arXiv:2601.05154v1 [math.OA] 8 Jan 2026

某些张量积下距离的稳定性及若干计算

SUMIT KUMAR

ABSTRACT. 我们证明，Kadison-Kastler 距离和 Christensen 距离在以下情形下具有稳定性：巴拿赫空间与任意含单位元的交换 C^*-代数的 Banach 空间内射张量积（分别地， C^*-代数与任意含单位元的 C^*-代数的 Banach 空间投射张量积）。

除了这些稳定性结果，我们还对某些交叉积算子代数的特定子代数之间的 Kadison-Kastler 距离、Christensen 距离和 Mashood-Taylor 距离进行了若干明确计算。

1. 引言

子代数之间的距离这一概念最早由 Kadison 和 Kastler 于1973年在 [14] 中引入。在20世纪80年代和90年代，这一概念受到了广泛关注，尤其是在算子代数扰动理论的背景下。Christensen、Phillips 和 Johnson 在这一领域做出了重要贡献，他们运用 Kadison–Kastler 距离，确立了若干关于 C^*-代数和冯·诺依曼代数在小扰动下稳定性的重要结果。

最近，Ino 和 Watatani 在 [12]，中将这一概念用于研究 C^*-代数的包含关系。受他们工作的启发，早期的一项工作 [10]，采用了类似的视角，将这一概念有效地应用于研究 C^*-代数包含关系的中间子代数格，并进行了一些具体计算。受 [10] 中对交叉积 C^*- 代数所作计算的启发，我们也在 [11] 中开始研究空间张量积 C^*-代数的子代数之间的此类距离。

算子代数理论中的一个重要未解问题，涉及 Kadison–Kastler 距离在张量积下的行为。具体而言，正如 Christensen 等人在 [7], 中所提到的，对于两个 C^*代数之间的距离与它们各自和一个固定的（核） C^*代数作张量积后所得代数之间的距离有何关系，目前尚未完全明了。也就是说，给定希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的两个 C^*代数$\mathcal{A}$和 $\mathcal{B}$，且它们的 Kadison–Kastler 距离很小，对于固定的核 C^*代数 $\mathcal{C}$，张量积 $\mathcal{A} \otimes^{\min} \mathcal{C}$ 和 $\mathcal{B} \otimes^{\min} \mathcal{C}$ 是否也仍然接近（作为 $B(\mathcal{H}) \otimes^{\min} \mathcal{C}$的子代数），这仍是一个未解问题。Christensen 距离也有类似的问题。围绕这一问题，Christensen 等人进行了各种尝试（例如，参见 [6], [8]和 [7]）。（与 [10, 11], 一样，我们将 Kadison–Kastler 距离和

2020 *Mathematics Subject Classification.* 46L05,47L40, 46M05。*Key words and phrases.* 算子代数的子代数、Kadison-Kastler 距离、Christensen 距离、Mashood-Taylor 距离、单射与射影张量积、Bures 拓扑。作者获得了科学与工业研究委员会（印度政府）通过高级研究奖学金提供的资助，CSIR 文件编号为**09/0263(12012)/2021-EMR-I**。1

Christensen 距离分别记为 d_{KK} 和 d_0。）以下是 Christensen 在这一方向上两项值得注意的结果：

定理 1.1. [6, 定理 3.1] 设 $\mathcal{C}$ 是一个带有 C^*-子代数 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的 C^*-代数，且设 $\mathcal{D}$ 是一个核 C^*-代数。若 $\mathcal{A}$ 具有性质 D_k（对某个 $k \in (0,\infty)$），且 $\mathcal{A} \subseteq_\gamma \mathcal{B}$，则 $\mathcal{A} \otimes^{\min} \mathcal{D} \subseteq_{6k\gamma} \mathcal{B} \otimes^{\min} \mathcal{D}$。

特别地，当 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 都具有性质 D_k 时，

$$d_0(\mathcal{A} \otimes^{\min} \mathcal{D}, \mathcal{B} \otimes^{\min} \mathcal{D}) \leq 6k d_0(\mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

定理 1.2. [7, 推论 4.7] 设 $\mathcal{C}$ 是一个带有 C^*-子代数 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的 C^*-代数，且设 $\mathcal{D}$ 是一个核 C^*-代数。那么，对于每个 l、$K \in \mathbb{N}$，存在一个常数 $L_{l,K}$（仅取决于 l 和 K），使得当 $\mathcal{A}$ 的长度至多为 l 且长度常数至多为 K 时，

$$d_{KK}(\mathcal{A} \otimes^{\min} \mathcal{D}, \mathcal{B} \otimes^{\min} \mathcal{D}) \leq L_{l,K} d_{KK}(\mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

最近，利用来自 [6], 的一些技巧， [11]在 C^*-代数范畴中得到了以下稳定性结果：

定理 1.3。 [11,定理 4。6] 设 $\mathcal{D}$ 是一个交换的 C^*-代数，且 $\mathcal{A}$ 和$\mathcal{B}$ 是 C^*-代数 $\mathcal{C}$的 C^*-子代数。那么，

$$d_{KK}(\mathcal{A} \otimes^{\min} \mathcal{D}, \mathcal{B} \otimes^{\min} \mathcal{D}) \leq d_{KK}(\mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

此外，若 $\mathcal{D}$ 含单位元，则

$$d_{KK}(\mathcal{A} \otimes^{\min} \mathcal{D}, \mathcal{B} \otimes^{\min} \mathcal{D}) = d_{KK}(\mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

值得注意的是，Christensen 等人有效地运用这类比较，证明了与扰动以及保持相近子代数某些不变量有关的一些基本结果。例如：

(a) 在 [6, 定理 4.3], 中，Christensen 证明，若内射 von Neumann 代数 N 近似包含于某个 von Neumann 代数 M中，则N 可通过酉共轭嵌入 M 。
(b) 在 [15], 中，Khoshkam 证明，若两个 C^*-代数的矩阵扩张充分（均匀地）接近，则它们的 K-群同构；根据 Christensen 的上述结果之一（见定理 1.1），由此可推得，若 $\mathcal{A}$ 是一个核 C^*-代数，则任何与 $\mathcal{A}$充分接近的 C^*-代数，其 K-群都与$\mathcal{A}$的相应群同构。(c) 此外，Christensen 等人（[7, §5]）进一步利用 Khoshkam 和 Christensen 的技巧证明，与属于某个特定族的 C^*- 代数充分接近的 C^*-代数具有同构的（有序） K-理论。

过去四十年左右，对 C^*-代数的非算子代数张量积（如巴拿赫空间射影张量积、算子空间射影张量积和 Haagerup 张量积）的研究，在算子代数领域变得十分重要——例如参见 [4, 1, 5, 16, 9] 及其中引用的文献。因此，从非算子代数张量积的角度提出类似的（上述）问题也很自然。为此，我们针对 Banach 空间的注入张量积和射影张量积，得到了上述结果的一些类似结论。具体而言，我们证明如下：

定理 3.6。 设 $\mathcal{X}$ 为一个巴拿赫空间， $C(K)$ 表示由紧豪斯多夫空间 K上的连续函数构成的巴拿赫空间。那么，对于 $\mathcal{X}$的任意两个闭子空间 $\mathcal{Y}$ 和 $\mathcal{Z}$，

$$d_{KK}(\mathcal{Y},\mathcal{Z}) = d_{KK}(\mathcal{Y}\otimes^{\varepsilon} C(K), \mathcal{Z}\otimes^{\varepsilon} C(K))$$

and

$$d_0(\mathcal{Y},\mathcal{Z}) = d_0(\mathcal{Y}\otimes^{\varepsilon} C(K), \mathcal{Z}\otimes^{\varepsilon} C(K)).$$

定理 4.8。 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是两个 C^*-代数，并且 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{C}$的 C^*-子代数。若 β 是满足 $\mathcal{A}\subseteq_\beta \mathcal{B}$的正标量，则 $\mathcal{A}\otimes^\gamma \mathcal{D}\subseteq_\beta \mathcal{B}\otimes^\gamma \mathcal{D}$。特别地，

$$d_0(\mathcal{A}\otimes^\gamma \mathcal{D}, \mathcal{B}\otimes^\gamma \mathcal{D}) \le d_0(\mathcal{A},\mathcal{B}).$$

此外，若 $\mathcal{D}$ 是含单位元的，则

$$d_0(\mathcal{A}\otimes^\gamma \mathcal{D}, \mathcal{B}\otimes^\gamma \mathcal{D}) = d_0(\mathcal{A},\mathcal{B}).$$

定理 4.9。 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是两个 C^*-代数，并且 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{C}$的 C^*-子代数。则，

$$d_{KK}(\mathcal{A}\otimes^\gamma \mathcal{D}, \mathcal{B}\otimes^\gamma \mathcal{D}) \le d_{KK}(\mathcal{A},\mathcal{B}).$$

此外，如果 $\mathcal{D}$ 是含单位元的，那么

$$d_{KK}(\mathcal{A}\otimes^\gamma \mathcal{D}, \mathcal{B}\otimes^\gamma \mathcal{D}) = d_{KK}(\mathcal{A},\mathcal{B}).$$

自然会问，能否计算某些算子代数之间的精确距离。为回答这个问题，我们在 [10], 中计算了若干特定算子代数实例之间的精确距离。类似地，在第 5.1 节和第 5.2 节中，我们对约化扭曲交叉积 C^*代数以及交叉积冯·诺伊曼代数中与离散群子群相关的子代数之间的 Kadison–Kastler 距离和 Christensen 距离进行了具体计算。此外，在本文末尾附近，我们计算了离散群与带迹冯·诺伊曼代数的交叉积中，与离散群子群相关的交叉积冯·诺伊曼子代数之间的 Mashood–Taylor 距离。

2. Preliminaries

2.1. **赋范空间子空间之间的两种距离概念**。

2.1.1. ***Kadison-Kastler*** 距离。 对于任意赋范空间 $\mathcal{X}$，其闭单位球记为 $B_1(\mathcal{X})$。对于 $\mathcal{X}$ 的任意子集 $\mathcal{S}$ 及任意元素 $x\in\mathcal{X}$，按照惯例， x 与 $\mathcal{S}$ 之间的距离定义为 $d(x,\ \mathcal{S}) = \inf\{\|x-s\|: s\in\mathcal{S}\}$.

对于赋范空间 $\mathcal{X}$ 中的任意两个子空间 $\mathcal{Y}$ 和 $\mathcal{Z}$，回顾（见 [14]），它们之间的 Kadison-Kastler 距离（记作 $d_{KK}(\mathcal{Y},\ \mathcal{Z})$）定义为它们的闭单位球之间的 Hausdorff 距离，即

$$d_{KK}(\mathcal{Y},\mathcal{Z}) := \max\left\{\sup_{y\in B_1(\mathcal{Y})} d(y, B_1(\mathcal{Z})), \sup_{z\in B_1(\mathcal{Z})} d(z, B_1(\mathcal{Y}))\right\}.$$

Re注 2.1。 设 $\mathcal{X}$ 为赋范空间。以下事实众所周知：

(1) $d_{KK}(\mathcal{Y},\mathcal{Z})\le 1$对于所有 $\mathcal{X}$ 的子空间 $\mathcal{Y},\mathcal{Z}$。(2) $d_{KK}(\mathcal{Y},\mathcal{Z}) = d_{KK}(\overline{\mathcal{Y}},\overline{\mathcal{Z}})$ $= d_{KK}(\mathcal{Y},\overline{\mathcal{Z}}) = d_{KK}(\overline{\mathcal{Y}},\mathcal{Z})$ 对于所有 $\mathcal{X}$ 的子空间 $\mathcal{Y},\mathcal{Z}$。

2.1.2. 近似包含与 *Christensen* 距离。 设 $\mathcal{X}$ 为一个赋范空间。回顾文献 [8] 中的定义：对于 $\mathcal{X}$ 的任意两个子空间 $\mathcal{Y}$ 和 $\mathcal{Z}$ 以及一个标量 $\gamma > 0$， $\mathcal{Y} \subseteq_\gamma \mathcal{Z}$ 若对每个 $y \in B_1(\mathcal{Y})$，都存在一个 $z \in \mathcal{Z}$ 使得 $\|y - z\| \leq \gamma$；并且， $\mathcal{Y}$ 与 $\mathcal{Z}$ 之间的 Christensen 距离定义为

$$d_0(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) = \inf\{\gamma > 0 : \mathcal{Y} \subseteq_\gamma \mathcal{Z} \text{ and } \mathcal{Z} \subseteq_\gamma \mathcal{Y}\}.$$

注 2.2。 设 $\mathcal{X}$ 为一个赋范空间。以下有用事实是众所周知的：

(1) $d_0(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) \leq 1$ 对于 $\mathcal{X}$的所有子空间 $\mathcal{Y}$、 $\mathcal{Z}$均成立。(2) $d_0(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) = d_0(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) = d_0(\mathcal{Y}, \overline{\mathcal{Z}})$ 对于 $\mathcal{X}$的所有子空间 $\mathcal{Y}$、 $\mathcal{Z}$均成立。(3) 距离 d_0 和 d_{KK} 在以下意义下是“等价的”：

$$d_0(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) \leq d_{KK}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) \leq 2d_0(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$$

对于 $\mathcal{X}$的所有子空间 $\mathcal{Y}$、 $\mathcal{Z}$均成立。 ([8, 注 2。3])

2.1.3. *Mashood-Taylor* 距离。 设 $\mathcal{M}$为一个带有忠实正规迹态 τ的冯·诺依曼代数。回顾 [10, 第 5] 节，对于 $\mathcal{M}$的任意两个子代数 $\mathcal{P}$和 $\mathcal{Q}$，它们之间的 Mashood-Taylor 距离定义为

$$d_{MT}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = d_{H,\|\cdot\|_\tau}(\widehat{B_1(\mathcal{P})}, \widehat{B_1(\mathcal{Q})}),$$

其中$d_{H,\ \|\cdot\|_\tau}$表示关于由范数 $\|\cdot\|_\tau$诱导的度量的 Hausdorff 距离，并且对于 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}$、 $\widehat{\mathcal{S}} := \{\widehat{x} : \ x \in \mathcal{S}\} \subseteq L^2(\mathcal{M}, \ \tau)$。

注 2.3. 设$(\mathcal{M}, \tau)$ 如上。则对于任意两个含单位元的 $*$-子代数 $\mathcal{P}$和 $\mathcal{Q}$ *of* $\mathcal{M}$,

(1) $d_{MT}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = d_{MT}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}^{S.O.T.}) = d_{MT}(\mathcal{P}^{S.O.T.}, \mathcal{Q}^{S.O.T.}) = d_{MT}(\mathcal{P}'', \mathcal{Q}'')$; 并且，([10,命题 5.5])(2) $d_{MT}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \leq d_{KK}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$。 ([10, 引理 5.6])

3. Distance between subspaces of injective tensor product of certain Banach spaces

3.1. 内射张量积。

定义 3.1. 设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 为巴拿赫空间， $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ 表示它们的代数张量积。对于任意元素 $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$，其内射范数定义为

$$\|u\|_\varepsilon = \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^n \varphi(x_i)\psi(y_i)\right| \ : \ \varphi \in \mathcal{B}_1(\mathcal{X}^*), \psi \in \mathcal{B}_1(\mathcal{Y}^*)\right\}.$$

相对于内射范数的 $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ 完备化记作 $\mathcal{X} \otimes^\varepsilon \mathcal{Y}$。巴拿赫空间 $\mathcal{X} \otimes^\varepsilon \mathcal{Y}$ 称为巴拿赫空间 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$的内射张量积。

注 3.2。 设 $\mathcal{X}$、$\mathcal{Y}$、$\mathcal{Z}$和 $\mathcal{W}$为赋范空间，且 $T_1 : \ \mathcal{X} \to \mathcal{W}$和$T_2 : \ \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ 为有界线性映射。那么，存在唯一的有界映射$T_1 \otimes^\varepsilon T_2 : \ \mathcal{X} \otimes^\varepsilon \mathcal{Y} \to \mathcal{W} \otimes^\varepsilon \mathcal{Z}$，使得对任意$x \in \mathcal{X}$、$y \in \mathcal{Y}$，有 $T_1 \otimes^\varepsilon T_2(x \otimes y) = T_1(x) \otimes T_2(y)$。此外，。（证明见 命题 3。2]，。）

以下恒等关系是众所周知的——例如参见（[18, 引理 6.4.16]和 [19, 第 3 节。2]）。

引理 3.3. 设 $\mathcal{X}$ 为一个巴拿赫空间，且 $C_0(\Omega)$ 表示局部紧豪斯多夫空间Ω上在无穷远处消失的复连续函数所构成的巴拿赫空间。那么， $C_0(\Omega) \otimes^{\varepsilon} \mathcal{X}$与巴拿赫空间 $C_0(\Omega\ \mathcal{X})$ 同构且等距；该空间由从Ω 到 $\mathcal{X}$ 且在无穷远处消失的连续函数构成。

众所周知，内射张量积在以下意义下保持子空间（证明见 [19] ）。

引理 3.4. 设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是巴拿赫空间，且 $\mathcal{Z}$ 是 $\mathcal{X}$ 的闭子空间。那么， $\mathcal{Z} \otimes \mathcal{Y}$ 上的恒等映射可延拓为一个等距映射，将 $\mathcal{Z} \otimes^{\varepsilon} \mathcal{Y}$ 映到 $\mathcal{X} \otimes^{\varepsilon} \mathcal{Y}$ 的闭子空间 $\mathcal{Z} \otimes \mathcal{Y}^{\|\cdot\|_{\varepsilon}}$ 上。

现在我们着手证明引言中所述的稳定性结果。首先，我们有以下与 [11, 定理 4.6], 类似的结果，其证明可完全照搬（参照 [11, 定理 4.6]的证明）。

定理 3.5。 设 $\mathcal{X}$ 是一个巴拿赫空间， $C_0(\Omega)$ 表示由局部紧豪斯多夫空间 Ω 上无穷远处消失的连续函数组成的巴拿赫空间。那么，对于 $\mathcal{X}$ 的任意两个闭子空间 $\mathcal{Y}$ 和 $\mathcal{Z}$，

$$d_{KK}\left(\mathcal{Y} \otimes^{\varepsilon} C_0(\Omega), \mathcal{Z} \otimes^{\varepsilon} C_0(\Omega)\right) \leq d_{KK}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$$

and

$$d_0\left(\mathcal{Y} \otimes^{\varepsilon} C_0(\Omega), \mathcal{Z} \otimes^{\varepsilon} C_0(\Omega)\right) \leq d_0(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}).$$

对于紧豪斯多夫空间 K 上连续函数构成的巴拿赫空间 $C(K)$, Kadison-Kastler 距离和 Christensen 距离都具有稳定性。

定理 3.6。 设 $\mathcal{X}$ 是一个巴拿赫空间， $C(K)$ 表示由紧豪斯多夫空间 K上的连续函数组成的巴拿赫空间。那么，对于 $\mathcal{X}$ 的任意两个闭子空间 $\mathcal{Y}$ 和 $\mathcal{Z}$，

$$d_{KK}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) = d_{KK}(\mathcal{Y} \otimes^{\varepsilon} C(K), \mathcal{Z} \otimes^{\varepsilon} C(K))$$

and

$$d_0(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) = d_0(\mathcal{Y} \otimes^{\varepsilon} C(K), \mathcal{Z} \otimes^{\varepsilon} C(K).$$

证明。我们只给出 Christensen 距离的证明，因为 Kadison-Kastler 距离的证明类似。

根据定理 3.5，只需证明

$$d_0(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) \leq d_0(\mathcal{Y} \otimes^{\varepsilon} C(K), \mathcal{Z} \otimes^{\varepsilon} C(K)).$$

首先注意，自然等距映射 θ 将 $\mathcal{X}$ 映到 $\mathcal{X} \otimes^{\varepsilon} \mathbb{C}\mathbb{1}$，并分别将 $\mathcal{Y}$ 和 $\mathcal{Z}$ 映到 $\mathcal{Y} \otimes^{\varepsilon} \mathbb{C}\mathbb{1}$ 和 $\mathcal{Z} \otimes^{\varepsilon} \mathbb{C}\mathbb{1}$，其中 $\mathbb{1}$ 是 K 上取值恒为 1 的常值函数。

令 $\epsilon > 0$，并固定一个 $\gamma_0 > 0$，使得

$$d_0(\mathcal{Y} \otimes^{\varepsilon} C(K), \mathcal{Z} \otimes^{\varepsilon} C(K)) < \gamma_0 < d_0(\mathcal{Y} \otimes^{\varepsilon} C(K), \mathcal{Z} \otimes^{\varepsilon} C(K)) + \epsilon.$$

这意味着 $\mathcal{Y} \otimes^{\varepsilon} C(K) \subseteq_{\gamma_0} \mathcal{Z} \otimes^{\varepsilon} C(K)$，且 $\mathcal{Z} \otimes^{\varepsilon} C(K) \subseteq_{\gamma_0} \mathcal{Y} \otimes^{\varepsilon} C(K)$。

令 $y \in B_1(\mathcal{Y})$。于是， $\theta(y) = y \otimes \mathbb{1} \in B_1(\mathcal{Y} \otimes^{\varepsilon} \mathbb{C}\mathbb{1}) \subseteq B_1(\mathcal{Y} \otimes^{\varepsilon} C(K))$；因此，存在一个 $z \in \mathcal{Z} \otimes^{\varepsilon} C(K)$，使得 $\|y \otimes \mathbb{1} - z\|_{\varepsilon} \leq \gamma_0$。固定 ϕ 在 $C(K)$ 上的一个态，并根据定理 3.2，考虑自然映射

$$\mathrm{id}_{\mathcal{X}} \otimes^{\varepsilon} \phi\mathbb{1} : \mathcal{X} \otimes^{\varepsilon} C(K) \to \mathcal{X} \otimes^{\varepsilon} \mathbb{C}\mathbb{1},$$

其中 $\|\mathrm{id}_{\mathcal{X}} \otimes^{\varepsilon} \phi\| = \|\mathrm{id}_{\mathcal{X}}\|\|\phi\| = 1$。显然，它将 $\mathcal{Z} \otimes^{\varepsilon} C(K)$ 映射到 $\mathcal{Z} \otimes^{\varepsilon} \mathbb{C}\mathbb{1}$ 上。因此，$z_0 := (\mathrm{id}_{\mathcal{X}} \otimes^{\varepsilon} \phi\mathbb{1})(z) \in \mathcal{Z} \otimes^{\varepsilon} \mathbb{C}\mathbb{1}$；从而 $\theta^{-1}(z_0) \in \mathcal{Z}$ 以及

$$\begin{aligned} \|y - \theta^{-1}(z_0)\| &= \|\theta^{-1}(y \otimes \mathbb{1}) - \theta^{-1}(z_0)\| \\ &= \|y \otimes \mathbb{1} - z_0\|_{\varepsilon} \\ &= \|(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} \otimes^{\varepsilon} \phi\mathbb{1})(y \otimes \mathbb{1} - z)\|_{\varepsilon} \\ &\leq \|y \otimes \mathbb{1} - z\|_{\varepsilon} \\ &\leq \gamma_0. \end{aligned}$$

因此，$\mathcal{Y} \subseteq_{\gamma_0} \mathcal{Z}$。同理，$\mathcal{Z} \subseteq_{\gamma_0} \mathcal{Y}$；于是

$$d_0(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) \leq \gamma_0 < d_0(\mathcal{Y} \otimes^{\varepsilon} C(K), \mathcal{Z} \otimes^{\varepsilon} C(K)) + \epsilon.$$

由于 $\epsilon > 0$ 是任意的，因此可得 $d_0(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) \leq d_0(\mathcal{Y} \otimes^{\varepsilon} C(K)\ \mathcal{Z} \otimes^{\varepsilon} C(K))$。 □

4. Distance between subalgebras of Banach space projective tensor product of C^*-algebras

4.1. **Banach 空间投射张量积**。

定义 4.1。设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 为 *Banach* 空间，$\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ 表示它们的代数张量积。对于任意元素 $u \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$，其射影范数定义为

$$\|u\|_{\gamma} = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\|y_i\| \ : \ u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \right\}.$$

$\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ 关于射影范数的完备化记为 $\mathcal{X} \otimes^{\gamma} \mathcal{Y}$，称为巴拿赫空间 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 的射影张量积。

注 4.2。设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是两个 C^*-代数。那么，很容易看出（并且这是众所周知的），它们的射影张量积 $\mathcal{C} \otimes^{\gamma} \mathcal{D}$ 自然继承了巴拿赫 $*$-代数的结构。

下面的注记与定理 3.2 类似——证明见 [19, 命题 2.3] 。

注 4.3。设 $\mathcal{X}$、$\mathcal{Y}$、$\mathcal{Z}$ 和 $\mathcal{W}$ 是赋范空间，且 $T_1 : \mathcal{X} \to \mathcal{W}$ 和 $T_2 : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ 是有界线性映射。那么，存在唯一的有界线性映射 $T_1 \otimes^{\gamma} T_2 : \mathcal{X} \otimes^{\gamma} \mathcal{Y} \to \mathcal{W} \otimes^{\gamma} \mathcal{Z}$，使得对于任意 $x \in \mathcal{X}$、$y \in \mathcal{Y}$，有 $(T_1 \otimes^{\gamma} T_2)(x \otimes y) = T_1(x) \otimes T_2(y)$。此外，$\|T_1 \otimes^{\gamma} T_2\| = \|T_1\|\|T_2\|$。

以下这一著名结果是比较赋范代数中子代数之间的距离，以及它们与一个固定赋范代数的张量积之间的距离时非常重要的工具——证明见 [19, 命题 2.2]。

命题 4.4。设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 为巴拿赫空间。那么，$\mathcal{X} \otimes^{\gamma} \mathcal{Y}$ 的闭单位球$B_1(\mathcal{X} \otimes^{\gamma} \mathcal{Y})$ 是集合 $B_1(\mathcal{X}) \otimes B_1(\mathcal{Y})$ 的闭凸包。

一般而言，给定 $\mathcal{X}$的一个子空间 $\mathcal{Z}$，射影张量积 $\mathcal{Z} \otimes^{\gamma} \mathcal{Y}$无法等距地识别为 $\mathcal{X} \otimes^{\gamma} \mathcal{Y}$的一个子空间。然而，如果我们从$C^*$-代数出发，则有以下正面结果。

命题 4.5. [9, 定理 2.6] 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是两个 C^*-代数，且 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{C}$的一个 C^*-子代数。则 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{D}$ 上的恒等映射可延拓为一个等距的 $*$-代数映射，该映射将 $\mathcal{A} \otimes^{\gamma} \mathcal{D}$ 映到 $\mathcal{C} \otimes^{\gamma} \mathcal{D}$的闭 $*$-子代数 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{D}^{\|\cdot\|_{\gamma}}$ 上。

以下命题是 [11, 命题 4.1]的自然类比。

命题 4.6。 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 为 C^*-代数。设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{C}$ 的 C^*-子代数，并设 $\mathcal{P}$ 为 $\mathcal{D}$ 的一个 C^*-子代数。若存在从 $\mathcal{D}$ 到 $\mathcal{P}$ 的条件期望，则

$$d_0(\mathcal{A}\otimes^\gamma \mathcal{P}, \mathcal{B}\otimes^\gamma \mathcal{P}) \leq d_0(\mathcal{A}\otimes^\gamma \mathcal{D}, \mathcal{B}\otimes^\gamma \mathcal{D})$$

and

$$d_{KK}(\mathcal{A}\otimes^\gamma \mathcal{P}, \mathcal{B}\otimes^\gamma \mathcal{P}) \leq d_{KK}(\mathcal{A}\otimes^\gamma \mathcal{D}, \mathcal{B}\otimes^\gamma \mathcal{D}).$$

证明。 设 $E: \mathcal{D}\to\mathcal{P}$ 为一个条件期望。根据定理 4.5，我们可以将 $\mathcal{A}\otimes^\gamma \mathcal{P}$ 和 $\mathcal{B}\otimes^\gamma \mathcal{P}$ 分别视为 $\mathcal{C}\otimes^\gamma \mathcal{D}$ 的 Banach $*$- 子代数。设 $\epsilon>0$，并固定一个 $\gamma_0>0$ 使得

$$d_0(\mathcal{A}\otimes^\gamma \mathcal{D}, \mathcal{B}\otimes^\gamma \mathcal{D}) < \gamma_0 < d_0(\mathcal{A}\otimes^\gamma \mathcal{D}, \mathcal{B}\otimes^\gamma \mathcal{D}) + \epsilon.$$

这意味着 $\mathcal{A}\otimes^\gamma \mathcal{D} \subseteq_{\gamma_0} \mathcal{B}\otimes^\gamma \mathcal{D}$ 和 $\mathcal{B}\otimes^\gamma \mathcal{D} \subseteq_{\gamma_0} \mathcal{A}\otimes^\gamma \mathcal{D}$。

设 $x\in B_1(\mathcal{A}\otimes^\gamma \mathcal{P}) \subseteq B_1(\mathcal{A}\otimes^\gamma \mathcal{D})$。那么，存在一个 $y\in\mathcal{B}\otimes^\gamma \mathcal{D}$ 使得$\|x-y\|_\gamma \leq \gamma_0$。考虑映射 $\mathrm{id}_\mathcal{C}\otimes^\gamma E$：根据定理 4.3，$\mathcal{C}\otimes^\gamma \mathcal{D}\to\mathcal{C}\otimes^\gamma \mathcal{P}$with$\|\mathrm{id}_\mathcal{C}\otimes^\gamma E\| = \|E\| \leq 1$。显然，它固定 $\mathcal{C}\otimes^\gamma \mathcal{P}$。因此，$y_0 := (\mathrm{id}_\mathcal{C}\otimes^\gamma E)(y) \in \mathcal{B}\otimes^\gamma \mathcal{P}$并且

$$\begin{aligned}\|x-y_0\|_\gamma &= \|(\mathrm{id}_\mathcal{C}\otimes^\gamma E)(x-y)\|_\gamma \\ &\leq \|x-y\|_\gamma \leq \gamma_0.\end{aligned}$$

所以，$\mathcal{A}\otimes^\gamma \mathcal{P} \subseteq_{\gamma_0} \mathcal{B}\otimes^\gamma \mathcal{P}$。类似地，$\mathcal{B}\otimes^\gamma \mathcal{P} \subseteq_{\gamma_0} \mathcal{A}\otimes^\gamma \mathcal{P}$。因此，

$$d_0(\mathcal{A}\otimes^\gamma \mathcal{P}, \mathcal{B}\otimes^\gamma \mathcal{P}) \leq \gamma_0 < d_0(\mathcal{A}\otimes^\gamma \mathcal{D}, \mathcal{B}\otimes^\gamma \mathcal{D}) + \epsilon.$$

从而，

$$d_0(\mathcal{A}\otimes^\gamma \mathcal{P}, \mathcal{B}\otimes^\gamma \mathcal{P}) \leq d_0(\mathcal{A}\otimes^\gamma \mathcal{D}, \mathcal{B}\otimes^\gamma \mathcal{D}).$$

关于 Kadison-Kastler 距离的证明是类似的，具体细节留给读者。□

以下是前一个命题的一个简单推论。

推论 4.7. 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是 C^*-代数，且 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{C}$的 C^*-子代数。若 $\mathcal{D}$ 是含单位元的，则

$$d_{KK}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \leq d_{KK}(\mathcal{A}\otimes^\gamma \mathcal{D}, \mathcal{B}\otimes^\gamma \mathcal{D})$$

and

$$d_0(\mathcal{A},\mathcal{B}) \leq d_0(\mathcal{A}\otimes^\gamma \mathcal{D}, \mathcal{B}\otimes^\gamma \mathcal{D}).$$

定理 4.8. 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是 C^*-代数，且 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{C}$的 C^*-子代数。若 β 是满足 $\mathcal{A}\subseteq_\beta \mathcal{B}$的正标量，则 $\mathcal{A}\otimes^\gamma \mathcal{D} \subseteq_\beta \mathcal{B}\otimes^\gamma \mathcal{D}$。特别地，

$$d_0(\mathcal{A}\otimes^\gamma \mathcal{D}, \mathcal{B}\otimes^\gamma \mathcal{D}) \leq d_0(\mathcal{A},\mathcal{B}).$$

此外，若 $\mathcal{D}$ 是含单位元的，则

$$d_0(\mathcal{A}\otimes^\gamma \mathcal{D}, \mathcal{B}\otimes^\gamma \mathcal{D}) = d_0(\mathcal{A},\mathcal{B}).$$

证明。 由于 $B_1(\mathcal{A}\otimes\mathcal{D})$ 在 $B_1(\mathcal{A}\otimes^\gamma \mathcal{D})$ 中稠密，只需证明 $\mathcal{A}\otimes\mathcal{D}\subseteq_\beta \mathcal{B}\otimes\mathcal{D}$。

设 $x \in B_1(\mathcal{A} \otimes \mathcal{D})$。于是，根据定理 4.4 $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i(a_i \otimes d_i)$，其中 $a_i \in B_1(\mathcal{A})$，$d_i \in B_1(\mathcal{D})$，$0 \leq \alpha_i \leq 1$ 和 $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$。由于 $\mathcal{A} \subseteq_\beta \mathcal{B}$，对每个 a_i，都存在一个 b_i，属于 $\mathcal{B}$，使得 $\|a_i - b_i\| \leq \beta$. 因此，$y := \sum_{i=1}^n \alpha_i(b_i \otimes d_i) \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{D}$ 并且

$$\|x - y\|_\gamma = \|\sum_{i=1}^n \alpha_i(a_i - b_i) \otimes d_i\|_\gamma \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \|a_i - b_i\| \|d_i\| \leq \beta.$$

因此，$\mathcal{A} \otimes \mathcal{D} \subseteq_\beta \mathcal{B} \otimes \mathcal{D}$。

当 $\mathcal{D}$ 为含单位元的时，最后一个等式由定理 4.7 得出。 □

同理，我们还可以得到以下结论：

定理 4.9。设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是 C^*-代数，且 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{C}$的 C^*-子代数。则，

$$d_{KK}(\mathcal{A} \otimes^\gamma \mathcal{D}, \mathcal{B} \otimes^\gamma \mathcal{D}) \leq d_{KK}(\mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

此外，如果 $\mathcal{D}$ 为含单位元的，则

$$d_{KK}(\mathcal{A} \otimes^\gamma \mathcal{D}, \mathcal{B} \otimes^\gamma \mathcal{D}) = d_{KK}(\mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

5. Some concrete calculations

在 [10], 中，我们对交叉积子代数之间的 Kadison-Kastler 距离和 Christensen 距离进行了一些具体计算。有趣的是，我们观察到，当离散群 G通过群同态 $\alpha : G \to$Aut($\mathcal{A}$)作用于 C^*-代数 $\mathcal{A}$时，对于G的任意两个不同子群 H 和 K，

(1) $d_{KK}(A \rtimes_\alpha^r H, A \rtimes_\alpha^r K) = 1 = d_0(A \rtimes_\alpha^r H, A \rtimes_\alpha^r K)$ in $\mathcal{A} \rtimes_\alpha^r G$; and,
(2) $d_{KK}(A \rtimes_\alpha^u H, A \rtimes_\alpha^u K) = 1 = d_0(A \rtimes_\alpha^u H, A \rtimes_\alpha^u K)$ in $A \rtimes_\alpha^u G$.

在本节中，我们对 C^*-代数中的约化扭曲交叉积子代数以及冯·诺依曼代数中的交叉积子代数进行类似的计算。

5.1.**约化扭曲交叉积C^*-代数中子代数之间的距离**。

5.1.1. 约化扭曲交叉积。设 G为离散群，$\mathcal{A}$为含单位元的C^*-代数。离散扭曲 C^*-动力系统是一个四元组 $(\mathcal{A}, G, \alpha, \sigma)$，由含单位元的 C^*-代数 $\mathcal{A}$、离散群 G 以及一对映射 $\alpha : G \to$ Aut($\mathcal{A}$) 和$\sigma :\ G \times G \to \mathcal{U}(\mathcal{A})$组成，并满足

$$\begin{aligned} \alpha_s \circ \alpha_t &= Ad_{\sigma(s,t)} \circ \alpha_{st}; \\ \sigma(r,s)\sigma(rs,t) &= \alpha_r(\sigma(s,t))\sigma(r,st); \text{ and,} \\ \sigma(s,e) &= \sigma(e,s) = 1 \end{aligned}$$

对于所有 $r,\ s,\ t \in G$。

对于给定的离散扭曲 C^*-动力系统 $(\mathcal{A}, G, \alpha, \sigma)$，其中 $\mathcal{A}$ 在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上有忠实且非退化的表示，约化扭曲交叉积 $\mathcal{A} \rtimes_{(\alpha,\sigma)}^r G$（有时也记作 $C_r^*(\mathcal{A}, G, \alpha, \sigma)$）可定义为由 $\pi_\alpha(\mathcal{A})$ 和 $\lambda_\sigma^G(G)$ 在 $\mathcal{B}(l^2(G, \mathcal{H}))$ 中生成的 C^*-代数，其中 π_α 是 $\mathcal{A}$ 在 $l^2(G, \mathcal{H})$ 上的忠实表示，定义如下

$$(\pi_\alpha(a)\zeta)(h) = \alpha_{h^{-1}}(a)\zeta(h),$$

并且，对于每个 $g \in G$， $\lambda_\sigma^G(g)$ 是 $l^2(G,\mathcal{H})$ 上定义如下的酉算子

$$(\lambda_\sigma^G(g)\zeta)(h) = \sigma(h^{-1},g)\zeta(g^{-1}h),$$

对于 $a \in \mathcal{A}, \zeta \in l^2(G,\mathcal{H})$ $h \in G$。这一对 $(\pi_\alpha, \lambda_\sigma^G)$ 满足协变关系

$$\begin{aligned} \pi_\alpha(\alpha_g(a)) &= \lambda_\sigma^G(g)\pi_\alpha(a)\lambda_\sigma^G(g)^* \text{ and} \\ \lambda_\sigma^G(g)\lambda_\sigma^G(h) &= \pi_\alpha(\sigma(g,h))\lambda_\sigma^G(gh) \end{aligned}$$

对于所有 $a \in \mathcal{A}$ 和 $g,h \in G$。众所周知，除去 $*$-同构的差异，$\mathcal{A} \rtimes_{(\alpha,\sigma)}^r G$ 与 $\mathcal{A}$ 的忠实表示无关。为方便起见，我们将 $\mathcal{A}$ 与 $\pi_\alpha(\mathcal{A})$ 等同。考虑子集

$$C_c(G,\mathcal{A},\alpha,\sigma) := \left\{ \sum_{g\in F} a_g \lambda_\sigma^G(g) \ : \ F \in \mathcal{F}(G),\ a_g \in \mathcal{A},\ g \in G \right\}$$

$\mathcal{A} \rtimes_{(\alpha,\sigma)}^r G$ 的子集，其中 $\mathcal{F}(G)$ 表示 G 的有限子集的集合。于是，$C_c(G,\mathcal{A},\alpha,\sigma)$ 是 $\mathcal{A} \rtimes_{(\alpha,\sigma)}^r G$ 的一个含单位元的稠密 $*$-子代数。此外，我们有

$$\begin{aligned} (\lambda_\sigma^G(t))^* &= \lambda_\sigma^G(t^{-1})\sigma(t,t^{-1})^* = \sigma(t,t^{-1})^*\lambda_\sigma^G(t^{-1}), \text{ and} \\ x_g^* &= \alpha_g(x_{g^{-1}})^*\sigma(g^{-1},g)^* \\ &= \sigma(g,g^{-1})^*\alpha_g(x_{g^{-1}})^* \end{aligned}$$

对所有 $t,\ g \in G.$

以下关于约化扭曲交叉积的观察非常有用——更多内容请参见 [2], [3]。

注 5.1。设 $\mathcal{A}$、G 和 α 如上，并设 H 是 G 的子群。

(1) 存在一个忠实条件期望 E： $\mathcal{A} \rtimes_{(\alpha,\sigma)}^r G \to \mathcal{A}$，使得对所有 $t \in G$、$t \neq e$，有 $E(\lambda_\sigma^G(t)) = 0$。（[3, 定理 2。2]）(2) 将 $\mathcal{A} \rtimes_{(\alpha,\sigma)}^r G$ 视为一个（右）预希尔伯特 C^*-模（在 $\mathcal{A}$ 上），其内积取值于 $\mathcal{A}$，定义为

$$\langle x,y\rangle_{\mathcal{A}} = E(x^*y),\ \textit{for } x,y \in \mathcal{A} \rtimes_{(\alpha,\sigma)}^r G.$$

进一步，考虑恒等映射 η_E： $\mathcal{A} \rtimes_{(\alpha,\sigma)}^r G \to \mathcal{A} \rtimes_{(\alpha,\sigma)}^r G$，其中将陪域视为预希尔伯特 $\mathcal{A}$-模。由于 E 是一个压缩映射，

$$\|\eta_E(x)\| = \|E(x^*x)\|^{\frac{1}{2}} \leq \|x\|$$

对所有 $x \in \mathcal{A} \rtimes_{(\alpha,\sigma)}^r G$。

(3) 单射 $C_c(H,\mathcal{A},\alpha,\sigma) \ni z \mapsto z \in C_c(G,\mathcal{A},\alpha,\sigma)$ 可扩展为从 $\mathcal{A} \rtimes_{(\alpha,\sigma)}^r H$ 到 $\mathcal{A} \rtimes_{(\alpha,\sigma)}^r G$ 的单射 $*$- 同态。因此，$\mathcal{A} \rtimes_{(\alpha,\sigma)}^r H$ 可以视为 $\mathcal{A} \rtimes_{(\alpha,\sigma)}^r G$ 的一个 C^*-子代数。（见 [20,§4.26]。）

以下有用的观察可由 [3, 推论 2.3] 得出。不过，为求完整起见，我们给出一个直接证明。

引理 5.2。设 $(\mathcal{A},G,\alpha,\sigma)$ 是一个（离散）扭曲 C^*-动力系统。若对某个 $F \in \mathcal{F}(G)$，有 $x = \sum_{g\in F} x_g\lambda_\sigma(g) \in C_c(G,\mathcal{A},\sigma)$，则

$$\|x_g\|^2 \leq \|E(x^*x)\| = \|\eta_E(x)\|^2$$

对所有 $g \in F$。

证明。 注意，对于任意 $g \in G$,

$$(x^*x)_g = \sum_{h\in G} x_h^* \alpha_h(x_{h^{-1}g})\sigma(h, h^{-1}g),$$

约定 $x_t = 0$ for $t \notin F$。因此,

$$\begin{aligned} E(x^*x) &= E(\sum_{g\in G} x^*x(g)\lambda_\sigma^G(g)) = (x^*x)_e \\ &= \sum_{h\in G} x_h^*\alpha_h(x_{h^{-1}})\sigma(h, h^{-1}) \\ &= \sum_{h\in G} \sigma(h, h^{-1})^*\alpha_h(x_{h^{-1}}^* x_{h^{-1}})\sigma(h, h^{-1}) \\ &= \sum_{h\in G} \sigma(h, h^{-1})^*(\alpha_h \circ \alpha_{h^{-1}})(\alpha_h(x_{h^{-1}}^* x_{h^{-1}}))\sigma(h, h^{-1}) \\ &= \sum_{h\in G} \alpha_h(x_{h^{-1}}^* x_{h^{-1}}) \\ &= \sum_{h\in G} \alpha_{h^{-1}}(x_h^* x_h). \end{aligned}$$

特别地，对于每个 $g \in F$, $E(x^*x) \geq \alpha_{g^{-1}}(x_g^* x_g)$。因此,

$$\|\eta_E(x)\|^2 = \|E(x^*x)\| \geq \|\alpha_{g^{-1}}(x_g^* x_g)\| = \|x_g\|^2$$

对于所有 $g \in F$。 □

命题 5.3。 设 $(\mathcal{A}, G, \alpha, \sigma)$ 是一个（离散）扭曲的 C^*-动力系统，并设 H 和 K 是 G 的两个不同子群。那么，

$$d_{KK}(C_c(H, \mathcal{A}, \alpha, \sigma), C_c(K, \mathcal{A}, \alpha, \sigma)) = 1 = d_0(C_c(H, \mathcal{A}, \alpha, \sigma), C_c(K, \mathcal{A}, \alpha, \sigma))$$

在 $\mathcal{A} \rtimes^r_{(\alpha,\sigma)} G$中。

证明。注意，由定理 2.1(1), $d_{KK}(C_c(H, \mathcal{A}, \sigma)\ C_c(K, \mathcal{A}, \sigma)) \leq 1$，并且

$$d_0(C_c(H, \mathcal{A}, \alpha, \sigma), C_c(K, \mathcal{A}, \alpha, \sigma)) \leq d_{KK}(C_c(H, \mathcal{A}, \alpha, \sigma), C_c(K, \mathcal{A}, \alpha, \sigma)),$$

由定理 2.2 可知。因此，只需证明

$$d_0(C_c(H, \mathcal{A}, \sigma), C_c(K, \mathcal{A}, \sigma)) \geq 1.$$

由于 H和 K 不同，因此 $H \neq H \cap K$ 或 $K \neq H \cap K$成立。不失一般性，假设 $H \neq H \cap K$。那么，根据定理 5.1(2) 和定理 5.2，我们得到

$$\|\lambda_\sigma(h) - x\| \geq \|\eta_E(\lambda_\sigma(h) - x)\|_{\mathcal{A}} \geq 1$$

对所有 $h \in H \setminus H \cap K$, $x \in C_c(K, \mathcal{A}, \alpha, \sigma)$ 均成立。这说明，只要 $0 < \beta < 1$，就有 $C_c(H, \mathcal{A}, \alpha, \sigma) \nsubseteq_\beta C_c(K, \mathcal{A}, \alpha, \sigma)$。换言之，若对某个 $\beta > 0$，有 $C_c(H, \mathcal{A}, \alpha, \sigma) \subseteq_\beta C_c(K, \mathcal{A}, \alpha, \sigma)$，则 β 必为 ≥ 1。

因此，根据 d_0 的定义，我们必有

$$d_0(C_c(H, \mathcal{A}, \alpha, \sigma), C_c(K, \mathcal{A}, \alpha, \sigma)) \geq 1.$$

□

根据定理 2.1、定理 2.2 及前述命题，我们可以直接推出:

推论 5.4。 设 G、H、K、$\mathcal{A}$、α 和 σ 如定理 *5.3* 中所述。那么，

$$d_{KK}(\mathcal{A} \rtimes^r_{(\alpha,\sigma)} H, \mathcal{A} \rtimes^r_{(\alpha,\sigma)} K) = 1 = d_0(\mathcal{A} \rtimes^r_{(\alpha,\sigma)} H, \mathcal{A} \rtimes^r_{(\alpha,\sigma)} K).$$

5.2. **交叉积冯·诺依曼代数的子代数之间的距离**。设 G 是离散群，它通过 $*$-自同构 $\alpha_g, g \in G$ 作用于冯·诺依曼代数 $\mathcal{M} \subseteq B(\mathcal{H})$。设 $\tilde{\mathcal{H}} = l^2(G, \mathcal{H})$ 是 G 上所有平方可和的 $\mathcal{H}$-值函数构成的集合。考虑 $\tilde{\mathcal{M}}$ 的忠实表示 π 以及在 $\mathcal{H}$ 上的 G 的忠实表示 λ，其定义为

$$\pi(a)\xi(g) = \alpha_{g^{-1}}(a)\xi(g), \quad \lambda(g)\xi(h) = \xi(g^{-1}h),$$

对所有 $\xi \in \mathcal{H}, g \in G, h \in G, a \in \mathcal{M}$ 均成立。这些表示满足协变关系

$$\lambda(g)\pi(a)\lambda(g)^* = \pi(\alpha_g(a))$$

对所有 $g \in G$ 和 $a \in \mathcal{M}$ 均成立。由 $\pi(\mathcal{M})$ 和 $\lambda(G)$ 生成的冯·诺依曼代数称为 $\mathcal{M}$ 关于 α 的交叉积代数，其中 G 对 $\mathcal{M}$ 作用，记作 $\mathcal{M} \rtimes_\alpha G$。

以下观察在交叉积冯·诺伊曼代数中非常有用。详情请参见 [17, 第 255] 页。

注 5.5。 令 $\mathcal{M}$、G 和 α 如上所述。

(1) 考虑 $\mathcal{M}_0 := \{\sum_{g\in G} \pi(x(g))\lambda(g) \mid x : G \to \mathcal{M}$具有有限支撑$\}$。那么，$\mathcal{M}_0$ 是 $\mathcal{M} \rtimes_\alpha G$ 的一个 σ-弱稠密含单位元的 $*$-子代数。(2) 对于每个 $g \in G$，考虑算子

$$P_g : \tilde{\mathcal{H}} \to \mathcal{H} \text{ given by } P_g(\xi) = \xi(g^{-1}), \xi \in \tilde{\mathcal{H}}.$$

这些算子满足以下性质：

(a) $P_g(\lambda(h)) = P_{gh}$; (b) $P_g(\pi(x)) = \alpha_g(x)P_g$; (c) $P_g\pi(x)P_g^* = \alpha_g(x)$; 以及 (d) $\sum_{g\in G}^{\sigma\text{-weak}} P_g^*\alpha_g(x)P_g = \pi(x)$，对所有 g、$h \in G$ 和 $x \in \mathcal{M}$均成立。

(3) 定义 $E : B(\tilde{\mathcal{H}}) \to B(\mathcal{H})$，使得 $E(x) = P_e x P_e^*$, $x \in B(\mathcal{H})$。那么，$E(\tilde{\mathcal{M}} \rtimes_\alpha G) = \mathcal{M}$，且对所有 $x \in \tilde{\mathcal{M}} \rtimes_\alpha G$、$g \in G$均成立。

$$E(\lambda(g)x\lambda(g)^*) = \alpha_g(E(x)),$$

(iv) $\tilde{E} := \pi \circ E : \tilde{\mathcal{M}} \rtimes_\alpha G \to \pi(\mathcal{M})$ 是一个忠实的正规条件期望。

下面这个初等引理在 [17] 中已被提及，之后将会用到。

引理 5.6。 对于任意 $z \in \tilde{\mathcal{M}} \rtimes_\alpha G$，我们有

$$\tilde{E}(z) = \sum_{g\in G} Q_g z Q_g,$$

其中 $Q_g = P_g^* P_g$，且该和在 σ-弱拓扑下收敛。

现在我们简要回顾 Mercer（[17]）给出的交叉积代数 $\mathcal{M} \rtimes_\alpha G$ 中元素的傅里叶级数展开。考虑 $\mathcal{M} \rtimes_\alpha G$ 上的半范数 $x \mapsto \omega \circ E(x^*x)^{\frac{1}{2}}$，其中对所有 $\omega \in \mathcal{M}_*$均成立。由这一分离半范数族生成的拓扑称为 $\mathcal{M} \rtimes_\alpha G$ 上的 Bures 拓扑，记作 $\tau_{\mathcal{B}}$。

引理 5.7。 [17] 设 $\mathcal{M}$、G 和 α 如上所述。则以下结论成立：

(1) $x = \sum_{g\in G}^{\tau_{\mathcal{B}}} \pi(x(g))\lambda(g)$ 对所有 $x \in \mathcal{M} \rtimes_\alpha G$，其中 $x(g) := E(x\lambda(g)^*)$。

(2) 对于 x、$y \in \mathcal{M} \rtimes_\alpha G$，$\mathcal{M} \rtimes_\alpha G$ 中的乘法和 $*$-运算定义如下

$$\begin{aligned}(xy)(g) &= \sum_{h\in G}^{\sigma\text{-weak}} x(h)\alpha_h(y(h^{-1}g)); \text{ and,}\\ x^*(g) &= \alpha_g(x(g^{-1})^*), \text{ for all } g \in G.\end{aligned}$$

引理 5.8. 设 $\mathcal{M}$、G 和 α 如上所述。那么，对每个 $x \in \mathcal{M} \rtimes_\alpha G$,

$$\|x(g)\| \le \|E(x^*x)\|^{\frac{1}{2}} \le \|x\|$$

对所有 $g \in G$。

证明。 设 $x \in \mathcal{M} \rtimes_\alpha G$。那么，$x = \sum_{g\in G}^{\tau_{\mathcal{B}}} \pi(x(g))\lambda(g)$。此外，

$$\begin{aligned}(x^*x)(e) &= \sum_{h\in G}^{\sigma\text{-weak}} x^*(h)\alpha_h(x(h^{-1})) = \sum_{h\in G}^{\sigma\text{-weak}} \alpha_h(x(h^{-1})^*)\alpha_h(x(h^{-1}))\\ &= \sum_{h\in G}^{\sigma\text{-weak}} \alpha_{h^{-1}}(x(h)^*x(h)).\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$E(x^*x) = (x^*x)(e) = \sum_{h\in G}^{\sigma\text{-weak}} \alpha_{h^{-1}}(x(h)^*x(h)),$$

这意味着

$$E(x^*x) \ge \alpha_{g^{-1}}(x(g)^*x(g)) \ \forall\ g \in G.$$

因此，

$$\|E(x^*x)\| \ge \|\alpha_{g^{-1}}(x(g)^*x(g))\| = \|x(g)^*x(g)\| = \|x(g)\|^2 \ \forall g \in G.$$

□

记号： 设 $\mathcal{M}, G$ 和 α 如上所述，且 H 是 G的一个子群。考虑含单位元的 $*$-子代数

$$\mathcal{M}\boxtimes H := \left\{ \sum_{g\in G} \pi(a(g))\lambda(g) \mid a : G \to \mathcal{M} \text{ of finite support and } a(g) = 0 \,\forall\, g \in G \setminus H \right\}$$

$\mathcal{M} \rtimes_\alpha G$。那么，由 $\pi(\mathcal{M})$ 和 $\lambda(H)$ 生成的 $\mathcal{M} \rtimes_\alpha G$ 的冯·诺伊曼子代数等于 $(\mathcal{M}\boxtimes H)''$，其中 π和 λ如上所述。此外，已知 $(\mathcal{M}\boxtimes H)''$ 同构于 $\mathcal{M} \rtimes_{\alpha_{\restriction_H}} H$——参见 [20]。为方便起见，我们将 $(\mathcal{M}\boxtimes H)''$记作$\mathcal{M} \rtimes_\alpha H$。（注意，$\mathcal{M}\boxtimes H$不是标准记号。）

定理 5.9. 设 $\mathcal{M}$、G 和 α 如上所述，且 H 和 K 是 G的两个不同子群。那么，

$$d_{KK}(\mathcal{M} \rtimes_\alpha H, \mathcal{M} \rtimes_\alpha K) = 1 = d_0(\mathcal{M} \rtimes_\alpha H, \mathcal{M} \rtimes_\alpha K)$$

在 $\mathcal{M} \rtimes_\alpha G$ 中。

证明。不失一般性，假设 $H \setminus K \neq \emptyset$。令 $h \in H \setminus K$。于是，$\lambda(h) \in B_1(\mathcal{M} \rtimes_\alpha H)$，并且对于任意 $y \in \mathcal{M} \rtimes_\alpha K$，我们得到

$$\begin{aligned} \|\lambda(h) - y\|^2 &= \|\lambda(h) - \sum_{k\in K}^{\tau_{\mathcal{B}}} \pi(y(k))\lambda(k)\|^2 \\ &\geq \|E(z^*z)\| \geq \|z(h)\|^2 \text{ (by Theorem 5.8)}, \end{aligned}$$

其中 $z = \lambda(h) - \sum_{k\in K}^{\tau_{\mathcal{B}}} \pi(y(k))\lambda(k)$。注意

$$\begin{aligned} z(h) = E(z\lambda(h)^*) &= E((\lambda(h) - \sum_{k\in K}^{\tau_{\mathcal{B}}} \pi(y(k))\lambda(k))\lambda(h)^*) \\ &= E(\lambda(e) - \sum_{k\in K}^{\tau_{\mathcal{B}}} \pi(y(k))\lambda(kh^{-1})) \\ &= P_e(\lambda(e) - \sum_{k\in K}^{\tau_{\mathcal{B}}} \pi(y(k))\lambda(kh^{-1}))P_e^* \\ &= P_eP_e^* \\ &= \mathrm{id}_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

这意味着，对于所有 $h \in H \setminus K$ 和 $y \in \mathcal{M} \rtimes_\alpha K$，都有 $\|\lambda(h) - y\|^2 \geq 1$，这表明只要 $0 < \gamma < 1$，就有 $\mathcal{M} \rtimes_\alpha H \nsubseteq_\gamma \mathcal{M} \rtimes_\alpha K$。因此，若 $\mathcal{M} \rtimes_\alpha H \subseteq_\gamma \mathcal{M} \rtimes_\alpha K$，则 γ 必须是 ≥ 1，这意味着

$$d_0(\mathcal{M} \rtimes_\alpha H, \mathcal{M} \rtimes_\alpha K) \geq 1.$$

因此，由定理 2.2(1)、(3)可知

$$d_0(\mathcal{M} \rtimes_\alpha H, \mathcal{M} \rtimes_\alpha K) = 1 = d_{KK}(\mathcal{M} \rtimes_\alpha H, \mathcal{M} \rtimes_\alpha K).$$

□

注 5.10。设 G 和 α 如上，且 $\mathcal{M}$ 是一个带有忠实正规 G-不变迹态 τ 的有限冯·诺依曼代数。众所周知，$\mathcal{M} \rtimes_\alpha G$ 是一个带有忠实正规迹态 $\tilde{\tau}$ 的有限冯·诺依曼代数——参见 [13,命题 1.3。2]。进一步地，应用定理 *5.6* 可知

$$\tau \circ \tilde{E}(z) = \tilde{\tau}(z)$$

对所有 $z \in \mathcal{M} \rtimes_\alpha G$。

定理 5.11。设 $\mathcal{M}$、G 和 α 如定理 *5.10* 中所述。若 H 和 K 是 G 的两个不同子群，则

$$d_{MT}(\mathcal{M} \rtimes_\alpha H, \mathcal{M} \rtimes_\alpha K) = 1.$$

证明. 根据定理 2 .[3 (1)]，只需证明 $d_{MT}(\mathcal{M} \boxtimes H, \mathcal{M} \boxtimes K) \geq 1$。由于 H 和 K 是 G的不同子群，不失一般性，假设 $H \setminus K \neq \emptyset$。令 $h \in H \setminus K$。那么，$\lambda(h) \in B_1(\mathcal{M} \boxtimes H)$，并且对于任意 $y = \sum_{k\in K} \pi(y(k))\lambda(k) \in B_1(\mathcal{M} \boxtimes K)$，我们得到

$$\begin{aligned} \|\widehat{\lambda(h)} - \widehat{y}\|_{\tilde{\tau}}^2 &= \tilde{\tau}((\lambda(h) - y)^*(\lambda(h) - y)) \\ &= \tau \circ \tilde{E}((\lambda(h) - y)^*(\lambda(h) - y)) \text{ (by Theorem 5.10)} \\ &\geq \tau \circ \pi(\alpha_{h^{-1}}((z(h)^*z(h))) \text{ (see the proof of Theorem 5.8)} \\ &= \tau \circ \pi(\alpha_{h^{-1}}(\mathrm{id}_{\mathcal{H}})) = 1, \end{aligned}$$

其中 $z = \lambda(h) - \sum_{k\in K}\pi(y(k))\lambda(k)$。这意味着，对于所有$\widehat{y} \in B_1(\mathcal{M}\boxtimes K)$, $\|\lambda(h) - \widehat{y}\|_\tau^2 \geq 1$。因此，

$$\sup_{\widehat{x}\in B_1(\widehat{\mathcal{M}\boxtimes H})} d(\widehat{x}, B_1(\widehat{\mathcal{M}\boxtimes K})) \geq d(\widehat{\lambda(h)}, B_1(\widehat{\mathcal{M}\boxtimes K}) \geq 1.$$

因此， $d_{MT}(\mathcal{M}\boxtimes H,\ \mathcal{M}\boxtimes K) \geq 1$，证明完毕。 □

致谢： 我谨向我的导师 Ved Prakash Gupta 博士表示诚挚的感谢，感谢他对本文提出的宝贵反馈和建议。

References

[1] S. D. Allen、A. M. Sinclair 和 R. R. Smith，Haagerup 张量积 C^*-代数的理想结构，《纯粹与应用数学杂志》442（1993），111–148。[2] K. C. Bakshi 和 V. P. Gupta，简单含单位元的 C^*-代数的正则包含，《明斯特数学杂志》18（2025），181-200。[3] E. B´edos，离散群与简单 C^*-代数，《剑桥哲学学会数学论文集》109（1991），第3期，521-537。[4] D. P. Blecher， C^*-代数张量积的几何，《剑桥哲学学会数学论文集》104（1988），119–127。[5] M. Bresar、E. Kissin 和 V. S. Shulman，李理想：从纯代数到 C^*-代数，《纯粹与应用数学杂志》623（2008），73–121。[6] E. Christensen， C^*-代数的近似包含，《数学学报》144（1980），第2期，249-265。[7] E. Christensen、A. Sinclair、R. R. Smith 和 S. White， C^*-代数不变量的扰动，《几何与泛函分析》20（2010），第2期，368-397。[8] E. Christensen、A. Sinclair、R. R. Smith、S. White 和 W. Winter，核 C^*-代数的扰动，《数学学报》208（2012），第1期，93-150。[9] V. P. Gupta 和 R. Jain，关于 C^*-代数的 Banach 空间投射张量积，《巴拿赫数学分析杂志》14（2020），524-538。[10] V. P. Gupta 和 S. Kumar，关于算子代数子代数之间距离的各种概念，《明斯特数学杂志》17（2024），241-272。[11] V. P. Gupta 和 S. Kumar，算子代数子代数之间距离的关系，预印本 arXiv:2501.13039。[12] S. Ino 和 Y. Watatani，简单 C^*–代数的中间 C^*-子代数的扰动，《伦敦数学学会通报》46（2014），469–480。[13] V. F. R. J ones 和 V. S. Sunder，《子因子引论》，伦敦数学学会讲义系列234，剑桥大学出版社，剑桥，1997。[14] R. V. Kadison 和 D. Kastler，冯·诺依曼代数的扰动 I。类型稳定性，《美国数学杂志》94（1972），38-54。[15] M. Khoshkam， C^*-代数的扰动与 K 理论，《算子理论杂志》12（1984），第1期，89–99。[16] A. Kumar 和 R. Jain， C^*-代数的算子空间张量积，《数学杂志》260（2008），805–811。[17] R. Mercer，离散交叉积冯·诺伊曼代数中的傅里叶级数收敛，《美国数学学会会刊》94，第2期（1985），254-258。[18] G. J. Murphy， C^*-代数与算子理论，学术出版社，伦敦，1990。[19] R. Ryan，Banach 空间张量积引论，施普林格数学专著丛书，施普林格出版社，柏林、海德堡（2002）。[20] G. Zeller-Meier，由自同构群作用于 C^*-代数的交叉积，《纯粹与应用数学杂志》（第9辑）47（1968），101–239。

School of Physical Sciences, Jawaharlal Nehru University, New Delhi, India
Email address: sumitkumar.sk809@gmail.com