arXiv:2601.05210v1 [math.DG] 8 Jan 2026

G_2 与 Spin(7)结构的里奇-调和流

Shubham Dwivedi

摘要

我们引入并研究一种新的 G_2结构一般流，称为 G_2结构的里奇-调和流。该流耦合了底层度量的里奇流与 G_2结构的等距流，同时我们也明确给出了挠率项中的低阶项。通过分析正规坐标下 G_2结构泰勒级数展开中的二阶项，得到了这些低阶项及该流。因此，本文所述的里奇-调和流可被解释为 G_2结构的“热方程”。这些低阶项使我们得以证明，在紧流形上，里奇-调和流的驻点恰好是无挠的 G_2结构。我们研究了该流的若干解析与几何性质。我们证明，以任意 G_2结构为初始条件时，该流在紧流形上短时存在且唯一，并证明了全局 Shi 型估计。我们还证明了该流的修正局部 Shi 型估计：该估计假设初始导数、黎曼曲率张量及挠率有界，但可对所有时刻的这些量给出一致界。我们证明了该流解的紧性定理，并利用它证明，只要该流的速度保持有界，里奇-调和流就一直存在。我们还研究了里奇-调和孤子，并证明不存在紧致膨胀孤立子，且唯一的稳态孤立子是无挠的。我们推导出梯度里奇-调和孤子的 Hamilton 恒等式类比，并证明了若干关于孤子的积分恒等式。最后，我们证明了 Spin(7)结构的一个泰勒级数展开版本，并以此推导出 Spin(7)结构的里奇-调和流。

1 引言 1
2 关于 G_2 和Spin(7)结构的预备知识 5
3 G_2结构的里奇-调和流 8
4 演化方程与Shi型估计 12
4.1 曲率量的演化.13 4.2 挠率的演化.14 4.3 里奇-调和流的全局 Shi 型估计.14 4.4 修正的局部 Shi 型估计.20
5 长时间 存在时间与紧性定理 26
5.1 长时间存在的判据.26 5.2 紧性.30 5.3 里奇-调和流的长时间存在.32
6 里奇-调和孤子 33
7 Spin(7)结构的里奇-调和流 38
7.1 Spin(7)结构的泰勒级数展开.38
8 后续问题 40
A 对偶4-形式及相关热方程 40

1. 引言

在流形上寻找“最佳”几何结构，会引出既具有几何性质又具有分析性质的有趣问题。在过去几十年里，几何流及相关抛物型偏微分方程理论的应用十分成功，不仅为长期悬而未决的问题提供了解，也催生了强大的新工具与理论。或许，最广为人知的几何结构内禀流是黎曼度量的

2020年数学主题分类：53E99, 53C29, 53C21, 53C15.

里奇流，它由 Richard Hamilton 于 [Ham82] 提出，旨在解决庞加莱猜想。Hamilton 开发了研究里奇流的新工具，并证明了具有正里奇曲率度量的3维流形满足庞加莱猜想。Hamilton 还为如何在完全一般的情形下证明该猜想制定了路线图，最终 Perelman 的突破使之得以实现 [Per02]。Hamilton 提出里奇流的思想与理念，以及由此取得的成果，是本文的重要动机。

本文所关注的几何结构是七维流形上的 G_2-结构和八维流形上的 Spin(7)结构。这两类结构都源于八元数 $\mathbb{O}$ 这一非结合实赋范除法代数的理论。7维流形 M 上的 G_2-结构，是将标架丛 $Fr(M)$的结构群从 GL(7, $\mathbb{R}$)约化为李群 G_2；该李群可描述为 $\mathbb{O}$的自同构群。G_2-结构在 M 上诱导出一个黎曼度量和一个定向。从微分几何的角度看，G_2-结构是一个正 （或非退化的）3-形式，我们将其记为 φ。无挠率 G_2-结构是指那些相对于诱导度量的 Levi-Civita 联络平行的 φs。无挠率 G_2-结构的度量的全纯群 包含于例外李群 G_2 中，而 G_2 是 Berger 列表中可能的黎曼全纯群之一。这类度量同时也是里奇平坦的，因此对其进行研究具有非常重要且有趣的意义。在一个流形上存在无挠率 G_2-结构是一个富有挑战性的问题，因为需要求解高度非线性的偏微分方程。鉴于度量的里奇流所取得的成功，人们希望某种适当的 G_2-结构流能够帮助证明无挠率 G_2-结构的存在性。理想情况下，我们希望从任意一个 G_2-结构出发，并期待该流（或其某种归一化）对所有时间都存在，并且只要流形满足所要求的拓扑条件，就能收敛到一个无挠率 G_2-结构。

在这一方向上，人们针对 G_2-结构的各种不同流开展了大量研究，每种流都有各自的动机和适用范围。最早的此类流是 Bryant[Bry06]提出的闭 G_2-结构的拉普拉斯流。Bryant–Xu [BX11]以及 Lotay–Wei[LW17; LW19a; LW19b]建立了该流的若干基础结果。受拉普拉斯流启发，Karigiannis–McKay–Tsui [KMT12] 定义了余闭 G_2-结构的拉普拉斯余流，但目前尚未证明其具有短时存在性。Grigorian 针对这一问题提出了余闭 G_2-结构的修正拉普拉斯余流，并证明该流在紧流形上适定 [Gri13]。一般 G_2-结构流的理论，即不对演化中的 G_2-结构施加任何先验条件的流，其研究由 Karigiannis [Kar09]开创。 [DGK25] 延续了这项研究，作者们对所有可能由 3-形式演化的 G_2-结构二阶微分不变量进行了分类。作为一般理论的结果，作者们证明了大量 G_2-结构流的解具有非常一般的短时间存在唯一性。Weiss–Witt [WW12] 提出了一种一般的 G_2-结构流，该流是自然能量泛函 $\varphi \mapsto \text{constant}\cdot\int_M ||\nabla\varphi||^2\,\text{vol}$ 的负梯度流；作者们证明了解的短时间存在唯一性，以及流过程中无挠 G_2-结构的稳定性。

本文提出一种新的 G_2-结构一般流，其灵感来自 Hamilton 提出里奇流的方法。为了解释该流，我们简要介绍 G_2-结构流的设定。更多细节见 § 2。任意一族 $\varphi(t)$ 的 G_2-结构流都由以下演化方程描述

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t) = h(t)\diamond_t\varphi(t) + X(t)\lrcorner\psi(t) \tag{1.1}$$

其中， $h(t)$ 是定义在 M 上的对称二阶张量族， $X(t)$ 是定义在 M 上的向量场族；二者通常都是关于 $\varphi(t)$ 的二阶算子，而 $\diamond_t$ 是一个将 M 上的对称二阶张量映射到 $\Omega^{1\oplus 27}$ 分量中的 3-形式的映射（ $\diamond$ 算子的定义见 § 2）。这里 $\psi(t) = *_t\varphi(t)$。在流 (1.1) 下，底层度量按 $\frac{\partial}{\partial t}g(t) = 2h(t)$ 演化，见 [Kar09]。

如果一族 G_2-结构 $\varphi(t)$ 按照 $\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t) = -\text{Ric}(t)\diamond_t\varphi(t)$ 演化，那么底层度量按$\frac{\partial}{\partial t}g = -2\text{Ric}$ 演化，这就是度量的里奇流。我们将前一种流称为 G_2-结构的里奇流。鉴于里奇流在解决几何与拓扑领域的重大问题方面取得了巨大成功，研究底层度量按里奇流演化的 G_2-结构的流似乎是合理的。然而，如果我们仅让 $\varphi(t)$ 按 G_2-结构的里奇流演化，那么该流就忽略了由向量场支配的 G_2-结构可能发生的演化与退化；这些向量场对应于 Ω^3_7 方向上 $\varphi(t)$ 的变形（3-形式的分解见 § 2）。

关于研究以下G_2-结构中仅沿Ω^3_7 方向进行变形的“最佳”流， [DGK21], [Gri19] 和 [LS23]提出了一个方案。我们注意到，沿Ω^3_7 方向的变形不会改变底层度量。上述工作中定义的等距或调和流G_2-结构的流是

紧致（M^7, φ_0）上的 G_2-结构，由下式给出

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \operatorname{div} T \lrcorner \psi, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \tag{1.2}$$

其中 T是G_2-结构的挠率，是一个2阶张量，而散度 T是由下式定义的向量场：(散度 $T)_i = \nabla_j T_{ji}$。调和流（1.2）是自然能量泛函的负梯度

$$E(\varphi) = \frac{1}{2} \int_M |T_\varphi|^2_{g_\varphi} \operatorname{vol}_\varphi,$$

限制在等距类 $[[\varphi_0]]$上，即限制在所有诱导出与G_2-结构相同黎曼度量的 φ_0 空间（见 [DGK21，§2]，了解更多详情）。这样一来，调和流（或等距流）便能在初始G_2-结构的等距类中找到“最佳”G_2-结构。

由于里奇流是使一族度量变形的最佳方式，而 G_2-结构的调和流/等距流是在一个等距类中使 G_2-结构变形的最优方式，因此尝试定义一种 G_2-结构的流，将这两种流“耦合”起来，是合理的。这启发我们考虑以下 G_2-结构流

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\mathrm{Ric} \diamond \varphi + \operatorname{div} T \lrcorner \psi.$$

尽管上述G_2-结构流在紧流形上是适定的（见定理 3.7），但它并未考虑 G_2-结构中的任何低阶项，而这类项可能有很多（见 [DGK25，§5]，其中列出了 G_2-结构流中可能出现的一些低阶项）。这些低阶项会改变流的解析和几何行为。因此，一方面，我们希望在几何流的定义中加入低阶项，使度量的里奇流与G_2-结构的调和流尽可能高阶地耦合；另一方面，我们希望这些项能够以一种“自然”或“几何”的方式出现。事实上，[DGK25] 提出了这样一个问题：在里奇流与调和流的耦合中，能否选取合适的低阶项，使挠率和曲率的演化方程“更优美”?

我们通过提出一个一般的 G_2-结构流来补救这一状况，其中“一般”是指我们不对 G_2-结构族施加额外条件；该流在最高阶上是 G_2-结构的耦合里奇流和调和流，但包含具有几何动机的显式低阶项。我们提出如下流。

定义 1.1。 设 (M^7, φ_0) 是一个带有 G_2-结构 φ_0 的紧流形。G_2-结构族 $\varphi(t)$ 的**里奇-调和流** 如下初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = \left(-\mathrm{Ric} + 3T^t T - |T|^2 g\right) \diamond \varphi + \operatorname{div} T \lrcorner \psi, \\ \varphi(0) = \varphi_0. \end{cases} \tag{1.3}$$

这里， T^t 表示挠率二阶张量的转置，而 div T表示挠率的散度。

式（1.3）中显式低阶项的选择，其动机将在第 3 节中说明；在那里我们将证明，这些项是 G_2-结构在 G_2-适应正规坐标下的泰勒级数展开中二阶项的缩并。如前所述，这基于 Hamilton 关于将里奇流作为度量沿着由度量在正规坐标下的泰勒级数展开中的二阶项缩并所得项演化的流这一理念。这样，我们可以将里奇-调和流（1.3）视为 G_2-结构的热方程，以及度量里奇流的一个类似物。我们将在第3节中详细解释这一观点。

我们在 § 3 中证明，紧流形上里奇-调和流的驻点恰好是无挠的 G_2-结构，这也进一步印证了我们所引入的低阶项具有自然性。作为作者与 P. Gianniotis 和 S. Karigiannis 在 [DGK25] 中证明的一般定理的应用，我们在定理 3.7 中证明了该流解的短时间存在唯一性。进一步，为了证明（1.3）是度量的里奇流的一种类似形式，我们运用 [GZ25] 中的思想，证明里奇-调和流不可能是任何类似于度量的里奇流的、关于 G_2-结构的微分同胚不变泛函的梯度流。类似地，我们在命题3.13 中证明，近乎 G_2-结构若其底层度量为正 Einstein 度量，则是该流的 **收缩解**；这与正 Einstein 度量沿里奇流演化时的行为完全类似。

我们在 § 4 和 5 中建立里奇-调和流的基础理论。我们证明了定理 4.5 中的全局 Shi 型估计以及局部 Shi 型估计（我们指出，Gao Chen[Che18] 的工作也能推出这些局部估计）。随后，我们在定理 4.7 中证明了里奇-调和流的修正的局部 Shi 型估计。该估计对 初始G_2-结构的黎曼曲率张量和挠率的导数有界性提出了更强的假设，但也给出了后续所有时刻曲率及张量各阶导数的更强界。由这些更强的估计可知，即使在接近初始时刻时，沿里奇-调和流演化的测地球内曲率和挠率张量的导数也具有一致界。这些修正的局部 Shi 型估计基于 Peng Lu 关于里奇流的类似思想，也是首次为 G_2-结构的流证明此类估计。此类估计例如可用于证明 $\mathbb{R}^3$ 上里奇流标准解的存在性，也可用于带手术的里奇流（参见 [MT07]）。长期目标之一是借鉴可能适用于 G_2-结构里奇-调和流的相关方法与结果。

在 § 5中，我们研究里奇-调和流长时间存在的判据。我们在定理 5.1 中证明，只要

$$\sup_{(x,t)\in M\times[0,\tau)} \Lambda(x,t) = \sup_{(x,t)\in M\times[0,\tau)} \left(|\mathrm{Rm}(x,t)|^2 + |\nabla T(x,t)|^2 + |T(x,t)|^4\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.4}$$

保持有界，里奇-调和流就在紧流形上存在。接着，我们在定理 5.5中证明了该流解的一个紧性定理。我们证明，对于一列里奇-调和流的带基点解，若在（ Λ 1.4）中定义的量 一致有界，且除 0 以外存在一致的单射半径下界，则存在一个子序列，在 Cheeger–Gromov 意义下收敛到里奇-调和流的一个解。利用修订后的局部 Shi 估计定理 4.7 ，我们在定理 5.4 中证明了一个更强版本的紧性定理。这些结果本身就很有意义，也对分析该流的奇点十分有用。我们希望，这些更强的正则性结果和紧性定理能像它们在里奇流解及其奇点分析中那样得到应用。作为对奇异时刻刻画和紧性定理的另一项应用，我们在定理 5.9 中证明，只要该流的速度，即 $|\mathrm{Ric}| + |T|^2 + |\operatorname{div} T|$ 保持有界，里奇-调和流的解就会持续存在。证明采用了 Šešum [Šeš05] 针对里奇流情形的方法，以及 Lotay–Wei[LW17] 针对闭 G_2-结构情形下拉普拉斯流的方法。

第 § 6 节研究里奇-调和流的孤子或自相似解。我们在命题 6.2 中证明，里奇-调和流不存在紧致膨胀孤立子，而该流唯一的紧致稳态孤子是无挠的 G_2-结构。随后，我们证明了该流的孤子满足的若干恒等式和性质。其中，我们在 (6.10) 中为紧致梯度里奇-调和孤立子证明了一个恒等式，它类似于梯度 Ricci 孤立子的 Hamilton 恒等式；后者在 Ricci 孤子的研究中有广泛应用。我们预计 (6.10) 也会有类似应用。我们在推论 6.7 中给出了判定里奇-调和孤子的平凡性的一个准则。最后，我们在引理 6.8 中证明了梯度里奇-调和孤子的势函数的一个积分公式。

8维流形上存在一些特殊的几何结构，它们也与 $\mathbb{O}$ 相关，称为 Spin(7)结构。这些结构由 M 上的一个 4-形式 Φ 确定，而此类 Φ 的存在纯粹是一个拓扑条件。 M 上的 Spin(7)结构 Φ 诱导出一个黎曼度量 g_Φ 和一个定向；若 $\nabla\Phi = 0$，则 Φ 无挠，其中 ∇ 是 g_Φ的 Levi-Civita 联络。因此，与 G_2情形类似，无挠 Spin(7)结构的存在可通过求解一个高度非线性的偏微分方程来获得，所以寻找此类结构的一种方法是借助合适的几何流。与 G_2情形不同，目前提出的 Spin(7)结构流并不多。 [DLE24] 提出了一种等距 Spin(7)结构流，称为 Spin(7)结构调和流，并证明它具有多种良好的解析和几何性质。将其限制在一个等距类 $[[\Phi_0]]_{\mathrm{iso}}$上时，调和流是挠泛函的 L^2-范数的负梯度流， $\Phi \mapsto \frac{1}{2}\int_M |T_\Phi|^2\mathrm{vol}$，其中 Φ的挠率为 T。作者在 [Dwi25] 提出了一种度量也随之变化的流；该流同样是挠泛函的 L^2-范数的负梯度流，但此时允许 Spin(7)结构在所有 Spin(7)结构构成的空间中变化。Krasnov 在 [Kra25]研究了其他 Spin(7)结构二阶流。

受获得 G_2-结构的里奇-调和流这一想法的启发，我们首先在定理 7.1中证明了 Spin(7)结构 Φ 的泰勒级数展开7.1。尽管这一结果是对 G_2-结构相关结果的直接仿效，但它是新的，并使我们能够定义里奇流与 Spin(7)结构调和流的自然耦合，其中低阶项是显式的。通过对泰勒级数展开二阶项中的表达式进行缩并（7.1），我们计算了 Φ 各分量的拉普拉斯算子，并得到 Spin(7)结构的里奇-调和流，其定义见定义7.2。定理 7.3证明了该流解的短时间存在唯一性，其证明实质上基于对以下算子的主符号进行分析：

算子 Ric_Φ 和 $\mathrm{div}_\Phi T_\Phi$，这两个算子是在作者先前的工作 [Dwi25]中提出的。最后，在 § 8 中，我们提出了一些未来研究方向的问题。本文的方法相当普适，适用于任意 H-结构所对应的“里奇-调和流”，其低阶项可按我们在此描述的方式获得。例如，这些方法为 $\mathrm{SU}(2)$-结构提供了自然的流（其中一些已在 [FE24]中研究），并将给出 $\mathrm{SU}(3)$-结构的流。这些内容将在未来的工作中讨论。

我们还在附录 A 中证明了对偶 4-形式的泰勒级数展开 ψ，并沿用第 § 3 节的方法，为 4-形式写出势“热方程”，希望这有助于阐明 4-形式的流。

Gianniotis–Zacharopoulos 的近期工作中介绍了另一种关于 G_2-结构的一般流方案，其行为类似于度量的里奇流 [GZ25]。该文中的流基于修正的爱因斯坦–希尔伯特泛函的变分 [GZ25，式（4.2）]，作者提出该泛函，并通过考虑 G_2-结构的挠率，使其更适用于 G_2-结构。（1.3）中的流不同于 [GZ25], 中研究的流，尽管无挠率的 G_2-结构在两种情况下都是驻点。

致谢。感谢 Panagiotis Gianniotis、Spiro Karigiannis、Ragini Singhal 和 Thomas Walpuski 提供了有益的讨论。

2. GG_2 与 Spin(7)结构的预备知识

本节简要回顾 G_2 与 Spin(7)结构的预备知识，并为本文其余部分设定记号。

全文中，我们在局部正交标架下进行计算，因此所有指标均为下标，且重复指标均对 G_2情形的 1 至 7 以及 Spin(7)情形的 1 至 8 求和。我们有里奇恒等式，例如对于二阶张量 S，其形式为

$$\nabla_i\nabla_j S_{kl} - \nabla_j\nabla_i S_{kl} = -R_{ijkm}S_{ml} - R_{ijlm}S_{km}. \tag{2.1}$$

设 M^7为定向光滑流形。若 $\varphi \in \Omega^3(M)$ 非退化，即它确定一个黎曼度量 g_φ 及一个由下式给出的定向，则称其为 G_2结构

$$(X \lrcorner \varphi) \wedge (Y \lrcorner \varphi) \wedge \varphi = -6 g_\varphi(X,Y)\,\mathrm{vol}_\varphi, \quad X,\ Y \in \Gamma(TM). \tag{2.2}$$

度量和定向确定了霍奇星算子，记作 $\psi = *_\varphi\varphi$。微分形式空间还可进一步分解为不可约 G_2表示。关于 g，有如下正交分解，

$$\Omega^2 = \Omega^2_7 \oplus \Omega^2_{14} \quad \text{and} \quad \Omega^3 = \Omega^3_1 \oplus \Omega^3_7 \oplus \Omega^3_{27},$$

其中 Ω^k_l的逐点维数为 l。令 $\gamma \in \Omega^k$。给定 M上的任意二阶张量 A，我们定义

$$(A \diamond \gamma)_{i_1 i_2 \cdots i_k} = A_{i_1 p}\gamma_{p i_2 \cdots i_k} + A_{i_2 p}\gamma_{i_1 p i_3 \cdots i_k} + \cdots + A_{i_k p}\gamma_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} p}. \tag{2.3}$$

例如，$g \diamond \gamma = k\gamma$。运算 $\diamond$ 是群 GL(7, $\mathbb{R}$) 在微分形式空间上的无穷小作用。若 $\mathcal{T}^2$ 表示二阶张量空间，则得到一个线性映射

$$\diamond : \mathcal{T}^2 \to \Omega^3.$$

回顾 $\mathcal{T}^2 = C^\infty(M)g \oplus S^2_0 \oplus \Omega^2_7 \oplus \Omega^2_{14}$,，其中 S^2_0 表示对称无迹二阶张量空间。容易证明，$\ker(\diamond) \cong \Omega^2_{14}$，并且我们有如下同构

$$C^\infty(M) \cong \Omega^3_1, \quad \Omega^2_7 \cong \Omega^3_7 \cong \Omega^1, \quad S^2_0 \cong \Omega^3_{27}.$$

因此，任意 3-形式 $\sigma \in \Omega^3(M)$ 都可以用一对 $(h,\ X)$ 来描述，其中 h是一个对称二阶张量，X是 M上的一个向量场。我们有

$$\sigma = h \diamond \varphi + X \lrcorner \psi.$$

我们有以下关于 φ与 ψ之间缩并的恒等式。

$$\varphi_{ijk}\varphi_{abk} = g_{ia}g_{jb} - g_{ib}g_{ja} - \psi_{ijab}, \tag{2.4}$$

$$\varphi_{ijk}\psi_{abck} = g_{ia}\varphi_{jbc} + g_{ib}\varphi_{ajc} + g_{ic}\varphi_{abj} - g_{ja}\varphi_{ibc} - g_{jb}\varphi_{aic} - g_{jc}\varphi_{abi}. \tag{2.5}$$

G_2-结构的挠率是一个二阶张量 T，其表达式为

$$\nabla_m \varphi_{ijk} = T_{mp}\psi_{pijk}. \tag{2.6}$$

利用恒等式（2.4）-（2.5），我们可以推导出以下公式:

$$T_{pq} = \frac{1}{24}\nabla_p \varphi_{ijk}\psi_{qijk}, \quad \nabla_p \psi_{ijkl} = -T_{pi}\varphi_{jkl} + T_{pj}\varphi_{ikl} - T_{pk}\varphi_{ijl} + T_{pl}\varphi_{ijk}. \tag{2.7}$$

由于 T 是一个二阶张量，我们可以写成

$$T = T_1 + T_{27} + T_7 + T_{14} \qquad \text{where } T_1 = \frac{\operatorname{tr} T}{7} g.$$

这些 $T_i's$ 称为 G_2-结构的内在挠率形式。这里记录如下

$$T^t = T_1 + T_{27} - T_7 - T_{14}, \quad |T|^2 = |T_1|^2 + |T_{27}|^2 + |T_7|^2 + |T_{14}|^2, \quad (\operatorname{tr} T)^2 = 7|T_1|^2. \tag{2.8}$$

由于 $\Omega^2_7 \cong \Omega^1$，利用度量可以将其与向量场对应，因此我们可以将挠率的 T_7 分量视为一个向量场（或 1-形式）。记作 VT，其中 $(VT)_k = T_{ij}\varphi_{ijk}$。

挠率的协变导数 φ 和底层度量的黎曼曲率张量都是关于 φ 的二阶量，并且二者相关。事实上，由于挠率是一个微分同胚不变张量，它满足一个 Bianchi 型恒等式，该恒等式给出了 ∇T 与黎曼曲率张量之间的关系。这样的恒等式称为G_2-Bianchi 恒等式，最早由 Karigannis 证明 [Kar09，定理 4。2] 其形式如下

$$\nabla_i T_{jq} - \nabla_j T_{iq} = T_{ia}T_{jb}\varphi_{abq} + \frac{1}{2}R_{ijab}\varphi_{abq}. \tag{2.9}$$

G_2-Bianchi 恒等式的一个简单推论是，将标量曲率 R 表示为内在挠率的表达式如下:

$$R = 6|T_1|^2 - |T_{27}|^2 + 5|T_7|^2 - |T_{14}|^2 - 2\operatorname{div}(VT). \tag{2.10}$$

我们还有向量场 Y沿 φ 方向的李导数的如下表达式:

$$\mathcal{L}_Y \varphi = \frac{1}{2}\mathcal{L}_Y g \diamond \varphi + \left(-\frac{1}{2}\operatorname{curl} Y + Y \lrcorner T\right) \lrcorner \psi, \quad \text{where } (\operatorname{curl} Y)_k = \nabla_i Y_j \varphi_{ijk}. \tag{2.11}$$

现在我们转而讨论 8 维流形上的 Spin(7)结构。读者可参阅 [Joy00], [Kar08] 和[Dwi25]以了解有关 Spin(7)结构的更多细节。

M 上的 Spin(7)结构是一类特殊的 4-形式 Φ，定义在 M上。这种结构的存在是一个拓扑条件。具体而言，一个 8 维流形存在 Spin(7)结构，当且仅当它是可定向且可旋的；这些条件分别等价于第一和第二 Stiefel–Whitney 类的消失，并且对于 M 的某个定向，有

$$p_1^2 - 4p_2 + 8\chi = 0,$$

其中，p_i 是第 i 个庞特里亚金类，χ 是 M的欧拉类。决定 M 上 Spin(7)结构的 4-形式空间是 $\Omega^4(M)$ 的一个子丛 A，称为可容许的 4-形式丛。这不是 一个向量子丛，甚至也不是一个开子丛，这不同于 G_2结构的情形。对于 $p \in M$，子丛$A_p(M)$ 在 $\Lambda^4(T_p^*M)$ 中的余维为 27。

Spin(7)结构 Φ 确定了 M上的一个黎曼度量和一个定向。

定义 2.1。设 ∇ 为度量 g_Φ的 Levi-Civita 联络。若$\nabla\Phi = 0$，则有序对 (M^8, Φ) 是一个 ***Spin(7)***流形 。这是关于 Φ的非线性偏微分方程，因为 ∇ 取决于 g，而后者又非线性地取决于 Φ。Spin(7)流形的黎曼整体包含于子群 Spin(7) $\subset$ SO(8) 中。这样的平行Spin(7)结构也称为无挠。

Spin(7)结构的存在 Φ 诱导出 M 上微分形式空间的不可约 Spin(7)表示分解。关于 g_Φ，我们有以下正交分解:

$$\Omega^2 = \Omega^2_7 \oplus \Omega^2_{21}, \qquad \Omega^3 = \Omega^3_8 \oplus \Omega^3_{48}, \qquad \Omega^4 = \Omega^4_1 \oplus \Omega^4_7 \oplus \Omega^4_{27} \oplus \Omega^4_{35},$$

其中 Ω^k_l 的逐点维数为 l。

由于我们关注的是 Spin(7)结构的流，目前只需考虑 4-形式的分解。我们再次使用 Spin(7)结构的 $\diamond$算子类比。给定 $A \in \Gamma(T^*M \otimes TM)$，定义

$$A \diamond \Phi = \frac{1}{24}(A_{ip}\Phi_{pjkl} + A_{jp}\Phi_{ipkl} + A_{kp}\Phi_{ijpl} + A_{lp}\Phi_{ijkp})e^i \wedge e^j \wedge e^k \wedge e^l, \tag{2.12}$$

因此

$$(A \diamond \Phi)_{ijkl} = A_{ip}\Phi_{pjkl} + A_{jp}\Phi_{ipkl} + A_{kp}\Phi_{ijpl} + A_{lp}\Phi_{ijkp}. \tag{2.13}$$

与 G_2情形类似，我们有以下命题。证明见 [Dwi25，命题 2.4] 。

命题 2.2. 映射 $A \mapsto A \diamond \Phi$ 的核与子空间 Ω^2_{21}同构。其余三个直和项Ω^0、 S_0 和 Ω^2_7 分别同构映射到子空间Ω^4_1, Ω^4_{35} 和 Ω^4_7 。

现在我们来描述 Spin(7)结构的 挠率。给定 $X \in \Gamma(TM)$，由 [Kar08，引理 2.10]可知 $\nabla_X \Phi$ 属于子丛 $\Omega^4_7 \subset \Omega^4$。

定义 2.3. Spin(7)结构的挠率张量 Φ 是 $\Omega\Omega^1_8 \otimes \Omega^2_7$ 中按 $\nabla\Phi$定义的元素。由于$\nabla_X \Phi \in \Omega^4_7$, 根据命题 2.2， $\nabla\Phi$ 可写为

$$\nabla_m \Phi_{ijkl} = (T_m \diamond \Phi)_{ijkl} = T_{m;ip}\Phi_{pjkl} + T_{m;jp}\Phi_{ipkl} + T_{m;kp}\Phi_{ijpl} + T_{m;lp}\Phi_{ijkp} \tag{2.14}$$

其中，对每个固定的 m， $T_{m;ab} \in \Omega^2_7$, 。这定义了 Spin(7)结构的挠率张量 T，它是 $\Omega^1_8 \otimes \Omega^2_7$ 中的一个元素。

用 $\nabla\Phi$ 表示时，挠率 T 为

$$T_{m;ab} = \frac{1}{96}(\nabla_m \Phi_{ajkl})\Phi_{bjkl} \tag{2.15}$$

因为 T 是 $\Omega^1_8 \otimes \Omega^2_7$ 中的一个元素。

注记 2.4. 符号 $T_{m;ab}$ 不应与对 T_m 求两次协变导数混淆。挠率张量 T 是 $\Omega^1_8 \otimes \Omega^2_7$ 中的一个元素，因此，对于每个固定的指标 m， $T_{m;ab} \in \Omega^2_7$。▲

我们用 $\operatorname{div} T$ 表示挠率的散度，它是 Ω^2_7 中的一个元素，定义为

$$(\operatorname{div} T)_{jk} = \nabla_m T_{m;jk}. \tag{2.16}$$

Spin(7)结构所诱导度量的黎曼曲率张量 Rm 与挠率的协变导数 ∇T也存在关联，并且满足一个“Bianchi 型恒等式”。Karigiannis [Kar08，定理 42] 利用挠率张量的微分同胚不变性证明了这一点；而2.1中则给出了使用里奇恒等式的另一种证明，见 [DLE24，定理 39]。

定理 2.5。 挠率张量 T 满足以下*“Bianchi* 型”恒等式

$$\nabla_i T_{j;ab} - \nabla_j T_{i;ab} = 2T_{i;am}T_{j;mb} - 2T_{j;am}T_{i;mb} + \frac{1}{4}R_{jiab} - \frac{1}{8}R_{jimn}\Phi_{mnab}. \tag{2.17}$$

□

利用黎曼Bianchi恒等式，我们得到

$$R_{ijkl}\Phi_{ajkl} = -(R_{jkil} + R_{kijl})\Phi_{ajkl} = -R_{iljk}\Phi_{aljk} - R_{ikjl}\Phi_{akjl}$$

因此我们有以下事实

$$R_{ijkl}\Phi_{ajkl} = 0. \tag{2.18}$$

利用这一点并缩并 （2.17）得到 j 和 b 的缩并式，即由其诱导的度量的里奇曲率表达式

$$R_{ij} = 4\nabla_i T_{a;ja} - 4\nabla_a T_{i;ja} - 8T_{i;jb}T_{a;ba} + 8T_{a;jb}T_{i;ba} \tag{2.19}$$

这也证明了无挠 Spin(7)结构的度量是里奇平坦的，这一结果最初由 Bonan 得出。对（2.19）取迹，得到标量曲率的表达式 R

$$R = 4\nabla_i T_{a;ia} - 4\nabla_a T_{i;ia} + 8|T_8|^2 + 8T_{a;jb}T_{j;ba}. \tag{2.20}$$

3. G_2结构的里奇-调和流

我们将阐述提出这种流的动机，以及为何可以将其视为 G_2结构的“热流”。我们先讨论度量的里奇流。回顾一下，若 $(M^n,\ g)$ 是一个黎曼流形，且 $x \in M$，那么我们可以写出以点 x 为中心的黎曼正规坐标中度量分量的泰勒级数展开。这个众所周知的展开式为

$$g_{ij}(x^1,\dots,x^n) = \delta_{ij} + \frac{1}{6}\left(R_{piqj} + R_{pjqi}\right)x^p x^q + O(||x||^3). \tag{3.1}$$

将里奇流定义为度量族的演化 $g(t)$ 由 $\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2\mathrm{Ric}(g(t))$，正如 Hamilton 所述 [Ham~~9~~5b, §1], , 其动机之一是我们在正规坐标中计算度量分量的拉普拉斯算子，即

$$\Delta g_{ij} = g^{pq}\frac{\partial^2}{\partial x^p \partial x^q} g_{ij} = -\frac{2}{3}R_{ij},$$

这里我们用到了 (3.1)，因此我们将里奇流视为度量的热方程。还可以证明，在调和坐标中，也就是说，在坐标系 (x^i) 满足 $\Delta x^i = 0$对所有 i，度量分量的拉普拉斯算子恰好为 $-2\mathrm{Ric}$ (参见 [CK04，引理 3。32]证明见该处)。因此，综合上述两种讨论，我们可以将里奇流视为黎曼度量的热流。由此，我们预期度量在里奇流演化过程中会变得“更加平滑”。

我们将同样的思路应用于其他特殊几何结构；本文讨论的是 G_2 和 Spin(7)结构。设 (M^7,φ)是一个带有 G_2-结构的流形。对于 $x \in M$，我们选择局部正交标架 $\{e_1,\dots,e_7\}$，使其 T_xM是 G_2-适配的，这意味着在点 x 处，分量 φ_{ijk}与 $\mathbb{R}^7$上的标准平坦模型的分量一致。我们回顾如下关于 G_2-结构 φ 的泰勒级数展开，见[DGK25]。

定理3.1。 [DGK25，定理2。25] 设 $(x^1,\dots,x^7)$ 是以G_2为适配条件、以$x \in M$为中心的黎曼正规坐标。 φ_{ijk}的分量 φ在 0处的泰勒展开，其中 *0* 是 $\mathbb{R}^7$ 中对应于 $x \in M$的点，形式如下：

$$\varphi_{ijk}(x^1,\dots,x^7) = \varphi_{ijk} + (T_{qm}\psi_{mijk})x^q + {}^{\varphi}\mathcal{Q}_{pq\,ijk}x^p x^q + O(\|x\|^3), \tag{3.2}$$

其中

$$\begin{aligned} {}^{\varphi}\mathcal{Q}_{pq\,ijk} = {}& \tfrac{1}{2}\nabla_p T_{qm}\psi_{mijk} - \tfrac{1}{2}(TT^t)_{pq}\varphi_{ijk} \\ & + \tfrac{1}{2}T_{pm}(T_{qi}\varphi_{mjk} + T_{qj}\varphi_{mki} + T_{qk}\varphi_{mij}) \\ & + \tfrac{1}{6}(R_{piqm}\varphi_{mjk} + R_{pjqm}\varphi_{mki} + R_{pkqm}\varphi_{mij}). \end{aligned} \tag{3.3}$$

右侧的所有系数张量均在0处取值。

因此，遵循 Hamilton 的相同思路，G_2-结构 φ 在点 x处各分量的拉普拉斯算子由下式给出

$$\begin{aligned} \Delta(\varphi)_{ijk} = {}& \frac{1}{2}((\operatorname{div} T)\lrcorner\psi)_{ijk} - \frac{1}{2}|T|^2\varphi_{ijk} + \frac{1}{2}T_{pm}(T_{pi}\varphi_{mjk} + T_{pj}\varphi_{imk} + T_{pk}\varphi_{ijm}) \\ & - \frac{1}{6}(R_{im}\varphi_{mjk} + R_{jm}\varphi_{imk} + R_{km}\varphi_{ijm}) \end{aligned}$$

可将其改写为关于 $\diamond$运算的形式：

$$\Delta(\varphi)_{ijk} = -\frac{1}{6}(\mathrm{Ric}\diamond\varphi)_{ijk} + \frac{1}{2}(T^tT\diamond\varphi)_{ijk} - \frac{1}{6}(|T|^2 g\diamond\varphi)_{ijk} + \frac{1}{2}(\operatorname{div} T\lrcorner\psi)_{ijk}. \tag{3.4}$$

由于我们想要描述 G_2-结构的“热方程”，因此根据 §G_2-结构的下述流，我们称之为基于 §G_2-结构的“里奇-调和流”，讨论见 §1。

定义 3.2. 设 (M^7,φ_0) 是一个带有 G_2-结构 φ_0 的紧致流形。G_2-结构族 $\varphi(t)$ 的里奇-调和流是以下初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = \left(-\mathrm{Ric} + 3T^tT - |T|^2 g\right)\diamond\varphi + \operatorname{div} T\lrcorner\psi, \\ \varphi(0) = \varphi_0. \end{cases} \tag{RHF}$$

在坐标表示下，该流写作

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_{ijk} = (-R_{ip} + 3T_{mi}T_{mp} - |T|^2 g_{ip})\varphi_{pjk} + (-R_{jp} + 3T_{mj}T_{mp} - |T|^2 g_{jp})\varphi_{ipk} + (-R_{kp} + 3T_{mk}T_{mp} - |T|^2 g_{kp})\varphi_{ijp} + (\operatorname{div} T)_l \psi_{lijk}. \tag{3.5}$$

我们指出，对于初始 G_2-结构 φ_0 或演化中的 G_2-结构 $\varphi(t)$，我们都不施加任何额外条件，例如（余）闭性、等距性等。

读者或许已经注意到，我们将泰勒级数展开中二阶项的表达式乘以因子 $+6$，使得底层度量演化中的最高阶项成为 $-2\mathrm{Ric}$（见（4.2））；但我们保留了 (RHF) 中的向量场部分为 $\operatorname{div} T$，而不是 $3 \operatorname{div} T$。我们这样选择的唯一原因是，经过 DeTurck 类型的技巧后，(RHF) 右端微分算子的主符号在 $\Omega^3_{1\oplus 27}$ 部分和 Ω^3_7 部分都恰好成为拉普拉斯算子；关于算子 Ric 和 $\operatorname{div} T$ 的主符号表达式，见 [DGK25，第 6 命题6]；关于 DeTurck 技巧，见 [DGK25，第 6 节 4]。$\operatorname{div} T$ 项中选择因子 1 而不是 3，不会影响本文得到的任何结果（另见注记 3.8 和 3.12）。

里奇-调和流的驻点。现在我们来考察里奇-调和流（RHF）的驻点。由于 $T = 0 \implies \mathrm{Ric} = 0$ 因此，无挠率的 G_2-结构是该流的驻点（RHF）。设 M 为紧致，且假设 φ 是该流的一个驻点。则 $-\mathrm{Ric} + 3T^t T - |T|^2 g = 0$ 且 $\operatorname{div} T = 0$。对第一个方程取迹，得到

$$R - 3|T|^2 + 7|T|^2 = R + 4|T|^2 = 0$$

将标量曲率的表达式（2.10）代入后，得到

$$6|T_1|^2 - |T_{27}|^2 + 5|T_7|^2 - |T_{14}|^2 - 2\operatorname{div}(VT) + 4(|T_1|^2 + |T_7|^2 + |T_{14}|^2 + |T_{27}|^2) = 0$$

这意味着

$$10|T_1|^2 + 9|T_7|^2 + 3|T_{14}|^2 + 3|T_{27}|^2 - 2\operatorname{div}(VT) = 0, \tag{3.6}$$

在紧致 M 上积分后可证明 $T_i = 0$，对于 $i = 1,\ 7,\ 14,\ 27$，因此 φ 无挠率。**由此可见，该流的驻点 (RHF) 在紧流形上恰好是无挠率的 G_2-结构**。我们强调，这也表明我们的几何流中的低阶项是合适的；而这些项是遵循如下理念得到的：描述 G_2-结构的热方程。

注记 3.3. 假设演化中的 G_2-结构 $\varphi(t)$ 是闭的，即 $d\varphi = 0$。例如，闭 G_2-结构的 Bryant 的拉普拉斯流便属于这种情形。在此情况下，$T_{14} \in \Omega^2_{14}$ 是唯一非零的挠分量。我们有 $d^*\varphi = 2T_{14}$，由此可得

$$d^* T_{14} = \frac{1}{2} d^*(d^*\varphi) = 0$$

因此，对于闭 G_2-结构，$\operatorname{div} T = \operatorname{div} T_{14} = 0$（这是一个众所周知的事实）。利用 T 是斜对称的这一事实，我们得到

$$-\mathrm{Ric} + 3T^t T - |T|^2 g = -\mathrm{Ric} - 3T^2 - |T|^2 g$$

其中 $(T^2)_{ij} = T_{ip}T_{pj}$。在这种情况下，热流（RHF）写作

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = (-\mathrm{Ric} - 3T^2 - |T|^2 g) \diamond \varphi.$$

文献 G_2-结构在 [LW17中的拉普拉斯流方程，即式 (3.1)–(3.4)] 是 e

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi = (-\mathrm{Ric} - 2T^2 - \frac{1}{3}|T|^2 g) \diamond \varphi,$$

这表明（RHF）与闭G_2-结构的拉普拉斯流的区别，仅在于流的定义中所涉及的低阶项前的常数不同。我们不难想到，修改（RHF）中低阶项的常数，使其与闭G_2-结构的拉普拉斯流相匹配，从而使里奇-调和流在闭G_2-结构情形下退化为前者。然而，我们发现，这种修改会导致除无挠G_2-结构之外的其他类也成为该流的驻点，因此我们不作此修改。

▲

注记 3.4. 假设演化中的 G_2-结构 $\varphi(t)$ 是余闭的，即 $d\psi(t) = 0$（回忆 $\psi(t) = *_{\varphi(t)}\varphi(t)$）。在这种情况下， $T = T_1 g + T_{27} \in \Omega^0 g \oplus \Omega^3_{27}$，因此挠率是对称的，从而 $T^t = T$。此外，对指标 i 和 q 进行缩并 G_2-Bianchi 恒等式（2.9），得到

$$\begin{aligned}(\operatorname{div} T^t)_j - \nabla_j \operatorname{tr} T &= T_{ia}T_{jb}\varphi_{abi} + \frac{1}{2}R_{ijab}\varphi_{abi} \\ &= 0,\end{aligned}$$

其中我们用到了 T是对称的这一事实，以及黎曼第一比安基恒等式。因此，我们有散度 T^t =散度 T = ∇ 迹 T。因此，在余闭G_2结构的情形下，里奇-调和流（RHF）为

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t) = \left(-\mathrm{Ric} + 3T^2 - |T|^2 g\right)\diamond\varphi + \operatorname{div} T \lrcorner \psi = \left(-\mathrm{Ric} + 3T^2 - |T|^2 g\right)\diamond\varphi + \nabla \operatorname{tr} T \lrcorner \psi. \tag{3.7}$$

这与例如余闭G_2结构的拉普拉斯余流[KMT12] 中的情形，或 [Gri13]中对其作出的修改相比，低阶项有很大不同。事实上，它也不同于利用附录A中所考虑的4-形式 ψ 的泰勒级数展开所导出的自然4-形式热流。另一方面，(3.7)中的流与通过考察G_2结构的几何流有相似之处；该几何流是通过考察G_2-爱因斯坦-希尔伯特泛函得到的，见 [GZ25], ，具体而言，考察 [GZ25中的流，式(4.20)和(4.21)]。这非常值得注意，应该进一步研究。▲

注记 3.5. 我们利用 M 的紧性消去了（3.6）中的散度项，并得出无挠率的G_2-结构是唯一的驻点。读者可能已经注意到，我们并未用到 φ 作为驻点的所有条件，特别是，导出（散度$T = 0$ ）的计算完全没有用到条件 3.6）。可以设想，也能利用散度消失这一条件，在非紧流形上证明关于驻点的结果散度 T。▲

为了证明流（RHF）的解的短时间存在唯一性，我们使用 [DGK25] 中的一个非常一般的定理，该定理给出了G_2-结构的一般流具有短时间存在唯一性的充分条件。下面回顾这一结果。

定理 3.6. [DGK 25，定理 6。15]。 设 (M, φ_0) 是一个紧致 7-流形，带有一个 G_2-结构 φ_0。考虑流

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t) &= (-\mathrm{Ric} + a\mathcal{L}_{VT}g + \lambda F)\diamond\varphi + (b_1 \operatorname{div} T + b_2 \operatorname{div} T^t)\lrcorner\psi + \textit{lower order terms}, \\ \varphi(0) &= \varphi_0,\end{aligned} \tag{3.8}$$

其中 F 是由 $F_{ij} = R_{pqrs}\varphi_{pqi}\varphi_{rsj}$给出的对称2-张量。假设 $0 \le b_1 - a - 1 < 4$， $b_1 + b_2 \ge 1$ 且$|\lambda| < \frac{1}{4}c$，其中 $c = 1 - \frac{1}{4}(b_1 - a - 1) > 0$。则存在 $\varepsilon > 0$ 以及唯一的光滑单参数G_2-结构族 $\varphi(t)$ ，对于 $t \in [0, \varepsilon)$，满足(3.8)。

将3.8式与（RHF）式的表达式进行比较，可得 $a = 0$， $\lambda = 0$， $b_1 = 1$ 以及 $b_2 = 0$，它们满足上述定理的条件。因此，我们立即得到：

定理 3.7。给定一个初始G_2-结构 φ_0，G_2-结构的里奇-调和流(RHF) 在短时间内存在唯一解 $[0, \varepsilon)$ ，定义在紧流形 M 上，其中 ε 取决于初始条件。 □

注记 3.8。 我们指出，定理 3.7 在定义里奇-调和流的向量场族时，即使选择 3div T而不是 div T，仍然成立。▲

因此，G_2结构的里奇-调和流是适定的。几何流的一项理想性质是它是否为某个泛函的梯度流。G_2结构的调和流 [DGK21] （以及 Spin(7)结构的调和流 [DLE24]）、闭 G_2结构的拉普拉斯流 [Bry06], [LW17]，、Weiss–Witt 的热流 [WW12]，以及 [DGK25]中考察的其他 G_2结构流族，都具有这一性质。度量的里奇流则不同，它并非黎曼度量空间上某个泛函的梯度流。Perelman 的一项重大突破 [Per02] 是证明里奇流确实可以视为梯度流，但其定义在一个扩大的空间上。下文将证明，在 G_2结构空间 Ω^3_+ 上不存在一个微分同胚不变泛函，使其梯度为里奇-调和流（RHF）。这主要由 Gianniotis–Zacharopoulos 的一个结果推出 [GZ25]。我们先重述他们的结果。

命题 3.9。 [GZ25，命题 3。3]。 设 M^7 是紧致的，且带有 G_2-结构 φ。假设 $\mathcal{F} : \Omega^3_+ \to \mathbb{R}$ 是一个微分同胚不变泛函，即 $\mathcal{F}(\Phi^*\varphi) = \mathcal{F}(\varphi)$ 对于任意微分同胚 Φ ，在 M上成立，并且存在

二阶拟线性微分算子 $Q_1 : \Omega^3_+ \to S^2$ 和 $Q_2 : \Omega^3_+ \to \Omega^1$，使得对于任意 $(\varphi(t))_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$ 的变分，其中G_2-结构满足 $\varphi(0) = \varphi$ 以及 $\frac{d\varphi}{dt}\Big|_{t=0} = h \diamond \varphi + X \lrcorner \psi$，且

$$\frac{d\mathcal{F}(\varphi(t))}{dt}\Big|_{t=0} = \int_M \langle h, Q_1(\varphi)\rangle + \langle X, Q_2(\varphi)\rangle \operatorname{vol}_\varphi . \tag{3.9}$$

于是，我们有

$$\begin{aligned} Q_1(\varphi) &= \alpha \mathrm{Ric} + \beta R g + \gamma \mathcal{L}_{\nabla T} g + \zeta F + l.o.ts \\ Q_2(\varphi) &= \delta \operatorname{div} T + \epsilon \nabla \operatorname{tr} T + l.o.ts., \end{aligned} \tag{3.10}$$

其中，R 是标量曲率，$l.o.ts.$ 表示低阶项，并且系数必须满足

$$\frac{\alpha}{2} + \beta - \frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{4} = 0 \quad \textit{and} \quad \gamma + \frac{\delta}{2} = 0. \tag{3.11}$$

证明见 [GZ25]，此处我们仅介绍主要思路。由 Q_1 和 Q_2 的表达式（忽略低阶项）可由以下分类得出：所有二阶微分不变量都是一个G_2-结构的二形式，且可写成3-形式，见 [DGK25]。为推导（3.11），注意到由于 $\mathcal{F}$ 是微分同胚不变的，因此必有 $D\mathcal{F}_\varphi(\mathcal{L}_Y \varphi) = 0$，对于 Y 上的任意向量场 M。于是，由（2.11）可得

$$\int_M \left\langle Q_1, \frac{1}{2}\mathcal{L}_Y g \right\rangle + \left\langle Q_2, -\frac{1}{2}\operatorname{curl} Y + Y \lrcorner T \right\rangle \operatorname{vol} = 0,$$

随后可以计算并比较最高阶项，从而得到（3.11）。将（3.10）与里奇-调和流（RHF）进行比较可知，$\alpha = -1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\zeta = 0$, $\delta = 1$ 以及 $\epsilon = 0$，它们不满足（3.11）。因此，我们得到如下结论：

命题 3.10. 由G_2-结构定义的里奇-调和流 (RHF) 不是结构空间上任何微分同胚不变泛函的梯度流，G_2-结构。 □

里奇-调和流不是G_2-结构空间上任何微分同胚不变泛函的梯度流，这一点与度量的里奇流类似：后者不是单纯在黎曼度量空间上定义的任何泛函的梯度流。为了将里奇流视为某些泛函的梯度流，需要扩大所考虑的空间；在 Perelman 的开创性工作之后，这一点才得到理解 [Per02]。由此引出了以下有趣的问题。

问题 3.11. 能否定义类似于 *Perelman* 的 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{W}$ 泛函（可能定义在包含$\Omega^3_+(M)$的扩展空间上），使得G_2-结构的里奇-调和流可以视为这类泛函的梯度流，并且这些泛函沿流单调变化？

Perelman 的 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{W}$-泛函分别起源于对稳态和收缩梯度 Ricci 孤立子的研究，因此，类似的想法或许有助于回答上述问题。在 §6中，我们研究里奇-调和流的孤子，并推导出各种重要恒等式；我们相信这些恒等式将有助于回答前面的问题。

注记 3.12。我们再次指出，即使我们在（3.10）中选择3div T而非div T，命题RHF仍然成立。▲

我们回顾一下，G_2-结构称为近G_2，若 $d\varphi = \lambda\psi$ 且 $d\psi = 0$，其中 λ 为一个常数。在这种情况下，T_1是唯一非零的挠分量，且为常数。设 φ_0 是一个满足 $T_{\varphi_0} = cg_0$的近 G_2-结构。我们有以下命题。

命题 3.13。设(M^7, φ_0)是一个近G_2-流形，并设 $T_{\varphi_0} = cg_0$。以(RHF) 为 φ_0 初始条件的里奇-调和流存在于有限时间区间 $[0, \tau]$，其中 $\tau = \frac{1}{20c^2}$，且在其存在期间始终保持为近G_2。因此，近G_2-结构是该流的**收缩**解。

注记 3.14. 可以计算得，命题陈述中的 c 为 $\frac{\text{迹}}{7}T$，且 $d\varphi_0 = \frac{4}{7}$迹 $T\psi$。 —— – ▲

证明。 众所周知（例如参见 [DS23，§2]）， φ_0 的里奇曲率由 $\mathrm{Ric}_{g_0} = 6c^2 g_0$给出。考虑 G_2-结构族

$$\varphi(t) = \left(1 - 20c^2 t\right)^{\frac{3}{2}} \varphi_0. \tag{3.12}$$

显然 $\varphi(0) = \varphi_0$。由于 $\varphi(t)$ 是 φ_0 的缩放，因此

$$g(t) = \left(1 - 20c^2t\right) g_0, \qquad g^{-1}(t) = \left(1 - 20c^2t\right)^{-1} g_0^{-1} \quad \mathrm{Ric}(g(t)) = 6c^2 g_0,$$
$$T(t) = c\left(1 - 20c^2t\right)^{\frac{1}{2}} g_0, \quad |T(t)|^2 g(t) = 7c^2 g_0, \quad \text{and} \qquad \operatorname{div} T(t) = 0.$$

因此，我们看到

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t) = -30c^2\left(1 - 20c^2t\right)^{\frac{1}{2}} \varphi_0,$$

and

$$(-\mathrm{Ric} + 3T^tT - |T|^2 g) \diamond \varphi = (-10c^2 g_0) \diamond_t \varphi(t) = -10c^2\left(1 - 20c^2t\right)^{\frac{1}{2}} (g_0 \diamond_0 \varphi_0) = -30c^2\left(1 - 20c^2t\right)^{\frac{1}{2}} \varphi_0.$$

□

注记 3.15. 近 G_2流形是正 Einstein 的，因此近 G_2结构沿里奇-调和流的行为，类似于正 Einstein 度量沿里奇流的行为；后者是该流的收缩解。▲

4. 演化方程与 Shi 型估计

本节首先计算黎曼曲率张量、挠率张量以及挠率张量的协变导数沿里奇-调和流的演化。在本节中（除非另有说明），我们采用如下约定。若 A 和 B 是 (M, φ, g) 上的两个张量，则 $A * B$ 表示通过度量 g 或其逆 g^{-1} 进行缩并，并乘以仅依赖于 A 和 B 的阶数以及流形维数（本例中为 7）的常数后得到的任意量。为使文字简洁，我们将用同一个字母 C 表示随行而异的各种常数，但所有这些常数都依赖于相同的量，并且会预先指定。

Karigiannis 已证明， [Kar09，§3] 如果一族G_2-结构 $\varphi(t)$按以下方式演化

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t) = (h(t) \diamond \varphi(t)) + X(t) \lrcorner \psi(t)$$

对于 M 上的一族对称二阶张量 $h(t)$ 和一族向量场 $X(t)$，我们有以下演化方程：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} g(t)_{ij} &= 2h(t)_{ij}, \\
\frac{\partial}{\partial t} g^{-1}(t)^{ij} &= -2h^{ij}, \quad \text{with } h^{ij} = g^{ia}g^{jb}h_{ab}, \\
\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{vol}_{g(t)} &= \operatorname{tr}_{g(t)} h(t) \operatorname{vol}_{g(t)}, \\
\frac{\partial}{\partial t} \psi_{ijkl} &= h_{im}\psi_{mjkl} + h_{jm}\psi_{imkl} + h_{km}\psi_{ijml} + h_{lm}\psi_{ijkm} - X_i\varphi_{jkl} + X_j\varphi_{ikl} - X_k\varphi_{ijl} + X_l\varphi_{ijk} \\
\frac{\partial}{\partial t} T_{ij} &= T_{im}h_{mj} + T_{im}X_n\varphi_{nmj} + \nabla_m h_{ni}\varphi_{mnj} + \nabla_i X_j.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

由（4.1），沿着里奇-调和流，我们有

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2R_{ij} + 6T_{pi}T_{pj} - 2|T|^2 g_{ij}, \tag{4.2}$$
$$\frac{\partial}{\partial t} g^{ij} = 2R^{ij} - 6T_p{}^i T_p{}^j + 2|T|^2 g^{ij}, \tag{4.3}$$

体积形式的演化为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{vol} &= \operatorname{tr}(-R_{ij} + 3T_{pi}T_{pj} - |T|^2 g_{ij}) \operatorname{vol} \\
&= (-R + 3|T|^2 - 7|T|^2) \operatorname{vol} \\
&= -(R + 4|T|^2) \operatorname{vol} \\
&\overset{(2.10)}{=} -\left(10|T_1|^2 + 9|T_7|^2 + 3|T_{14}|^2 + 3|T_{27}|^2 - 2\operatorname{div}(VT)\right) \operatorname{vol}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

对紧致 M 上的式子（4.4）进行积分可证明，关于 $g(t)$ 的 M 体积沿着里奇-调和流（RHF）会减小。

4.1 曲率量的演化

我们回顾一下，若流形上的度量族 $g(t)$ 按照以下方式演化

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = h(t) \tag{4.5}$$

对于某个依赖于时间的对称2-张量 $h(t)$，则底层度量的黎曼曲率张量、Ricci张量和标量曲率按如下方式演化（例如参见 [CK04，第 3]章

$$\frac{\partial}{\partial t} R_{ijk}{}^{l} = \frac{1}{2} g^{lp} \left(\nabla_i \nabla_k h_{jp} + \nabla_j \nabla_p h_{ik} - \nabla_i \nabla_p h_{jk} - \nabla_j \nabla_k h_{ip} - R_{ijk}{}^{q} h_{qp} - R_{ijp}{}^{q} h_{kq} \right), \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} R_{jk} = \frac{1}{2} g^{pq} \left(\nabla_q \nabla_j h_{kp} + \nabla_q \nabla_k h_{jp} - \nabla_q \nabla_p h_{jk} - \nabla_j \nabla_k h_{pq} \right), \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} R = -\Delta \operatorname{tr}_g(h) + \operatorname{div}(\operatorname{div} h) - \langle h, \operatorname{Ric} \rangle. \tag{4.8}$$

这里 Δ 是“分析学家的拉普拉斯算子”，其在局部坐标中的表达式为 $\Delta = \nabla_i \nabla^i$，并且$\operatorname{div}(h)_i = \nabla^j h_{ji}$。利用（4.2）和（4.6），可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} R_{ijk}{}^{l} = & -\nabla_i \nabla_k R^l_j - \nabla_j \nabla^l R_{ik} + \nabla_i \nabla^l R_{jk} + \nabla_j \nabla_k R^l_i + \left(R_{ijkq} R_q{}^{l} + R_{ij}{}^{l}{}_{q} R_{kq} \right) \\
& - 3 \left(R_{ijkq} T_{pq} T_p{}^{l} + R_{ij}{}^{l}{}_{q} T_{pk} T_{pq} \right) \\
& - \left(\nabla_i \nabla_k |T|^2 g_j{}^{l} + \nabla_j \nabla^l |T|^2 g_{ik} - \nabla_i \nabla^l |T|^2 g_{jk} - \nabla_j \nabla_k |T|^2 g_i{}^{l} \right) \\
& + 3 \left(\nabla_i \nabla_k (T_{pj} T_p{}^{l}) + \nabla_j \nabla^l (T_{pi} T_{pk}) - \nabla_i \nabla^l (T_{pj} T_{pk}) - \nabla_j \nabla_k (T_{pi} T_p{}^{l}) \right).
\end{aligned}$$

上述方程中的前六项是 $-2\mathrm{Ric}$ 项的贡献，因此可以像里奇流情形下黎曼曲率张量的演化那样进行分析（参见 [CK04，引理 6.13]），其中应用黎曼第一和第二比安基恒等式以及里奇恒等式（2.1），得到

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} R_{ijk}{}^{l} = & \Delta R_{ijk}{}^{l} + \left(R_{ijpr} R_{rpk}{}^{l} - 2 R_{pikr} R_{jpr}{}^{l} + 2 R_{pir}{}^{l} R_{jpkr} \right) - R_{ip} R_{pjk}{}^{l} - R_{jp} R_{ipk}{}^{l} - R_{kp} R_{ijp}{}^{l} \\
& + R_p{}^{l} R_{ijkp} - 3 \left(R_{ijkq} T_{pq} T_p{}^{l} + R_{ij}{}^{l}{}_{q} T_{pk} T_{pq} \right) \\
& - \left(\nabla_i \nabla_k |T|^2 g_j{}^{l} + \nabla_j \nabla^l |T|^2 g_{ik} - \nabla_i \nabla^l |T|^2 g_{jk} - \nabla_j \nabla_k |T|^2 g_i{}^{l} \right) \\
& + 3 \left(\nabla_i \nabla_k (T_{pj} T_p{}^{l}) + \nabla_j \nabla^l (T_{pi} T_{pk}) - \nabla_i \nabla^l (T_{pj} T_{pk}) - \nabla_j \nabla_k (T_{pi} T_p{}^{l}) \right).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

上述方程可以示意性地写为

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathrm{Rm} = \Delta \mathrm{Rm} + \mathrm{Rm} * \mathrm{Rm} + \mathrm{Rm} * T * T + \nabla T * \nabla T + \nabla^2 T * T. \tag{4.10}$$

由于对于任意张量 A 在 M 上，我们有 $\Delta |A|^2 = 2\langle A, \Delta A \rangle + 2|\nabla A|^2$，利用（4.3）和（4.10），可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} |\mathrm{Rm}|^2 &= \frac{\partial}{\partial t} \left(g^{ia} g^{jb} g^{kc} g^{ld} R_{ijkl} R_{abcd} \right) \\
&= \mathrm{Rm} * \mathrm{Rm} * (\mathrm{Ric} + T * T) + 2 \left\langle \mathrm{Rm}, \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{Rm} \right\rangle \\
&\leq \Delta |\mathrm{Rm}|^2 - 2 |\nabla \mathrm{Rm}|^2 + C |\mathrm{Rm}|^3 + C |\mathrm{Rm}|^2 |T|^2 + C |\mathrm{Rm}| |\nabla T|^2 + C |\mathrm{Rm}| |T| |\nabla^2 T|,
\end{aligned} \tag{4.11}$$

其中 C 是某个普适常数。

利用（4.7），可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} R_{jk} = & \Delta \left(R_{jk} - 3 T_{pj} T_{pk} + |T|^2 g_{jk} \right) + \nabla_j \nabla_k \left(R + 4 |T|^2 \right) - \nabla_p \nabla_j \left(R_{kp} - 3 T_{sk} T_{sp} + |T|^2 g_{kp} \right) \\
& - \nabla_p \nabla_k \left(R_{jp} - 3 T_{sj} T_{sp} + |T|^2 g_{jp} \right),
\end{aligned} \tag{4.12}$$

而标量曲率的演化为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} R &= -\Delta (\mathrm{tr}(-2 R_{ij} + 6 T_{pi} T_{pj} - 2 |T|^2 g_{ij})) + \nabla_j \nabla_i (-2 R_{ij} + 6 T_{pi} T_{pj} - 2 |T|^2 g_{ij}) \\
&\quad - R_{ij} (-2 R_{ij} + 6 T_{pi} T_{pj} - 2 |T|^2 g_{ij}) \\
&= \Delta R + 6 \Delta |T|^2 + 6 \nabla_j \nabla_i (T_{pi} T_{pj}) + 2 |\mathrm{Ric}|^2 - 6 R_{ij} T_{pi} T_{pj} + 2 |T|^2 R,
\end{aligned} \tag{4.13}$$

这里用到了黎曼第二比安基恒等式的二次缩并形式。

4.2 挠率的演化

我们计算里奇-调和流下挠率张量的演化。将（3.5）代入（4.1）中挠率的演化式，得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}T_{ij} &= T_{im}(-R_{mj}+3T_{pm}T_{pj}-|T|^2g_{mj})+T_{im}\nabla_aT_{an}\varphi_{nmj}+\nabla_i\nabla_aT_{aj}\\ &\quad+\nabla_m(-R_{ni}+3T_{pn}T_{pi}-|T|^2g_{ni})\varphi_{mnj}\\ &= -T_{im}R_{mj}+3T_{im}T_{pm}T_{pj}-|T|^2T_{ij}+T_{im}\nabla_aT_{an}\varphi_{nmj}+\nabla_i\nabla_aT_{aj}\\ &\quad-\nabla_mR_{ni}\varphi_{mnj}+3\nabla_m(T_{pn}T_{pi})\varphi_{mnj}-\nabla_m|T|^2\varphi_{mij}.\end{aligned}\tag{4.14}$$

我们利用 G_2-比安基恒等式（2.9）和里奇恒等式（2.1）计算挠率张量的拉普拉斯算子。我们有

$$\begin{aligned}\Delta T_{ij} &= \nabla_a\nabla_aT_{ij}\\ &= \nabla_a(\nabla_iT_{aj}+T_{ab}T_{ic}\varphi_{bcj}+\frac{1}{2}R_{aibc}\varphi_{bcj})\\ &= \nabla_a\nabla_iT_{aj}+(\nabla_aT_{ab})T_{ic}\varphi_{bcj}+T_{ab}(\nabla_aT_{ic})\varphi_{bcj}+T_{ab}T_{ic}T_{al}\psi_{lbcj}+\frac{1}{2}\nabla_aR_{aibc}\varphi_{bcj}+\frac{1}{2}R_{aibc}T_{al}\psi_{lbcj}\\ &= \nabla_i\nabla_aT_{aj}+R_{iq}T_{qj}-R_{aijq}T_{aq}+(\nabla_aT_{ab})T_{ic}\varphi_{bcj}+T_{ab}(\nabla_aT_{ic})\varphi_{bcj}+\frac{1}{2}(\nabla_cR_{ib}-\nabla_bR_{ic})\varphi_{bcj}\\ &\quad+\frac{1}{2}R_{aibc}T_{al}\psi_{lbcj}\\ &= \nabla_i\nabla_aT_{aj}+R_{iq}T_{qj}-R_{aijq}T_{aq}+(\nabla_aT_{ab})T_{ic}\varphi_{bcj}+T_{ab}(\nabla_aT_{ic})\varphi_{bcj}+\nabla_cR_{bi}\varphi_{bcj}+\frac{1}{2}R_{aibc}T_{al}\psi_{lbcj}\end{aligned}\tag{4.15}$$

其中我们利用了 $T_{ab}T_{ic}T_{al}$ 关于 b 对称 l，而 ψ_{lbcj} 关于 b 反对称 l，这一点用于第三个等式中的第四项以及第四个等式中缩并一次的第二比安基恒等式。利用（4.14）和（4.15），我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}T_{ij}-\Delta T_{ij} &= -T_{im}R_{mj}+3T_{im}T_{pm}T_{pj}-|T|^2T_{ij}+T_{im}\nabla_aT_{an}\varphi_{nmj}+\nabla_i\nabla_aT_{aj}\\ &\quad-\nabla_mR_{ni}\varphi_{mnj}+3\nabla_m(T_{pn}T_{pi})\varphi_{mnj}-\nabla_m|T|^2\varphi_{mij}\\ &\quad-[\nabla_i\nabla_aT_{aj}+R_{iq}T_{qj}-R_{aijq}T_{aq}+(\nabla_aT_{ab})T_{ic}\varphi_{bcj}+T_{ab}(\nabla_aT_{ic})\varphi_{bcj}+\nabla_cR_{bi}\varphi_{bcj}\\ &\quad+\frac{1}{2}R_{aibc}T_{al}\psi_{lbcj}]\\ &= -T_{im}R_{mj}-R_{im}T_{mj}+3T_{im}T_{pm}T_{pj}-|T|^2T_{ij}+3\nabla_m(T_{pn}T_{pi})\varphi_{mnj}-\nabla_m|T|^2\varphi_{mij}\\ &\quad+R_{aijq}T_{aq}-T_{ab}(\nabla_aT_{ic})\varphi_{bcj}-\frac{1}{2}R_{aibc}T_{al}\psi_{lbcj},\end{aligned}$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}T_{ij} &= \Delta T_{ij}-T_{im}R_{mj}-R_{im}T_{mj}+3T_{im}T_{pm}T_{pj}-|T|^2T_{ij}+3\nabla_m(T_{pn}T_{pi})\varphi_{mnj}-\nabla_m|T|^2\varphi_{mij}\\ &\quad+R_{aijq}T_{aq}-T_{ab}(\nabla_aT_{ic})\varphi_{bcj}-\frac{1}{2}R_{aibc}T_{al}\psi_{lbcj}.\end{aligned}\tag{4.16}$$

上述方程可以示意性地写为

$$\frac{\partial}{\partial t}T=\Delta T+\mathrm{Rm}*T+T*T*T+\nabla T*T*\varphi+\mathrm{Rm}*T*\psi.\tag{4.17}$$

注记 4.1. 沿里奇-调和流演化的挠率张量，其示意性演化方程与闭合 G_2-结构 [LW17，式 (3.13)]。▲

4.3 里奇-调和流的全局 Shi 型估计

本节中，我们将建立里奇-调和流解的正则性理论。我们回顾以下定义，该定义出自 [Che18，定义 1。1]。

定义 4.2. 形式为 $\partial_t\varphi=h\diamond\varphi+C\lrcorner\psi$ 的 G_2-结构流称为**合理流**，如果该流在短时间内有唯一解，并且满足以下条件。

1. 底层度量按以下方式演化

$$\frac{\partial}{\partial t}g_{ij} = -2R_{ij} + C + L(T) + T * T. \tag{4.18}$$

2. 向量场族 X 必须具有以下形式

$$X = C + L(T) + L(\mathrm{Rm}) + L(\nabla T) + T * T. \tag{4.19}$$

3. 挠率张量的演化方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}T = \Delta T + L(T) + L(\nabla T) + \mathrm{Rm} * T + \nabla T * T + T * T + T * T * T. \tag{4.20}$$

这里， L 和 $*$ 分别表示关于变量 φ、 ψ 和 g 以外变量的线性映射和多重线性映射。

由于 $X = \operatorname{div} T$ 对于里奇-调和流，将 (4.18) 与 (4.2) 比较，将 (4.20) 与 (4.16) 比较，并利用定理 3.7，我们可见，里奇-调和流是 G_2-结构的合理流。因此，里奇-调和流解的以下局部导数估计可由 [Che18，定理 2 推得。1]。

定理 4.3。 设 $K > 0$ 和 $r > 0$。设 $p \in M$，并假设 $\varphi(t)$ 是里奇-调和流的一个解，其中$t \in \left[0, \frac{1}{K}\right]$，定义在开邻域$U \ni p$ 上，且 $B_{g(0)}(p, r) \subset U$。若

$$|\mathrm{Rm}| + |\nabla T| + |T|^2 \leq K \tag{4.21}$$

对所有 $x \in B_{g(0)}(p, r)$ 以及 $t \in \left[0, \frac{1}{K}\right]$，若对所有 $k \in \mathbb{N}$，存在常数 $C = C(K, r, k)$ 使得

$$|\nabla^k \mathrm{Rm}| + |\nabla^{k+1} T| \leq C(K, r, k) t^{-\frac{k}{2}}, \tag{4.22}$$

在 $B_{g(0)}(p, \frac{r}{2}) \times \left[0, \frac{1}{K}\right]$上。

事实上，我们证明如下“倍增时间估计”，这说明了假设 (4.21) 是合理的。设 $\varphi(t)$ 是紧流形上的里奇-调和流 M 并定义

$$\Lambda(x,t) = \left(|\mathrm{Rm}(x,t)|^2 + |\nabla T(x,t)|^2 + |T(x,t)|^4\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.23}$$

令 $\Lambda(t) = \sup \Lambda(x, t)$。$M$

引理 4.4 （倍增时间估计）。 设 $\varphi(t)$ 是紧流形 M上的里奇-调和流，定义在 $t \in [0, \tau]$ 上。则存在常数 $C > 0$ 和一个 $\delta > 0$，使得

$$\Lambda(t) \leq 2\Lambda(0) \quad for\ all\ 0 \leq t \leq \delta,$$

其中 $\delta \leq \min\left\{\tau, \frac{1}{C\Lambda(0)}\right\}$。

证明。 证明思路与度量的里奇流或闭G_2-结构 [LW17，命题 4。1]中此类估计的证明类似。我们将先推导里奇-调和流下 $\Lambda(t)$ 的微分不等式，然后利用标量最大值原理得出该估计。

我们先计算 $|T|^4$的演化。利用（4.17），可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}|T|^4 &= \frac{\partial}{\partial t}(g^{ia}g^{jb}g^{kc}g^{ld}T_{ij}T_{ab}T_{kl}T_{cd}) \\
&= 2|T|^2\left\langle 2\frac{\partial}{\partial t}T, T\right\rangle + T*T*T*T*(\mathrm{Ric} + T*T) \\
&= 2|T|^2(2T*(\Delta T + \mathrm{Rm}*T + T*T*T + \nabla T*T*\varphi + \mathrm{Rm}*T*\psi)) + T*T*T*T*(\mathrm{Ric} + T*T) \\
&\leq \Delta|T|^4 - 4|T|^2|\nabla T|^2 + C|\mathrm{Rm}||T|^4 + C|T|^6 + C|\nabla T||T|^4,
\end{aligned} \tag{4.24}$$

其中 C 是某个普适常数，并且我们利用了这一事实： $|\varphi|^2 = |\psi|^2 = 7$。

现在我们计算 $|\nabla T|^2$ 的演化。回想一下，如果一族度量按照 $\partial_t g = h$ 演化，那么 Christoffel符号的演化为

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^k{}_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl}\left(\nabla_i h_{jl} + \nabla_j h_{il} - \nabla_l h_{ij}\right)$$

因此，任意含时张量 $Q(t)$ 按如下方式演化

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla Q = \nabla\frac{\partial}{\partial t}Q + Q * \frac{\partial}{\partial t}\Gamma, \tag{4.25}$$

因此，利用（4.17），可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\nabla T &= \nabla\frac{\partial}{\partial t}T + T*(\nabla(\mathrm{Ric} + T*T))\\ &= \nabla(\Delta T + \mathrm{Rm}*T + T*T*T + \nabla T*T*\varphi + \mathrm{Rm}*T*\psi) + T*(\nabla\mathrm{Ric} + 2\nabla T*T)\\ &= \Delta\nabla T + \nabla\mathrm{Rm}*T + \mathrm{Rm}*\nabla T + \nabla T*T*T + \nabla^2 T*T*\varphi + \nabla T*\nabla T*\varphi\\ &\quad + \nabla T*T*T*\psi + \nabla\mathrm{Rm}*T*\psi + \mathrm{Rm}*\nabla T*\psi + \mathrm{Rm}*T*T*\varphi,\end{aligned} \tag{4.26}$$

这里利用里奇恒等式（2.1）得到

$$\nabla\Delta T = \Delta\nabla T + \mathrm{Rm}*\nabla T + \nabla\mathrm{Rm}*T,$$

以及 $\nabla\varphi = T*\psi$ 和 $\nabla\psi = T*\varphi$ 分别由（2.6）和（2.7）可知。现在利用（4.26）计算

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}|\nabla T|^2 &= 2\left\langle\nabla T, \frac{\partial}{\partial t}\nabla T\right\rangle + \nabla T*\nabla T*\frac{\partial}{\partial t}g^{-1}\\ &= 2\nabla T*\big(\Delta\nabla T + \nabla\mathrm{Rm}*T + \mathrm{Rm}*\nabla T + \nabla T*T*T + \nabla^2 T*T*\varphi + \nabla T*\nabla T*\varphi\\ &\qquad + \nabla T*T*T*\psi + \nabla\mathrm{Rm}*T*\psi + \mathrm{Rm}*\nabla T*\psi + \mathrm{Rm}*T*T*\varphi\big)\\ &\quad + \nabla T*\nabla T*(\mathrm{Ric} + T*T)\\ &\le \Delta|\nabla T|^2 - 2|\nabla^2 T|^2 + C|\nabla T||\nabla\mathrm{Rm}||T| + C|\nabla T|^2|\mathrm{Rm}| + C|\nabla T|^2|T|^2 + |\nabla^2 T|\nabla T||T| + C|\nabla T|^3\\ &\quad + C|\nabla T||\mathrm{Rm}||T|^2.\end{aligned} \tag{4.27}$$

利用（4.11）、（4.24）和（4.27）计算

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Lambda(x,t)^2 &= \Delta(|\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla T|^2 + |T|^4) - 2|\nabla\mathrm{Rm}|^2 - 2|\nabla^2 T|^2 + C|\mathrm{Rm}|^3 + C|\mathrm{Rm}|^2|T|^2 + C|\mathrm{Rm}||\nabla T|^2\\ &\quad + C|\mathrm{Rm}||T||\nabla^2 T| - 4|T|^2|\nabla T|^2 + C|\mathrm{Rm}||T|^4 + C|T|^6 + C|\nabla T||T|^4 + C|\nabla T||\nabla\mathrm{Rm}||T|\\ &\quad + C|\nabla T|^2|T|^2 + C|\nabla^2 T|\nabla T||T| + C|\nabla T|^3 + C|\nabla T||\mathrm{Rm}||T|^2.\end{aligned} \tag{4.28}$$

注意到，项 $|\mathrm{Rm}|^3$，$|\nabla T|^3$，$|T|^6$，$|\mathrm{Rm}|^2|\nabla T|$，$|\mathrm{Rm}||\nabla T|^2$，$|\mathrm{Rm}|^2|T|^2$，$|\mathrm{Rm}||T|^4$，$|\nabla T|^2|T|^2$，$|\nabla T||T|^4$ 以及 $|\mathrm{Rm}||\nabla T||T|^2$ 都可由某个常数乘以 $\Lambda^3 = (|\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla T|^2 + |T|^4)^{\frac{3}{2}}$，来界定，因此我们只需处理项 $C|\mathrm{Rm}||T||\nabla^2 T|$，$C|\nabla T||\nabla\mathrm{Rm}||T|$ 和 $C|\nabla^2 T||\nabla T||T|$。对于所有 $\varepsilon > 0$ 和 a，$b \ge 0$，我们使用杨氏不等式 $ab \le \frac{1}{2\varepsilon}a^2 + \frac{\varepsilon}{2}b^2$ 来估计

$$|\mathrm{Rm}||T||\nabla^2 T| \le \frac{1}{2\varepsilon}|\mathrm{Rm}|^2|T|^2 + \frac{\varepsilon}{2}|\nabla^2 T|^2, \tag{4.29}$$

$$|\nabla T||\nabla\mathrm{Rm}||T| \le \frac{1}{2\varepsilon}|\nabla T|^2|T|^2 + \frac{\varepsilon}{2}|\nabla\mathrm{Rm}|^2, \tag{4.30}$$

$$|\nabla^2 T||\nabla T||T| \le \frac{1}{2\varepsilon}|\nabla T|^2|T|^2 + \frac{\varepsilon}{2}|\nabla^2 T|^2. \tag{4.31}$$

利用式（4.29）-（4.31）和（4.28），可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\Lambda(x,t)^2 \le \Delta\Lambda(x,t)^2 + (C\varepsilon - 2)(|\nabla\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^2 T|^2) + C\Lambda(x,t)^3,$$

其中选择 ε 使得 $C\varepsilon \le 1$，可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\Lambda(x,t)^2 \le \Delta\Lambda(x,t)^2 - (|\nabla\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^2 T|^2) + C\Lambda(x,t)^3. \tag{4.32}$$

由于 $\Lambda(t) =$ 上确界$\Lambda(x, t)$ 是一个 Lipschitz 函数，对 (4.32) 应用最大值原理，得到$_M$

$$\frac{d}{dt}\Lambda(t) \leq \frac{C}{2}\Lambda(t)^2, \tag{4.33}$$

从.....的意义上来讲 前向差商的上极限意义。由此可得，对于 $t \leq \min\left\{\tau, \frac{2}{C\Lambda(0)}\right\}$，有

$$\Lambda(t) \leq \frac{\Lambda(0)}{1-\frac{1}{2}C\Lambda(0)t}, \tag{4.34}$$

因此，对所有 $0 \leq t \leq \delta$，都有 $\Lambda(t) \leq 2\Lambda(0)$，如果取 $\delta = \min\left\{\tau, \frac{1}{C\Lambda(0)}\right\}$。 □

因此，我们看到，量 $\Lambda(x, t)$ 表现良好，沿里奇-调和流不会迅速爆发，所以假设沿里奇-调和流 $\Lambda(t)$ 有界是合理的。事实上，倍增时间估计的证明说明了为何需要通过组合 $|\mathrm{Rm}|^2$，$|\nabla T|^2$ 和 $|T|^4$ 项来定义 Λ。首先，出于缩放方面的原因，所涉及张量范数的幂是恰当的。其次，$|\mathrm{Rm}|^2$ 和 $|\nabla T|^2$ 的演化方程中，诸如 $|\nabla T||\mathrm{Rm}||T|^2$，$|\nabla T||\nabla \mathrm{Rm}||T|$，$|\mathrm{Rm}||T||\nabla^2 T|$ 等项都是不利项，因此将它们组合起来，便可以利用良好的梯度项 $|\nabla \mathrm{Rm}|^2$ 和 $|\nabla^2 T|^2$ 抵消部分贡献。这些项贡献中剩余的部分，在我们也将 $|T|^4$ 纳入 Λ 的定义后，均包含在 $\Lambda(x, t)^3$ 项中。

根据上述对挠率及其协变导数和黎曼曲率张量的演化方程所做的计算，我们也可以证明里奇-调和流解的全局导数估计，即该流的 Shi 型估计。下述定理的证明受到 Shi 对里奇流所作导数估计的启发 [Shi89] 和 Hamilton [Ham95b，定理 7。1]；在 G_2-特定情形下，这与闭 G_2-结构的拉普拉斯流的类似估计 [LW17，定理 4。2] 或等距流的估计 [DGK21，定理 3。3]类似。

定理 4.5。 假设 $K > 0$ 是一个常数，且 $\varphi(t)$ 是闭流形M^7 上的里奇-调和流解，其中 $t \in \left[0, \frac{1}{K}\right]$。对于所有 $m \in \mathbb{N}$，存在一个常数 C_m，使得如果

$$\Lambda(x,t) \leq K \quad \text{on } M \times \left[0, \frac{1}{K}\right], \tag{4.35}$$

那么对于所有 $t \in \left[0, \frac{1}{K}\right]$，我们有

$$|\nabla^m \mathrm{Rm}| + |\nabla^{m+1} T| \leq C_m t^{-\frac{m}{2}} K. \tag{4.36}$$

证明。 与里奇流的情形一样，证明采用对 m 的归纳法。证明思路是定义一个合适的函数，使其满足抛物型微分不等式，然后应用最大值原理。由于该证明与其他几何流的导数估计类似，区别仅在于具体计算，而这些计算取决于挠率及其导数、黎曼曲率张量及其导数的演化（我们已对此进行了明确推导），因此我们只展示归纳步骤中基础情形的细节。归纳的一般情形在定理4.7中针对修正的局部 Shi 型估计予以证明，与此处的情形类似。

对于 $m = 1$ 情形，我们定义函数

$$f = t(|\nabla \mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^2 T|^2) + \beta(|\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla T|^2 + |T|^4), \tag{4.37}$$

其中 β 是稍后确定的常数。注意，由假设（4.35），我们有 $f(x, 0) \leq \beta K^2$。我们要计算 f 的演化，因此计算 $|\nabla \mathrm{Rm}|^2$ 和 $\nabla^2 T|^2$ 的演化。

我们使用（4.2）和（4.10）来计算 $|\nabla \mathrm{Rm}|^2$的演化。利用（4.25），可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\nabla \mathrm{Rm} &= \nabla \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Rm} + \mathrm{Rm} * \frac{\partial}{\partial t}\Gamma \\
&= \nabla(\Delta \mathrm{Rm} + \mathrm{Rm} * \mathrm{Rm} + \mathrm{Rm} * T * T + \nabla T * \nabla T + \nabla^2 T * T) + \mathrm{Rm} * (\nabla(\mathrm{Rm} + T * T)) \\
&= \Delta \nabla \mathrm{Rm} + \nabla \mathrm{Rm} * \mathrm{Rm} + \nabla \mathrm{Rm} * T * T + \mathrm{Rm} * \nabla T * T + \nabla^2 T * \nabla T + \nabla^3 T * T,
\end{aligned} \tag{4.38}$$

其中在第三个等式中，我们使用里奇恒等式（2.1）得到

$$\nabla \Delta \mathrm{Rm} = \Delta \nabla \mathrm{Rm} + \nabla \mathrm{Rm} * \mathrm{Rm}.$$

我们使用（4.38）计算

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}|\nabla \mathrm{Rm}|^2 &= 2\left\langle \nabla \mathrm{Rm}, \frac{\partial}{\partial t}\nabla \mathrm{Rm}\right\rangle + \nabla \mathrm{Rm} * \nabla \mathrm{Rm} * \frac{\partial}{\partial t} g^{-1} \\ &= \nabla \mathrm{Rm} * \left(\Delta \nabla \mathrm{Rm} + \nabla \mathrm{Rm} * \mathrm{Rm} + \nabla \mathrm{Rm} * T * T + \mathrm{Rm} * \nabla T * T + \nabla^2 T * \nabla T + \nabla^3 T * T\right) \\ &\quad + \nabla \mathrm{Rm} * \nabla \mathrm{Rm} * \mathrm{Rm} + \nabla \mathrm{Rm} * \nabla \mathrm{Rm} * T * T \\ &\leq \Delta |\nabla \mathrm{Rm}|^2 - 2|\nabla^2 \mathrm{Rm}|^2 + C|\nabla \mathrm{Rm}|^2 |\mathrm{Rm}| + C|\nabla \mathrm{Rm}|^2 |T|^2 + C|\nabla \mathrm{Rm}||\mathrm{Rm}||\nabla T||T| \\ &\quad + C|\nabla \mathrm{Rm}||\nabla^2 T||\nabla T| + C|\nabla \mathrm{Rm}||\nabla^3 T||T|. \end{aligned} \tag{4.39}$$

同样，我们使用（4.25）和（4.26）进行计算

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 T &= \nabla \frac{\partial}{\partial t}\nabla T + \nabla T * \frac{\partial}{\partial t}\Gamma \\ &= \nabla \left(\Delta \nabla T + \nabla \mathrm{Rm} * T + \mathrm{Rm} * \nabla T + \nabla T * T * T + \nabla^2 T * T * \varphi + \nabla T * \nabla T * \varphi \right. \\ &\qquad \left. + \nabla T * T * T * \psi + \nabla \mathrm{Rm} * T * \psi + \mathrm{Rm} * \nabla T * \psi + \mathrm{Rm} * T * T * \varphi\right) + \nabla T * \nabla \mathrm{Rm} \\ &\quad + \nabla T * \nabla T * T \\ &= \Delta \nabla^2 T + \nabla \mathrm{Rm} * \nabla T + \mathrm{Rm} * \nabla^2 T + \nabla^2 \mathrm{Rm} * T + \nabla^2 T * T * T + \nabla T * \nabla T * T + \nabla^3 T * T * \varphi \\ &\quad + \nabla^2 T * \nabla T * \varphi + \nabla^2 T * T * T * \psi + \nabla T * \nabla T * T * \psi + \nabla T * T * T * T * \varphi + \nabla^2 \mathrm{Rm} * T * \psi \\ &\quad + \nabla \mathrm{Rm} * \nabla T * \psi + \nabla \mathrm{Rm} * T * T * \varphi + \mathrm{Rm} * \nabla^2 T * \psi + \mathrm{Rm} * \nabla T * T * \varphi + \mathrm{Rm} * T * T * T * \psi, \end{aligned}$$

这里我们再次对 $\nabla \Delta \nabla T$ 项使用了里奇恒等式。由此可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}|\nabla^2 T|^2 &\leq \Delta |\nabla^2 T| 2 - 2|\nabla^3 T|^2 + C|\nabla^2 T||\nabla \mathrm{Rm}||\nabla T| + C|\nabla^2 T|^2 |\mathrm{Rm}| + C|\nabla^2 T||\nabla^2 \mathrm{Rm}||T| + |\nabla^2 T|^2 |T|^2 \\ &\quad + C|\nabla^2 T||\nabla T|^2 |T| + + C|\nabla^2 T||\nabla^3 T||T| + + C|\nabla^2 T|^2 |\nabla T| + + C|\nabla^2 T||\nabla T||T|^3 \\ &\quad + C|\nabla^2 T||\nabla \mathrm{Rm}||T|^2 + + C|\nabla^2 T||\nabla T||\mathrm{Rm}||T| + C|\nabla^2 T||\mathrm{Rm}||T|^3. \end{aligned} \tag{4.40}$$

我们使用杨氏不等式来估计微分不等式（4.39）和（4.40）右侧的一些项。对于所有 $\varepsilon > 0$，（4.39）右侧的第五、第六和第七项可估计为

$$\begin{aligned} 2|\nabla \mathrm{Rm}||\mathrm{Rm}||\nabla T||T| &\leq |\nabla \mathrm{Rm}||T|(|\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla T|^2), \\ 2|\nabla \mathrm{Rm}||\nabla^2 T||\nabla T| &\leq |\nabla T|(|\nabla \mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^2 T|^2), \\ 2|\nabla \mathrm{Rm}||\nabla^3 T||T| &\leq \frac{1}{\varepsilon}|\nabla \mathrm{Rm}|^2 |T|^2 + \varepsilon |\nabla^3 T|^2. \end{aligned}$$

同样，对于所有 $\varepsilon > 0$，（4.40）右侧的第三项和第十一项、第五项、第八项、第十项、第十二项和第十三项可依次估计为

$$\begin{aligned} 2|\nabla \mathrm{Rm}||\nabla^2 T|(|\nabla T| + |T|^2) &\leq (|\nabla \mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^2 T|^2)(|\nabla T| + |T|^2), \\ 2|\nabla^2 T||\nabla^2 \mathrm{Rm}||T| &\leq \frac{1}{\varepsilon}|\nabla^2 T|^2 |T|^2 + \varepsilon |\nabla^2 \mathrm{Rm}|^2, \\ 2|\nabla^2 T||\nabla^3 T||T| &\leq \frac{1}{\varepsilon}|\nabla^2 T|^2 |T|^2 + \varepsilon |\nabla^3 T|^2, \\ 2|\nabla^2 T||\nabla T||T|^3 &\leq |\nabla^2 T||T|(|\nabla T|^2 + |T|^4), \\ 2|\nabla^2 T||\nabla T||\mathrm{Rm}||T| &\leq |\nabla^2 T||T|(|\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla T|^2), \\ 2|\nabla^2 T||\mathrm{Rm}||T|^3 &\leq |\nabla^2 T||T|(|\mathrm{Rm}|^2 + |T|^4). \end{aligned}$$

我们可以结合（4.39）和（4.40），以及上述所有利用杨氏不等式得到的估计，并适当选取 $\varepsilon > 0$，从而得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(|\nabla \mathrm{Rm}|^2| + |\nabla^2 T|^2) &\leq \Delta(|\nabla \mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^2 T|^2) - (|\nabla^2 \mathrm{Rm}| + |\nabla^3 T|^2) \\ &\quad + C(|\nabla \mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^2 T|^2)(|\mathrm{Rm}| + |\nabla T| + |T|^2) \\ &\quad + C|T|(|\nabla \mathrm{Rm}| + |\nabla^2 T|)(|\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla T|^2 + |T|^4). \end{aligned} \tag{4.41}$$

得到这些演化方程，并结合（ f ）中函数的定义，回顾（4.37），再结合（4.32），即可计算

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}f \leq \Delta f + (1-\beta)(|\nabla \mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^2 T|^2) + Ct(|\nabla \mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^2 T|^2)(|\mathrm{Rm}| + |\nabla T| + |T|^2) \\ + Ct|T|(|\nabla \mathrm{Rm}| + |\nabla^2 T|)(|\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla T|^2 + |T|^4) \\ + C\beta(|\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla T|^2 + |T|^4)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \tag{4.42}$$

注意，我们有如下假设： $\Lambda(t) = \sup_M \Lambda(x,t) \leq K$ 且 $t \in \left[0, \frac{1}{K}\right]$ 因此 $tK \leq 1$。我们使用前述事实和 Λ 的定义，并再次对（4.42）右侧的第三项和第四项使用杨氏不等式，得到

$$\frac{\partial}{\partial t}f \leq \Delta f + (C-\beta)(|\nabla \mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^2 T|^2) + C\beta K^3,$$

只需选择 β 充分大，即可得到

$$\frac{\partial}{\partial t}f \leq \Delta f + C\beta K^3. \tag{4.43}$$

对上述不等式应用最大值原理可得

$$\sup_M f(x,t) \leq f(x,0) + C\beta K^3 t \leq \beta K^2 + C\beta K^2 \leq CK^2.$$

因此，我们得到

$$|\nabla \mathrm{Rm}| + |\nabla^2 T| \leq C_1 t^{-\frac{1}{2}} K$$

这证明了（4.36）对 $m = 1$ 成立，归纳法的基础情形也就完成了。

为完成归纳步骤所需的估计与其他流的 Shi 型估计类似，因此这里不再写出，例如，参见 G_2-结构的相关结果； [LW17]讨论了闭 G_2-结构的拉普拉斯流情形。下面，我们推导黎曼曲率张量的 m阶导数和挠率的$m+1$阶导数的演化表达式，这些表达式将用于完成归纳步骤，也将用于定理4.7的证明。由于对于任意含时张量 $Q(t)$，我们有

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^m Q - \nabla^m \frac{\partial}{\partial t}Q = \sum_{i=1}^{m} \nabla^{m-i} Q * \nabla^i \frac{\partial}{\partial t} g, \tag{4.44}$$

我们利用（4.2）、（4.10）以及里奇恒等式，得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\nabla^m \mathrm{Rm} &= \nabla^m \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Rm} + \sum_{i=1}^{m} \nabla^{m-i}\mathrm{Rm} * \nabla^i(\mathrm{Ric} + T * T) \\ &= \nabla^m(\Delta \mathrm{Rm} + \mathrm{Rm} * \mathrm{Rm} + \mathrm{Rm} * T * T + \nabla T * \nabla T + \nabla^2 T * T) + \sum_{i=1}^{m} \nabla^{m-i}\mathrm{Rm} * \nabla^i(\mathrm{Ric} + T * T) \\ &= \Delta \nabla^m \mathrm{Rm} + \sum_{i=0}^{m} \nabla^{m-i}\mathrm{Rm} * \nabla^i(\mathrm{Rm} + T * T) + \sum_{i=0}^{m+1} \nabla^i T * \nabla^{m+2-i} T. \end{aligned} \tag{4.45}$$

利用前面的方程，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}|\nabla^m \mathrm{Rm}|^2 = \Delta |\nabla^m \mathrm{Rm}|^2 - 2|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2 + \sum_{i=0}^{m} \nabla^m \mathrm{Rm} * \nabla^{m-i}\mathrm{Rm} * \nabla^i(\mathrm{Rm} + T * T) \\ + \sum_{i=0}^{m+1} \nabla^m \mathrm{Rm} * \nabla^i T * \nabla^{m+2-i} T. \end{aligned} \tag{4.46}$$

同样，对于挠率张量，我们使用（4.17），得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\nabla^{m+1}T &= \nabla^{m+1}\frac{\partial}{\partial t}T + \sum_{i=1}^{m+1}\nabla^{m+1-i}T * \nabla^i \frac{\partial}{\partial t}g \\ &= \Delta\nabla^{m+1}T + \sum_{i=0}^{m+1}\nabla^{m+1-i}T * \nabla^i \mathrm{Rm} + \sum_{i=0}^{m+1}\nabla^{m+1-i}T * \nabla^i(T*T) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{m+1}\nabla^{m+1-i}(\mathrm{Rm}*T) * \nabla^i\psi + \sum_{i=0}^{m+1}\nabla^{m+1-i}(\nabla T * T) * \nabla^i\varphi\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}|\nabla^{m+1}T|^2 &= \Delta|\nabla^{k+1}T|^2 - 2|\nabla^{k+2}T|^2 + \sum_{i=0}^{m+1}\nabla^{m+1}T * \nabla^{m+1-i}T * \nabla^i(\mathrm{Rm} + T*T) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{m+1}\nabla^{m+1}T * \nabla^{m+1-i}(\mathrm{Rm}*T) * \nabla^i\psi + + \sum_{i=0}^{m+1}\nabla^{m+1}T * \nabla^{m+1-i}(\nabla T * T) * \nabla^i\varphi. \qquad (4.47)\end{aligned}$$

最后，为了完成证明，我们还需要 $\nabla^m\psi$ 和 $\nabla^m\varphi$ 的表达式，这些表达式可以分别通过依次对（2.7）和（2.6）求导，并利用归纳假设得到。 □

4.4 修正的局部 Shi 型估计

本节中，我们证明里奇-调和流的修正局部 Shi 型估计。由于里奇-调和流是G_2结构的合理流，我们利用[Che18定理 21]，得到该流的解的局部导数估计（我们还计算了推导这些估计所需的所有演化方程）。下面陈述该结果，并陈述和证明一个更强的结果，即定理4.7。

定理 4.6。 设 $\varphi(t)$ 是 $[0,\tau]$ 上里奇-调和流的一个解。设 $B_{g(0)}(p,r)$ 是以点 $p\in M$ 为中心、半径为 r 的球。如果

$$\left(|\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla T|^2 + |T|^4\right)^{\frac{1}{2}} \le K \quad \text{on} \quad B_{g(0)}(p,r)\times[0,\tau], \qquad (4.48)$$

then

$$|\nabla^m \mathrm{Rm}| + |\nabla^{m+1}T| \le C(m,r,K)t^{-\frac{m}{2}} \quad \text{on} \quad B_{g(0)}(p,\frac{r}{2})\times(0,\tau]. \qquad (4.49)$$

现在我们陈述前一定理的一个更强形式，前一定理是它的特例。修正的局部导数估计的假设更强；特别是，我们假设初始 G_2-结构的黎曼曲率张量和挠率的高阶导数有界，因此结论也更强，并且 Rm 和 T 的高阶导数有界，包括在时刻 $t=0$。修正的局部 Shi 型估计将使我们能够证明该流的修正 Cheeger–Gromov–Hamilton 紧致性定理（定理 5.6）。我们相信，这一结果对于进一步分析里奇-调和流的奇点会很有用，正如类似结果对里奇流的研究极为有用一样。下文定理及其证明基于 Peng Lu 关于里奇流情形的思路，参见 [CCGGIIKLLN08，定理 14。16] 和[MT07，定理 3。29]。

定理 4.7. 设 $\varphi(t)$ $t\in[0,\tau]$ 是 M^7 上里奇-调和流（*RHF*）的一个解。令 $a_+ = max\{a,0\}$。对于任意整数 $l\ge 0$ 和 $m\ge 1$，以及任意正数 α、K、K_l 和 r，存在常数 $C<\infty$，满足 $C = C(\alpha,K,K_l,r,l,m)$，使得若 $p\in M$ 且 $0<\tau\le\frac{\alpha}{K}$，并且

$$|Rm(x,t)| + |\nabla T(x,t)| + |T(x,t)|^2 \le K \quad for\ all\ x\in B_{g(0)}(p,r)\ \ and\ \ t\in[0,\tau], \qquad (4.50)$$

$$|\nabla^\beta \mathrm{Rm}(x,0)| + |\nabla^{\beta+1}T(x,0)| \le K_l \quad for\ all\ x\in B_{g(0)}(p,r)\ \ and\ \ \beta\le l, \qquad (4.51)$$

then

$$|\nabla^m \mathrm{Rm}(y,t)| + |\nabla^{m+1}T(y,t)| \le \frac{C}{t^{\frac{(m-l)_+}{2}}}, \qquad (4.52)$$

˜ 对所有 $y \in B_{g(0)}(p, \frac{r}{2})$ 以及 $t \in (0, \tau]$。特别地，若 $m \le l$，则有一致界

$$|\nabla^m \mathrm{Rm}(y,t)| + |\nabla^{m+1} T(y,t)| \le C \tag{4.53}$$

˜于 $B_{g(0)}(p, \frac{r}{2}) \times [0,\tau]$。

注 4.8。显然，假设（4.51）比 Chen 的局部导数估计定理 4.6 中的假设更强，但一致界的结论（4.53）也更强。▲

注 4.9。我们还注意到 $l = 0$ 恰好就是定理 4.6，因此定理 4.7 在某种程度上是前一定理的推广。▲

证明。证明同样采用关于 m 的归纳法。不过，为了补充定理 4.5 中全局导数估计的证明，我们只证明归纳步骤。首先注意到，对某个 r 证明定理 4.7，便可推出它对所有 $r' > 2r$ 都成立，因为如果 $y \in B_{g(0)}(p, \frac{r'}{2})$ 且 $B_{g(0)}(y,r) \subset B_{g(0)}(p,r')$，那么 $B_{g(0)}(p,r')$ 上的曲率界将推出 $B_{g(0)}(y,r)$ 上的曲率界，进而推出点 y 处的高阶导数估计。

我们还回顾一下（另见 [Che18，式 (2.33)]）：证明里奇-调和流的局部导数估计所需的函数为

$$F_m = (C + t^m(|\nabla^m \mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^{m+1} T|^2)) t^{m+1}((|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^{m+2} T|^2)). \tag{4.54}$$

因此，证明该定理的思路是适当地修改函数 F_m（4.54）中的幂次，降低 t的幂次，同时仍使它们保持非负。我们定义函数

$$F_{m,l} = \left(\tilde{C} + t^{(m-l)_+}(|\nabla^m \mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^{m+1} T|^2)\right) t^{(m-l+1)_+}(|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^{m+2} T|^2), \tag{4.55}$$

˜其中 C 是稍后选定的一个常数。
与里奇流的情形一样，证明该定理所需的主要不等式由以下引理给出。

引理 4.10。令 $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 为一个固定整数，并假设通过对 m作归纳法，我们有

$$|\nabla^j \mathrm{Rm}(y,t)| + |\nabla^{j+1} T(y,t)| \le \frac{C}{t^{\frac{(j-l)_+}{2}}}, \tag{4.56}$$

˜对所有 $y \in B_{g(0)}(p, \frac{r}{2^j})$、$t \in (0、\tau]$ 以及 $j = 1、\ldots\ldots、m$均成立。那么当 $C < \infty$ 充分大时，存在常数 $c > 0$和 $C < \infty$，使得

$$\frac{\partial}{\partial t} F_{m,l} \le \Delta F_{m,l} - \frac{c}{t^{\mathrm{sgn}((m-l+1)_+)}}(F_{m,l})^2 + \frac{C}{t^{\mathrm{sgn}((m-l+1)_+)}}, \tag{4.57}$$

其中

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 0 & x = 0, \\ -1 & s < 0, \end{cases}$$

是符号函数。

由于引理的证明相当冗长且复杂，我们将其推迟到稍后进行，并首先假设引理 4.10 成立来证明定理。令 $m \in \mathbb{N}$，并假设引理中的归纳假设成立，即（4.56）成立，因此函数 $F_{m,\,l}$ 满足微分不等式（4.57）。我们注意到，只要能对函数 $F_{m,\,l}$给出界，便可完成证明。令 U 为 M 中包含球 $B_{g(0)}(p, \frac{r}{2^{m+1}})$ 的一个开集，并令 η: $U \to [0,1]$为满足下列条件的截断函数

1. $\eta = 1$ 在 $B_{g(0)}(p, \frac{r}{2^{m+1}})$ 上。
2. $\subset B_{g(0)}(p, \frac{r}{2^m})$ 的支集（{v1}）。
3. $\eta^{-1}|\nabla\eta|^2_{g(t)} - \Delta_{g(t)}\eta \le \bar{C}$ 对于某个 $\bar{C} < \infty$。

这样的截断函数存在；证明参见 [CCGGIIKLLN08，第14章§1。3]。现在我们将证明分为两种情况。

情况1。 若 $m-l+1\leq 0$ 则 $\operatorname{sgn}(m-l+1)_+=0$ 因此（4.57）在此情况下意味着

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)F_{m,l}\leq -c(F_{m,l})^2+C.$$

因此，我们有

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)(\eta F_{m,l})\leq \eta\left(-c(F_{m,l})^2+C\right)-F_{m,l}\Delta\eta-2\nabla\eta\cdot\nabla F_{m,l}. \tag{4.58}$$

设 $(x_0,t_0)\in B_{g(0)}(p,\frac{r}{2^{m+1}})\times[0,\tau]$，其中函数 $\eta F_{m,l}$ 取得其最大值。这样的点存在，是因为球 $B_{g(0)}(p,\frac{r}{2^{m+1}})\subset B_{g(0)}(p,\frac{r}{2^m})$，因此前者在开集 U中具有紧闭包；此外，初始度量的曲率张量 Rm 和 T 的导数有界这一假设也保证了这一点。若 $t_0=0$，则 $\eta F_{m,l}\leq(\tilde{C}+K_l^2)K_l^2$，因此估计成立。若 $t_0>0$，则根据一阶导数检验，必有 $\nabla(\eta\cdot F_{m,l})=F_{m,l}\nabla\eta+\eta\nabla F_{m,l}=0$ 在 (x_0,t_0) 处成立，且 $\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)\eta F_{m,l}\geq 0$ 在 (x_0,t_0) 处成立，因此在 (x_0,t_0) 处有

$$\begin{aligned}0&\leq -c\eta(F_{m,l})^2+C\eta-F_{m,l}\Delta\eta+2\nabla\eta\cdot\eta^{-1}F_{m,l}\nabla\eta\\&=-c(\eta F_{m,l})^2+C\eta^2+\left(-\Delta\eta+2\eta^{-1}|\nabla\eta|^2\right)\eta F_{m,l}\end{aligned}$$

由于根据截断函数的选取，$(-\Delta\eta+2\eta^{-1}|\nabla\eta|^2)$ 有界，因此我们得到 $\eta F_{m,l}$ 的界，进而得到球上 $F_{m,l}$ 的界，从而完成了此情形下定理的证明。

情况2。如果 $m-l+1>0$ 那么 $\operatorname{sgn}(m-l+1)_+=1$ 且 4.57）在此情形下意味着微分不等式 y

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)F_{m,l}\leq -\frac{c}{t}(F_{m,l})^2+\frac{C}{t}.$$

因此，我们有

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)\eta F_{m,l}\leq -\frac{c\eta}{t}(F_{m,l})^2+\frac{C\eta}{t}-F_{m,l}\Delta\eta-2\nabla\eta\cdot\nabla F_{m,l}$$

将两边乘以 η 后，得到:

$$\eta\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)\eta F_{m,l}\leq -\frac{c}{t}(\eta F_{m,l})^2+\frac{C\eta^2}{t}+(-\Delta\eta+2\eta^{-1}|\nabla\eta|^2)\eta F_{m,l}-2\nabla\eta\cdot\nabla(\eta F_{m,l}).$$

再次考察使 $\eta F_{m,l}$ 取得最大值的点 (x_0,t_0)，并假设 $t_0>$（因为 $t_0=0$ 情形与情况1相同），我们得到

$$0\leq -c(\eta F_{m,l})^2+C\eta^2+t(-\Delta\eta+2\eta^{-1}|\nabla\eta|^2)\eta F_{m,l},$$

根据截断函数的选取，我们再次得出$\eta F_{m,\ l}$ 有界。因此。

$$\eta t^{(m-l+1)_+}(|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2+|\nabla^{m+2}T|^2)\leq C\ \text{ on }\ B_{g(0)}(p,\frac{r}{2^m})\times[0,\tau],$$

又由于 $\eta=1$ 在 $B_{g(0)}(p,\ \frac{r}{2^{m+1}})$ 上，我们得出

$$|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2+|\nabla^{m+2}T|^2\leq\frac{C}{t^{(m-l+1)_+}}\ \text{ on }\ B_{g(0)}(p,\frac{r}{2^{m+1}})\times(0,\tau],$$

由此完成定理的证明。 □

现在我们证明尚待证明的引理。

引理的证明 4.10。令 $l\geq 0$ 固定，并假设根据归纳法，对于 $j=1,\dots,m$，存在常数$C_j=C_j(\alpha,K,K_l,l,r,m)$，使得对所有 $x\in B_{g(0)}(p,\frac{r}{2^j})$ 以及 $t\in[0,\tau]$，都有

$$t^{\frac{(j-l)_+}{2}}|\nabla^j\mathrm{Rm}|+|\nabla^{j+1}T|\leq C_j.$$

这是一个冗长而繁琐的计算，因此我们逐步进行。计算过程和思路受到 [CCGGIIKLLN08] 和 [MT07]中里奇流情形的启发，但这里由于挠率项而有额外的复杂性，因此我们需要仔细估计每一项。由 (4.46) 和 (4.47)，可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(t^{(k-l)_+}(|\nabla^k\mathrm{Rm}|^2+|\nabla^{k+1}T|^2)\right) &\le \Delta(t^{(k-l)_+}(|\nabla^k\mathrm{Rm}|^2+|\nabla^{k+1}T|^2)) - 2t^{(k-l)_+}(|\nabla^{k+1}\mathrm{Rm}|^2+|\nabla^{k+2}T|^2)\\ &+ Ct^{(k-l)_+}\sum_{i=0}^{k}|\nabla^k\mathrm{Rm}||\nabla^{k-i}\mathrm{Rm}||\nabla^i(\mathrm{Rm}+T*T)|\\ &+ Ct^{(k-l)_+}\sum_{i=0}^{k+1}|\nabla^k\mathrm{Rm}||\nabla^iT||\nabla^{k+2-i}T|\\ &+ Ct^{(k-l)_+}\sum_{i=0}^{k+1}|\nabla^{k+1}T||\nabla^{k+1-i}T||\nabla^i(\mathrm{Rm}+T*T)|\\ &+ Ct^{(k-l)_+}\sum_{i=0}^{k+1}|\nabla^{k+1}T||\nabla^{k+1-i}(\mathrm{Rm}*T)||\nabla^i\psi|\\ &+ Ct^{(k-l)_+}\sum_{i=0}^{k+1}|\nabla^{k+1}T||\nabla^{k+1-i}(\nabla T*T)||\nabla^i\varphi|\\ &+ (k-l)_+t^{(k-l)_+-1}(|\nabla^k\mathrm{Rm}|^2+|\nabla^{k+1}T|^2). \end{aligned}\tag{4.59}$$

令 $m_l=(m-l+1)_+$ 和 $\widehat{m}_l=(m-l)_+$。注意，若 $m_l\neq 0$，则 $m_l-\widehat{m}_l=1$；若 $m_l=0$，则 $m_l=\widehat{m}_l=0$。我们先将 $k=m+1$ 代入上述方程，并牢记以下几点，逐步估计每一项：

1. 在下文所有估计中，我们将对 4.56 使用归纳假设（ $0\le j\le m$ ，并且只要常数仅依赖于 C，我们就会继续用字母 α、K、K_l、l、r 和 j 表示不同的常数；应用归纳假设（4.56）时，

2. 我们想 应用引理 4.10 以得到定理 4.6 ，因此我们将假设（4.50）和（4.51) 3. 对任意 $t\in[0,\tau]$，$tK<\alpha$ 其中 K 是条件（4.50）中的常数。

现在我们估计（4.51）右端的各项。先从

$$\begin{aligned}\textbf{3rd term} &= Ct^{m_l}\Big(|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2(|\mathrm{Rm}|+|T|^2)+|\mathrm{Rm}||\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}||\nabla^{m+1}(\mathrm{Rm}+T*T)\\ &\qquad +|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|\sum_{i=1}^{m}|\nabla^{m+1-i}\mathrm{Rm}||\nabla^i(\mathrm{Rm}+T*T)|\Big)\\ &\le Ct^{m_l}\Big(K|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2+|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}||\mathrm{Rm}||T||\nabla^{m+1}T|+C|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}||\mathrm{Rm}|\\ &\qquad +|\mathrm{Rm}||\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|\sum_{i=0}^{m+1}|\nabla^{m+1-i}T||\nabla^iT|+|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|t^{-\frac{m_l}{2}}\Big)\\ &\le Ct^{m_l}K|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2+Ct^{\frac{m_l}{2}}|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|\\ &\le Ct^{\widehat{m}_l}|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2+Ct^{\frac{m_l}{2}}|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|. \end{aligned}\tag{4.60}$$

$$\begin{aligned}\textbf{4th term} &= Ct^{m_l}\sum_{i=0}^{m+2}|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}||\nabla^iT||\nabla^{m+3-i}T|\\ &= Ct^{m_l}\Big(|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}||T||\nabla^{m+3}T|+|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}||\nabla^{m+2}T||\nabla T|+|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|\sum_{i=2}^{m+1}|\nabla^iT||\nabla^{m+3-i}T|\Big)\\ &\le Ct^{m_l}K^{\frac{1}{2}}|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}||\nabla^{m+3}T|+Ct^{\widehat{m}_l}(|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2+|\nabla^{m+2}T|^2)+Ct^{\frac{m_l}{2}}|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|, \end{aligned}\tag{4.61}$$

其中，最后一个不等式用到了杨氏不等式。

现在我们继续处理（4.59）右端的第 5 项。我们有

$$\begin{aligned}
\textbf{5th term} &= Ct^{m_l}\sum_{i=0}^{m+2}|\nabla^{m+2}T||\nabla^{m+2-i}T||\nabla^i(\mathrm{Rm}+T*T)| \\
&\le Ct^{m_l}\Big(K|\nabla^{m+2}T|^2+|\nabla^{m+2}T||T||\nabla^{m+2}(\mathrm{Rm}+T*T)|+|\nabla^{m+2}T||\nabla T||\nabla^{m+1}(\mathrm{Rm}+T*T)| \\
&\qquad +\sum_{i=1}^{m}|\nabla^{m+2}T||\nabla^{m+2-i}T||\nabla^i\mathrm{Rm}|+\sum_{i=1}^{m}|\nabla^{m+2}T||\nabla^{m+2-i}T||\nabla^i(T*T)|\Big) \\
&\le Ct^{m_l}\Big(K|\nabla^{m+2}T|^2+|T||\nabla^{m+2}T||\nabla^{m+2}\mathrm{Rm}|+|T|^2|\nabla^{m+2}T|^2+t^{-\frac{m_l}{2}}|\nabla^{m+2}T| \\
&\qquad +C|\nabla T||\nabla^{m+2}T||\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|\Big) \\
&\le Ct^{\widehat{m}_l}|\nabla^{m+1}T|^2+Ct^{m_l}|T||\nabla^{m+2}T||\nabla^{m+2}\mathrm{Rm}|+Ct^{\frac{m_l}{2}}|\nabla^{m+2}T|+Ct^{\widehat{m}_l}|\nabla^{m+2}T||\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|. \qquad (4.62)
\end{aligned}$$

对于第 6 项和第 7 项，我们需要 $\nabla^i\psi$ 和 $\nabla^i\varphi$的表达式。通过归纳法，并从 (2.7) 和 (2.6) 出发，可以将二者都表示为挠率及其导数的形式。在证明 Shi 型估计的背景下，Lotay–Wei 已经推导出了该表达式，我们采用 [LW17，式 (4.29)]，并根据我们的归纳假设 (4.56) 对估计作适当修改，得到

$$|\nabla^i\psi|\le C_i\sum_{j=0}^{i-2}t^{\frac{j-i+2}{2}}.$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}
\textbf{6th term} &= Ct^{m_l}\sum_{i=0}^{m+2}|\nabla^{m+2}T||\nabla^{m+2-i}(\mathrm{Rm}*T)||\nabla^i\psi| \\
&= Ct^{m_l}\Big(|\nabla^{m+2}T||\nabla^{m+2}(\mathrm{Rm}+T*T)|\nabla\psi|+|\nabla^{m+2}T||\nabla^{m+1}(\mathrm{Rm}+T*T)|\nabla\psi| \\
&\qquad +\sum_{i=2}^{m+2}|\nabla^{m+2}T||\nabla^{m+2-i}(\mathrm{Rm}+T*T)||\nabla^i\psi|\Big) \\
&\le Ct^{m_l}\Big(|T||\nabla^{m+2}T||\nabla^{m+2}\mathrm{Rm}|+|\nabla^{m+2}T||\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}||\nabla T|+t^{-\frac{m_l}{2}}|\nabla^{m+2}T| \\
&\qquad +|T|^2|\nabla^{m+2}T||\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|\Big) \\
&\le Ct^{m_l}|T||\nabla^{m+2}T||\nabla^{m+2}\mathrm{Rm}|+Ct^{\widehat{m}_l}|\nabla^{m+2}T||\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|+Ct^{\frac{m_l}{2}}|\nabla^{m+2}T|. \qquad (4.63)
\end{aligned}$$

第 7 项也可以用同样的方式估计，不等式右端与 (4.63) 的右端完全相同。现在将式 (4.60)-(4.63) 代入 (4.59)，得到

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(t^{m_l}(|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2+|\nabla^{m+2}T|^2)\right) &\le \Delta(t^{m_l}(|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2+|\nabla^{m+2}T|^2))-2t^{m_l}(|\nabla^{m+2}\mathrm{Rm}|^2+|\nabla^{m+3}T|^2) \\
&\quad +\underbrace{Ct^{m_l}K|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2}_{\mathrm{A}}+\underbrace{Ct^{\frac{m_l}{2}}|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|}_{\mathrm{B}}+\underbrace{Ct^{m_l}|T||\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}||\nabla^{m+3}T|}_{\mathrm{C}} \\
&\quad +\underbrace{Ct^{\widehat{m}_l}(|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2+|\nabla^{m+2}T|^2)}_{\mathrm{A}}+\underbrace{Ct^{\widehat{m}_l}|\nabla^{m+2}T|^2}_{\mathrm{A}} \\
&\quad +\underbrace{Ct^{m_l}|T||\nabla^{m+2}\mathrm{Rm}||\nabla^{m+2}T|}_{\mathrm{C}}+\underbrace{Ct^{\frac{m_l}{2}}|\nabla^{m+2}T|}_{\mathrm{B}}+\underbrace{Ct^{\widehat{m}_l}|\nabla^{m+2}T||\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|}_{\mathrm{A}} \\
&\quad +m_lt^{m_l-1}(|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2+|\nabla^{m+2}T|^2). \qquad (4.64)
\end{aligned}$$

对上面的最后一个 A 项应用杨氏不等式，得到

$$Ct^{\widehat{m}_l}|\nabla^{m+2}T||\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|\le Ct^{\widehat{m}_l}(|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2+|\nabla^{m+2}T|^2)$$

因此，式（4.64）中大括号下方所有含 A 的项合并后得到

$$\underbrace{\cdots}_{\mathrm{A}}\le Ct^{\widehat{m}_l}(|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2+|\nabla^{m+2}T|^2).$$

对式（4.64）中的 B 项应用杨氏不等式，得到

$$\underbrace{\cdots}_{\mathrm{B}} = Ct^{\frac{m_l}{2}}(|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}| + |\nabla^{m+2}T|) = Ct^{\frac{m_l-1}{2}+\frac{1}{2}}(|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}| + |\nabla^{m+2}T|)$$
$$\leq Ct^{\widehat{m}_l}(|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^{m+2}T|^2) + t^{m_l-\widehat{m}_l},$$

其中我们得到该 $t^{m_l-\widehat{m}_l}$ 项，正是因为 m_l 与 $\widehat{m}_l$之间的关系。对于（4.64）中的 C 项，我们再次应用杨氏不等式

$$Ct^{m_l}|T||\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}||\nabla^{m+3}T| \leq Ct^{m_l}\left(\frac{1}{\epsilon}|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2 + \epsilon|\nabla^{m+3}T|^2\right)$$
$$Ct^{m_l}|T||\nabla^{m+2}\mathrm{Rm}||\nabla^{m+2}T| \leq Ct^{m_l}\left(\epsilon|\nabla^{m+2}\mathrm{Rm}|^2 + \frac{1}{\epsilon}|\nabla^{m+2}T|^2\right)$$

最终得到

$$\underbrace{\cdots}_{\mathrm{C}} \leq Ct^{m_l}\left(\frac{1}{\epsilon}|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2 + \frac{1}{\epsilon}|\nabla^{m+2}T|^2 + \epsilon|\nabla^{m+2}\mathrm{Rm}|^2 + \epsilon|\nabla^{m+3}T|^2\right).$$

我们将所有这些估计代入（4.64），得到

$$\frac{\partial}{\partial t}(t^{m_l}(|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^{m+2}T|^2)) \leq \Delta(t^{m_l}(|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^{m+2}T|^2)) - (2 - C\epsilon)t^{m_l}(|\nabla^{m+2}\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^{m+3}T|^2)$$
$$+ Ct^{\widehat{m}_l}(|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^{m+2}T|^2) + t^{m_l-\widehat{m}_l}. \tag{4.65}$$

将 $k = m$ 代入（4.59）并按照相同步骤，我们得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(t^{\widehat{m}_l}(|\nabla^m\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^{m+1}T|^2)\right) \leq \Delta(t^{\widehat{m}_l}(|\nabla^m\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^{m+1}T|^2)) - (2 - C\epsilon)t^{\widehat{m}_l}(|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^{m+2}T|^2)$$
$$+ \widehat{m}_l t^{\widehat{m}_l-1}(|\nabla^m\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^{m+1}T|^2) + C. \tag{4.66}$$

回顾函数 $F_{m\text{ 的定义，}l}$ 根据（4.55）以及（4.65）、（4.66），可得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)F_{m,l} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\left(\tilde{C} + t^{\widehat{m}_l}(|\nabla^m\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^{m+1}T|^2)\right)t^{m_l}(|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^{m+2}T|^2) \leq$$

$$\left(\tilde{C} + t^{\widehat{m}_l}(|\nabla^m\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^{m+1}T|^2)\right)\left(-\frac{3}{2}t^{m_l}(|\nabla^{m+2}\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^{m+3}T|^2) + Ct^{\widehat{m}_l}(|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^{m+2}T|^2) + C\right)$$
$$+ \left(-\frac{3}{2}t^{\widehat{m}_l}(|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^{m+2}T|^2) + \widehat{m}_l t^{\widehat{m}_l-1}(|\nabla^m\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^{m+1}T|^2) + C\right)t^{m_l}(|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^{m+2}T|^2)$$
$$- 2t^{m_l+\widehat{m}_l}\nabla(|\nabla^m\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^{m+1}T|^2)\nabla(|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^{m+2}T|^2), \tag{4.67}$$

其中我们选择了 ϵ，使得 $2 - C\epsilon < -\frac{3}{2}$，并利用了以下事实：对于 $t \in [0, \tau]$，$t^{m_l} - t^{\widehat{m}_l} \leq C$其中某个常数。回顾一下，在 $F_{m\text{ 的定义中，}l}$中的常数 C 可以独立选择。我们选择 C 使得

$$7t^{\widehat{m}_l}(|\nabla^m\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^{m+1}T|^2) \leq \tilde{C},$$

这是因为我们可以使用关于 $j = m$的归纳假设。我们继续对（4.67）右端进行估计，得到

$$\leq -12t^{m_l+\widehat{m}_l}(|\nabla^m\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^{m+1}T|^2)(|\nabla^{m+2}\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^{m+3}T|^2)$$
$$+ \left(\tilde{C} + t^{\widehat{m}_l}(|\nabla^m\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^{m+1}T|^2)\right)\left(Ct^{\widehat{m}_l}(|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^{m+2}T|^2) + C\right)$$
$$- \frac{3}{2}t^{m_l+\widehat{m}_l}(|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^{m+2}T|^2)^2$$
$$+ \left(\widehat{m}_l t^{\widehat{m}_l-1}(|\nabla^m\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^{m+1}T|^2) + C\right)(t^{m_l}(|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2 + |\nabla^{m+2}T|^2))$$
$$+ 8t^{m_l+\widehat{m}_l}(|\nabla^m\mathrm{Rm}||\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}| + |\nabla^{m+1}T||\nabla^{m+2}T|)(|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}||\nabla^{m+2}\mathrm{Rm}| + |\nabla^{m+2}T||\nabla^{m+3}T|). \tag{4.68}$$

对（4.68）中的最后一项应用杨氏不等式，得到

$$\frac{8\sqrt{24}}{\sqrt{24}}t^{m_l+\widehat{m}_l}(|\nabla^m\mathrm{Rm}||\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|+|\nabla^{m+1}T||\nabla^{m+2}T|)(|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}||\nabla^{m+2}\mathrm{Rm}|+|\nabla^{m+2}T||\nabla^{m+3}T|)\leq$$
$$12t^{m_l+\widehat{m}_l}\left((|\nabla^m\mathrm{Rm}|^2+|\nabla^{m+1}T|^2)(|\nabla^{m+2}\mathrm{Rm}|^2+|\nabla^{m+3}T|^2)\right)+\frac{4}{3}t^{m_l+\widehat{m}_l}(|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2+|\nabla^{m+2}T|^2)^2,$$

意味着（4.68）变为

$$\begin{aligned}
&\leq -\frac{1}{6}t^{m_l+\widehat{m}_l}(|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2+|\nabla^{m+2}T|^2)^2+\frac{8}{7}\tilde{C}\left(Ct^{\widehat{m}_l}(|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2+|\nabla^{m+2}T|^2)+C\right)\\
&\quad+\left(\frac{1}{7}\tilde{C}\widehat{m}_lt^{m_l-1}+Ct^{m_l}\right)(|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2+|\nabla^{m+2}T|^2)\\
&\leq -\frac{1}{6}t^{m_l+\widehat{m}_l}(|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2+|\nabla^{m+2}T|^2)^2+\frac{8}{7}\tilde{C}C+\left(\left(\frac{8}{7}\tilde{C}C+\frac{1}{7}\tilde{C}\widehat{m}_l\right)t^{\widehat{m}_l}+Ct^{m_l}\right)(|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2+|\nabla^{m+2}T|^2)\\
&\leq -\frac{1}{6}t^{m_l+\widehat{m}_l}(|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2+|\nabla^{m+2}T|^2)^2+\frac{8}{7}\tilde{C}C+Ct^{\widehat{m}_l}(|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2+|\nabla^{m+2}T|^2)\\
&\leq -\frac{1}{12}t^{m_l+\widehat{m}_l}(|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2+|\nabla^{m+2}T|^2)^2+\frac{8}{7}\tilde{C}C+Ct^{\widehat{m}_l-m_l},
\end{aligned}\tag{4.69}$$

其中我们在第一个和第二个不等式中使用了 $7t^{\widehat{m}_l}(|\nabla^m\mathrm{Rm}|^2+|\nabla^{m+1}T|^2)\leq\tilde{C}$，在从第二个不等式到第三个不等式的过程中使用了对于 $t\in[0,\tau]$，$t^{m_l}\leq Ct^{\widehat{m}_l}$并在第三个不等式的最后一项中使用了杨氏不等式，从而得到最终的不等式。回顾 $t^{\mathrm{sgn}(m_l)}=t^{m_l-\widehat{m}_l}$，因此 $t^{m_l+\widehat{m}_l}=t^{2m_l}\cdot t^{-\mathrm{sgn}(m_l)}$ 、（4.69）和（4.67）最终给出

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)F_{m,l}&\leq -\frac{1}{12}t^{m_l+\widehat{m}_l}(|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2+|\nabla^{m+2}T|^2)^2+\frac{8}{7}\tilde{C}C+Ct^{\widehat{m}_l-m_l}\\
&\leq -\frac{c}{12t^{\mathrm{sgn}(m_l)}}\left(t^{m_l}(|\nabla^{m+1}\mathrm{Rm}|^2+|\nabla^{m+2}T|^2)^2\right)+\frac{C}{t^{\mathrm{sgn}(m_l)}}\\
&\leq -\frac{c}{12t^{\mathrm{sgn}(m_l)}}\left(F_{m,l}\right)^2+\frac{C}{t^{\mathrm{sgn}(m_l)}},
\end{aligned}\tag{4.70}$$

˜其中我们再次对 $j=m$ 使用了归纳假设，并对 C使用了相应条件。这就证明了该引理。 □

5. 长时间存在性与紧性定理

5.1 长时间存在的判据

与里奇流的情形一样，我们有以下关于里奇-调和流解的最大存在时间的刻画。

定理 5.1. 设 $\varphi(t)$ 是闭7维流形 M 上的里奇-调和流解，其最大时间区间为$[0,\tau)$。则

$$\lim_{t\nearrow\tau}\Lambda(t)=\infty.\tag{5.1}$$

此外，量 $\Lambda(t)$以如下速率发散，

$$\Lambda(t)\geq\frac{C}{\tau-t},\tag{5.2}$$

其中 $C>0$ 是一个常数。

证明。 按照这类论证的惯常做法，采用反证法。设 $\varphi(t)$ 是里奇-调和流的一个解，且（5.1）不成立。换言之，存在一个常数 $K>0$使得

$$\sup_{[0,\tau]}\Lambda(t)=\sup_{M\times[0,\tau]}\left(|\mathrm{Rm}(x,t)|^2+|\nabla T(x,t)|^2+|T(x,t)|^4\right)^{\frac{1}{2}}\leq K.\tag{5.3}$$

我们将证明，在这种情况下，解可以延拓到 τ之后，从而与 极大性 相矛盾 τ。由于（5.3）成立，我们有

$$\sup_{M\times[0,\tau]}|\mathrm{Rm}(x,t)|+|T(x,t)|^2\leq K,\quad\text{and}\quad|\nabla T(x,t)|\leq K$$

这意味着

$$\sup_{M\times[0,\tau]}\left|\frac{\partial}{\partial t}g_{ij}\right|_{g(t)}=\sup_{M\times[0,\tau]}\left|-2R_{ij}+6T_{pi}T_{pj}-2|T|^2g_{ij}\right|_{g(t)}\leq CK,$$

对于某个常数 C。因此，族 $g(t)^{t\in[0,\tau]}$ 中的所有度量都是一致等价的（参见 [Ham82，定理 14。1] 里奇流情形的论证）。事实上，从流方程（RHF）和 $\diamond$ 算子（2.3）的定义可知，

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\varphi\right|_{g(t)}=\left|\left(-\mathrm{Ric}+3T^tT-|T|^2g\right)\diamond\varphi+\mathrm{div}\,T\lrcorner\psi\right|_{g(t)}\leq CK. \tag{5.4}$$

现在的思路是得到一个极限 G_2-结构 $\varphi(\tau)$，当 $t\nearrow\tau$ 时，并证明 $\varphi(t)\to\varphi(\tau)$ 光滑收敛。由于所有度量 $g(t)$ 都一致等价，对于任意 $0<t_1<t_2<\tau$，我们有：

$$|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|_{g(0)}\leq\int_{t_1}^{t_2}\left|\frac{\partial}{\partial t}\varphi\right|_{g(0)}dt\leq CK(t_2-t_1), \tag{5.5}$$

因此，$\varphi(t)$ 连续收敛到一个 3-形式 $\varphi(\tau)$，当 $t\to\tau$ 时。同样，度量 $g(t)\to g(\tau)$ 和体积形式 $\mathrm{vol}_{g(t)}\to\mathrm{vol}_{g(\tau)}$ 连续收敛，当 $t\to\tau$ 时。由于 $\varphi(t)$ 是 G_2-结构，我们知道对于所有 $t\in[0,\tau)$，有

$$g_t(u,v)\,\mathrm{vol}_{g(t)}=-\frac{1}{6}(u\lrcorner\varphi(t))\wedge(v\lrcorner\varphi(t))\wedge\varphi(t). \tag{5.6}$$

由于（5.6）的左侧收敛到一个正定的 7-形式值双线性型，因此右侧也必然如此。因此，连续极限 φ（τ）是一个正的 3-形式，因而是一个 G_2-结构。因此，若（5.3）成立，则里奇-调和流的解 φ（t）$^{t\in[0,\tau)}$ 可连续延拓至时间区间 $[0,\tau]$。

现在我们证明上述延拓实际上是光滑的。令 $\nabla(0)=\nabla$ 表示度量 $g(0)$的 Levi-Civita 联络。我们首先证明以下断言。

断言 5.2。对于所有 $m\in\mathbb{N}$，都存在常数 C_m 和 C'_m，使得

$$\sup_{M\times[0,\tau)}\left|\overline{\nabla}^m g(t)\right|_{g(0)}\leq C_m\quad\text{and}\quad\sup_{M\times[0,\tau)}\left|\overline{\nabla}^m\varphi(t)\right|_{g(0)}\leq C'_m.$$

断言5.2的证明。我们只证明 φ 的导数情形，因为度量的情形类似。证明采用关于 m的归纳法。对于 $m=1$ 情形，任取一点 $(x,\ t)\in M\times[0,\tau)$。于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\overline{\nabla}\varphi=\overline{\nabla}\frac{\partial}{\partial t}\varphi&=\overline{\nabla}\left(\left(-\mathrm{Ric}+3T^tT-|T|^2g\right)\diamond\varphi+\mathrm{div}\,T\lrcorner\psi\right)\\&=\nabla\left(\left(-\mathrm{Ric}+3T^tT-|T|^2g\right)\diamond\varphi+\mathrm{div}\,T\lrcorner\psi\right)+A*\left(\left(-\mathrm{Ric}+3T^tT-|T|^2g\right)\diamond\varphi+\mathrm{div}\,T\lrcorner\psi\right)\end{aligned}$$

其中表示张量 $A=\nabla-\nabla$。在点 x 周围的固定坐标图中，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}A^k{}_{ij}&=-\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^k{}_{ij}\\&=-\frac{1}{2}g^{kl}\left(\nabla_i(\frac{\partial}{\partial t}g_{jl})+\nabla_j(\frac{\partial}{\partial t}g_{il})-\nabla_l(\frac{\partial}{\partial t}g_{ij})\right)\end{aligned}$$

因此

$$\frac{\partial}{\partial t}A=\nabla(\mathrm{Ric}+T*T).$$

对上述结果关于时间积分，可得

$$\begin{aligned}|A(t)|_{g(0)}&\leq C|A(0)|_g+C\int_0^t\left|\frac{\partial}{\partial s}A\right|_g ds\\&\leq C|A(0)|_g+C(|\nabla\mathrm{Ric}|+|\nabla T||T|)t\leq C,\end{aligned} \tag{5.7}$$

这里用到了 $t<\tau$ 有限这一事实，并且由于假设（5.3），我们得到界（4.36），因此被积函数有界。

由于 $\nabla\left((-\mathrm{Ric}+3T^tT-|T|^2g)\diamond\varphi+\text{散度}\,T\lrcorner\psi\right)$ 由 (4.36) 可知有界，利用 (5.7)，可得

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\overline{\nabla}\varphi\right|_{g(0)}\leq C,$$

因此

$$|\overline{\nabla}\varphi|_{g(0)}\leq|\overline{\nabla}\varphi(0)|_{g(0)}+\int_0^t\left|\frac{\partial}{\partial s}\overline{\nabla}\varphi(s)\right|_{g(0)}ds|\overline{\nabla}\varphi(0)|_{g(0)}+C\tau\leq C_1, \tag{5.8}$$

其中我们再次利用了 $\tau<\infty$。这就证明了 $m=1$ 的情形。

注意，采用推导 (5.7) 及通过 Shi 型估计得到界 (4.36) 时所用的相同推理，可得

$$|\partial_t\overline{\nabla}^kA(t)|_{g(0)}=|\overline{\nabla}^k\partial_tA(t)|_{g(0)}=|\overline{\nabla}^k(g^{-1}(\mathrm{Ric}+T*T))|_{g(0)}$$

因此，根据归纳假设，我们有

$$|\overline{\nabla}^kA(t)|_{g(0)}\leq C\quad\text{for }0\leq k\leq m-1. \tag{5.9}$$

现在证明归纳步骤。我们有

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial t}\overline{\nabla}^m\varphi\right|_{g(0)}&=|\overline{\nabla}^m\left((-\mathrm{Ric}+3T^tT-|T|^2g)\diamond\varphi+\mathrm{div}\,T\lrcorner\psi\right)|_{g(0)}\\&\leq C\sum_{i=0}^m|A|^i|\nabla^{m-i}\left((-\mathrm{Ric}+3T^tT-|T|^2g)\diamond\varphi+\mathrm{div}\,T\lrcorner\psi\right)|\\&\quad+C\sum_{i=1}^{m-1}|\overline{\nabla}^iA||\nabla^{m-1-i}\left((-\mathrm{Ric}+3T^tT-|T|^2g)\diamond\varphi+\mathrm{div}\,T\lrcorner\psi\right)|.\end{aligned} \tag{5.10}$$

右侧第一个量中的各项由于 5.10 的紧性而有界，M 并且 Shi 型估计（4.36）也保证了这一点。第二个量中的各项则由（5.9）和 Shi 型估计保证有界。因此我们得到，

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\overline{\nabla}^m\varphi\right|_{g(0)}\leq C. \tag{5.11}$$

断言 5.2 可由对（5.11）关于时间积分，并利用以下事实得出：$\tau<\infty$。

现在继续 证明定理 5.1。我们有连续极限 G_2-结构 $\varphi(\tau)$。令 U 为一个固定局部区域的定义域 局部坐标图。我们有

$$\varphi_{ijk}(\tau)=\varphi_{ijk}(t)+\int_t^\tau\left((-\mathrm{Ric}(s)+3T^tT(s)-|T|^2g(s))\diamond\varphi(s)+\mathrm{div}\,T(s)\lrcorner\psi(s)\right)_{ijk}ds. \tag{5.12}$$

令 $\alpha=\{a_1,\dots a_r\}$ 为任意一个满足 $|\alpha|=a_1+a_2+\cdots+a_r=m\in\mathbb{N}$的多重指标。由命题 5.2 和（5.11）可知

$$\frac{\partial^m}{\partial x^\alpha}\varphi_{ijk}\qquad\text{and}\qquad\frac{\partial^m}{\partial x^\alpha}\left((-\mathrm{Ric}+3T^tT-|T|^2g)\diamond\varphi+\mathrm{div}\,T\lrcorner\psi\right)_{ijk}$$

在 $U\times[0,\tau)$ 上是一致有界的。因此，由（5.12）可得 $\frac{\partial^m}{\partial x^\alpha}\varphi_{ijk}(\tau)$ 在 U 上有界，因此 $\varphi(\tau)$ 是一个光滑的 G_2- 结构。此外，由（ 5.12 ）可得

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial x^\alpha}\varphi_{ijk}(\tau)-\frac{\partial^m}{\partial x^\alpha}\varphi_{ijk}(t)\right|\leq C(\tau-t)$$

因此，当 $t\to\tau$ 时，对于任意 C^m 范数，$\varphi(t)\to\varphi(\tau)$ 都是一致的，其中 $m\geq2$。

现在，我们利用短时间存在唯一性结果导出矛盾。由于 $\varphi(\tau)$ 是光滑的，我们将 $\bar\varphi(0)=\varphi(\tau)$ 作为定理 3.7 中的初始条件，从而得到一个在短时间内的里奇-调和流解 $\bar\varphi(t)$，定义于 $0\leq t<\varepsilon$。由于 $\varphi(t)\to\varphi(\tau)$当 $t\to\tau$时光滑收敛，因此

$$\bar\varphi(t)=\begin{cases}\varphi(t) & 0\leq t<\tau\\ \bar\varphi(t-\tau) & \tau\leq t<\tau+\varepsilon\end{cases}$$

是一个光滑且满足以下条件的里奇-调和流解 $\bar{\varphi}(0) = \varphi(0)$。这与 τ 的极大性相矛盾，而这一矛盾源于我们的假设（5.3）。因此，我们确实有

$$\lim_{t \nearrow \tau} \Lambda(t) = \infty, \tag{5.13}$$

因此，如果 $\lim_{t \nearrow \tau} \Lambda(t)$ 存在，那么它必定是 ∞。

接下来我们证明，事实上（5.1）成立。反设不成立。那么存在 $K_0 < \infty$ 以及一列时刻 $t_i \nearrow \tau$，使得 $\Lambda(t_i) \leq K_0$。由引理 4.4中的倍增时间估计可得

$$\Lambda(t) \leq 2\Lambda(t_i) \leq 2K_0$$

对所有时刻 $t \in [t_i, \min\{\tau, t_i + \frac{1}{CK_0}\}]$ 均成立。由于 $t_i \nearrow \tau \text{as } i \to \infty$，存在足够大的 i_0，使得 $t_{i_0} + \frac{C}{K_0} \geq \tau$。（这里，与前面一样，我们关键地用到了假设 τ 有限这一事实。）但这意味着

$$\sup_{M \times [t_{i_0}, \tau]} \Lambda(x,t) \leq 2K_0$$

这不可能发生，因为我们已经在上文证明，这会与 τ 的极大性矛盾。至此，（5.1）的证明完成。

通过计算爆破率（5.2）的下界，我们完成定理的证明。对（4.32）应用最大值原理，得到

$$\frac{d}{dt}\Lambda(t)^2 \leq C\Lambda(t)^3$$

这意味着

$$\frac{d}{dt}\Lambda(t)^{-1} \geq -\frac{C}{2}. \tag{5.14}$$

由于我们已在上文证明 $\lim_{t \to \tau} \Lambda(t) = \infty$，因此有

$$\lim_{t \to \tau} \Lambda(t)^{-1} = 0.$$

对（5.14）从 t 到 $t_0 \in (t, \tau)$进行积分，得到

$$\Lambda(t_0)^{-1} - \Lambda(t)^{-1} \geq -\frac{C}{2}(t_0 - t)$$

因此，令 $t_0 \to \tau$ 趋于极限，得到

$$\Lambda(t) \geq \frac{2}{C(\tau - t)}.$$

定理5.1的证明至此完成。 □

由于我们在（ $\Lambda(t)$（5.2）中得到了 $\Lambda(t)$（5.2）中的RHF爆破速率，因此可以像里奇流的情形一样，对（RHF）的各种奇点类型作如下定义。

定义 5.3。 设 $(M^7, \varphi(t))$ 是闭流形上 G_2-结构的里奇-调和流解，其最大时间区间为 $[0, \tau)$，并设 $\Lambda(t)$ 如（4.23）所示。

如果存在有限时奇点，即 $\tau < \infty$，则称该解形成

- 一个*I*型奇点 （快速形成），如果 $\sup_{t \in [0,\tau)} (\tau - t)\Lambda(t) < \infty$；否则
- 一个*IIa*型奇点 （缓慢形成），如果 $\sup_{t \in [0,\tau)} (\tau - t)\Lambda(t) = \infty$。

如果存在无限时 奇点，其中 $\tau = \infty$，则称其为

- 一个*IIb*型奇点 （缓慢形成），如果 $\sup_{t \in [0,\infty)} t\Lambda(t) = \infty$；否则
- 若存在*III*型奇点（迅速形成），则 $\sup_{t \in [0,\infty)} t\Lambda(t) < \infty$。

由于 I 型奇点对于理解里奇流奇点的行为起着至关重要的作用，因此研究 I 型里奇-调和流的长期行为以及 I 型奇点的结构将很有意义。

5.2 紧性

在本节中，我们证明里奇-调和流解的 Cheeger–Gromov–Hamilton 型紧性定理。

回顾一下，若存在一列紧子集 $\Omega_i \subset M$，其穷尽 M 且满足 $p \in \mathrm{int}(\Omega_i)$，对所有 i 均成立；并存在一列微分同胚 $F_i : \Omega_i \to F_i(\Omega_i) \subset M_i$，满足 $F(p) = p_i$，使得对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $k_0 = k_0(\varepsilon)$，并且对所有 $k \geq k_0$，则称一列带 G_2结构的完备带基点7维流形 (M_i^7, φ_i, p_i) $p_i \in M_i$ 收敛到 (M^7, φ, p)，其上有 $p \in M$ 和 φ G_2结构。

$$\sup_{0\leq\alpha\leq p}\ \sup_{x\in K} |\nabla^\alpha(F_i^*\varphi_i - \varphi)|_g < \varepsilon, \tag{5.15}$$

对所有 $p \in \mathbb{N}$ 以及 M 的任意紧子集 K，均成立。这里，g 是 M 上的任意黎曼度量，而 ∇ 是其 Levi-Civita 联络。

我们还回顾由 Lotay–Wei 在 G_2-结构的情形下证明的以下非常一般的紧性定理，见 [LW17，定理 7。1]。

定理 5.4。设 M_i 是一列光滑的7-维流形，并且对每个 i，令 $p_i \in M_i$ 和 φ_i 为M_i 上的G_2-结构，使得由 φ_i 诱导的 M_i 上的度量 g_i 在 M_i上完备。假设

$$\sup_i \sup_{x\in M_i} \left(|\nabla_{g_i}^{k+1} T_i(x)|_{g_i}^2 + |\nabla_{g_i}^k \mathrm{Rm}_{g_i}(x)|_{g_i}^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty \tag{5.16}$$

对所有 $k \geq 0$，并且

$$\inf_i \mathrm{inj}(M_i, g_i, p_i) > 0,$$

其中 T_i、Rm_{g_i} 分别是 φ_i 和 g_i 的挠率与黎曼曲率张量，而$\mathrm{inj}(M_i, g_i, p_i)$ 表示(M_i, g_i) 在 p_i处的单射半径。

那么存在一个7-维流形 M、其上的一个G_2-结构 φ 以及一个点 $p \in M$，使得经过取子序列后，我们有

$$(M_i, \varphi_i, p_i) \to (M, \varphi, p) \qquad \text{as } i \to \infty.$$

沿用 Hamilton 在里奇流情形下的相同思路 [Ham95a] 以及 Lotay–Wei 关于闭G_2-结构的拉普拉斯流的思路 [LW17，定理 7。2], 我们证明以下关于里奇-调和流解的紧性定理。

定理 5.5. 设 M_i 是一列紧致 7维流形，并设 $p_i \in M_i$ 对每个 i。设 $\varphi_i(t)$ 是一列解，满足定义在 (RHF) 上的里奇-调和流 G_2结构，定义在 M_i 上，其中 $t \in (a, b)$。假设 $-\infty \leq a < 0 < b \leq \infty$。

$$\sup_i \sup_{x\in M_i, t\in(a,b)} \left(|\nabla_{g_i(t)} T_i(x,t)|_{g_i(t)}^2 + |\mathrm{Rm}_{g_i(t)}(x,t)|_{g_i(t)}^2 + |T_i(x,t)|_{g_i(t)}^4\right)^{\frac{1}{2}} < \infty \tag{5.17}$$

其中，$\mathrm{Rm}_i(t)$ 和 $T_i(t)$ 分别表示 $\varphi_i(t)$ 的黎曼曲率张量和挠率，且单射半径满足

$$\inf_i \mathrm{inj}(M_i, g_i(0), p_i) > 0. \tag{5.18}$$

那么存在一个 7维流形 M、一个点 $p \in M$以及一个解 $\varphi(t)$，它满足定义在 (RHF) 上的流 M，对 $t \in (a, b)$ 成立，使得取一个子序列后，

$$(M_i, \varphi_i(t), p_i) \to (M, \varphi(t), p) \qquad \text{as } i \to \infty.$$

证明。由于证明与其他 G_2结构的流的紧性定理证明类似，我们只概述主要思路。由定理 4.5中的 Shi 型估计以及假设（5.17），可得

$$|\nabla_{g_i(t)}^k \mathrm{Rm}_i(x,t)|_{g_i(t)} + |\nabla_{g_i(t)}^{k+1} T_i(x,t)|_{g_i(t)} \leq C_k. \tag{5.19}$$

利用关于单射半径的假设（5.18），我们可以应用定理 5.4 提取 $(M_i, \varphi_i(0)\ p_i)$ 的一个子序列，使其收敛到完备极限 $(M, \tilde{\varphi}_\infty$ $(0)\ p)$，其中 $p \in M$，且 $\tilde{\varphi}_\infty(0)$ 是 G_2 在 M上的结构。我们使用通过应用上述定理 5.4 得到的微分同胚 F_i 来定义

$$\tilde{\varphi}_i(t) = F_i^* \varphi_i(t).$$

利用断言 5.2，事实上，沿用定理5.1证明中基本相同的论证，我们得到：对于任意紧子集 $\Omega \times [c,d] \subset M \times (a,b)$，存在常数 $C_{k,l}$，使得

$$\sup_{\Omega\times[c,d]} \left(\left| \frac{\partial^l}{\partial t^l} \nabla^k_{\tilde{g}_\infty(0)} \tilde{g}_i(t) \right|_{\tilde{g}_\infty(0)} + \left| \frac{\partial^l}{\partial t^l} \nabla^k_{\tilde{g}_\infty(0)} \tilde{\varphi}_i(t) \right|_{\tilde{g}_\infty(0)} \right) \leq C_{k,l}. \tag{5.20}$$

因此，利用阿尔泽拉-阿斯科利定理和标准的对角化论证，我们得到 $\tilde{\varphi}_i(t)$ 存在一个子序列，它在 $M \times (a, b)$ 的任意紧子集上光滑收敛到里奇-调和流的一个解 $\tilde{\varphi}_\infty(t)$。

□

任意几何流解的紧性定理的主要应用之一是奇点分析。更确切地说，设 M^7 是一个紧流形，并设 $\varphi(t)$ 是在最大时间区间 $[0,\tau)$ 上里奇-调和流的一个解，且 $\tau < \infty$。定理5.1 于是推出 $\Lambda(t)$ 在（4.23）中定义，满足$\lim_{t\nearrow\tau} \Lambda(t) = \infty$。取点序列$(x_i, t_i)$，满足 $t_i \nearrow \tau$ 并且

$$\Lambda(x_i,t_i) = \sup_{x\in M,\ t\in[0,t_i]} \left(|\nabla T(x,t)|^2_{g(t)} + |\mathrm{Rm}(x,t)|^2_{g(t)} + |T(x,t)|^4_{g(t)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

现在考虑里奇-调和流的一列抛物缩放

$$\varphi_i(t) = \Lambda(x_i,t_i)^3 \varphi(t_i + \Lambda(x_i,t_i)^{-2} t) \tag{5.21}$$

并定义

$$\Lambda_{\varphi_i}(x,t) = \left(|\nabla T_i(x,t)|^2_{g_i(t)} + |\mathrm{Rm}_i(x,t)|^2_{g_i(t)} + |T_i(x,t)|^4_{g_i(t)} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.22}$$

若 $\tilde{\varphi} = c^3\varphi$，则有，

$$(\widetilde{\mathrm{Ric}} + 3\tilde{T}^t\tilde{T} - |\tilde{T}|^2_{\tilde{g}}\tilde{g}) \mathbin{\tilde{\diamond}} \tilde{\varphi} + \widetilde{\mathrm{div}}\tilde{T} \lrcorner \tilde{\psi} = c\left((\mathrm{Ric} + 3T^tT - |T|^2_g g) \diamond \varphi + \mathrm{div}\, T \lrcorner \psi \right).$$

因此，对于每个 i，我们有$(M, \varphi_i(t))$ 是时间区间上的里奇-调和流 $([-t_i\Lambda(x_i, t_i), (\tau - t_i)\Lambda(x_i, t_i)$的一个解。注意，对于每个 i 以及所有 $t \leq 0$，我们有

$$\sup_M |\Lambda_{\varphi_i}(x,t)| = \frac{\left(|\nabla T_i(x,t)|^2_{g_i(t)} + |\mathrm{Rm}_i(x,t)|^2_{g_i(t)} + |T_i(x,t)|^4_{g_i(t)} \right)^{\frac{1}{2}}}{\Lambda(x_i,t_i)} \leq 1$$

根据 $\Lambda(x_i, t_i)$ 的定义。因此，存在一个统一的 $b > 0$，使得

$$\sup_i \sup_{M\times(a,b)} |\Lambda_{\varphi_i}(x,t)| \leq 2$$

对于任意 $a < 0$。因此，若有 $\inf_i \mathrm{inj}(M, g_i(0)\ x_i) > 0$，那么利用紧性定理 5.5，我们可以从 $(M, \varphi_i(t)\ x_i)$ 中抽取一个收敛到如下解的子序列 $(M_\infty, \varphi_\infty(t)\ x_\infty)$，该解满足里奇-调和流方程。

事实上，利用改进的 Shi 型估计定理 4.7，我们可以证明如下针对里奇-调和流的改进紧性定理。其证明与定理5.5的证明类似，故略去。

定理 5.6。 设 M_i 为一列紧致 7维流形，并且对每个 $p_i \in M_i$，i。设 $\varphi_i(t)$ 为定义在 (RHF) 上的 G_2结构的里奇-调和流解序列，流形为 M_i，时间范围为 $t \in (a,b)$，其中 $-\infty \leq a < 0 < b \leq \infty$。假设

1. （初始G_2结构的导数界）对于某个 $m_0 \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，我们有

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\sup_{x\in M_k} \left(|\nabla^m \mathrm{Rm}_{\varphi_k(0)}(x)| + |\nabla^{m+1} T_{\varphi_k(0)}(x)| \right) \right) < \infty \tag{5.23}$$

对于 $0 \leq m \leq m_0 + 1$。

2. （时空 Λ界）我们有

$$\sup_i \sup_{x\in M_i, t\in(a,b)} \left(|\nabla_{g_i(t)} T_i(x,t)|^2_{g_i(t)} + |\mathrm{Rm}_{g_i(t)}(x,t)|^2_{g_i(t)} + |T_i(x,t)|^4_{g_i(t)} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty. \tag{5.24}$$

3. （单射半径满足）$\inf_i \mathrm{inj}(M_i, g_i(0)\ p_i) > 0$。

那么存在一个 7维流形 M、一个点 $p \in M$ 以及一个流 $\varphi(t)$ 的解 (RHF) 定义在 M 上，时间范围为 $t \in (a,b)$ 使得经过取子序列后，

$$(M_i, \varphi_i(t), p_i) \to (M, \varphi(t), p) \qquad \textit{as}\ \ i \to \infty.$$

在基点 C^{m_0}-*Cheeger-Gromov* 拓扑中。

□

5.3 里奇-调和流的长时间存在

回顾一下，若一族度量 $g(t)$, $t\in[0,\tau)$ 满足：对于任意 $\varepsilon>0$，都存在一个$\delta>0$，使得对于任意 $0\le t_0<t<\tau$，若 $tt_0\le\delta$，则称其为**一致连续的**

$$|g(t)-g(t_0)|\le\varepsilon,$$

这意味着

$$(1-\varepsilon)g(t_0)\le g(t)\le(1+\varepsilon)g(t_0). \tag{5.25}$$

Clearly, (5.25) 表明，对于点 x， $y\in M$ 若 $t-t_0\le\delta$ 则距离函数满足

$$(1-\varepsilon)^{\frac{1}{2}}d_{g(t_0)}(x,y)\le d_{g(t)}(x,y)\le(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}d_{g(t_0)}(x,y),$$

因此，以 x 为中心、半径为 r 的测地球满足

$$B_{g(t_0)}\left(x,\frac{r}{(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}\right)\subset B_{g(t)}(x,r)$$

其体积满足

$$\mathrm{Vol}_{g(t_0)}\left(B_{g(t_0)}\left(x,\frac{r}{(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}\right)\right)\le\mathrm{Vol}_{g(t)}\left(B_{g(t)}(x,r)\right). \tag{5.26}$$

在本节中，我们通过证明定理 5.1，改进了我们的长时间存在性结果：从任意紧流形上的 G_2-结构出发的里奇-调和流，只要流的速度保持有界，就能一直存在。下面定理的推论将给出这一结论：该定理证明，若底层度量$g(t)$ 沿里奇-调和流一致连续，并且标量曲率、挠率张量以及内在挠率 VT 的散度满足有界性假设，则里奇-调和流对所有时间都存在。我们陈述并证明该定理。证明基于里奇流情形下 Šešum 的类似结果[Šeš05] (我们采用 [CLN06，定理 6 中的证明40])以及 Lotay–Wei 关于闭 G_2-结构的拉普拉斯流情形的结果 [LW17，定理 81]。

定理 5.7. 设$(M^7,\varphi(t))$是紧流形上的里奇-调和流，定义于 $t\in[0,\tau)$，且满足 $\tau<\infty$。设 $g(t)$是 $\varphi(t)$的底层度量。若 $g(t)$ 是一致连续的，并且满足以下界娱乐主管

$$\sup_{M\times[0,\tau)}R+4|T|^2+2\,\mathrm{div}(VT)<\infty, \tag{5.27}$$

其中，VT 是与向量场相对应的内在挠率 T_7 ； 那么，解 $\varphi(t)$ 可延拓至 τ之后。

证明。 采用反证法。假设（5.27）成立，但该流无法延拓到时间 τ之后。由定理 5.1 可知，存在一列时空中的点 (x_i,t_i) $t_i\nearrow\tau$ 使得

$$\Lambda(x_i,t_i)=\sup_{x\in M,\ t\in[0,t_i]}\left(|\mathrm{Rm}(x,t)|^2+|\nabla T(x,t)|^2+|T(x,t)|^4\right)^{\frac{1}{2}}\to\infty. \tag{5.28}$$

由定理 5.5证明后的讨论可知，并且仿照 [LW17，定理 8。1] Lotay–Wei 的方法，我们可以得到一列流 $(M,\varphi_i(t)\ x_i)$ 定义在 $[-t_i\Lambda(x_i,t_i),0]$ 上，且满足

$$\sup_{M\times[-t_i\Lambda(x_i,t_i),0]}|\Lambda_{\varphi_i}(x,t)|\le1\quad\text{and}\quad|\Lambda_{\varphi_i}(x_i,0)|=1.$$

现在利用度量 $g(t)$ 和（5.26）关于测地球体积界的一致连续性可知，若 $r\le\Lambda(x_i,t_i)^{\frac{1}{2}}$则存在某个统一的正数常数 c，使得

$$\mathrm{Vol}_{g_i(0)}(B_{g_i(0)}(x,r))\ge C(1+\varepsilon)^{-\frac{7}{2}}r^7.$$

这使我们能够应用 Cheeger–Gromov–Taylor 的定理 [CLN06，定理 5。42] 从而得到一个一致的单射半径下界，使其远离零 $\mathrm{inj}(M,g_i(0)\ x_i)\le\gamma>0$。利用我们的紧性定理定理 5.5，我们得到一个收敛到极限 $(M_\infty,\varphi_\infty,x_\infty)$， $t\in(-\infty,0]$ 以及 $|\Lambda_{\varphi_\infty}(x_\infty,0)|=1$。

由于我们的假设（5.27）是 $R+4|T|^2+2\,\mathrm{div}(VT)$ 沿流保持有界，并且 $\Lambda(x_i,t_i)$ 当 $i\to\infty$时，我们沿 G_2-结构进行缩放，得到

$$(R_i+4|T_i|^2+2\,\mathrm{div}_i(VT_i))_{g_i(t)}(x,\ t)=\Lambda(x_i,\ t_i)^{-1}\left[(R+4|T|^2+2\,\mathrm{div}(VT))_{g(t_i+\Lambda(x_i,\ t_i)^{-1}t)}(x,\ t_i+\Lambda(x_i,\ t_i)^{-1}t)\right]\to 0, \tag{5.29}$$

如 $i\to\infty$。利用标量曲率的表达式（2.10），我们看到 $(M_\infty,\ \varphi_\infty(t))$ 的内在挠率均为零，因此对于所有 $tin(-\infty,\ 0]$，它都是无挠的。由于无挠 G_2-结构的度量是里奇平坦的，因此对于所有 $t\in(-\infty,\ 0]$，都有 $\mathrm{Ric}_{g_\infty(t)}=0$。

再次沿用 [LW17，定理 81], 中的论证，该论证又基于 [Šeš05], 中的论证，我们知道$g_\infty(0)$ 具有欧几里得体积增长。因此，根据 Bishop–Gromov 体积比较定理，$(M_\infty,\ g_\infty)$必定与$(\mathbb{R}^7,\ g_{\mathrm{Eucl}})$ 等距，因为 $\mathrm{Ric}_{g_\infty}=0$。但这与我们的矛盾，因为根据我们的选点论证，有$|\Lambda_{\varphi_\infty}(x_\infty,\ 0)|=1$，因此

$$|\mathrm{Rm}_{g_\infty}(x_\infty,0)|=|\Lambda_{\varphi_\infty}(x_\infty,0)|=1.$$

至此，定理的证明完成。 □

注记 5.8. 度量一致连续性的假设 $g(t)$ 用于获得如 (5.26) 所示的体积界，而这又用于确保单射半径一致为正，从而得到具有欧几里得体积增长的极限流形。若能通过其他方式保证单射半径一致为正，例如利用 $g(t)$ -非塌缩定理，则可以去掉一致连续性 κ的假设。Gao Chen 在挠率张量一致有界的假设下，对 G_2-结构（里奇-调和流即为此类合理流）完成了这一工作，见 [Che18，定理 5.2、定理 5.4]。因此，利用 Chen 的结果是证明里奇-调和流长时间存在的另一种方法。▲

作为前一定理的一个应用，我们得到

定理 5.9. 设 $(M,\varphi(t))$ 是紧流形上的一个里奇-调和流，满足 $t\in[0,\tau)$ 且 $\tau<\infty$。若流 (RHF) 的速度有界，则该解可以延拓到时间 τ之后。

证明。 如果（RHF）的速度有界，即

$$\sup_{M\times[0,\tau)}|\mathrm{Ric}-3T^T+|T|^2g|_{g(t)}+|\,\mathrm{div}\,T|_{g(t)}<\infty, \tag{5.30}$$

th则度量 g（t）沿流一致有界。此外，（5.30）还意味着

$$\sup_{M\times[0,\tau)}(R+4|T|^2+2\,\mathrm{div}(VT))<\infty.$$

因此，两个 定理 5.7 的条件均已满足，我们可以将解延拓至时间 τ. □

6. 里奇-调和孤立子

本节将建立里奇-调和流的孤子理论。这些是该流的特殊解，具有自相似性，即它们仅通过给定G_2-结构的微分同胚和缩放而演化。里奇孤子在 Hamilton–Perelman计划中关于里奇流的研究以及证明 Thurston几何化猜想方面发挥着极其重要的作用。它们是 Perelman 引入的各种新泛函（例如 $\mathcal{F}$ 和$\mathcal{W}$-泛函）的不动点，因此也作为里奇流的奇性模型出现。既然我们已经证明了里奇-调和流的紧性定理（定理 5.5 ），并说明了如何利用它分析奇点，那么可以预期，里奇-调和流的奇点可以由自相似解建模。基于这一预期，我们证明了里奇-调和流的孤子的若干结果和恒等式。

设 M是一个 7维流形。里奇-调和流（*1.3*）的孤子是一个三元组 (φ,Y,λ) 其中 $Y\in\Gamma(TM)$，并且 有$\lambda\in\mathbb{R}$满足

$$\left(-\mathrm{Ric}+3T^tT-|T|^2g\right)\diamond\varphi+\mathrm{div}\,T\lrcorner\psi=\lambda\varphi+\mathcal{L}_Y\varphi. \tag{6.1}$$

满足 (G_2-结构且满足 (6.1) 的情形比较特殊，因为它们会产生该流的自相似解。更准确地说，如果 φ_0 在 6.1) 上满足 M，其中向量场为 Y，标量为 λ，那么对所有满足 t 的 $1+\frac{2}{3}\lambda t>0$，定义

$$\rho(t)=\left(1+\frac{2}{3}\lambda t\right)^{\frac{3}{2}}\quad\text{and}\quad Y(t)=\rho(t)^{-\frac{2}{3}}Y. \tag{6.2}$$

选择这些幂次是因为 $\tilde{g} = fg$ 如果 $\tilde{\varphi} = f^{\frac{3}{2}}\varphi$。令 $\Theta(t)$ 为由向量场$X(t)$ 生成、从恒等映射出发的微分同胚。定义

$$\varphi(t) = \rho(t)\Theta(t)^*\varphi_0 \tag{6.3}$$

它是一个自相似于 φ_0 的解，因为它的变化 φ_0 仅通过缩放和微分同胚进行。对时间求导（6.3），并利用 φ_0 满足（6.1）这一事实，我们立即得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t) = \left(-\mathrm{Ric} + 3T^tT - |T|^2 g\right)(t) \diamond_t \varphi(t) + \operatorname{div} T(t) \lrcorner \psi(t),$$

因此，我们得到（6.1）、（6.2）和（6.3）之间的等价关系。

若孤子（φ，Y，λ）满足 $\lambda > 0$，则称其为膨胀型；若满足 $\lambda = 0$，则称其为稳态型；若满足 $\lambda < 0$，则称其为收缩型。

现在我们推导由 φ 诱导且 div T 的度量 g 在（φ，Y，λ）为孤子时所满足的条件，并且预期该条件会有进一步用途。

命题 6.1。设（φ，Y，λ）是定义于（6.1）中的一个孤子。那么，诱导度量 g 满足

$$R_{ij} - 3T_{pi}T_{pj} + |T|^2 g_{ij} + \frac{1}{2}(\mathcal{L}_Y g)_{ij} + \frac{\lambda}{3} g_{ij} = 0, \tag{6.4}$$

且$\operatorname{div} T$ 满足

$$\operatorname{div} T + \frac{1}{2}\operatorname{curl} Y - Y \lrcorner T = 0. \tag{6.5}$$

证明。根据 $\diamond$ 算子在（2.3）中的定义可得 $\varphi = \left(\frac{g}{3} \diamond \varphi\right)$。此外，（2.11）给出

$$\mathcal{L}_Y \varphi = \frac{1}{2}\mathcal{L}_Y g \diamond \varphi + \left(-\frac{1}{2}\operatorname{curl} Y + Y \lrcorner T\right) \lrcorner \psi.$$

将这些表达式代入（6.1），并利用Ω^3_{1+27} 与Ω^3_7 正交这一事实，可得（6.4）和（6.5）。 □

我们可以证明关于（1.3）的紧致膨胀孤子不存在性定理 .

命题 6.2。设（M^7, φ, Y, λ）为里奇-调和孤子。则有如下结论。

1. 不存在（1.3）的紧致膨胀孤子。

2. 紧致稳态孤子（(1.3) 的唯一解由无挠的G_2-结构给出。

证明。对（6.4）取迹，得到

$$R + 4|T|^2 + \operatorname{div} Y + \frac{7}{3}\lambda = 0$$

代入标量曲率（2.10）的表达式后，化简为

$$10|T_1|^2 + 9|T_7|^2 + 3|T_{14}|^2 + 3|T_{27}|^2 - 2\operatorname{div}(VT) + \frac{7}{3}\lambda + \operatorname{div} Y = 0. \tag{6.6}$$

在紧致的 M 上对（6.6）积分，得到

$$\int_M \left(10|T_1|^2 + 9|T_7|^2 + 3|T_{14}|^2 + 3|T_{27}|^2\right) \mathrm{vol} + \frac{7}{3}\lambda \mathrm{Vol}(M) = 0.$$

因此，当且仅当 $T_i \equiv 0$时，$\lambda \leq 0$和 $\lambda = 0$对 $i = 1$、7、14、27 成立，故 φ必为无挠的 . □

现在我们推导一些关于梯度里奇-调和孤子的恒等式。里奇-调和孤子（简称 RH 孤子）（M, φ, Y, λ）是梯度型的，如果向量场 $Y = \nabla f$对某个 $f \in C^\infty(M)$成立。梯度里奇-调和孤子的度量和挠率满足

$$R_{ij} - 3T_{pi}T_{pj} + |T|^2 g_{ij} + \nabla_i \nabla_j f + \frac{\lambda}{3} g_{ij} = 0, \tag{6.7}$$

$$\operatorname{div} T_j - \nabla_i f T_{ij} = 0. \tag{6.8}$$

这两个方程都是将 $Y = \nabla f$ 代入命题 6.1 并利用 $\operatorname{curl}(\nabla f)_k = \nabla_i \nabla_j f \varphi_{ijk} = 0$对任意 $f \in C^\infty(M)$得到的。

引理 6.3。 设 $(M^7, \varphi, \nabla f, \lambda)$ 是一个梯度 *RH* 孤立子。则下列恒等式成立。

$$R + 4|T|^2 + \Delta f + \frac{7}{3}\lambda = 0. \tag{6.9}$$

$$\nabla_j \left(R + 6|T|^2 + |\nabla f|^2 + \frac{2\lambda}{3} f \right) = 6T_{pj}T_{pm}\nabla_m f - 6\nabla_i(T_{pi}T_{pj}) - 2|T|^2\nabla_j f. \tag{6.10}$$

注记 6.4. 方程 (6.10) 可视为梯度 Ricci 孤立子的 Hamilton 恒等式 [Ham95b, §20]

$$\nabla(R + |\nabla f|^2 + \lambda f) = 0$$

的类似形式。 ▲

证明. 对 (6.7) 两边取迹，得到

$$R + 4|T|^2 + \Delta f + \frac{7}{3}\lambda = 0$$

这就证明了 (6.9)。

对 (6.7) 取散度，并利用二次缩并的第二 Bianchi 恒等式和里奇恒等式 (2.1)，可得

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_i \left(R_{ij} - 3T_{pi}T_{pj} + |T|^2 g_{ij} + \nabla_i\nabla_j f + \frac{\lambda}{3} g_{ij} \right) \\ &= \frac{1}{2}\nabla_j R - 3\nabla_i(T_{pi}T_{pj}) + \nabla_j|T|^2 + \nabla_j\Delta f + R_{jm}\nabla_m f \\ &= \frac{1}{2}\nabla_j R - 3\nabla_i(T_{pi}T_{pj}) + \nabla_j|T|^2 + \nabla_j \left(-R - 4|T|^2 - \frac{7}{3}\lambda \right) + R_{jm}\nabla_m f \\ &= \nabla_j R + 6\nabla_j|T|^2 + 6\nabla_i(T_{pi}T_{pj}) - 2R_{jm}\nabla_m f, \end{aligned} \tag{6.11}$$

其中我们使用了（6.9）。现在我们再次使用孤子方程（6.7），对上面最后一个等式中的 R_{jm} 项进行处理，进一步得到

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_j R + 6\nabla_j|T|^2 + 6\nabla_i(T_{pi}T_{pj}) - 2\left(3T_{pj}T_{pm} - |T|^2 g_{jm} - \nabla_j\nabla_m f - \frac{\lambda}{3} g_{jm} \right) \nabla_m f \\ &= \nabla_j R + 6\nabla_j|T|^2 + 6\nabla_i(T_{pi}T_{pj}) - 6T_{pj}T_{pm}\nabla_m f + 2|T|^2\nabla_j f + \nabla_j|\nabla f|^2 + \frac{2\lambda}{3}\nabla_j f, \end{aligned}$$

可将其改写为

$$\nabla_j \left(R + 6|T|^2 + |\nabla f|^2 + \frac{2\lambda}{3} f \right) = 6T_{pj}T_{pm}\nabla_m f - 6\nabla_i(T_{pi}T_{pj}) - 2|T|^2\nabla_j f,$$

这就证明了（6.10）。 □

现在我们陈述并证明一些关于里奇-调和孤立子的恒等式。我们认为，这些恒等式将有助于进一步研究前者的几何性质和解析性质。首先回顾以下

Lem引理 6.5。 [PW09，引理 2。1]。设 X 是黎曼流形$(M^n,\ g)$上的一个向量场。那么

$$\operatorname{div}(\mathcal{L}_X g)(X) = \frac{1}{2}\Delta|X|^2 - |\nabla X|^2 + \operatorname{Ric}(X, X) + \nabla_X \operatorname{div} X. \tag{6.12}$$

当 $X = \nabla f$和 $Z \in \Gamma(TM)$时，

$$\operatorname{div}(\mathcal{L}_{\nabla f} g)(Z) = 2\operatorname{Ric}(Z, \nabla f) + 2\nabla_Z \operatorname{div} \nabla f. \tag{6.13}$$

我们利用前面的引理证明如下结论。

引理 6.6. 设 $(M^7, \varphi, X, \lambda)$ 为一个里奇-调和孤子。那么

$$\frac{1}{2}\Delta|X|^2 = |\nabla X|^2 - \operatorname{Ric}(X, X) + 2\nabla_X|T|^2 + 6\operatorname{div}(T^t \circ T)(X), \tag{6.14}$$

and

$$\frac{1}{2}(\Delta - \nabla_X)|X|^2 = |\nabla X|^2 + \frac{\lambda}{3}|X|^2 + |T|^2|X|^2 - 3(T^t \circ T)(X, X) + 2\nabla_X|T|^2 + 6\operatorname{div}(T^t \circ T)(X). \tag{6.15}$$

证明. 对（6.4）取散度可得

$$2\operatorname{div}\mathrm{Ric}+\operatorname{div}(\mathcal{L}_X g)+2\nabla|T|^2-6\operatorname{div}(T^t\circ T)=0. \tag{6.16}$$

此外，由于

$$R+4|T|^2+\operatorname{div}X+\frac{7}{3}\lambda=0,$$

我们得到

$$\nabla_X R+4\nabla_X|T|^2+\nabla_X(\operatorname{div}X)=0. \tag{6.17}$$

利用 (6.12)、(6.16)、(6.17) 以及二次缩并的第二 Bianchi 恒等式，我们得到

$$\begin{aligned}\nabla_X(\operatorname{div}X)&=-\nabla_X R-4\nabla_X|T|^2\\&=-2\operatorname{div}\mathrm{Ric}(X)-4\nabla_X|T|^2\\&=\operatorname{div}(\mathcal{L}_X g)(X)+2\nabla_X|T|^2-6\operatorname{div}(T^t\circ T)(X)-4\nabla_X|T|^2\\&=\frac{1}{2}\Delta|X|^2-|\nabla X|^2+\mathrm{Ric}(X,X)+\nabla_X\operatorname{div}X-2\nabla_X|T|^2-6\operatorname{div}(T^t\circ T)(X)\end{aligned}$$

由此可得

$$\frac{1}{2}\Delta|X|^2=|\nabla X|^2-\mathrm{Ric}(X,X)+2\nabla_X|T|^2+6\operatorname{div}(T^t\circ T)(X),$$

从而证明了 (6.14)。

再次，利用孤子方程（6.4），可得

$$\mathrm{Ric}(X,X)=-\frac{1}{2}(\mathcal{L}_X g)(X,X)-\frac{\lambda}{3}|X|^2-|T|^2|X|^2+3(T^t\circ T)(X,X),$$

将其代入（6.14），可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|X|^2&=|\nabla X|^2+\frac{1}{2}(\mathcal{L}_X g)(X,X)+\frac{\lambda}{3}|X|^2+|T|^2|X|^2-3(T^t\circ T)(X,X)+2\nabla_X|T|^2+6\operatorname{div}(T^t\circ T)(X)\\&=|\nabla X|^2+\frac{1}{2}\nabla_X|X|^2+\frac{\lambda}{3}|X|^2+|T|^2|X|^2-3(T^t\circ T)(X,X)+2\nabla_X|T|^2+6\operatorname{div}(T^t\circ T)(X),\end{aligned}$$

这就证明了（6.15）。

若里奇-调和孤子是紧致的，则对前一个引理中的（6.14）积分，可得以下简单推论。

推论 6.7。 设(M^7,φ,X,λ)是一个紧致的里奇-调和孤子。若

$$\int_M\big(\mathrm{Ric}(X,X)-2\nabla_X|T|^2-6\operatorname{div}(T^t\circ T)(X)\big)\,\mathrm{vol}\le 0 \tag{6.18}$$

则 X 是一个*Killing*场，且该孤子是平凡的。

□

我们还有以下关于紧致黎奇-调和梯度孤立子的积分公式。

引理 6.8。 设 $(M^7,\varphi,\nabla f,\lambda)$ 是一个紧致梯度里奇-调和孤子。则

$$\int_M\left|\nabla^2 f-\frac{\Delta f}{7}g\right|^2\mathrm{vol}=\int_M\left[\frac{5}{14}\langle\nabla R,\nabla f\rangle+6T_{pj}T_{pm}\nabla_j\nabla_m f-6\nabla_j\nabla_i(T_{pi}T_{pj})-\frac{6}{7}|T|^2\Delta f\right]\mathrm{vol}\,. \tag{6.19}$$

证明。 对（6.10）取散度，得到

$$\begin{aligned}\Delta R+6\Delta|T|^2+\Delta|\nabla f|^2+\frac{2\lambda}{3}\Delta f=6\nabla_j(T_{pj}T_{pm})\nabla_m f+6T_{pj}T_{pm}\nabla_j\nabla_m f-6\nabla_j\nabla_i(T_{pi}T_{pj})-2\langle\nabla|T|^2,\nabla f\rangle\\-2|T|^2\Delta f,\end{aligned}$$

利用博赫纳公式后

$$\Delta|\nabla f|^2 = 2\langle\nabla(\Delta f), \nabla f\rangle + 2\mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) + 2|\nabla^2 f|^2,$$

变为

$$\begin{aligned}\Delta R + 6\Delta|T|^2 + 2\langle\nabla(\Delta f), \nabla f\rangle + 2\mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) + 2|\nabla^2 f|^2 + \frac{2\lambda}{3}\Delta f = {} & 6\nabla_j(T_{pj}T_{pm})\nabla_m f + 6T_{pj}T_{pm}\nabla_j\nabla_m f \\ & - 6\nabla_j\nabla_i(T_{pi}T_{pj}) - 2\langle\nabla|T|^2, \nabla f\rangle \\ & - 2|T|^2\Delta f. \end{aligned} \tag{6.20}$$

在（6.11）中使用第二个等式来处理（6.20）右边的第三项和第四项，可使右边

$$\Delta R + 6\Delta|T|^2 - \langle\nabla R, \nabla f\rangle + 6\nabla_i(T_{pi}T_{pj})\nabla_j f - 2\langle\nabla|T|^2, \nabla f\rangle + 2|\nabla^2 f|^2 + \frac{2\lambda}{3}\Delta f$$

因此，（6.20）变为

$$\Delta R + 6\Delta|T|^2 - \langle\nabla R, \nabla f\rangle + 2|\nabla^2 f|^2 + \frac{2\lambda}{3}\Delta f = 6T_{pj}T_{pm}\nabla_j\nabla_m f - 6\nabla_j\nabla_i(T_{pi}T_{pj}) - 2|T|^2\Delta f. \tag{6.21}$$

由于 $\left|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g\right|^2 = |\nabla^2 f|^2 - \frac{(\Delta f)_n^{\ 2}}{}$，（6.21）变为，

$$\begin{aligned}\Delta R + 6\Delta|T|^2 + 2\left|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{7} g\right|^2 &= \langle\nabla R, \nabla f\rangle - \frac{2\lambda}{3}\Delta f - 2\frac{(\Delta f)^2}{7} + 6T_{pj}T_{pm}\nabla_j\nabla_m f - 6\nabla_j\nabla_i(T_{pi}T_{pj}) \\ &\quad - 2|T|^2\Delta f \\ &= \langle\nabla R, \nabla f\rangle + 2\Delta f\left(-\frac{\lambda}{3} - \frac{\Delta f}{7}\right) + 6T_{pj}T_{pm}\nabla_j\nabla_m f - 6\nabla_j\nabla_i(T_{pi}T_{pj}) \\ &\quad - 2|T|^2\Delta f \\ &= \langle\nabla R, \nabla f\rangle + \frac{2}{7}\Delta f\left(R + 4|T|^2\right) + 6T_{pj}T_{pm}\nabla_j\nabla_m f - 6\nabla_j\nabla_i(T_{pi}T_{pj}) \\ &\quad - 2|T|^2\Delta f \\ &= \langle\nabla R, \nabla f\rangle + \frac{2}{7}R\Delta f + 6T_{pj}T_{pm}\nabla_j\nabla_m f - 6\nabla_j\nabla_i(T_{pi}T_{pj}) - \frac{6}{7}|T|^2\Delta f.\end{aligned}$$

在紧致的 M 上分部积分，得到

$$\int_M \left|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{7} g\right|^2 \mathrm{vol} = \int_M \left[\frac{5}{14}\langle\nabla R, \nabla f\rangle + 6T_{pj}T_{pm}\nabla_j\nabla_m f - 6\nabla_j\nabla_i(T_{pi}T_{pj}) - \frac{6}{7}|T|^2\Delta f\right]\mathrm{vol},$$

这正是（6.19）。 □

本节最后推导作用于梯度里奇-调和孤子标量曲率的漂移拉普拉斯算子的表达式。其动机在于，漂移拉普拉斯算子在梯度 Ricci 孤立子的各种刚性与分类结果中具有重要作用。我们有如下引理。

引理 6.9。 设 (M, φ, λ, Y) 为一个里奇-调和孤子。则标量曲率 R 的漂移拉普拉斯算子为

$$\Delta_Y R = 6\Delta|T|^2 + 6\nabla_j\nabla_i(T_{pi}T_{pj}) + 2|\mathrm{Ric}|^2 - 6R_{ij}T_{pi}T_{pj} + 2|T|^2 R - \frac{2}{3}\lambda R. \tag{6.22}$$

证明。若 $\rho(t)$ 和 $Y(t)$ 如 (6.2) 中所定义， $\Theta(t)$ 是由 $Y(t)$ 生成、从恒等映射出发作用于 M 上的微分同胚族，并且 $\varphi(t) = \rho(t\Theta^*\varphi$ 是以初始条件 φ 为起点的里奇-调和流，那么底层度量为 $g(t) = \left(1 + \frac{2}{3}\lambda t\right)\Theta^*(t)g$。因此，标量曲率为

$$R(t) = \left(1 + \frac{2}{3}\lambda t\right)^{-1}\Theta^* R. \tag{6.23}$$

对 (6.23) 关于 t 求导，并令 $t=0$，同时利用里奇-调和流 (4.13) 中标量曲率的演化方程，可得

$$\frac{2}{3}\lambda R+\mathcal{L}_Y R=\frac{\partial}{\partial t}R(t)\Big|_0=\Delta R+6\Delta|T|^2+6\nabla_j\nabla_i(T_{pi}T_{pj})+2|\mathrm{Ric}|^2-6R_{ij}T_{pi}T_{pj}+2|T|^2R$$

因此

$$\Delta R-\langle\nabla R,Y\rangle=6\Delta|T|^2+6\nabla_j\nabla_i(T_{pi}T_{pj})+2|\mathrm{Ric}|^2-6R_{ij}T_{pi}T_{pj}+2|T|^2R-\frac{2}{3}\lambda R,$$

这就证明了（6.22）。 □

7. Spin(7)结构的里奇-调和流

我们推导流形 8 上 Spin(7)结构的泰勒级数展开 M^8，并研究 Spin(7)结构的“热方程”，这将为 Spin(7)结构的里奇流与 Spin(7)结构的调和流提供一种适当的耦合，该耦合在 [DLE24] 中提出。

7.1 Spin(7)结构的泰勒级数展开

设 (M^8,Φ) 是一个带有 Spin(7)结构的流形。对于 $x\in M$，我们选取局部正交标架 $\{e_1,\dots,e_8\}$，使其属于 T_xM 的 Spin(7)-适配标架，这意味着在点 x处，分量 Φ_{ijkl} 与 $\mathbb{R}^8$上的标准平坦模型的分量一致。现在我们陈述并证明 Spin(7)结构的泰勒级数展开；这一结果此前尚未见于文献，且类似于关于 G_2-结构的结果——定理 3.1。

定理 7.1。 设$(x^1,\dots,x^8)$ 是以 $x\in M$ 为中心的 *Spin(7)*适配黎曼正规坐标。Φ_{ijkl} 的分量关于 $0\in\mathbb{R}^8$ 在 $x\in M^8$处有如下泰勒展开：

$$\Phi_{ijkl}(x^1,\dots,x^8)=\Phi_{ijkl}+\left(T_{q;im}\Phi_{mjkl}+T_{q;jm}\Phi_{imkl}+T_{q;kp}\Phi_{ijml}+T_{q;lm}\Phi_{ijkm}\right)x^q+Q_{pqijkl}x^px^q+O(||x||^3),\tag{7.1}$$

其中

$$\begin{aligned}Q_{pqijkl}=&\frac{1}{2}\left(\nabla_pT_{q;im}\Phi_{mjkl}+\nabla_pT_{q;jm}\Phi_{imkl}+\nabla_pT_{q;km}\Phi_{ijml}+\nabla_pT_{q;lm}\Phi_{ijkm}\right)\\&+\frac{1}{2}T_{q;im}(T_{p;ms}\Phi_{sjkl}+T_{p;js}\Phi_{mskl}+T_{p;ks}\Phi_{mjsl}+T_{p;ls}\Phi_{mjks})\\&+\frac{1}{2}T_{q;jm}(T_{p;is}\Phi_{smkl}+T_{p;ms}\Phi_{iskl}+T_{p;ks}\Phi_{imsl}+T_{p;ls}\Phi_{imks})\\&+\frac{1}{2}T_{q;km}(T_{p;is}\Phi_{sjml}+T_{p;js}\Phi_{isml}+T_{p;ms}\Phi_{ijsl}+T_{p;ls}\Phi_{ijms})\\&+\frac{1}{2}T_{q;lm}(T_{p;is}\Phi_{sjkm}+T_{p;js}\Phi_{iskm}+T_{p;ks}\Phi_{ijsm}+T_{p;ms}\Phi_{ijks})\\&+\frac{1}{6}(R_{piqm}\Phi_{mjkl}+R_{pjqm}\Phi_{imkl}+R_{pkqm}\Phi_{ijml}+R_{plqm}\Phi_{ijkm}).\end{aligned}\tag{7.2}$$

右侧的所有系数张量均在0处取值。

证明。 我们遵循 [DGK25，定理 2 中的证明。25]。常数项（7.1）为 Φ_{ijkl} 这恰恰是由于我们在 x处选取了与 Spin(7) 相适配的标准正交标架。对于展开式中的一阶项，我们从以下公式开始：

$$\partial_q\Phi_{ijkl}=\nabla_q\Phi_{ijkl}+\Gamma^m_{qi}\Phi_{mjkl}+\Gamma^m_{qj}\Phi_{imkl}+\Gamma^m_{qk}\Phi_{ijml}+\Gamma^m_{ql}\Phi_{ijkm}.\tag{7.3}$$

我们回顾一下，在黎曼正规坐标中有

$$g_{ij}=\delta_{ij},\quad \Gamma^i_{jk}=0\quad\text{at the point } x$$

因此，在点 x 处对式（2.14）求值，并使用式（7.3），得到

$$\partial_q\Phi_{ijkl}=T_{q;im}\Phi_{mjkl}+T_{q;jm}\Phi_{imkl}+T_{q;km}\Phi_{ijml}+T_{q;lm}\Phi_{ijkm}$$

这就是式（7.1）中的线性项。对于二阶项，对式（7.3）求偏导数，得到

$$\partial_p\partial_q\Phi_{ijkl} = \partial_p\nabla_q\Phi_{ijkl} + (\partial_p\Gamma^m_{qi})\Phi_{mjkl} + (\partial_p\Gamma^m_{qj})\Phi_{imkl} + (\partial_p\Gamma^m_{qk})\Phi_{ijml} + (\partial_p\Gamma^m_{ql})\Phi_{ijkm} + (\text{terms with } \Gamma'\text{s}). \tag{7.4}$$

含有 Γ's 的项在 7.4 中，代入 x 后将消失。我们还回顾一下，在以 x 为中心的黎曼正规坐标中，有

$$\partial_i\Gamma^l_{jk} = \frac{1}{2}\left(R^l_{ijk} + R^l_{ikj}\right) \quad \text{at } x$$

因此，含有 Γ 的偏导数项在 7.4 中变为

$$\sum_{i,j,k,l \text{ cyclic}} \frac{1}{3}(R^m_{pqi} + R^m_{piq})\Phi_{mjkl} \quad \text{at } x.$$

类似地，我们有

$$\partial_p\nabla_q\Phi_{ijkl} = \nabla_p\nabla_q\Phi_{ijkl} + (\text{terms with } \Gamma'\text{s})$$

在点 x处，这变为

$$\partial_p\partial_q\Phi_{ijkl} = \nabla_p(T_{q;im}\Phi_{mjkl} + T_{q;jm}\Phi_{imkl} + T_{q;kp}\Phi_{ijml} + T_{q;lm}\Phi_{ijkm}).$$

总之，7.4 在点 x 处变为

$$\begin{aligned}
(\partial_p\partial_q\Phi_{ijkl})\mid_0 &= \nabla_p(T_{q;im}\Phi_{mjkl} + T_{q;jm}\Phi_{imkl} + T_{q;km}\Phi_{ijml} + T_{q;lm}\Phi_{ijkm}) + \sum_{i,j,k,l \text{ cyclic}} \frac{1}{3}(R^m_{pqi} + R^m_{piq})\Phi_{mjkl} \\
&= \nabla_pT_{q;im}\Phi_{mjkl} + \nabla_pT_{q;jm}\Phi_{imkl} + \nabla_pT_{q;km}\Phi_{ijml} + \nabla_pT_{q;lm}\Phi_{ijkm} \\
&\quad + T_{q;im}(T_{p;ms}\Phi_{sjkl} + T_{p;js}\Phi_{mskl} + T_{p;ks}\Phi_{mjsl} + T_{p;ls}\Phi_{mjks}) \\
&\quad + T_{q;jm}(T_{p;is}\Phi_{smkl} + T_{p;ms}\Phi_{iskl} + T_{p;ks}\Phi_{imsl} + T_{p;ls}\Phi_{imks}) \\
&\quad + T_{q;km}(T_{p;is}\Phi_{sjml} + T_{p;js}\Phi_{isml} + T_{p;ms}\Phi_{ijsl} + T_{p;ls}\Phi_{ijms}) \\
&\quad + T_{q;lm}(T_{p;is}\Phi_{sjkm} + T_{p;js}\Phi_{iskm} + T_{p;ks}\Phi_{ijsm} + T_{p;ms}\Phi_{ijks}) \\
&\quad + \sum_{i,j,k,l \text{ cyclic}} \frac{1}{3}(R^m_{pqi} + R^m_{piq})\Phi_{mjkl}.
\end{aligned}$$

我们将最后一个表达式乘以 $\frac{1}{2}x^px^q$，并对 p, q 求和。由于黎曼曲率张量的对称性，第一个曲率项因此消失，从而得到

$$\frac{1}{2}(\partial_p\partial_q\Phi_{ijkl})\mid_0 x^px^q = Q_{pqijkl}x^px^q,$$

其中二次项 Q 由式（7.2）给出。定理得证。 □

得到 Φ 的泰勒级数展开后，我们现在按照第 3 节中的相同步骤，求出 Φ 在点 x 处的 Spin(7)结构分量的拉普拉斯算子。我们对式（p 和 q）中二次项 Q （7.2）进行缩并。我们有

$$\begin{aligned}
(\Delta\Phi)_{ijkl} &= \frac{1}{2}(\operatorname{div}T \diamond \Phi)_{ijkl} + \frac{1}{2}\left(T_{p;is}(T_p \diamond \Phi)_{sjkl} + T_{p;js}(T_p \diamond \Phi)_{iskl} + T_{p;ks}(T_p \diamond \Phi)_{ijsl} + T_{p;ls}(T_p \diamond \Phi)_{ijks}\right) \\
&\quad - \frac{1}{6}(\operatorname{Ric} \diamond \Phi)_{ijkl}.
\end{aligned} \tag{7.5}$$

我们将里奇项乘以 6（这样底层度量的演化恰好就是里奇流），从而给出以下定义。

定义 7.2。 设 (M^8, Φ_0) 是一个带有 Spin(7)结构 Φ_0 的紧流形。Spin(7)结构族 $\Phi(t)$ 的里奇-调和流 是以下初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial t} = \left(-\operatorname{Ric} + (T * T) + \frac{1}{2}\operatorname{div}T\right) \diamond \Phi, \\ \Phi(0) = \Phi_0, \end{cases} \tag{SRHF}$$

其中，项 $T * T$ 是一个低阶项，其具体表达式为

$$(T * T \diamond \Phi)_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(T_{p;is}(T_p \diamond \Phi)_{sjkl} + T_{p;js}(T_p \diamond \Phi)_{iskl} + T_{p;ks}(T_p \diamond \Phi)_{ijsl} + T_{p;ls}(T_p \diamond \Phi)_{ijks}\right).$$

我们看到，(SRHF) 中的流不同于作者在 L^2空间上引入的、Spin(7)结构挠泛函的 -范数的负梯度流，其中该空间由所有 Spin(7)结构组成，参见 [Dwi25]。然而，流 (SRHF) 将 Spin(7)结构的里奇流自然地耦合起来，即流 $\partial_t\Phi(t) = -\mathrm{Ric}(t) \diamond_t \Phi(t)$，以及 Spin(7)结构的调和流。后者是挠泛函的 -范数的负梯度流，其中变分取遍 L^2 等距 Spin(7)结构的集合，相应的流为 $\partial_t\Phi(t) = \operatorname{div} T \diamond_t \Phi(t)$。

流（ Φ）中的最高阶（RHF）项为 $-\mathrm{Ric}$ 和$\operatorname{div} T$，这些算子的主符号由作者在 [Dwi25，引理 4 中计算得到。4]利用这些结果以及 [Dwi25§4 中的讨论3]可知，里奇-调和流（RHF）是弱抛物型的，其不具备抛物性的唯一原因在于算子 $-\mathrm{Ric}$ 和$\operatorname{div} T$具有微分同胚不变性。因此，我们可以使用类似于 [Dwi25§4 中的修正 DeTurck 技巧4] 来证明流（RHF）的适定性。下面记录这一观察。

定理 7.3。 设 (M^8, Φ_0) 是带有 *Spin(7)*结构 Φ_0的紧流形。则存在唯一的解$\Phi(t)$，满足里奇-调和流(RHF)，且在一段短时间内成立 $[0,\varepsilon]$，其中 ε 取决于 Φ_0。

我们指出，在§ 4-5 中得到的所有关于解的正则性、紧性定理和长时间存在性的结果，对于 Spin(7)结构的里奇-调和流（SRHF）也同样成立，证明方法类似。

8. 未来的问题

我们汇总了一些与里奇-调和流相关的有趣的未来问题。

问题 8.1. 能否像里奇流情形*[Ham86]* 或 G_2-结构的等距流情形 *[DGK21, §4]* 那样，采用 *Uhlenbeck* 型技巧，或许再引入某种修正联络，来简化流沿线黎曼曲率张量的演化方程 (4.9) 以及挠率张量的演化方程 (4.16)？这种简化能否为将 *Hamilton* 张量极大值原理应用于证明流沿线曲率和挠率条件保持不变提供启示？

问题 8.2. 对流进行降维时，能否得到有趣的流？例如，当 $\mathrm{SU}(3)$-结构由里奇-调和流诱导时，会得到什么样的流？M^7 具有如下形式 $M^6 \times S^1$ 且 M^6 赋有一个 $\mathrm{SU}(3)$-结构。对于 $\mathrm{SU}(2)$-结构也可以提出类似的问题：在 M^4上，若 $M^7 = M^4 \times T^3$，会得到什么样的流？例如，按照 *Picard–Suan* 的方法研究本文所考虑的流的降维将会很有趣 *[PS24]*。

问题 8.3。 里奇-调和流是否存在其他显式解，例如紧致情形下的收缩孤子，以及非紧致情形下的任意类型孤子？

问题 8.4。 无挠率G_2-结构作为里奇-调和流的驻点时，其行为如何？它们是稳定驻点，还是在变分中存在不稳定方向？

A. 对偶 4-形式的泰勒级数展开及其相关热方程

在本附录中，我们计算给定定向 7维流形 M 上 G_2-结构 φ 的霍奇对偶 ψ 的泰勒级数展开，并采用论文中描述的步骤写出 4-形式的“热方程”。设 M^7 是一个带有给定定向的光滑定向流形。在这种情况下，非退化 4-形式 ψ 诱导出度量 g_ψ 和规定的定向 $*_\psi\psi = \varphi$。对于 $x \in M$，我们选择 T_xM 的局部正交标架 $\{e_1, \dots, e_7\}$，使其与 G_2-适配；这意味着在点 x，其分量 ψ_{ijkl} 与 $\mathbb{R}^7$ 上标准平坦模型的分量一致。

定理 A.1. 设$(x^1, \dots, x^7)$ 是以 $x \in M$ 为中心的G_2-适配黎曼正规坐标。ψ 的分量ψ_{ijkl} 在0附近的泰勒展开为，其中0是 $\mathbb{R}^7$ 中对应于 $x \in M$ 的点：

$$\psi_{ijkl}(x^1, \dots, x^7) = \psi_{ijkl} + (-T_{qi}\varphi_{jkl} + T_{qj}\varphi_{ikl} - T_{qk}\varphi_{ijl} + T_{ql}\varphi_{ijk})x^q + {}^{\psi}\mathcal{Q}_{pq\,ijkl}x^p x^q + O(\|x\|^3), \tag{A.1}$$

其中

$$\begin{aligned} {}^{\psi}\mathcal{Q}_{pq\,ijkl} = {} & \frac{1}{2}(-\nabla_p T_{qi}\varphi_{jkl} + \nabla_p T_{qj}\varphi_{ikl} - \nabla_p T_{qk}\varphi_{ijl} + \nabla_p T_{ql}\varphi_{ijk}) \\ & + \frac{1}{2}(-T_{qi}T_{pm}\psi_{mjkl} + T_{qj}T_{pm}\psi_{mikl} - T_{qk}T_{pm}\psi_{mijl} + T_{ql}T_{pm}\psi_{mijk}) \\ & + \frac{1}{6}(R_{piqm}\psi_{mjkl} + R_{pjqm}\psi_{imkl} + R_{pkqm}\psi_{ijml} + R_{plqm}\psi_{ijkm}). \end{aligned} \tag{A.2}$$

这里，右侧的所有系数张量均在0处取值。

证明。 我们沿用 [DGK25中定理 2 的证明思路。25] 或者定理7.1。我们从

$$\partial_q\psi_{ijkl} = \nabla_q\psi_{ijkl} + \Gamma^m_{qi}\psi_{mjkl} + \Gamma^m_{qj}\psi_{imkl} + \Gamma^m_{qk}\psi_{ijml} + \Gamma^m_{ql}\psi_{ijkm},$$

wh利用 Γ在点处消失这一事实 x ，在正规坐标下以及 (2.7) 可得

$$\partial_q\psi_{ijkl} = -T_{qi}\varphi_{jkl} + T_{qj}\varphi_{ikl} - T_{qk}\varphi_{ijl} + T_{ql}\varphi_{ijk}, \tag{A.3}$$

这给出了 (A.1) 中的一阶项。与证明 Spin(7)结构的泰勒级数展开时相同，在点 x处，

$$\begin{aligned}(\partial_p\partial_q\psi)_{ijkl} &= \nabla_p(-T_{qi}\varphi_{jkl} + T_{qj}\varphi_{ikl} - T_{qk}\varphi_{ijl} + T_{ql}\varphi_{ijk}) + \sum_{i,j,k,l \text{ cyclic}} \frac{1}{3}(R^m_{pqi} + R^m_{piq})\psi_{mjkl} \\ &= -\nabla_pT_{qi}\varphi_{jkl} + \nabla_pT_{qj}\varphi_{ikl} - \nabla_pT_{qk}\varphi_{ijl} + \nabla_pT_{ql}\varphi_{ijk} \\ &\quad - T_{qi}T_{pm}\psi_{mjkl} + T_{qj}T_{pm}\psi_{mikl} - T_{qk}T_{pm}\psi_{mijl} + T_{ql}T_{pm}\psi_{mijk} + \sum_{i,j,k,l \text{ cyclic}} \frac{1}{3}(R^m_{pqi} + R^m_{piq})\psi_{mjkl}.\end{aligned} \tag{A.4}$$

将 (A.4) 乘以 $\frac{1}{2}x^px^q$，-并对 p, q 求和，得到 (A.2) 中 $\mathcal{Q}$ 的表达式 (A.2)。 □

与 § 3 中一样，我们通过在 ($(\Delta\psi)_{ijkl}$ 中对 p 和 q 进行缩并，在点 x 处计算“$(\Delta\psi)_{ijkl}$”。得到

$$\begin{aligned}(\Delta\psi)_{ijkl} &= -\frac{1}{6}(R_{im}\psi_{mjkl} + R_{jm}\psi_{imkl} + R_{km}\psi_{ijml} + R_{lm}\psi_{ijkm}) \\ &\quad + \frac{1}{2}(-T_{pi}T_{pm}\psi_{mjkl} - T_{pj}T_{pm}\psi_{imkl} - T_{pk}T_{pm}\psi_{ijml} - T_{pl}T_{pm}\psi_{ijkm}) \\ &\quad + \frac{1}{2}(-\operatorname{div}T_i\varphi_{jkl} + \operatorname{div}T_j\varphi_{ikl} - \operatorname{div}T_k\varphi_{ijl} + \operatorname{div}T_l\varphi_{ijk}) \\ &= \left(-\frac{1}{6}\mathrm{Ric} - \frac{1}{2}T^tT\right)\diamond\psi - \frac{1}{2}(\operatorname{div}T\wedge\varphi)_{ijkl}.\end{aligned} \tag{A.5}$$

值得探究的是，将 (A.5) 用作速度所定义的 4-形式流，与其他 4-形式流相比，是否具有某些良好性质。利用标量曲率的表达式 (2.10)，很容易看出，利用 (A.5) 定义的流的驻点恰好是无挠率的 G_2-结构。

参考文献

[Bry06] Robert L. Bryant。《关于 G_2结构的一些注记》。英文。第 11 届和第 12 届格克瓦几何与拓扑会议论文集，土耳其格克瓦，2004 年 5 月 24—28 日及 2005 年 5 月 30 日至 6 月 3 日。谨以此文纪念 Raoul Bott。马萨诸塞州剑桥：International Press，2006 年，第 75–109 页。Zbl：1115.53018（见第 2、10 页）。[BX 11] Robert Bryant 和 Feng Xu。《闭 G_2结构的拉普拉斯流：短时间行为》。预印本，arXiv：1101.2004 [math.DG] （2011）。2011 年。arXiv：arXiv:1101.2004（见第 2 页）。[CCGGIIKLLN08] Bennett Chow、Sun-Chin Chu、David Glickenstein、Christine Guenther、James Isenberg、Tom Ivey、Dan Knopf、Peng Lu、Feng Luo 和 Lei Ni。《里奇流：技巧与应用。第二部分：分析方面》。英文。第 144 卷。《数学调查专著》。罗得岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），2008 年。Zbl：1157.53035（见第 20、22、23 页）。[Che18] Gao Chen。《 G_2 结构流的 Shi 型估计与有限时间奇点》。英文。《数学季刊》69.3（2018），第 779–797 页。DOI：10.1093/qmath/hax060。Zbl：1425.53033（见第 4、14、15、20、21、33 页）。[CK 04] Bennett Chow 和 Dan Knopf。《里奇流：导论》。英文。第 110 卷。《数学调查专著》。罗得岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），2004 年。Zbl：1086.53085（见第 8、13 页）。[CLN06] Bennett Chow、Peng Lu 和 Lei Ni。《Hamilton 的里奇流》。英文。第 77 卷。《研究生数学丛书》。罗得岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），2006 年。Zbl：1118.53001（见第 32 页）。[DGK21] Shubham Dwivedi、Panagiotis Gianniotis 和 Spiro Karigiannis。《等距 G_2结构的梯度流》。《几何分析杂志》31.2（2021），第 1855–1933 页。DOI：10.1007/s12220- 019- 00327-8。MR：4215279（见第 2、3、10、17、40 页）。

[DGK25] Shubham Dwivedi、Panagiotis Gianniotis 和 Spiro Karigiannis。《G_2结构流，II：曲率、挠率、符号与泛函》。《纯粹与应用数学季刊》21.5（2025 年 11 月）。DOI：10.4310/PAMQ.250507180929。arXiv：2311.05516 [math.DG]（见第 2、3、8–11、38、41 页）。[DLE24] Shubham Dwivedi、Eric Loubeau 和 Henrique N. Sá Earp。《Spin(7)结构的调和流》。《比萨高等师范学院科学纪要》卷 XXV（2024），151–215（2024）。arXiv：2109.06340 [math.DG]（见第 4、7、10、38 页）。[DS23] Shubham Dwivedi 和 Ragini Singhal。《近 G_2 流形的变形理论》。英文。《Commun. Anal. Geom.》31.3（2023），第 677–729 页。DOI：10.4310/CAG.2023.v31.n3.a5。Zbl：1540.53052（见第 11 页）。[Dwi 25] Shubham Dwivedi。《Spin(7)结构的梯度流》。英文。《数学季刊》76.2（2025），第 537–563 页。DOI：10.1093/qmath/haaf018（见第 4–7、40 页）。[FE24] Udhav Fowdar 和 Henrique N. Sá Earp。《SU(2)结构流》。arXiv 电子预印本，arXiv:2407.03127（2024 年 7 月），arXiv:2407.03127。DOI：10 . 48550 / arXiv . 2407 . 03127。arXiv：2407.03127 [math.DG]（见第 5 页）。[Gri13] Sergey Grigorian。《修正拉普拉斯协流的短时间行为：针对 G_2结构》。英文。《Adv. Math.》248（2013），第 378–415 页。DOI：10.1016/j.aim.2013.08.013。Zbl：1288.53039（见第 2、10 页）。[Gri19] Sergey Grigorian。《等距 G_2结构热流的估计与单调性》。英文。《Calc. Var. Partial Differ. Equ.》58.5（2019）。编号 175，第 37 页。DOI：10.1007/s00526- 019-1630-0。Zbl：1423.53025（见第 2 页）。[GZ25] Panagiotis Gianniotis 和 George Zacharopoulos。《G_2几何中的一个 G_2-Hilbert 泛函》。预印本，arXiv:2505.06872 [math.DG]（2025）。2025 年。arXiv：arXiv:2505.06872（见第 3、5、10、11 页）。[Ham82] Richard S. Hamilton。《具有正里奇曲率的三维流形》。英文。《J. Differ. Geom.》17（1982），第 255–306 页。DOI：10.4310/jdg/1214436922。Zbl：0504.53034（见第 2、27 页）。[Ham86] Richard S. Hamilton。《具有正曲率算子的四维流形》。英文。《J. Differ. Geom.》24（1986），第 153–179 页。DOI：10.4310/jdg/1214440433。Zbl：0628.53042（见第 40 页）。[Ham95a] Richard S. Hamilton。《里奇流解的紧性性质》。《Amer. J. Math.》117.3（1995），第 545–572 页。DOI：10.2307/2375080。MR：1333936（见第 30 页）。[Ham95b] Richard S. Hamilton。《里奇流中的奇点形成》。英文。《微分几何调查》。第二卷：1993 年 4 月 23—25 日在美国马萨诸塞州剑桥哈佛大学举行的几何与拓扑会议论文集。马萨诸塞州剑桥：International Press，1995 年，第 7–136 页。Zbl：0867.53030（见第 8、17、35 页）。[Joy00] Dominic D. Joyce。《具有特殊全纯群的紧流形》。《牛津数学专著丛书》。牛津大学出版社，牛津，2000 年，第 xii+436 页。MR：1787733（见第 6 页）。[Kar08] Spiro Karigiannis。《Spin(7)结构流》。《微分几何及其应用》。World Sci. Publ.，新泽西州哈肯萨克，2008 年，第 263–277 页。DOI：10.1142/9789812790613_0023。MR：2462799（见第 6、7 页）。[Kar09] Spiro Karigiannis。《G_2结构流，I》。英文。《数学季刊》60.4（2009），第 487–522 页。DOI：10.1093/qmath/han020。Zbl：1190.53025（见第 2、6、12 页）。[KMT12] Spiro Karigiannis、Benjamin McKay 和 Mao-Pei Tsui。《具有对称性的某些 G_2 结构之拉普拉斯协流的孤子解》。英文。《Differ. Geom. Appl.》30.4（2012），第 318–333 页。DOI：10.1016/j.difgeo.2012.05.003。Zbl：1256.53043（见第 2、10 页）。[Kra25] Kirill Krasnov。《凯莱形式的动力学》。英文。《Pure Appl. Math. Q.》21.5（2025），第 1959–2003 页。DOI：10.4310/PAMQ.250421122254（见第 4 页）。[LS23] Eric Loubeau 和 Henrique N. Sá Earp。《几何结构的调和流》。英文。《Ann. Global Anal. Geom.》64.4（2023）。编号 23，第 42 页。DOI：10.1007/s10455-023-09928-7（见第 2 页）。[LW17] Jason D. Lotay 和 Yong Wei。《闭 G_2结构的拉普拉斯流：Shi 型估计、唯一性与紧性》。《Geom. Funct. Anal.》27.1（2017），第 165–233 页。DOI：10.1007/s00039-017-0395-x。MR：3613456（见第 2、4、9、10、14、15、17、19、24、30、32、33 页）。

[LW19a] Jason D. Lotay 和 Yong Wei。《闭 G_2 结构的拉普拉斯流：实解析性》。英文。Commun. Anal. Geom. 27.1 (2019)，第 73–109 页。DOI：10.4310/CAG.2019.v27.n1.a3。Zbl：1421.53032（引于第 2 页）。[LW19b] Jason D. Lotay 和 Yong Wei。《拉普拉斯流下无挠 G_2 结构的稳定性》。英文。J. Differ. Geom. 111.3 (2019)，第 495–526 页。DOI：10.4310/jdg/1552442608。Zbl：1505.53037（引于第 2 页）。[MT07] John Morgan 和 Gang Tian。《里奇流与庞加莱猜想》。英文。第 3 卷。Clay Math. Monogr. 罗得岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS）；马萨诸塞州剑桥：克雷数学研究所，2007。Zbl：1179.57045（引于第 4、20、23 页）。[Per02] Grisha Perelman。《里奇流的熵公式及其几何应用》。英文。预印本，arXiv:math/0211159 [math.DG](2002)。编号：0211159。2002。Zbl：1130.53001（引于第 2、10、11 页）。[PS24] Sebastien Picard 和 Caleb Suan。《与卡拉比–丘流形相关的 G_2-结构流》。英文。Math. Res. Lett. 31.6 (2024)，第 1837–1877 页。DOI：10.4310/MRL.250211003545。Zbl：1558.32039（引于第 40 页）。[PW09] Peter Petersen 和 William Wylie。《梯度 Ricci 孤立子的刚性》。英文。Pac. J. Math. 241.2 (2009)，第 329–345 页。DOI：10.2140/pjm.2009.241.329。Zbl：1176.53048（引于第 35 页）。[Šeš05] Nataša Šešum。《里奇流下的曲率张量》。英文。Am. J. Math. 127.6 (2005)，第 1315–1324 页。DOI：10.1353/ajm.2005.0042。Zbl：1093.53070（引于第 4、32、33 页）。[Shi89] Wan-Xiong Shi。《完备黎曼流形上的度量变形》。英文。J. Differ. Geom. 30.1 (1989)，第 223–301 页。DOI：10.4310/jdg/1214443292。Zbl：0676.53044（引于第 17 页）。[WW12] Hartmut Weiß 和 Frederik Witt。《特殊度量的热流》。英文。Adv. Math. 231.6 (2012)，第 3288–3322 页。DOI：10.1016/j.aim.2012.08.007。Zbl：1264.53064（引于第 2、10 页）。

汉堡大学数学系，德国汉堡市 Bundesstraße 55号，邮编 20146。
shubham.dwivedi@uni-hamburg.de