(\mathcal{S}_{3/4}-t\xi)}}_{=\|f-f(\,\cdot\,-t\xi)\|_{L^p(\mathcal{S}_{3/4})}} \\ &\geq \|f\|_{L^p(\mathcal{S}_{3/4})}-\|f(\cdot-t\xi)\|_{L^p(\mathcal{S}_{3/4})} \\ &\geq \frac{3}{4}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}|\mathcal{S}_{3/4}|^{1/p}-\frac{1}{4}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}|\mathcal{S}_{3/4}|^{1/p} \\ &= \frac{1}{2}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}|\mathcal{S}_{3/4}|^{1/p}>0.\end{aligned} \tag{3.5}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}\|\xi\|^{ps}_{\Pi^{*,s}_p f} &= p(1-s)\int_0^\infty t^{-ps-1}\|f(\cdot+t\xi)-f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,dt \\ &\geq p(1-s)\left(\frac{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}|\mathcal{S}_{3/4}|^{1/p}}{2}\right)^p\int_{2r_o}^\infty t^{-ps-1}dt \\ &= \frac{(1-s)(2r_o)^{-ps}}{s}\left(\frac{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}|\mathcal{S}_{3/4}|^{1/p}}{2}\right)^p,\end{aligned}$$

从而

$$\|\xi\|^{s}_{\Pi^{*,s}_p f} \geq \frac{1}{2}(2r_o)^{-s}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}|\mathcal{S}_{3/4}|^{1/p}\left(\frac{1-s}{s}\right)^{1/p}.$$

由于 $\lim_{p\to\infty}|\mathcal{S}_{3/4}|^{1/p}(s^{-1}-1)^{1/p}=1$，存在 $\bar{p}=\bar{p}(s,f)>1$ 和 $c=c(s,f)>0$，使得 $\|\xi\|_{\Pi^{*,}{}^s_p{}^s f}\geq c$ 对每个 $p\geq\bar{p}$ 均成立。因此，结论得证。

(ii) 注意到

$$\|-\xi\|_{\Pi^{*,s}_\infty f}=\sup_{(x,t)}\frac{1}{t^s}|f(x-t\xi)-f(x)|=\sup_{(\tilde{x},t)}\frac{1}{t^s}|f(\tilde{x})-f(\tilde{x}+t\xi)|=\|\xi\|_{\Pi^{*,s}_\infty f},$$

因此 $\Pi^{*,}{}^s_\infty f$ 关于原点对称。

我们来验证原点位于 $\Pi^{*,}{}^s_\infty f$ 的内部。显然，$\xi\mapsto\|\xi\|^s_{\Pi^{*,}{}^s_\infty f}$ 满足三角不等式。事实上，对每个 ξ，$\eta\in\mathbb{R}^n$，我们有

$$\begin{aligned}\|\xi+\eta\|^s_{\Pi^{*,s}_\infty f} &= \sup_{t>0}\frac{1}{t^s}\|f(\cdot+t\xi+t\eta)-f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \sup_{t>0}\frac{1}{t^s}\Big(\underbrace{\|f(\cdot+t\xi+t\eta)-f(\cdot+t\eta)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}}_{=\|f(\,\cdot\,+t\xi)-f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}}+\|f(\cdot+t\eta)-f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\Big) \\ &\leq \sup_{t>0}\frac{1}{t^s}\|f(\cdot+t\xi)-f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}+\sup_{t>0}\frac{1}{t^s}\|f(\cdot+t\eta)-f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\ &= \|\xi\|^s_{\Pi^{*,s}_\infty f}+\|\eta\|^s_{\Pi^{*,s}_\infty f}.\end{aligned}$$

注意，对每个 $t \in \mathbb{R}$和 $\xi \in \mathbb{R}^n$，都有$\|t\xi\|_{\Pi^{*,\ \infty}{}^s f} = |t|\|\mathrm{sign}(t)\xi\|_{\Pi^{*,\ \infty}{}^s f}$。对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$，我们写作$x = \sum_j x_j e_j$，其中 $\{e_j\}_{j=1}^d$ 是 $\mathbb{R}^n$的标准基。由上述三角不等式可得

$$\|x\|_{\Pi^{*,s}_{\infty} f} \le \left(\sum_j \|x_j e_j\|^s_{\Pi^{*,s}_{\infty} f}\right)^{1/s} = \left(\sum_j |x_j| \|\mathrm{sign}(x_j) e_j\|^s_{\Pi^{*,s}_{\infty} f}\right)^{1/s} \le a|x|, \tag{3.6}$$

其中， $a > 0$与 x无关。这意味着， $\Pi^{*,\ \infty}{}^s f$ 的内部包含原点。

为了得出 $\Pi^{*,\ \infty}{}^s f$是一个星体，还需证明规范函数$\|\cdot\|_{\Pi^{*,\ \infty}{}^s f}$是连续的。设 $\{\xi_k\}$ 是一个收敛于某个 $\xi \in \mathbb{R}^n$的序列。由于映射$\xi \mapsto \|\xi\|^s_{\Pi^{*,\ \infty}{}^s f}$满足三角不等式，我们有

$$\left| \|\xi_k\|^s_{\Pi^{*,s}_{\infty} f} - \|\xi\|^s_{\Pi^{*,s}_{\infty} f} \right| \le \|\xi_k - \xi\|^s_{\Pi^{*,s}_{\infty} f} \underbrace{\le}_{(3.6)} a^s |\xi_k - \xi|^s \to 0 \text{ as } k \to \infty.$$

还需证明当 s 充分接近1时， $\Pi^{*,\ \infty}{}^s f$的有界性，即存在 $c = c(f) > 0$，使得对于每个接近1的 s都有$\|\xi\|_{\Pi^{*,\ \infty}{}^s f} \ge c$。设 $r > 1$使得$\|f\|_{L^1(rB^n)} \ge \frac{2}{3}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$。固定$\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$。对于任意$t > 2r$，集合 rB^n 与 $rB^n - t\xi$不相交，并且我们还有$\|f\|_{L^1(rB^n - t\xi)} \le \frac{1}{3}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$。根据这些观察，利用三角不等式，我们得到对任意$t > 2r$的如下估计：

$$\begin{aligned}
\|f(\cdot + t\xi) - f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\ge \|f(\cdot + t\xi) - f\|_{L^\infty(rB^n - t\xi)} \\
&\ge \frac{1}{|rB^n - t\xi|} \underbrace{\|f(\cdot + t\xi) - f\|_{L^1(rB^n - t\xi)}}_{= \|f - f(\ \cdot\ - t\xi)\|_{L^1(rB^n)}} \\
&\ge \frac{1}{r^n |B^n|} \Big(\|f\|_{L^1(rB^n)} - \underbrace{\|f(\cdot - t\xi)\|_{L^1(rB^n)}}_{= \|f\|_{L^1(rB^n - t\xi)}} \Big) \\
&\ge \frac{1}{r^n |B^n|} \left(\frac{2}{3}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} - \frac{1}{3}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \right) = \frac{1}{3r^n |B^n|}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

由上述估计和 $\|\cdot\|_{\Pi^{*,\infty}{}^s f}$ 的定义可得

$$\|\xi\|_{\Pi^{*,s}_{\infty} f} = \left(\sup_{t>0} \frac{1}{t^s} \|f(\cdot + t\xi) - f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \right)^{1/s} \ge \frac{\upsilon^{1/s}}{2r} \quad \text{with} \quad \upsilon = \frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}{3r^n |B^n|}.$$

注意到 $\lim_{s \to 1^-} \upsilon^{1/s} = \upsilon$，因此存在 $\bar{s} = \bar{s}(f) \in (0,1)$，使得对于所有 $s \in (\bar{s}, 1)$，$\upsilon^{1/s} \ge \upsilon/2$。这就证明了 $\Pi^{*,\ \infty}{}^s f$ 的有界性。

(iii) 证明是直接的。事实上，对于每个 $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$，我们有

$$\begin{aligned}
\|\xi + \eta\|_{\Pi^*_\infty f} &= \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |\langle \nabla f(x), \xi + \eta \rangle| \\
&\le \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |\langle \nabla f(x), \xi \rangle| + \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |\langle \nabla f(x), \eta \rangle| = \|\xi\|_{\Pi^*_\infty f} + \|\eta\|_{\Pi^*_\infty f}
\end{aligned}$$

and

$$\|\xi\|_{\Pi^*_\infty f} \le \|\nabla f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}|\xi|.$$

由上述观察可知， $\xi \mapsto \|\xi\|_{\Pi^*_\infty f}$ 是连续的。

还需证明 $\Pi^*_\infty f$ 有界，即 $\inf_{\xi\in\mathbb{S}^{n-1}} \|\xi\|_{\Pi^*_\infty f} > 0$。反证，假设 $\inf_{\xi\in\mathbb{S}^{n-1}} \|\xi\|_{\Pi^*_\infty f} = 0$。因此，存在 $\xi_o \in \mathbb{S}^{n-1}$ 使得

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} |\langle \nabla f(x), \xi_o\rangle| = 0.$$

因此，对于几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^n$， f 沿直线 $x + t\xi_o$为常数。由于 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$，我们推得$f \equiv 0$，这就产生了矛盾。命题 3.5 的证明到此完成。 □

命题 3.7。 设 $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 均非零。则有以下极限：

(i) for any fixed $s \in (0,1)$, one has $\|\xi\|_{\Pi^{*,s}_p f} \xrightarrow{p\to+\infty} \|\xi\|_{\Pi^{*,s}_\infty f}$ a.e. $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$;

(ii) $\|\xi\|_{\Pi^*_p f} \xrightarrow{p\to\infty} \|\xi\|_{\Pi^*_\infty f}$ for every $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$;

(iii) $\|\xi\|_{\Pi^{*,s}_\infty f} \xrightarrow{s\to1^-} \|\xi\|_{\Pi^*_\infty f}$ for every $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$.

证明。 (*i*) 固定 $s \in (0,1)$。根据包含关系 (2.4)，注意到 $f \in W^{1,s}(\mathbb{R}^n)$。回想一下，经过极坐标变量替换后， f 的 Gagliardo 半范数可写为：

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{n+s}}\,dx\,dy = \int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x+t\xi)-f(x)|}{t^{s+1}}\,dx\,dt\,d\xi.$$

因此，对于几乎处处的 $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$，有

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x+t\xi)-f(x)|}{t^{s+1}}\,dx\,dt < +\infty. \tag{3.7}$$

一方面，对于任意固定的 $p > 1$，直接计算可得

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty t^{-sp-1}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+t\xi)-f(x)|^p\,dx\,dt\\
=&\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x+t\xi)-f(x)|^{p-1}}{t^{s(p-1)}}\frac{|f(x+t\xi)-f(x)|}{t^{s+1}}\,dx\,dt\\
\le&\|\xi\|^{s(p-1)}_{\Pi^{*,s}_\infty f}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x+t\xi)-f(x)|}{t^{s+1}}\,dx\,dt.
\end{aligned}$$

这意味着

$$\|\xi\|^s_{\Pi^{*,s}_p f} \le \|\xi\|^{s(1-1/p)}_{\Pi^{*,s}_\infty f}(p(1-s))^{1/p}\left(\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x+t\xi)-f(x)|}{t^{s+1}}\,dx\,dt\right)^{1/p}.$$

注意，$\lim_{p\to\infty}(p(1-s))^{1/p} = 1$。由（3.7）可立即得到

$$\limsup_{p\to\infty} \|\xi\|_{\Pi^{*,s}_p f} \le \|\xi\|_{\Pi^{*,s}_\infty f}. \tag{3.8}$$

另一方面，对于一个足够小的固定 $\varepsilon > 0$，令

$$A_{s,\varepsilon} := \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,+\infty) : \frac{|f(x+t\xi) - f(x)|}{t^s} > \|\xi\|^s_{\Pi^{*,s}_\infty f} - \varepsilon \right\}. \tag{3.9}$$

注意到 $|A_{s,\varepsilon}| > 0$。接着，对于任意固定的 $p > 1$，我们计算得，

$$\begin{aligned} \frac{1}{p(1-s)} \|\xi\|^{ps}_{\Pi^{*,s}_p f} &= \int_0^\infty t^{-sp-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+t\xi) - f(x)|^p \, dx \, dt \\ &\geq \iint_{A_{s,\varepsilon}} \frac{|f(x+t\xi) - f(x)|^p}{t^{sp+1}} \, dx \, dt \\ &\geq \left(\|\xi\|^s_{\Pi^{*,s}_\infty f} - \varepsilon \right)^{p-1} \iint_{A_{s,\varepsilon}} \frac{t^{s(p-1)} |f(x+t\xi) - f(x)|}{t^{sp+1}} \, dx \, dt \\ &= \left(\|\xi\|^s_{\Pi^{*,s}_\infty f} - \varepsilon \right)^{p-1} \iint_{A_{s,\varepsilon}} \frac{|f(x+t\xi) - f(x)|}{t^{s+1}} \, dx \, dt. \end{aligned} \tag{3.10}$$

因此，借助 $\lim_{p\to\infty}(p(1-s))^{1/p} = 1$ 这一事实，我们得到

$$\liminf_{p\to\infty} \|\xi\|^s_{\Pi^{*,s}_p f} \geq \|\xi\|^s_{\Pi^{*,s}_\infty f} - \varepsilon.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，我们得到

$$\liminf_{p\to\infty} \|\xi\|_{\Pi^{*,s}_p f} \geq \|\xi\|_{\Pi^{*,s}_\infty f}. \tag{3.11}$$

结合 (3.8) 和 (3.11)，我们得出 $\lim_{p\to\infty} \|\xi\|_{\Pi^{*,\ s}_{\ p}\ f} = \|\xi\|_{\Pi^{*,\ s}_{\ \infty}\ f}$。

(ii) 注意到 $\|\xi\|_{\Pi^*_p f} = \|\langle \nabla f(\cdot), \xi \rangle\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ 以及 $\|\xi\|_{\Pi^*_\infty f} = \|\langle \nabla f(\cdot), \xi \rangle\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$。因此，利用 $f \in W^{1,\ 1}(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,\ \infty}(\mathbb{R}^n)$ 这一事实，必须验证 $\lim_{p\to\infty} \|\xi\|_{\Pi^*_p f} = \|\xi\|_{\Pi^*_\infty f}$。

(iii) 固定 $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$ 和 $\delta > 0$，使其足够小，从而

$$\delta < \frac{\|\xi\|_{\Pi^*_\infty f}}{1 + \|\xi\|_{\Pi^*_\infty f}}.$$

根据定义，存在 $x_o \in \mathbb{R}^n$ 和 $t_o > 0$，使得

$$\begin{aligned} (1-\delta)\|\xi\|_{\Pi^*_\infty f} &\leq |\langle \nabla f(x_o), \xi \rangle| \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} |f(x_o + t\xi) - f(x_o)| \leq \frac{1}{t_o} |f(x_o + t_o\xi) - f(x_o)| + \delta. \end{aligned} \tag{3.12}$$

此外，我们有

$$\frac{1}{t_o} |f(x_o + t_o\xi) - f(x_o)| = t_o^{s-1} \frac{|f(x_o + t_o\xi) - f(x_o)|}{t_o^s} \leq t_o^{s-1} \|\xi\|^s_{\Pi^{*,s}_\infty f} \quad \text{for every } s \in (0,1). \tag{3.13}$$

由估计 (3.12) 和 (3.13) 可得

$$\left((1-\delta)\|\xi\|_{\Pi^*_\infty f} - \delta \right)^{1/s} \leq t_o^{1-1/s} \|\xi\|_{\Pi^{*,s}_\infty f} \quad \text{for every } s \in (0,1).$$

先令 $s \to 1^-$，再令 $\delta \searrow 0$，我们得到

$$\|\xi\|_{\Pi^*_\infty f} \le \liminf_{s\to 1^-} \|\xi\|_{\Pi^{*,s}_\infty f}. \tag{3.14}$$

接下来只需验证上极限不等式：$\limsup_{s\to 1^-} \|\xi\|_{\Pi^{*,s}_\infty f} \le \|\xi\|_{\Pi^*_\infty f}$。固定 $s \in (0,1)$ 和 $\varepsilon = \varepsilon(s,\xi) > 0$，使得 $\varepsilon < \|\xi\|^s_{\Pi^{*,s}_\infty f}$。令 $A_{s,\varepsilon}$ 如 (3.9) 所定义。对于任意 $p > 1$，由 (3.10) 可知

$$\begin{aligned}\frac{1}{p(1-s)}\|\xi\|^{sp}_{\Pi^{*,s}_p f} &= \int_0^\infty t^{-sp-1}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+t\xi)-f(x)|^p\,dx\,dt \\ &\ge \Big(\|\xi\|^s_{\Pi^{*,s}_\infty f} - \varepsilon\Big)^{p-1}\iint_{A_{s,\varepsilon}} \frac{|f(x+t\xi)-f(x)|}{t^{s+1}}\,dx\,dt\end{aligned} \tag{3.15}$$

由于 f 的利普希茨连续性，且索博列夫映射沿几乎每条直线都绝对连续，因此对所有 $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$，均有 $|f(x+t\xi) - f(x)| \le t\|\xi\|_{\Pi^*_\infty f}$。直接计算可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p(1-s)}\|\xi\|^{sp}_{\Pi^{*,s}_p f} \\ &= \int_0^\infty t^{-sp-1}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+t\xi)-f(x)|^{s(p-1)}|f(x+t\xi)-f(x)|^{p(1-s)+s}\,dx\,dt \\ &\le \|\xi\|^{s(p-1)}_{\Pi^*_\infty f}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x+t\xi)-f(x)|^{p(1-s)+s}}{t^{s+1}}\,dx\,dt.\end{aligned} \tag{3.16}$$

接下来，我们将上述积分拆分为两部分。固定 $\varrho > 0$ 并令 $p_s := p(1-s)+s$。利用指数为 p_s 和 $p_s/(p_s-1)$ 的霍尔德不等式及富比尼定理，可得

$$\begin{aligned}\int_0^\varrho\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x+t\xi)-f(x)|^{p_s}}{t^{s+1}}\,dx\,dt &\le \int_0^\varrho\int_{\mathbb{R}^n} t^{-(s+1)}\Big(\int_0^t |\langle\nabla f(x+\tau\xi),\xi\rangle|\,d\tau\Big)^{p_s}\,dx\,dt \\ &\le \int_0^\varrho t^{p_s-s-2}\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^t |\langle\nabla f(x+\tau\xi),\xi\rangle|^{p_s}\,d\tau\,dx\,dt \\ &\le \int_0^\varrho t^{p_s-s-2}\int_0^t \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} |\langle\nabla f(x+\tau\xi),\xi\rangle|^{p_s}\,dx}_{=\|\langle\nabla f(\cdot),\xi\rangle\|^{p_s}_{L^{p_s}(\mathbb{R}^n)}}\,d\tau\,dt \\ &\le \|\nabla f\|^{p_s}_{L^{p_s}(\mathbb{R}^n)}\int_0^\varrho t^{p_s-s-1}dt \\ &\le \frac{\varrho^{p(1-s)}}{p(1-s)}\|\nabla f\|^{(p-1)(1-s)}_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|\nabla f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},\end{aligned} \tag{3.17}$$

其中我们已 使用了以下事实：$p_s - s - 1 = p(1-s) - 1$ 以及一个简单的插值不等式 y

$$\|\nabla f\|^{p_s}_{L^{p_s}(\mathbb{R}^n)} \le \|\nabla f\|^{(p-1)(1-s)}_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|\nabla f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

类似地，利用 $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 这一事实，我们在区域 $(\varrho, \infty) \times \mathbb{R}^n$中得到如下估计

$$\begin{aligned}\int_\varrho^\infty\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x+t\xi)-f(x)|^{p_s}}{t^{s+1}}\,dx\,dt &\le \|2f\|^{p_s}_{L^{p_s}(\mathbb{R}^n)}\int_\varrho^\infty \frac{1}{t^{s+1}}dt \\ &\le \frac{1}{s\varrho^s}\|2f\|^{(p-1)(1-s)}_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|2f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned} \tag{3.18}$$

结合 (3.16)、(3.17) 和 (3.18)，我们得到以下上界

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p(1-s)}\|\xi\|_{\Pi_p^{*,s}f}^{sp}\\&\le \|\xi\|_{\Pi_\infty^* f}^{s(p-1)}\left(\frac{\varrho^{p(1-s)}}{p(1-s)}\|\nabla f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{(p-1)(1-s)}\|\nabla f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}+\frac{1}{s\varrho^s}\|2f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{(p-1)(1-s)}\|2f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\right).\end{aligned}\tag{3.19}$$

注意到，对于任意固定的 $p>2$，对每个 $r,\ s\ge 0$，都有 $(r+s)^{\frac{1}{p-1}}\le r^{\frac{1}{p-1}}+s^{\frac{1}{p-1}}$。因此，结合估计 (3.15) 和 (3.19)，再取 $(p-1)$ 次方根，可得

$$\begin{aligned}&\|\xi\|_{\Pi_\infty^* f}^{s}\left(\frac{\varrho^{(1-s)\frac{p}{p-1}}}{(p(1-s))^{\frac{1}{p-1}}}\|\nabla f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}^{1-s}\|\nabla f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{p-1}}+\frac{1}{(s\varrho^s)^{\frac{1}{p-1}}}\|2f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1-s}\|2f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{\frac{1}{p-1}}\right)\\&\ge\left(\|\xi\|_{\Pi_\infty^{*,s}f}^{s}-\varepsilon\right)\left(\iint_{A_{s,\varepsilon}}\frac{|f(x+t\xi)-f(x)|}{t^{s+1}}\,dx\,dt\right)^{\frac{1}{p-1}}.\end{aligned}\tag{3.20}$$

由于 $\lim_{p\to\infty}(p(1-s))^{\frac{1}{p-1}}=1$，先令 $p\to\infty$，再对上述不等式取 s 次方根，可得

$$\|\xi\|_{\Pi_\infty^* f}\left(\varrho^{1-s}\|\nabla f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1-s}+\|2f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}^{1-s}\right)^{1/s}\ge\left(\|\xi\|_{\Pi_\infty^{*,s}f}^{s}-\varepsilon\right)^{1/s},$$

对每个 $\varrho\in(0,\ 1)$ 和 $\varepsilon(0,\ \|\xi\|_{\Pi^{*,}{}_\infty^{\ s}f})$ 都成立。最后，在上述不等式中令 $\varrho\searrow 0$、$\varepsilon\searrow 0$，再令 $s\to 1^-$，可推得

$$\limsup_{s\to1^-}\|\xi\|_{\Pi_\infty^{*,s}f}\le\|\xi\|_{\Pi_\infty^* f}\lim_{s\to1^-}\|2f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{(1-s)/s}=\|\xi\|_{\Pi_\infty^* f}.\tag{3.21}$$

结合 (3.14) 和 (3.21)，最终可得 $\lim_{s\to1^-}\|\xi\|_{\Pi^{*,}{}_\infty^{\ s}f}=\|\xi\|_{\Pi_\infty^* f}$。命题 3.7 得证。

□

注 3.8。

(i) 仔细检查命题 3.7 的证明可以看出，p中存在一致界：对于任意固定的$s\in(0,\ 1)$，存在一个常数 $M>0$（与 p 无关），使得当 p 足够大时，

$$\|\xi\|_{\Pi_p^{*,s}f}\le M\quad\text{for a.e. }\xi\in\mathbb{S}^{n-1}.\tag{3.22}$$

事实上，将估计 (3.19) 应用于情形 $\varrho=1$，并注意到$\|\xi\|_{\Pi_\infty^* f}\le\|\nabla f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$，我们得到

$$\begin{aligned}\|\xi\|_{\Pi_p^{*,s}f}^{s}\le\|\nabla f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{s(1-1/p)}\Big(&\|\nabla f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{(1-1/p)(1-s)}\|\nabla f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{1/p}\\&+s^{-1}(p(1-s))^{1/p}\|2f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{(1-1/p)(1-s)}\|2f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{1/p}\Big).\end{aligned}$$

由于 $\lim_{p\to\infty}(p(1-s))^{1/p}=1$，且对于 $\alpha>0$，$\lim_{p\to\infty}\alpha^{1/p}=1$，上述估计可推出我们所需的结论 (3.22)。

(ii) 注意到，根据莫雷嵌入，任意函数 $f \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 都是利普希茨函数，其 Lipschitz 常数仅取决于维数和 $\|f\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)}$。因此，存在一个常数 M，它仅取决于维数 n、$\|f\|_{L^\infty}$ 和 $\|\nabla f\|_{L^\infty}$，使得

$$|f(x)-f(y)| \le M|x-y|^s \text{ for every } x,y \in \mathbb{R}^n \text{ and } s \in (0,1).$$

特别地，我们有

$$\|\xi\|_{\Pi^{*,s}_\infty f} \le 1+M^2 \quad \text{for every } \xi \in \mathbb{S}^{n-1} \text{ and } s \in (1/2,1).$$

(iii) 简单计算表明，对于任意非零 $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$，以下估计成立

$$\|\xi\|_{\Pi^*_p f} \le \|\nabla f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad \text{for every } \xi \in \mathbb{S}^{n-1} \text{ and } p>1.$$

4 渐近行为

本节给出关于与 s–分数阶 L^p 极投影体相关的体积和对偶混合体积的极限行为的主要结果，见定理 4.1–4.2。第二个主要结果——定理 4.4——刻画了量 $\widetilde{\mathrm{V}}_{-sp}(K,\Pi^*_p f)^{1/p}$ 的渐近行为。

定理 4. **1.** 设 $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 均非零。则以下结论成立 :

(i) 对任意固定的 $s \in (0,1)$，有 $\lim_{p\to\infty} |\Pi^*_p f| = |\Pi^*_\infty f|$;

(ii) $\lim_{p\to\infty} |\Pi^*_p f| = |\Pi^*_\infty f|$;

(iii) 极限 $\lim_{s\to 1^-} |\Pi^*_\infty f| = |\Pi^*_\infty f|$。

证明。*(i)*回顾

$$|\Pi^{*,s}_p f| = \frac{1}{n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \|\xi\|^{-n}_{\Pi^{*,s}_p f}\, d\xi.$$

由命题 3.5–*(i)*可知，对于每个充分大的 p，函数族 $\left\{\|\cdot\|^{-n}_{\Pi^{*,s}_p f}\right\}_{p\ge 1}$ 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上是一致有界的。此外，命题 3.7–*(i)* 给出了逐点收敛性：$\lim_{p\to\infty} \|\xi\|^{-n}_{\Pi^*_p f} = \|\xi\|^{-n}_{\Pi^*_\infty f}$，对几乎处处的 $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$成立。因此，利用勒贝格控制收敛定理，我们得到

$$\lim_{p\to\infty} |\Pi^{*,s}_p f| = \frac{1}{n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \|\xi\|^{-n}_{\Pi^{*,s}_\infty f}\, d\xi = |\Pi^{*,s}_\infty f|.$$

(ii) 和*(iii)* 的论证类似，由此完成定理 4.1 的证明。 □

利用定义 2.2，并采用与定理 4.1 证明中类似的论证，我们得到对偶混合体积 $\mathrm{pf}\ \Pi^*_p f$的以下极限行为。

定理 4.2. 设 $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 均非零。假设满足以下条件之一:

(a) K 是星体，且 $q > n$；

(b) K 是有界星体，且 $q \in (-\infty, n) \setminus \{0\}$。

那么，以下极限成立：

(i) 对任意固定的 $s \in (0,1)$，$\lim_{p\to\infty} \widetilde{\mathrm{V}}_q(K, \Pi^*_{\cdot,p}{}^s f) = \widetilde{\mathrm{V}}_q(K, \Pi^*_{\cdot,\infty}{}^s f)$；

(ii) $\lim_{p\to+\infty} \widetilde{\mathrm{V}}_q(K, \Pi^*_p f) = \widetilde{\mathrm{V}}_q(K, \Pi^*_\infty f)$；

(iii) $\lim_{s\to 1^-} \widetilde{\mathrm{V}}_q(K, \Pi^{*,s}_\infty f) = \widetilde{\mathrm{V}}_q(K, \Pi^*_\infty f)$。

定理 *4.2* 的证明。*(i)* 回顾一下，对于任意 $q \notin \{0, n\}$，

$$\widetilde{\mathrm{V}}_q(K, \Pi^{*,s}_p f) = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \|\xi\|_K^{-n+q} \|\xi\|^{-q}_{\Pi^{*,s}_p f}\, d\xi.$$

固定 $s \in (0,1)$。下面分两种情况讨论。

情形 1： K 是一个星体，且 $q > n$。由于 $\xi \mapsto \|\xi\|_K$ 的连续性，$\mathbb{S}^{n-1}$ 的紧性意味着映射 $\xi \mapsto \|\xi\|_K^{-n+q}$ 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上有界。此外，命题 3.5–*(i)* 表明，函数族 $\left\{\|\cdot\|^{-q}_{\Pi^{*,s}_p f}\right\}_{p\geq 1}$ 在单位球面上一致有界。因此，应用勒贝格控制收敛定理，并结合命题 3.7–*(i)*，我们得到

$$\begin{aligned}\lim_{p\to\infty} \widetilde{\mathrm{V}}_q(K, \Pi^{*,s}_p f) &= \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \lim_{p\to\infty} \|\xi\|_K^{-n+q} \|\xi\|^{-q}_{\Pi^{*,s}_p f}\, d\xi \\ &= \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \|\xi\|_K^{-n+q} \|\xi\|^{-q}_{\Pi^{*,s}_\infty f}\, d\xi = \widetilde{\mathrm{V}}_q(K, \Pi^{*,s}_\infty f).\end{aligned}$$

情形 2： K 是一个有界星体，且 $q \in (-\infty, n) \setminus \{0\}$。利用 K 是一个有界星体且 $q < n$这一事实，我们推知映射 $\xi \mapsto \|\xi\|_K^{-n+q}$ 在 $\mathbb{S}^{n-1}$上有界。若 $q \in (0, n)$，证明过程与情形 1 完全相同。若 $q < 0$，注 3.8–*(i)* 表明，对于充分大的 $\bar{p} > 1$，族 $\left\{\|\cdot\|^{-q}_{\Pi^{*,s}_p f}\right\}_{p\geq\bar{p}}$ 在单位球面上几乎处处一致有界。最后，由勒贝格控制收敛定理及命题 3.7–*(i)*，结论得证。

然后，我们可以用类似的论证证明*(ii)* 和*(iii)* 。定理 4.2 得证。

□

接下来，我们引入 s–缩放膨胀因子的概念。

定义 4.3. 设 $s \in (0, 1]$，且 K 和 L 是两个星体。K 相对于 L 的 s–缩放膨胀因子定义为

$$\mathscr{d}_s(K, L) := \sup_{\xi\in\mathbb{S}^{n-1}} \|\xi\|_K^{-s} \|\xi\|_L^s = \sup_{\xi\in\mathbb{S}^{n-1}} \rho_K(\xi)^s \rho_L(\xi)^{-s}.$$

若 $s = 1$，则简记为 $\mathscr{d}(K, L) := \mathscr{d}_1(K, L)$。

我们注意到 膨胀因子 $\mathrm{d}(K, L)$ 量化了需要将 L 膨胀多少才能包含 K ：

$$\mathscr{d}(K, L) = \inf\left\{\lambda > 0 : K \subset \lambda L\right\}.$$

我们的第二个主要结果定理 4.4 确立了 $\widetilde{\mathrm{V}}_{-sq}(K, \Pi^*_{\cdot,p}{}^s f)^{1/p}$ 的渐近行为。其证明改编自引理 3.7 中的论证，我们在此给出证明以求完整。

定理 4.4。 设 $f \in W^{1,\,1}(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,\,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 均非零，且 K 是一个有界星体。则以下极限成立：

(i) 对任意固定的 $s \in (0,\,1)$，有 $\lim_{p\to\infty} \widetilde{V}_{-sp}(K, \Pi^*_{,p}{}^{s} f)^{1/p} = d_s(K, \Pi^*_{,\infty}{}^{s} f)$; *(ii)* $\lim_{p\to\infty} \widetilde{V}_{-p}(K, \Pi^*_p f)^{1/p} = d(K, \Pi^*_\infty f)$; *(iii)* $\lim_{s\to 1^-} d_s(K, \Pi^*_{,\infty}{}^{s} f) = d(K, \Pi^*_\infty f)$.

证明。 由于*(i)* 和*(ii)* 的证明类似，我们仅给出*(i)*的证明。

(i) 回顾一下，对偶混合体积 $\widetilde{\mathrm{V}}_{-sp}(K, \Pi^*_{,p}{}^{s} f)$ 可用各向异性 Gagliardo 半范数表示（例如参见 [19, 第 1098] 页）：

$$n\widetilde{\mathrm{V}}_{-sp}(K, \Pi_p^{*,s} f) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \|\xi\|_K^{-n-ps} \|\xi\|^{ps}_{\Pi_p^{*,s} f}\, d\xi = p(1-s) \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{\|x-y\|_K^{n+sp}}\, dx\, dy.$$

Usin利用包含关系 (2.4) 以及 K 是一个有界星体这一事实，我们首先注意到 at

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|_K^{n+s}}\, dx\, dy < +\infty. \tag{4.1}$$

另一方面，对于任意固定的 $p > 1$，我们有以下估计

$$\begin{aligned} \frac{n}{p(1-s)} \widetilde{V}_{-sp}(K, \Pi_p^{*,s} f) &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(y)|^{p-1}}{\|x-y\|_K^{s(p-1)}} \frac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|_K^{n+s}}\, dx\, dy \\ &\le d_s(K, \Pi_\infty^{*,s} f)^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|_K^{n+s}}\, dx\, dy, \end{aligned} \tag{4.2}$$

其中我们用到了恒等式

$$d_s(K, \Pi_\infty^{*,s} f) = \sup_{\xi\in\mathbb{S}^{n-1}} \|\xi\|_K^{-s} \|\xi\|^s_{\Pi_\infty^{*,s} f} = \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|_K^s}. \tag{4.3}$$

首先取 不等式 (4.2) 的 p 次方根，然后令 p 趋于 ∞，由 (4.1) 可得 t

$$\limsup_{p\to\infty} \widetilde{\mathrm{V}}_{-sp}(K, \Pi_p^{*,s} f)^{1/p} \le d_s(K, \Pi_\infty^{*,s} f). \tag{4.4}$$

另一方面，对于任意固定的 $\varepsilon \in (0,\ d_s(K,\ \Pi^*_{,\infty}{}^{s} f))$，记

$$\widehat{A}_{s,\varepsilon} := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \frac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|_K^s} > d_s(K, \Pi_\infty^{*,s} f) - \varepsilon \right\}. \tag{4.5}$$

注意到 $|\widehat{A}_{s,\varepsilon}| > 0$。通过直接计算，我们得到

$$\begin{aligned} &\frac{n}{p(1-s)} \widetilde{V}_{-sp}(K, \Pi_p^{*,s} f) \\ &\ge \iint_{\widehat{A}_{s,\varepsilon}} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{\|x-y\|_K^{n+sp}}\, dx\, dy \\ &\ge (d_s(K, \Pi_\infty^{*,s} f) - \varepsilon)^{p-1} \iint_{\widehat{A}_{s,\varepsilon}} \frac{\|x-y\|_K^{s(p-1)} |f(x)-f(y)|}{\|x-y\|_K^{n+sp}}\, dx\, dy \\ &= (d_s(K, \Pi_\infty^{*,s} f) - \varepsilon)^{p-1} \iint_{\widehat{A}_{s,\varepsilon}} \frac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|_K^{n+s}}\, dx\, dy. \end{aligned} \tag{4.6}$$

因此，先对上述不等式取 p次方根，再令 p趋于 ∞，可得

$$\liminf_{p\to\infty} \widetilde{\mathrm{V}}_{-sp}(K,\Pi_p^{*,s} f)^{1/p} \geq \mathscr{d}_s(K,\Pi_\infty^{*,s} f) - \varepsilon.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，因此

$$\liminf_{p\to\infty} \widetilde{\mathrm{V}}_{-sp}(K,\Pi_p^{*,s} f)^{1/p} \geq \mathscr{d}_s(K,\Pi_\infty^{*,s} f). \tag{4.7}$$

结合 (4.4) 和 (4.7)，我们得出

$$\lim_{p\to\infty} \widetilde{\mathrm{V}}_{-sp}(K,\Pi_p^{*,s} f)^{1/p} = \mathscr{d}_s(K,\Pi_\infty^{*,s} f).$$

(iii) 固定 $\delta > 0$，使得

$$\delta < \frac{\mathscr{d}(K,\Pi_\infty^* f)}{1+\mathscr{d}(K,\Pi_\infty^* f)}.$$

那么，存在 $x_o \in \mathbb{R}^n$、$\xi_o \in \mathbb{S}^{n-1}$ 和 $t_o > 0$，使得

$$\begin{aligned}(1-\delta)\,\mathscr{d}(K,\Pi_\infty^* f) &\leq \frac{|\langle \nabla f(x_o),\xi_o\rangle|}{\|\xi_o\|_K} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{|f(x_o+t\xi_o)-f(x_o)|}{t\|\xi_o\|_K} \leq \frac{|f(x_o+t_o\xi_o)-f(x_o)|}{t_o\|\xi_o\|_K} + \delta.\end{aligned} \tag{4.8}$$

此外，直接计算可得

$$\begin{aligned}\frac{|f(x_o+t_o\xi_o)-f(x_o)|}{t_o\|\xi_o\|_K} &= (t_o\|\xi_o\|_K)^{s-1}\frac{|f(x_o+t_o\xi_o)-f(x_o)|}{\|t_o\xi_o\|_K^s} \\ &\leq (t_o\|\xi_o\|_K)^{s-1}\mathscr{d}_s(K,\Pi_\infty^{*,s} f),\end{aligned} \tag{4.9}$$

对每个 $s \in (0,\ 1)$ 均成立。结合 (4.8) 和 (4.9)，我们得到

$$(1-\delta)\mathscr{d}(K,\Pi_\infty^* f) - \delta \leq (t_o\|\xi_o\|_K)^{s-1}\mathscr{d}_s(K,\Pi_\infty^{*,s} f) \quad \text{for every } s\in(0,1).$$

先令 $s \to 1^-$，再令 $\delta \searrow 0$，我们得到

$$\mathscr{d}(K,\Pi_\infty^* f) \leq \liminf_{s\to 1^-} \mathscr{d}_s(K,\Pi_\infty^{*,s} f)\,. \tag{4.10}$$

剩下需要验证不等式 $\mathrm{d}(K,\Pi_\infty^* f) \geq \limsup_{s\to 1^-} \mathrm{d}_s(K,\Pi^*{}_\infty^s f)$。不妨设 $\limsup_{s\to 1^-} \mathrm{d}_s(K,\Pi^*{}_\infty^s f) > 0$，因此存在 $\bar{s} \in (0,1)$，使得对于每个 $s \in (\bar{s},1)$，都有 $\mathrm{d}_s(K,\Pi^*{}_\infty^s f) > 0$。固定 $s \in (\bar{s},1)$ 和 $\varepsilon \in (0,\mathrm{d}_s(K,\Pi^*{}_\infty^s f))$。令 $\widehat{A}_{s,\varepsilon}$ 如 (4.5) 中所定义。

对于任意固定的 $p > 1$，利用简单的变量替换和估计 (4.6)，可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{p(1-s)}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \|\xi\|_K^{-n-ps}\|\xi\|_{\Pi_p^{*,s} f}^{ps}\,d\xi &= \frac{n}{p(1-s)}\widetilde{V}_{-sp}(K,\Pi_p^{*,s} f) \\ &\geq (\mathscr{d}_s(K,\Pi_\infty^{*,s} f)-\varepsilon)^{p-1}\iint_{\widehat{A}_{s,\varepsilon}} \frac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|_K^{n+s}}\,dx\,dy.\end{aligned} \tag{4.11}$$

由估计 (3.19) 可知，对于每个 $\varrho>0$ 和 $s\in(0,1)$，有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p(1-s)}\|\xi\|_{\Pi_p^{*,s}f}^{sp}\\&\le\|\xi\|_{\Pi_\infty^*f}^{s(p-1)}\left(\frac{\varrho^{p(1-s)}}{p(1-s)}\|\nabla f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{(p-1)(1-s)}\|\nabla f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}+\frac{1}{s\varrho^s}\|2f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{(p-1)(1-s)}\|2f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\right).\end{aligned}\tag{4.12}$$

注意到，对于 $p>1$，函数 $r\mapsto r^{1/p}$ 是凹函数。由于 K 和 Π_∞^*f 是有界星体，因此存在常数 $c_o>0$，使得对每个 $\xi\in\mathbb{S}^{n-1}$，都有 $\|\xi\|_K^{-n}\|\xi\|_{\Pi_\infty^*f}^{-s}\le c_o$。因此，由 (4.11) 和 (4.12) 可得

$$\begin{aligned}&B_{\varrho,s,p}\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\|\xi\|_K^{-ps}\|\xi\|_{\Pi_\infty^*f}^{ps}d\xi\right)^{1/p}\\&\ge(\mathscr{d}_s(K,\Pi_\infty^{*,s}f)-\varepsilon)^{1-1/p}\left(\iint_{\widehat{A}_{s,\varepsilon}}\frac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|_K^{n+s}}\,dx\,dy\right)^{1/p},\end{aligned}\tag{4.13}$$

其中

$$B_{\varrho,s,p}:=c_o^{1/p}\left(\frac{\varrho^{(1-s)}}{(p(1-s))^{1/p}}\|\nabla f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{(1-1/p)(1-s)}\|\nabla f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{1/p}+\frac{1}{(s\varrho^s/2)^{1/p}}\|2f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{(1-1/p)(1-s)}\|2f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{1/p}\right).$$

令 p 趋于 ∞，得到

$$\left(\varrho^{1-s}\|\nabla f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1-s}+\|2f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1-s}\right)\underbrace{\sup_{\xi\in\mathbb{S}^{n-1}}\|\xi\|_K^{-s}\|\xi\|_{\Pi_\infty^*f}^{s}}_{=\mathscr{d}(K,\Pi_\infty^*f)^s}\ge\mathscr{d}_s(K,\Pi_\infty^{*,s}f)-\varepsilon.\tag{4.14}$$

最后，先令 $\varrho\searrow0$，再令 $\varepsilon\searrow0$，上述不等式意味着

$$\limsup_{s\to1^-}\mathscr{d}_s(K,\Pi_\infty^{*,s}f)\le\mathscr{d}(K,\Pi_\infty^*f).\tag{4.15}$$

结合 (4.10) 和 (4.15)，最终得到 $\lim_{s\to1^-}\mathrm{d}_s(K,\Pi^{*,s}_\infty f)=\mathrm{d}(K,\Pi^*_\infty f)$，由此完成定理 4.4 的证明。□

5 非对称类比与几何不等式

在最后这一节中，我们将讨论分数阶 L^p 极投影体的非对称变体所对应的结果。此外，我们还将在 L^∞ 框架下推导相关的波利亚–塞格ő不等式和函数型等周不等式。

5.1 非对称（s–分数阶） L^∞ 极投影体

非对称（分数阶） L^p 极投影体通过在规范函数的定义中使用正部与负部（而非绝对值），对经典构造进行了改进。这一修改得到了更精确的仿射 Sobolev 不等式，参见 [18, 19]。本节的主要成果，即命题 5.3–5.4，确立了非对称分数阶 L^p 极投影体的渐近行为。

从现在起，对于任意实数 $a\in\mathbb{R}$，我们记 $a_+=\max\{a,0\}$ 和 $a_-=\max\{-a,0\}$。

定义5.1。取定 $p \in [1,\infty)$ 和 $s \in (0,\ 1)$。

• 对于任意 $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$，其非对称 L^p 极投影体 $\Pi^*_{p,+} f$（分别为 $\Pi^*_{p,-} f$）是一个星形集，其定义借助规范函数给出，对每个 $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\|\xi\|^p_{\Pi^*_{p,+} f} := \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla f(x), \xi\rangle^p_+ dx \left(\textit{respectively } \|\xi\|^p_{\Pi^*_{p,-} f} := \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla f(x), \xi\rangle^p_- dx \right).$$

• 对于固定的 $f \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$，其非对称 s–分数阶 L^∞ 极投影体 $\Pi^*_{\infty,+} f$（分别为 $\Pi^*_{\infty,-}$）是一个星形集，其定义借助规范函数给出，对每个 $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\|\xi\|_{\Pi^*_{\infty,+} f} := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} \langle \nabla f(x), \xi\rangle_+ \left(\textit{respectively } \|\xi\|_{\Pi^*_{\infty,-} f} := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} \langle \nabla f(x), \xi\rangle_- \right).$$

• 对于任意 $f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$，其非对称 s–分数阶 L^p 极投影体 $\Pi^{*,s}_{p,+} f$（分别为 $\Pi^{*,s}_{p,-} f$）是一个星形集，其定义借助规范函数给出，对每个 $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\|\xi\|^{ps}_{\Pi^{*,s}_{p,+} f} := p(1-s)\int_0^\infty t^{-ps-1} \int_{\mathbb{R}^n} (f(x+t\xi) - f(x))^p_+ \, dx\, dt$$
$$\left(\textit{respectively } \|\xi\|^{ps}_{\Pi^{*,s}_{p,-} f} := p(1-s)\int_0^\infty t^{-ps-1} \int_{\mathbb{R}^n} (f(x+t\xi) - f(x))^p_- \, dx\, dt \right).$$

• 对于固定的 $f \in W^{s,\infty}(\mathbb{R}^n)$，其非对称 s–分数阶 L^∞ 极投影体 $\Pi^{*,s}_{\infty,+} f$（分别为 $\Pi^{*,s}_{\infty,-}$）是一个星形集，其定义借助规范函数给出，对每个 $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\|\xi\|^s_{\Pi^{*,s}_{\infty,+} f} := \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty)} \frac{1}{t^s}(f(x+t\xi) - f(x))_+$$
$$\left(\textit{respectively } \|\xi\|^s_{\Pi^{*,s}_{\infty,-} f} := \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty)} \frac{1}{t^s}(f(x+t\xi) - f(x))_- \right).$$

根据这些定义，我们可以得到类似于命题 3.5 和引理 3.7 的结果。然而，为了推导出类似于命题 3.5 中关于非对称分数阶L^p 极投影体的规范函数下界，还需要一些额外的技术细节。下文将详细给出这些细节。

Lem引理 5.2. 令 $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 非零。以下断言成立：

(i) 对任意固定的 $s \in (0,\ 1)$，存在充分大的 $c = c(s, f) > 0$ 和 $\bar{p} = \bar{p}(s, f) > 1$，使得$\Pi^{*,s}_{p,\pm} f \subset cB^n$ 对每个 $p \geq \bar{p}$都成立。

(ii) 对任意固定的 $s \in (0,\ 1)$，集合 $\Pi^{*,s}_{\infty,+} f$和 $\Pi^{*,s}_{\infty,-} f$都是以原点为内部点的星体。此外，存在 $c = c(f) > 0$和 $\bar{s} = \bar{s}(f) \in (0,\ 1)$，使得 $\Pi^{*,s}_{\infty,\pm} f \subset cB^n$对每个$s \in (\bar{s},1)$都成立。

(iii) 集合 $\Pi^*_{\infty,+} f$ 和 $\Pi^*_{\infty,-} f$ 是原点位于其内部的星体。

证明。 下面我们给出 (i) 中 $\Pi^{*,s}_{p,\pm} f$ 以及 (ii) 中 $\Pi^{*,s}_{\infty,\pm} f$ 的规范函数下界。这些论证不同于命题 3.5 证明中所采用的方法。证明的其余步骤可仿照命题 3.5 中的步骤完成。

(i) 只需验证包含关系 $\Pi^{*,s}_{p,+} f \subset cB^n$。对任意固定的 $\alpha \in (0, 1)$，令

$$\mathcal{S}_\alpha := \left\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq \alpha \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\right\} \quad \text{and} \quad \mathcal{S}^\pm_\alpha := \left\{x \in \mathbb{R}^n : f(x)_\pm \geq \alpha \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\right\}.$$

注意，$\mathsf{S}^+_\alpha \cup \mathsf{S}^-_\alpha = \mathsf{S}_\alpha$。根据断言 3.6，$\mathsf{S}_\alpha$ 有界，因此 $\mathsf{S}^\pm_\alpha$ 也有界。令 $r_o > 1$ 满足 $\mathsf{S}_{3/4} \subset \mathsf{S}_{1/4} \subset r_o B^n$。我们首先观察到

$$\|f_+\|_{L^p(\mathcal{S}^+_{3/4})} \geq \frac{3}{4}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} |\mathcal{S}^+_{3/4}|^{1/p} \quad \text{and} \quad \|f_-\|_{L^p(\mathcal{S}^-_{3/4})} \geq \frac{3}{4}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} |\mathcal{S}^-_{3/4}|^{1/p}.$$

固定 $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$。由于 r_o 的选取，对于任意满足 $|t| > 2r_o$ 的 $t \in \mathbb{R}$，集合 $r_o B^n$ 与 $\mathsf{S}_{3/4} + t\xi$ 不相交（因此 $r_o B^n$ 与 $\mathsf{S}^\pm_{3/4} + t\xi$ 也不相交）。因此，我们有

$$\|f_+\|_{L^p(\mathcal{S}^+_{3/4}+t\xi)} \leq \frac{1}{4}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} |\mathcal{S}^+_{3/4}|^{1/p} \quad \text{and} \quad \|f_-\|_{L^p(\mathcal{S}^-_{3/4}+t\xi)} \leq \frac{1}{4}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} |\mathcal{S}^-_{3/4}|^{1/p}.$$

注意，对于任意可测集 $U \subset \mathbb{R}^n$ 以及任意函数 $g,\ h \in L^p(U)$，它满足 ds

$$\|(g-h)_\pm\|_{L^p(U)} \geq \|g_\pm\|_{L^p(U)} - \|h_\pm\|_{L^p(U)}.$$

固定 $t > 2r_o$。一方面，我们有

$$\begin{aligned}
\|(f(\cdot + t\xi) - f)_+\|_{L^p(\mathcal{S}^-_{3/4})} &= \|(f - f(\cdot + t\xi))_-\|_{L^p(\mathcal{S}^-_{3/4})} \\
&\geq \|f_-\|_{L^p(\mathcal{S}^-_{3/4})} - \underbrace{\|f(\cdot + t\xi)_-\|_{L^p(\mathcal{S}^-_{3/4})}}_{= \|f_-\|_{L^p(\mathcal{S}^-_{3/4}+t\xi)}} \\
&\geq \frac{1}{2}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} |\mathcal{S}^-_{3/4}|^{1/p}.
\end{aligned}$$

另一方面，在集合 $\mathsf{S}^+_{3/4} - t\xi$ 上进行估计可得

$$\begin{aligned}
\|(f(\cdot + t\xi) - f)_+\|_{L^p(\mathcal{S}^+_{3/4}-t\xi)} &= \|(f - f(\cdot - t\xi))_+\|_{L^p(\mathcal{S}^+_{3/4})} \\
&\geq \|f_+\|_{L^p(\mathcal{S}^+_{3/4})} - \underbrace{\|f(\cdot - t\xi)_+\|_{L^p(\mathcal{S}^+_{3/4})}}_{= \|f_+\|_{L^p(\mathcal{S}^+_{3/4}-t\xi)}} \\
&\geq \frac{1}{2}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} |\mathcal{S}^+_{3/4}|^{1/p}.
\end{aligned}$$

综合上述估计，我们得到

$$\|(f(\cdot + t\xi) - f)_+\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \geq \frac{1}{4}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} (|\mathcal{S}^+_{3/4}|^{1/p} + |\mathcal{S}^-_{3/4}|^{1/p}) \geq \frac{1}{4}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} |\mathcal{S}_{3/4}|^{1/p} > 0,$$

对每个 $t > 2r_o$ 均成立。我们按照命题 3.5 的证明进行推导，得到

$$\|\xi\|^s_{\Pi^{*,s}_{p,+} f} \geq \frac{1}{4}(2r_o)^{-s}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} |\mathcal{S}_{3/4}|^{1/p} \left(\frac{1-s}{s}\right)^{1/p}.$$

因此，我们可以得出结论，存在 $c = c(s,\ f) > 0$ 和 $\bar{p} = \bar{p}(s,\ f) > 1$，满足$\Pi^{*,\ p}{}^{s}{}_{,\ +} f \subset cB^n$，对每个 $p \geq \bar{p}$ 均成立。

(ii) 我们将为$\|\cdot\|_{\Pi^{*,\infty}{}^{s}{}_{,\pm} f}$ 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上给出一个正的下界；同样，只需对$\Pi^{*,\infty}{}^{s}{}_{,+}$证明即可。令 $r > 1$ 满足

$$\|f_+\|_{L^1(rB^n)} \geq \frac{2}{3}\|f_+\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad \text{and} \quad \|f_-\|_{L^1(rB^n)} \geq \frac{2}{3}\|f_-\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

固定 $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$。对于任意 $|t| > 2r$，两个集合 rB^n 和 $rB^n - t\xi$ 不相交，因此我们有

$$\|f_+\|_{L^1(rB^n + t\xi)} \leq \frac{1}{3}\|f_+\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad \text{and} \quad \|f_-\|_{L^1(rB^n + t\xi)} \leq \frac{1}{3}\|f_-\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

由此可见，利用三角不等式，对于任意 $t \geq 2r$，我们得到以下估计：

$$\begin{aligned}
\|(f(\cdot + t\xi) - f)_+\|_{L^\infty(rB^n - t\xi)} &\geq \frac{1}{|rB^n - t\xi|}\|(f(\cdot + t\xi) - f)_+\|_{L^1(rB^n - t\xi)} \\
&= \frac{1}{r^n|B^n|}\|(f - f(\cdot - t\xi))_+\|_{L^1(rB^n)} \\
&\geq \frac{1}{r^n|B^n|}\Big(\underbrace{\|f_+\|_{L^1(rB^n)} - \|f(\cdot - t\xi)_+\|_{L^1(rB^n)}}_{= \|f_+\|_{L^1(rB^n)} - \|f_+\|_{L^1(rB^n - t\xi)}}\Big) \\
&\geq \frac{1}{3r^n|B^n|}\|f_+\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\|(f(\cdot + t\xi) - f)_+\|_{L^\infty(rB^n)} &\geq \frac{1}{|rB^n|}\|(f(\cdot + t\xi) - f)_+\|_{L^1(rB^n)} \\
&= \frac{1}{r^n|B^n|}\|(f - f(\cdot + t\xi))_-\|_{L^1(rB^n)} \\
&\geq \frac{1}{r^n|B^n|}\Big(\underbrace{\|f_-\|_{L^1(rB^n)} - \|f(\cdot + t\xi)_-\|_{L^1(rB^n)}}_{= \|f_-\|_{L^1(rB^n)} - \|f_-\|_{L^1(rB^n + t\xi)}}\Big) \\
&\geq \frac{1}{3r^n|B^n|}\|f_-\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\|(f(\cdot + t\xi) - f)_+\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \geq \frac{1}{6r^n|B^n|}\big(\|f_+\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|f_-\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\big) = \frac{1}{6r^n|B^n|}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

利用定义$\|\cdot\|_{\Pi^{*,\infty}{}^{s} f}$，我们得到

$$\|\xi\|_{\Pi^{*,s}_{\infty} f} = \left(\sup_{t>0}\frac{1}{t^s}\|(f(\cdot + t\xi) - f)_+\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\right)^{1/s} \geq \frac{\upsilon^{1/s}}{2r} \quad \text{with} \quad \upsilon = \frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}{6r^n|B^n|}.$$

这意味着存在 $c = c(f) > 0$ 和 $\bar{s} = \bar{s}(f) \in (0,\ 1)$，使得对于每个 $s \in (\bar{s},\ 1)$，都有 $\Pi^{*,\ \infty}{}^{s}{}_{,\ \pm} f \subset cB^n$。引理5.2得证。 □

接下来，可以得到与命题 3.7 类似的结果，这些结果涉及非对称分数阶 L^p 极投影体的规范函数。因此，我们得到了以下命题中所述的相关体积和对偶混合体积的渐近行为。由于其证明与定理 4.1-4.2 和定理 4.4 中的证明类似，故略去。

命题 5.3。 设 $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 均非零。假设以下条件之一成立：

(a) K 是星体，且 $q > n$；

(b) K 是有界星体，且 $q \in (-\infty, n) \setminus \{0\}$。

则有以下极限：

(i) 对任意固定的 $s \in (0, 1)$，有

$$\lim_{p\to\infty} |\Pi^{*,s}_{p,\pm} f| = |\Pi^{*,s}_{\infty,\pm} f| \text{ and } \lim_{p\to\infty} \widetilde{\mathrm{V}}_q(K, \Pi^{*,s}_{p,\pm} f) = \widetilde{\mathrm{V}}_q(K, \Pi^{*,s}_{\infty,\pm} f);$$

(ii) $\lim_{p\to\infty} |\Pi^*_{p,\pm} f| = |\Pi^*_{\infty,\pm} f|$ 以及 $\lim_{p\to\infty} \widetilde{\mathrm{V}}_q(K, \Pi^*_{p,\pm} f) = \widetilde{\mathrm{V}}_q(K, \Pi^*_{\infty,\pm} f)$；

(iii) $\lim_{s\to 1^-} |\Pi^{*,s}_{\infty,\pm} f| = |\Pi^*_{\infty,\pm} f|$ *and* $\lim_{s\to 1^-} \widetilde{\mathrm{V}}_q(K, \Pi^{*,s}_{\infty,\pm} f) = \widetilde{\mathrm{V}}_q(K, \Pi^*_{\infty,\pm} f)$.

命题 5.4。 令 $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 均非零，并令 K 为有界星体。则有以下极限：

(i) 对任意固定的 $s \in (0, 1)$，有 $\lim_{p\to\infty} \widetilde{\mathrm{V}}_{-sp}(K, \Pi^{*,s}_{p,\pm} f)^{1/p} = \mathrm{d}_s(K, \Pi^{*,s}_{\infty,\pm} f)$；

(ii) $\lim_{p\to\infty} \widetilde{\mathrm{V}}_{-p}(K, \Pi^*_{p,\pm} f)^{1/p} = \mathrm{d}(K, \Pi^*_{\infty,\pm} f)$;

(iii) $\lim_{s\to 1^-} \mathrm{d}_s(K, \Pi^{*,s}_{\infty,\pm} f) = \mathrm{d}(K, \Pi^*_{\infty,\pm} f)$。

5.2 L^∞ 波利亚–塞格ő不等式的变体

作为我们结果的一项应用，我们在与 s–分数极投影星体相关的 L^∞框架下，建立了波利亚–塞格ő型不等式的变体。这将各向异性 Hölder 常数和梯度的各向异性 L^∞ 范数与函数的重排性质联系起来；例如，参见 [9,推论 8.2]，其中讨论了梯度的各向同性 L^∞–范数的波利亚–塞格ő不等式。

推论 5.5。 设 $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 均为非负，且 K 为有界星体。则有 $f^\star \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$，并且下列不等式成立：

(i) 对于任意固定的 $s \in (0,1)$，有

$$\sup_{x\neq y} \frac{(f(x) - f(y))_\pm}{\|x-y\|^s_K} \geq \sup_{x\neq y} \frac{(f^\star(x) - f^\star(y))_\pm}{\|x-y\|^s_{K^\star}}$$

and

$$\sup_{x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x-y\|^s_K} \geq \sup_{x\neq y} \frac{|f^\star(x) - f^\star(y)|}{\|x-y\|^s_{K^\star}}. \tag{5.1}$$

(ii) 有

$$\sup_{\xi\in\mathbb{S}^{n-1}}\frac{\|\langle\nabla f(\cdot),\xi\rangle_{\pm}\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)}}{\|\xi\|_K}\geq\sup_{\xi\in\mathbb{S}^{n-1}}\frac{\|\langle\nabla f^{\star}(\cdot),\xi\rangle_{\pm}\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)}}{\|\xi\|_{K^{\star}}}$$

and

$$\sup_{\xi\in\mathbb{S}^{n-1}}\frac{\|\langle\nabla f(\cdot),\xi\rangle\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)}}{\|\xi\|_K}\geq\sup_{\xi\in\mathbb{S}^{n-1}}\frac{\|\langle\nabla f^{\star}(\cdot),\xi\rangle\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)}}{\|\xi\|_{K^{\star}}}.$$

当 K 是中心椭球且 f 是某个 $f^{\star}\circ\phi$ 的平移时，对于某个$\phi\in\mathrm{SL}(n)$，上述不等式取等号。

证明。 由 [9, 定理 8.2、推论 8.2], 可得 $f^{\star}\in W^{1,}{}_1(\mathbb{R}^n)\cap W^{1,}{}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$。

(i) 只需证明不等式

$$\sup_{x\neq y}\frac{(f(x)-f(y))_+}{\|x-y\|_K^s}\geq\sup_{x\neq y}\frac{(f^{\star}(x)-f^{\star}(y))_+}{\|x-y\|_{K^{\star}}^s}. \tag{5.2}$$

证明此式后，利用下述恒等式即可得到不等式 (5.1)：对于任意以 L 为中心的有界星形体

$$\sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|_L^s}=\max\left\{\sup_{x\neq y}\frac{(f(x)-f(y))_+}{\|x-y\|_L^s},\sup_{x\neq y}\frac{(f(x)-f(y))_-}{\|x-y\|_L^s}\right\}.$$

回顾一下，对于每个 $p>1$， L^p 分数阶索伯列夫范数的各向异性波利亚–塞格ő不等式（见[19, 定理 11]）给出

$$\begin{aligned}\frac{n}{p(1-s)}\widetilde{\mathrm{V}}_{-sp}(K,\Pi_{p,+}^{*,s}f)&=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(f(x)-f(y))_+^p}{\|x-y\|_K^{n+ps}}\,dx\,dy\\&\geq\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(f^{\star}(x)-f^{\star}(y))_+^p}{\|x-y\|_{K^{\star}}^{n+ps}}\,dx\,dy\\&=\frac{n}{p(1-s)}\widetilde{\mathrm{V}}_{-sp}(K,\Pi_{p,+}^{*,s}f^{\star}).\end{aligned} \tag{5.3}$$

注意，各向异性 Hölder 常数可以用膨胀因子表示 r

$$\sup_{x\neq y}\frac{(f(x)-f(y))_+}{\|x-y\|_L^s}=\mathscr{A}_s(L,\Pi_{\infty,+}^{*,s}f),\quad\text{for every star body }L.$$

因此，应用命题 5.4–*(i)* 并令 $p\to\infty$ 代入不等式 (5.3)，即可立即得到 (5.2)。

(ii) 我们只需将*(i)*中的不等式与命题 5.4 结合起来即可。等号情形可由 (5.3) 中的等号情形推出, 参见例如 [19, 定理 11]。命题 5.5 的证明至此完成。

□

最后，本节的下一个命题将给出关于（分数阶） L^∞ 极投影体体积的仿射庞利亚–塞格不等式的变体。

推论 5.6. 设 $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 均为非负数。则有以下不等式：

(i) 对任意固定的 $s \in (0,1)$，有

$$|\Pi^{*,s}_{\infty,\pm} f|^{-\frac{s}{n}} \geq |\Pi^{*,s}_{\infty,\pm} f^\star|^{-\frac{s}{n}} \quad \textit{and} \quad |\Pi^{*,s}_{\infty} f|^{-\frac{s}{n}} \geq |\Pi^{*,s}_{\infty} f^\star|^{-\frac{s}{n}}.$$

(ii) 有

$$|\Pi^{*}_{\infty,\pm} f|^{-\frac{1}{n}} \geq |\Pi^{*}_{\infty,\pm} f^\star|^{-\frac{1}{n}} \quad \textit{and} \quad |\Pi^{*}_{\infty} f|^{-\frac{1}{n}} \geq |\Pi^{*}_{\infty} f^\star|^{-\frac{1}{n}}.$$

E当 f是某个 $\phi \in \mathrm{SL}(n)$ 下 $f^\star \circ \phi$ 的平移时，上述不等式中的等号成立。

证明。回顾一下， $f^\star \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$。

*(i)*包含关系 (2.4) 意味着，对于每个 $s \in (0,1)$ 和 $p \geq 1$，都有 $f, f^\star \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$。回顾一下，以下不等式成立（见 [19, 定理 13–14]）

$$|\Pi^{*,s}_{p,\pm} f|^{-\frac{s}{n}} \geq |\Pi^{*,s}_{p,\pm} f^\star|^{-\frac{s}{n}} \quad \text{and} \quad |\Pi^{*,s}_{p} f|^{-\frac{s}{n}} \geq |\Pi^{*,s}_{p} f|^{-\frac{s}{n}}, \quad \text{for every } p > 1. \tag{5.4}$$

令 p趋于 ∞，由定理 4.1 和命题 5.3，我们得到所需的不等式。

出于类似的原因，我们得到*(ii)*中的不等式，而等号成立的结论由（5.4）中的等式推出，从而完成证明。 □

5.3 端点利普希茨/赫尔德型等周不等式

对于 $1 < p < n$，仿射 Lutwak–Yang–Zhang 不等式将临界 L^{p^*} 范数（其中 $p^* := \frac{np}{n-p}$）与 f的 L^p 极投影体的体积联系起来，并强化了经典的 L^p 索博列夫不等式。更准确地说，以下不等式成立

$$\|f\|^p_{L^{\frac{np}{n-p}}(\mathbb{R}^n)} \leq \alpha_{n,p} |\Pi^*_p f|^{-\frac{p}{n}} \leq \beta_{n,p} \|\nabla f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \text{for every } f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n), \tag{5.5}$$

其中常数 $\alpha_{n,\,p}$ 和 $\beta_{n,\,p}$ 是最佳的，并且具有显式公式，见 [3, 25, 30]。Haddad 和 Ludwig [19] 最近证明了这些不等式的一个分数阶版本：对于每个 $s \in (0,\ 1)$ 以及 $p \in (1,\ n/s)$，有

$$\|f\|^p_{L^{\frac{np}{n-ps}}(\mathbb{R}^n)} \leq \widehat{\alpha}_{n,p,s} |\Pi^{*,s}_p f|^{-\frac{ps}{n}} \leq \widehat{\beta}_{n,p,s} [f]^p_{s,p}, \quad \text{for every } f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n), \tag{5.6}$$

其中常数 $\widehat{\alpha}_{n,\,p}$ 和 $\widehat{\beta}_{n,\,p}$ 是最佳的，且有明确的表达式，见 [19, 20]。在 [19, 定理 1],中，仿射分数阶 Sobolev 不等式的两部分均在条件 $1 < p < n/s$下陈述。然而，限制条件 $p < n/s$仅对第一部分（ Sobolev 型部分）至关重要。

在临界阈值 $p = n$ （见 (5.5)）（或 $p = n/s$（见 (5.6)）处，Sobolev 嵌入失效，而对于 $p > n$ ，只能嵌入 Hölder 空间的莫雷嵌入。因此，仿射 Sobolev 不等式无法直接推广到端点 $p = \infty$。尽管如此，仔细考察后可以发现，(5.5)（分别为 (5.6)）中的第二个不等式表示一个泛函仿射 L^p

等周不等式，对 $p > n$ （分别为 $p > n/s$）成立。下文将介绍通过各向异性 Hölder 常数及其相关的分数阶 L^∞极投影体 $\Pi^{*,s}_\infty f$表述的端点（$p = \infty$）型等周不等式；当 $s = 1$时，这些不等式化为 $\|\nabla f\|_{L^\infty}$和 $\Pi^*_\infty f$。

我们先回顾对偶混合体积不等式（参见 [29, 第 9 节5] 和 [16, B.29]）：对任意 $q < 0$，有

$$\widetilde{\mathrm{V}}_q(U, V) \geq |U|^{\frac{n-q}{n}} |V|^{\frac{q}{n}}, \quad \text{for every star bodies } U, V. \tag{5.7}$$

等号成立当且仅当 U 和 V是伸缩体，即存在 $c > 0$ 使得 $\rho_U = c\rho_V$在 $\mathbb{S}^{n-1}$上成立。

推论 5.7 (端点型等周不等式)。 设 K是一个有界星体。那么，对任意非零函数 $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$，有

$$\sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|_K^s} \geq |K|^{\frac{s}{n}} |\Pi^{*,s}_\infty f|^{-\frac{s}{n}}, \quad \textit{for every } s \in (0, 1), \tag{5.8}$$

and

$$\sup_{\xi \in \mathbb{S}^{n-1}} \frac{\|\langle \nabla f(\cdot), \xi \rangle\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}}{\|\xi\|_K} \geq |K|^{\frac{1}{n}} |\Pi^*_\infty f|^{-\frac{1}{n}}. \tag{5.9}$$

当 $\Pi^{*,s}_\infty f$ 和 $\Pi^*_\infty f$ 分别是 K的伸缩体时，(5.8) 和 (5.9) 中的等号成立。

注 5.8。

(1) 对非对称分数阶 L^p 极投影体$\Pi^{*,s}_\infty, \pm f$和 $\Pi^*_{\infty,\pm} f$，类似于 (5.8)–(5.9) 的不等式同样成立。

(2) 在 $K = B^n$ 的情形下，若 f 关于径向对称，则 (5.8) 和 (5.9) 中等号成立。这由 (5.10) 的等号情形可知，见 [19,定理 1]。

推论 *5.7* 的证明。 取定 $s \in$ (0,1)。将不等式 (5.7) 应用于 $U = K, V = \Pi^{*,s}_p f$ 和 $q = -sp$ 的情形，可得

$$\widetilde{\mathrm{V}}_{-sp}(K, \Pi^{*,s}_p f)^{\frac{1}{p}} \geq |K|^{\frac{1}{p} + \frac{s}{n}} |\Pi^{*,s}_p f|^{-\frac{s}{n}}. \tag{5.10}$$

令 p 趋于 ∞，由定理 4.4–*(i)*、定理 4.1–*(i)* 以及恒等式 (4.3)，可推得

$$\mathscr{d}_s(K, \Pi^{*,s}_\infty f) = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|_K^s} \geq |K|^{\frac{s}{n}} |\Pi^{*,s}_\infty f|^{-\frac{s}{n}}.$$

现在，在不等式 (5.8) 中，令 $s \to 1^-$，并利用定理 4.4–*(iii)* 和定理 4.1–*(iii)*，可得

$$\sup_{\xi \in \mathbb{S}^{n-1}} \frac{\|\langle \nabla f(\cdot), \xi \rangle\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}}{\|\xi\|_K} = \mathscr{d}(K, \Pi^*_\infty f) \geq |K|^{\frac{1}{n}} |\Pi^*_\infty f|^{-\frac{1}{n}}.$$

若 (5.10) 中等号成立，则对每个 $p > 1$，存在 $c_{s,p} > 0$ 使得

$$\|\xi\|_{\Pi^{*,s}_p f} = c_{s,p} \|\xi\|_K, \quad \text{for every } \xi \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

由命题 3.5–*(i)* 和注 3.8–*(i)*可知，存在与 p 无关的 $m_0, m_1 > 0$，使得 $m_0 \leq c_{s,p} \leq m_1$。因此，存在 $c_{s,p} > 0$，使得在取一个子列后，$c_p \to c_s$ 当 $p \to \infty$ 时成立。因此，利用命题 3.7–*(i)*，我们得到

$$\|\xi\|_{\Pi^{*,s}_\infty f} = \overline{c}_s \|\xi\|_K \quad \text{for a.e } \xi \in \mathbb{S}^{n-1}, \tag{5.11}$$

而 $\|\cdot\|_{\Pi^*_\infty f^s}$ 的连续性（见命题 3.5–*(ii)*）意味着 (5.11) 对每个 $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$ 都成立。最后我们得出，$\Pi^*_\infty f^s$ 是 K 的一个伸缩体。

假设对每个 $s \in (0,1)$，等式 (5.11) 对某个 $c_s > 0$成立，由此得到 (5.8) 中的等式；令 $s \to 1^-$，则得到 (5.9) 中的等式。一方面，由命题 3.5–*(ii)*可知，存在常数 $m_0 > 0$，使得对每个充分接近 1 的 s，都有 $c_s \geq m_0$。另一方面，根据注 3.8–*(ii)*，对每个 $s \in (1/2, 1)$ 和 $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$，都有 $\|\xi\|_{\Pi^*_\infty f^s} \leq 1 + M^2$。因此，存在常数 $m_1 > 0$，使得对每个 $s \in (1/2, 1)$，都有 $c_s \leq m_1$。于是，取一个子列后，我们可推知，当 $s \to 1^-$ 时，$c_s \to c$，其中某个 $c > 0$。结合这一事实、命题 3.7–*(iii)*以及规范函数的连续性，可得

$$\|\xi\|_{\Pi^*_\infty f} = c\|\xi\|_K \quad \text{for every } \xi \in \mathbb{S}^{n-1},$$

因此，$\Pi^*_\infty f$ 是 K的一个伸缩体。推论 5.7 得证。 □

致谢。 作者谨向 Aris Daniilidis、Alberto Domínguez Corella 和 Sebastián Tapia-García 致谢，感谢他们富有成效的讨论和宝贵意见，帮助改进了本文的表述。本研究部分由奥地利科学基金（FWF） [DOI 10.55776/P36344N]资助。

参考文献

[1] *L. AMBROSIO*、*G. DE PHILIPPIS* 和 *L. MARTINAZZI*，非局部周长泛函的 *Γ*-收敛，《*Manuscripta Mathematica*》*134*（*2011*），*377–403*。[2] *G. ARONSSON*、*M. G. CRANDALL* 和 *P. JUUTINEN*，绝对极小函数理论概述，《美国数学会通报》（新系列）*41*（*2004*），*439–505*。[3] *T. AUBIN*，等周问题与 *Sobolev* 空间，《微分几何杂志》*11*（*1976*），*573–598*。[4] *M. BOCEA* 和 *V. NESI*，Γ收敛、幂律泛函、L^∞中的变分原理及其应用，《*SIAM* 数学分析杂志》*39*（*2008*），*1550–1576*。[5] *J. BOURGAIN*、*H. BREZIS* 和 *P. MIRONESCU*，再论 *Sobolev* 空间，《最优控制与偏微分方程》，*IOS* 出版社，阿姆斯特丹，*2001*，*439–455*。[6] *H. BREZIS*，《泛函分析、*Sobolev* 空间与偏微分方程》，*Universitext*，施普林格，纽约，*2011*。[7] *A. BRIANI*、*F. PRINARI* 和 *A. GARRONI*，L^∞ 泛函的均匀化，《数学模型与方法及其在应用科学中的应用》*14*（*2004*），*1761–1784*。[8] *C. BRIZZI*、*G. CARLIER* 和 *L. DE PASCALE*，∞-最优传输问题的熵近似，《应用数学与优化》*90*（*2024*），第*10*号论文，*28*页。[9] *F. BROCK* 和 *A. Y. SOLYNIN*，通过极化实现对称化的方法，《美国数学会汇刊》*352*（*2000*），*1759–1796*。

[10] *A. BURCHARD*，重排不等式简明教程，*2009*，网址：*https://www.math.utoronto.ca/almut/rearrange.pdf*。[11] *P. CARDALIAGUET* 和 *F. PRIANI*，上确界泛函的上确界表示，《应用数学与优化》*52*（*2005*），*129–141*。[12] *T. CHAMPION*、*T. DE PASCALE* 和 *F. PRINARI*，Γ-收敛与上确界泛函的绝对极小元，《*ESAIM* 控制、优化与变分法》*10*（*2004*），*14–27*。[14] *V. CRISMALE*、*L. DE LUCA*、*A. KUBIN*、*A. NINNO* 和 *M. PONSIGLIONE*，s-分数阶热流的变分方法及极限情形 $s \to 0^+$ 和 $s \to 1^-$，《函数分析杂志》*248*（*2023*），第*109851*号论文，*38*页。[15] *L. D'ELIA*、*M. ELEUTERI* 和 *E. ZAPPALE*，向量情形下上确界泛函的均匀化（通过 L^p-近似），《分析与应用》（新加坡）*22*（*2024*），*1255–1302*。[16] *R. J. GARDNER*，《几何断层学》，第二版，《数学与应用百科全书》第*58*卷，剑桥大学出版社，纽约，*2006*。 L^∞ *C. KREISBECK* 和 *E. ZAPPALE*，非局部 L^∞-泛函的下半连续性与松弛，《变分法与偏微分方程》*59*（*2020*），第*138*号论文，*36*页。[18] *C. HABERL* 和 *F. E. SCHUSTER*，非对称仿射 L_p *Sobolev* 不等式，《函数分析杂志》*257*（*2009*），*641–658*。[19] *J. HADDAD* 和 *M. LUDWIG*，仿射分数阶 L^p *Sobolev* 不等式，《数学年刊》*388*（*2024*），*1091–1115*。[20] *J. HADDAD* 和 *M. LUDWIG*，仿射分数阶 *Sobolev* 不等式与等周不等式，《微分几何杂志》*129*（*2025*），*695–724*。[21] *M. LUDWIG*，各向异性分数阶 *Sobolev* 范数，《数学进展》*252*（*2014*），*150–157*。[22] *E. LUTWAK*，对偶混合体积，《太平洋数学杂志》*58*（*1975*），*531–538*。[23] *E. LUTWAK*，平均对偶截面测度与调和截面测度，《纯粹与应用数学年刊》*119*（*1979*），*139–148*。[24] *E. LUTWAK*，交体与对偶混合体积，《数学进展》*71*（*1988*），*232–261*。[25] *E. LUTWAK*、*D. YANG* 和 *G. ZHANG*，尖锐仿射 L_p *Sobolev* 不等式，《微分几何杂志》*62*（*2002*），*17–38*。[26] *D. MA*，非对称各向异性分数阶 *Sobolev* 范数，《数学档案》*103*（*2014*），*167–175*。[27] *V. MAZ'YA* 和 *T. SHAPOSHNIKOVA*，关于 *Bourgain*、*Brezis* 和 *Mironescu* 定理及分数阶 *Sobolev* 空间的极限嵌入，《函数分析杂志》*195*（*2002*），*230–238*。[28] *E. DI NEZZA*、*G. PALATUCCI* 和 *E. VALDINOCI*，分数阶 *Sobolev* 空间漫游指南，《数学科学通报》*134*（*2012*），*521–573*。

[29] R.SCHNEIDER，凸体：布伦-闵可夫斯基理论，第二版（扩充版），《数学与应用百科全书》第151卷，剑桥大学出版社，剑桥，2014年。

[30] G. Talenti，索博列夫不等式的最佳常数，《纯粹与应用数学年刊》110（1976年），353–372。

[31] Y. YU， L^{∞} 变分问题与阿伦森方程，《有理力学与分析档案》182 （2006年），153–180。

[32] G. ZHANG，仿射索博列夫不等式，《微分几何杂志》53（1999年），183–202。

Trí Minh LÊ

随机学与经济数学研究所，VADOR E105-04 维也纳工业大学，维
德纳大街8号，A-1040维也纳
电子邮件：minh.le@tuwien.ac.at https://sites.google.com/view/tri-minh-le 本研究获得 FWF（奥地利科学基金）项目资助，项目 DOI：10.55776/P-36344N。