arXiv:2601.05211v1 [math.FA] 8 Jan 2026

行压缩算子的非交换德布朗日–罗夫尼亚克模型

ROBERT T.W. MARTIN 和 JEET SAMPAT

摘要。我们将希尔伯特空间上完全非余等距（CNC）线性压缩算子的 de Branges–Rovnyak 模型推广到 CNC 行压缩算子的非交换多变量情形。具体而言，我们证明，任何从希尔伯特空间的多个副本映射到单个副本的 CNC 压缩算子，都酉等价于受限后向右移位算子在某个 de Branges–Rovnyak 空间上作用时的伴随算子；该空间对应于一个压缩左乘子，而这个乘子作用于两个向量值“自由 Hardy 空间”之间，这些空间由多个非交换（NC）变量的平方可和幂级数构成。这个算子值压缩左乘子，即 CNC 行压缩算子的特征函数，是完全酉不变量，并且作为压缩左乘子，它总是列极端 。

我们的构造利用行压缩算子 T的“非交换预解式”建立一个由非交换函数构成的再生核希尔伯特空间；该预解式是某个首一仿射线性铅笔 T 的逆。这个铅笔定义在非交换宇宙中一个特定的非交换单位行球上；该宇宙由所有有限阶方阵的行元组构成。

关键词。德布朗日–罗夫尼亚克空间，非交换（NC）德布朗日–罗夫尼亚克模型，自由哈代空间，Gleason 解，非交换再生核希尔伯特空间，非交换函数理论。

1. 引言

德布朗日–罗夫尼亚克模型和纳吉–福亚什模型是希尔伯特空间上完全非酉（CNU）线性压缩算子的两种广泛使用且等价的模型 [BR66；BR15；BK87；NV86；Sar94；SF70]。完全非余等距（CNC）压缩算子的德布朗日–罗夫尼亚克模型尤为自然且引人注目，因为它表明，任何这样的 CNC 压缩算子 T都可以表示为：在复单位圆盘内，从向量值 Hardy 空间 $\mathbb{D}$到某个压缩的（算子值）解析函数 b_T所对应的德布朗日–罗夫尼亚克空间$\mathbb{D}$上的后向移位算子限制的伴随算子。（任意 CNU 压缩算子的完整德布朗日–罗夫尼亚克模型要复杂得多 [BK87；BR66]。）这个压缩的解析函数 b_T，即压缩算子 T的特征函数，必定是压缩算子值函数构成的闭凸集的极端点。特征函数 b_T在自然同构（由常值酉算子共轭）意义下唯一，并且是 T的完全酉不变量。此外， T的许多性质，包括谱信息，都编码在其特征函数的性质中。

回顾一下，复单位圆盘上的经典 Hardy 空间 H^2，可以定义为由所有（在 0 处的）平方可和泰勒级数组成的希尔伯特空间，并配备泰勒系数的l^2–内积。此类幂级数的收敛半径至少为 1，因此在 $\mathbb{D}$ 中定义了解析函数。从这个定义可以清楚地看出，移位算子</style》，

RTWM 的部分资助来自 NSERC 探索资助金 2020-05683。JS 感谢太平洋数学科学研究所提供的部分资助。

$S = M_z$ 是 H^2 上的等距算子，这个算子在 Hardy 空间理论中发挥着重要作用。它的伴随算子，即后向移位算子，在 0 处的作用如同差商，

$$(S^* h)(z) = \frac{h(z) - h(0)}{z}; \qquad z \neq 0,$$

且 $(S^*\mathrm{h})(0) = \mathrm{h}'(0)$。可以证明，含幺Hardy代数 H^∞，即 $\mathbb{D}$ 中所有一致有界解析函数构成的代数，配备上确界范数后，是 H^2 的乘子代数。也就是说，对于任意函数 h，h 属于 $\mathbb{D}$ 当且仅当对所有 $f \in H^2$，$\mathrm{h} \cdot f \in H^2$。此外，对任意 $\mathrm{h} \in H^\infty$，乘法算子 $\mathrm{h}(S) = M_h$ 的算子范数等于其符号 h 在 $\mathbb{D}$ 中的上确界范数。因此，解析函数 b 在 $\mathbb{D}$ 中是压缩的，当且仅当它定义了 H^2 的一个压缩左乘子。对于任意这样的压缩 $b \in [H^\infty]_1$，可以将其 de Branges–Rovnyak 空间 $\mathrm{H}(b)$ 定义为缺陷算子 $\sqrt{I - b(S)b(S)^*}$ 的算子值域空间 $\mathrm{R}(\sqrt{I - b(S)b(S)^*})$。虽然作为向量空间，该空间等于 Ran $\sqrt{I - b(S)b(S)^*}$，但其内积经过设计，使得 $\sqrt{I - b(S)b(S)^*}$ 成为映 onto 其值域的余等距算子，见 [FM16a; FM16b; Sar94]。特别地，每个 de Branges–Rovnyak 空间 $\mathrm{H}(b)$ 都压缩地包含于 H^2 中，并且总是关于移位算子余不变。

本文的主要目标是将针对 CNC 压缩算子的 de Branges–Rovnyak 模型，尤其是 [AMR13; GG12; GMR16; Liv46; Liv47; Mar15; MR19] 中构造的 Kreĭn–Livšic 预解式模型，推广到 CNC 行压缩算子的非交换（NC）多变量情形，即从希尔伯特空间的若干个副本映射到其自身的 CNC 压缩算子。（非交换 Sz.-Nagy–Foais 模型已在 [Pop89a; Pop89b] 中构造并研究。）在这一非交换多变量 de Branges–Rovnyak 模型中，复单位圆盘上平方可和泰勒级数构成的 Hardy空间被自由 Hardy 空间 $\mathbb{H}^2_d$（即 $\mathbb{C}^d$ 上的全Fock空间）所取代；后者可定义为由 $d \in \mathbb{N}$ 个非交换变量构成的平方可和“自由”形式幂级数（FPS）组成的希尔伯特空间。可以将其视为一个非交换（NC）函数的希尔伯特空间，这些函数作用于以原点 $0 = (0, \cdots, 0) \in \mathbb{C}^{1\times d}$ 为中心的某个非交换单位行球上；该球属于 $d-$ 维复非交换宇宙，其元素是任意有限维数 $n \in \mathbb{N}$ 的复方阵组成的行 $d-$ 元组。也就是说，非交换宇宙是

$$\mathbb{C}^{(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\cdot d} := \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}^{(n\times n)\cdot d}; \qquad \mathbb{C}^{(n\times n)\cdot d} := \mathbb{C}^{n\times n} \otimes \mathbb{C}^{1\times d},$$

而非交换单位行球是

$$\mathbb{B}^d_{\mathbb{N}} := \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{B}^d_n; \qquad \mathbb{B}^d_n := \left\{ X = (X_1, \cdots, X_d) \in \mathbb{C}^{(n\times n)\cdot d} \,\middle|\, \|X\|_{\mathscr{B}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^d, \mathbb{C}^n)} < 1 \right\}.$$

根据 [Pop06b，定理 1：1]，自由 Hardy 空间的元素的“收敛半径”至少为 1，因此在非交换单位行球内定义全纯解析非交换函数；这符合现代非交换函数理论的含义，而现代非交换函数理论是复分析向多个非交换变量的规范“量子化”或扩展 [AMY20；KV14；Tay72；Tay73；Voi04；Voi10]。

自由 Hardy 空间的理论，$\mathbb{H}^2_d$与经典 Hardy 空间理论极为相似，参见例如 [DP99；JM12；JM22；JMS21；Pop89c；Pop95；Pop06a；Pop06b]。特别地，左乘任意 d 独立的非交换变量，$\mathfrak{z}_1$、$\cdots$、$\mathfrak{z}_d$ 所定义的

一组 d–等距算子，$L_k := M_{\mathfrak{z}_k}^L$ 作用于 $\mathbb{H}_d^2$，即左自由移位，它们在非交换 Hardy 空间理论中扮演移位算子 $S = M_z$ 的角色。类似地，对 $\mathfrak{z}_k$ 的 $R_k := M_{\mathfrak{z}_k}^R$ 进行右乘也定义了一组 d–等距算子，即右自由移位；自由 Hardy 空间理论具有左右对称性。此外，若且唯若（全纯）非交换函数 h 在单位行球中一致有界，它才定义了 $\mathbb{H}_d^2$ 上的有界左乘算子；此时，$\mathrm{h}(L) := M^L\mathrm{h}$ 的算子范数与其符号 h 在单位行球中的上确界范数相同 [SSS18；Pop06b，定理 3.1]。也就是说，与前述情况一样，由单位行球中一致有界的非交换函数构成的非交换 Hardy 代数 $\mathbb{H}_d^\infty$，等同于 $\mathbb{H}_d^2$ 的左乘子代数 $\mathrm{Mult}^L\,\mathbb{H}_d^2 = \mathbb{H}_d^\infty$，且范数相等：$\|\mathrm{h}(L)\|_{\mathscr{B}(\mathbb{H}_d^2)} = \|\mathrm{h}\|_\infty$。特别地，向量值自由 Hardy 空间之间的左乘子 B 在非交换单位行球中是压缩的，当且仅当它作为左乘算子也是压缩的。与前述情况一样，可以将此类压缩的 B 所对应的（左）非交换 de Branges–Rovnyak 空间 $\mathrm{H}(B)$ 定义为缺陷算子 $\sqrt{I - B(L)\,B(L)^*}$ 的算子值域空间。这里，$B(L) = M_B^L$ 是左乘 B 所定义的压缩线性算子，而 $\mathrm{H}(B)$ 在此非交换情形下总是右移位共不变 [BBF07]。

我们的主要结果是针对 CNC 行压缩算子的 de Branges–Rovnyak 模型的一个精确非交换类比。给定一个行压缩算子，$T = (T_1, \cdots, T_d) : \mathrm{H} \otimes \mathbb{C}^d \to \mathrm{H}$，定义缺陷算子，

$$D_T := \sqrt{I_{\mathcal{H}} \otimes I_d - T^*T}, \quad \text{and} \quad D_{T^*} := \sqrt{I_{\mathcal{H}} - TT^*},$$

以及缺陷空间，$\mathscr{D}_T :=$ 值域 $D_T^{-\|\,\|}$，$\mathscr{D}_{T^*} :=$ 值域 $D_{T^*}^{-\|\,\|}$。在下面的定理陈述中，术语列极值（*CE*）是一个推广了（并可归结为）复单位圆盘上收缩单变量解析函数的闭凸集的极端点概念。

定理 *(4.14)*。行压缩算子，$T = (T_1, \cdots, T_d) : H \otimes \mathbb{C}^d \to H$，是 *CNC* 的，当且仅当存在一个（纯）压缩且列极端的（算子值）非交换函数，$B_T \in \mathbb{H}_d^\infty \otimes B(\mathscr{D}_T, \mathscr{D}_{T^*})$，使得 T 与作用在（左）非交换 *de Branges–Rovnyak* 空间 $H(B_T)$ 上的 X 酉等价，其中 $X^* = R^* \otimes I_{\mathscr{D}_{T^*}}|_{\mathscr{K}(B_T)} \in B(H(B), H(B) \otimes \mathbb{C}^d)$.

我们称两个算子值左乘子，$B \in \mathbb{H}_d^\infty \otimes \mathrm{B}(\mathrm{H}, \mathrm{J})$ 和 $B' \in \mathbb{H}_d^\infty \otimes \mathrm{B}(\mathrm{H}', \mathrm{J}')$ 酉等价，并记为 $B \simeq B'$，如果存在满射等距映射 $U : \mathrm{H} \twoheadrightarrow \mathrm{H}'$ 和 $V : \mathrm{J} \twoheadrightarrow \mathrm{J}'$，使得 $B' = V^*BU$。也就是说，对于单位行球中的任意 $Z = (Z_1, \cdots, Z_d)$，$Z_j \in \mathbb{C}^{n\times n}$，$B'(Z) = [V^* \otimes I_n]B(Z)\,[U \otimes I_n]$。

$B \in \mathscr{S}_d(\mathrm{H}, \mathrm{J})$ 的支撑是子空间，

$$\mathrm{supp}(B) := \bigvee_{\substack{Z\in\mathbb{B}_n^d;\\ y,v\in\mathbb{C}^n}} \mathrm{Ran}\, y^* \otimes I_{\mathcal{H}} B(Z)^* v \otimes I_{\mathcal{J}} \subseteq \mathcal{H}.$$

根据构造，$\mathrm{H} = \mathrm{supp}(B) \oplus \mathrm{H}_0$，，其中对于任意 $h \in \mathrm{H}_0$，，$B(Z)v \otimes h_0 = 0$，并且 H_0 是 H 中具有此性质的最大子空间。同样地，如果我们将 B^* 的支撑定义为

$$\mathrm{supp}(B^*) := \bigvee_{\substack{Z\in\mathbb{B}_n^d;\\ y,v\in\mathbb{C}^n}} \mathrm{Ran}\, y^* B(Z) v \subseteq \mathcal{J}, \tag{1.1}$$

于是 $\mathrm{H} = \mathrm{supp}(B) \oplus \mathrm{H}_0$，$\mathrm{J} = \mathrm{supp}(B^*) \oplus \mathrm{J}_0$，，并且 B 具有直和分解

$$B = B_0 \oplus \mathbf{0}_{\mathcal{H}_0, \mathcal{J}_0},$$

其中 $B_0 \in \mathcal{S}_d(\mathrm{supp}(B), \mathrm{supp}(B^*)) := [\mathbb{H}_d^\infty \otimes \mathrm{B}(\mathrm{supp}(B), \mathrm{supp}(B^*))]_1$，且 $\mathbf{0}_{\mathcal{H}_0,\mathcal{J}_0} : \mathrm{H}_0 \to \mathrm{J}_0$恒等于零。给定 $B \in \mathcal{S}_d(\mathrm{H}, \mathrm{J})$ 和 $B' \in \mathcal{S}_d(\mathrm{H}', \mathrm{J}')$，若 B与 B' 弱重合，记作 $B \sim B'$，则称 $B_0 = B|_{\mathrm{supp}(B)}$ 与 $B'_0|_{\mathrm{supp}(B')}$酉等价。

定理 (4.15)。 列极端 特征函数， B_T，由 *CNC* 行压缩算子 T，在弱重合意义下唯一，且是完全酉不变量：*CNC* 行压缩算子 T_1 与 T_2 酉等价，当且仅当 $B_{T_1} \sim B_{T_2}$。

上述两个定理可以相当直接地由 [BBF07] 的非交换 de Branges–Rovnyak 实现理论和传递函数理论导出B（我们将在附录 B 中略述证明）。不过，我们的方法显著不同，提供了额外的信息，而且我们认为它本身也值得关注。具体而言，给定任意 CNC 行偏等距算子 V： $\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^d \to \mathcal{H}$，我们根据 Ball–Marx–Vinnikov [BMV16] 的意义，利用其“非交换预解函数”显式构造一个非交换再生核希尔伯特空间（NC-RKHS） V，

$$\left(I_{\mathcal{H}} \otimes I_n - \sum_{j=1}^{d} V_j \otimes Z_j^*\right)^{-1} =: (I - VZ^*)^{-1}; \qquad Z \in \mathbb{B}_n^d,$$

对于非交换单位行球中的 Z，$\mathbb{B}_{\mathbb{N}}^d$，我们证明存在一个酉左乘子，将该非交换再生核希尔伯特空间映到左 de Branges–Rovnyak 空间（取值于向量空间），$\mathrm{H}(B)$。注意，这个“非交换预解式”的逆，

$$I_{\mathcal{H}} \otimes I_n - \sum_{j=1}^{d} V_j \otimes Z_j^* =: L_V(Z^*); \qquad Z^* = \begin{bmatrix} Z_1^* \\ \vdots \\ Z_d^* \end{bmatrix}$$

是 $V = (V_1, \cdots, V_d)$ 的线性铅笔，在 Z^* 处取值。算子元组的线性铅笔贯穿于非交换函数理论之中，是非交换函数实现理论、自由实代数几何和矩阵凸性理论中的核心对象[AMS25; BGM05; CR94; CR99; Fli70; Fli74; HM12; HMS18; HMV06; HST06; HT05; KFA69; MSY23; Sch61]。任意行压缩算子 $T : \mathrm{H} \otimes \mathbb{C}^d \to \mathrm{H}$ 都有唯一的等距–纯分解 $T = V + C$，其中 $V : \mathrm{H} \otimes \mathbb{C}^d \to \mathrm{H}$ 是行偏等距算子，而 C 是纯压缩的，即对于任意 $\mathrm{x} \in \mathrm{H} \otimes \mathbb{C}^d$， $\|C\mathrm{x}\| < \|\mathrm{x}\|$，见引理 2.6。此外， V 是 CNC 当且仅当 T 是 CNC。利用这一分解，我们将模型从 CNC 行偏等距算子推广到任意 CNC 行压缩算子。

定理（*3.17*）和（*4.12*）。设 T 为 H 上具有等距–纯分解 $T = V + C$ 的 *CNC* 行压缩算子。若 $B_T \in \mathbb{H}_d^\infty \otimes B(\mathscr{D}_T, \mathscr{D}_{T^*})$ 是 T 的特征函数，则 $C = 0$ 当且仅当 $B_T(0) = 0$，并且 B_T 是由固定的纯压缩算子 $\delta_T \in B(H, J)$ 对 V 的特征函数 B_V 作出的算子 *Möbius* 变换，该纯压缩算子仅取决于 C，

$$B_T(Z) = \left[D_{\delta_T^*} \otimes I_n\right]\Big(B_V(Z) + \left[\delta_T \otimes I_n\right]\Big)\Big(I_{\mathscr{D}_T \otimes \mathbb{C}^n} + \left[\delta_T{}^* \otimes I_n\right]B_V(Z)\Big)^{-1}\left[D_{\delta_T} \otimes I_n\right]$$

对于任意 $Z \in \mathbb{B}_n^d$、 $n \in \mathbb{N}$。此外， B_V 在弱重合意义下唯一，且由下式给出

$$\begin{aligned} B_V(Z) &= D_V(Z)^{-1} N_V(Z); \\ \textit{where,}\quad D_V(Z) &= [I - VV^*][I - ZV^*]^{-1}[I - VV^*] \otimes I_n \quad \textit{and} \\ N_V(Z) &= [I - VV^*][I - ZV^*]^{-1}[I_{\mathcal{H}} \otimes Z]\,[I - V^*V] \otimes I_n. \end{aligned}$$

我们的构造建立在 M.S. Livˇsic 和 M.G. Kreˇın 关于偏等距算子以及通常无界对称算子表示论的研究所提出的思想之上 [GG12; Kre49; Liv46; Liv47]，本文可视为第一作者与 A. Ramanantoanina 早期论文的续篇。在那篇论文中，作者利用向量值 Drury–Arveson 空间之间压缩乘子的交换 de Branges–Rovnyak 空间，为一大类 CNC 行压缩算子构造了 de Branges–Rovnyak 模型 [MR19]。本文的非交换 de Branges–Rovnyak 模型通过将非交换单位行球“限制到第一级”即可恢复这一交换模型。我们将在第5节详细说明这两个模型之间的关系。最后，在附录A中，我们将本文的特征函数与 Popescu 将经典 Sz.-Nagy–Foias 特征函数从 CNC 压缩映射推广到 CNC 行压缩算子元组的结果进行比较 [Pop89a]并证明二者弱重合。

2. 背景

本文中的所有内积和半双线性型均假定对第一个变量共轭线性，对第二个变量线性。

2.1. 非交换函数理论。 如引言中所述，我们将考虑某个*NC*单位行球中的非交换（*NC*）全纯函数所构成的希尔伯特空间。回顾一下，*d*–维复非交换宇宙 $\mathbb{C}^{(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\cdot d}$是由任意有限维数 $n\in\mathbb{N}$的复 $n\times n$ 矩阵构成的所有行 *d*–元组的集合，

$$\mathbb{C}^{(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\cdot d}=\bigsqcup\mathbb{C}^{(n\times n)\cdot d};\qquad \mathbb{C}^{(n\times n)\cdot d}=\mathbb{C}^{n\times n}\otimes\mathbb{C}^{1\times d},$$

而非交换单位行球是非交换宇宙的子集，

$$\mathbb{B}^d_{\mathbb{N}}=\bigsqcup\mathbb{B}^d_n;\qquad \mathbb{B}^d_n=\left\{X=(X_1,\cdots,X_d)\in\mathbb{C}^{(n\times n)\cdot d}\;\middle|\;\|X\|_{\mathscr{B}(\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^d,\mathbb{C}^n)}<1\right\},$$

由所有有限维严格行压缩算子构成。给定 $\mathbb{C}^{(n\times n)\cdot d}$ $X=(X_1,\cdots,X_d)$，我们记作

$$\|X\|_{\mathrm{row}}:=\|X\|_{\mathscr{B}(\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^d,\mathbb{C}^n)},$$

并称其为 X 的行范数。给定 $X\in\mathbb{C}^{(n\times n)\cdot d}$，我们将记 $X^*:=\begin{bmatrix}X_1^*\\ \vdots\\ X_d^*\end{bmatrix}:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^d$ 表示 X 的希尔伯特空间伴随：$\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^d\to\mathbb{C}^n$，并将其称为

$$\|X^*\|_{\mathrm{col}}:=\|X^*\|_{\mathscr{B}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^d)},$$

X^*的列范数。

若子集 $\Omega\subseteq\mathbb{C}^{(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\cdot d}$ 在直和运算下封闭，则称其为一个非交换集合。也就是说，若 $\Omega_n:=\Omega\cap\mathbb{C}^{(n\times n)\cdot d}$，我们记作 $\Omega:=\bigsqcup\Omega_n$；若 $X\in\Omega_m, Y\in\Omega_n$ 蕴含分量逐项直和 $X\oplus Y=(X_1\oplus Y_1,\cdots,X_d\oplus Y_d)\in\Omega_{m+n}$，则 Ω 是一个非交换集合。尽管我们不会大量使用一致拓扑，但其定义如下。给定任意 $Y\in\mathbb{C}^{(n\times n)\cdot d}$ 和 $r>0$，考虑*NC* 行球，

$$r\cdot\mathbb{B}^d_{\mathbb{N}n}(Y):=\bigsqcup_{m=1}^{\infty}\mathbb{B}^d_{mn}(Y);\qquad \mathbb{B}^d_{mn}(Y):=\left\{X\in\mathbb{C}^{(mn\times mn)\cdot d}\;\middle|\;\|X-I_m\otimes Y\|_{\mathrm{row}}<r\right\}.$$

$\mathbb{C}^{(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\cdot d}$ 上的一致拓扑是 $\mathbb{C}^{(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\cdot d}$ 上由开 NC 集的子基 $r\cdot\mathbb{B}^d_{\mathbb{N}_n}(Y)$ 生成的拓扑，其中 $Y\in\mathbb{C}^{(n\times n)\cdot d}$，$n\in\mathbb{N}$ 和 $r>0$ 为任意取值。特别地，*NC* 单位行球 $\mathbb{B}^d_{\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{B}^d_{\mathbb{N}}\cdot 1(0)$，其中 $0:=(0,\cdots,0)\in\mathbb{C}^{1\times d}$ 是非交换宇宙的原点。

给定一个非交换集合 $\Omega\subseteq\mathbb{C}^{(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\cdot d}$，函数 $f:\Omega\to\mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$，也就是说，其值域位于1–维非交换全集中，若满足以下条件，则称为非交换（*NC*）函数：

(i) $f:\Omega_n\to\mathbb{C}^{n\times n}$，即 f 遵循分次结构；

(ii) 给定 $X\in\Omega_m$，$Y\in\Omega_n$，

$$f\begin{pmatrix}X&0\\0&Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f(X)&0\\0&f(Y)\end{pmatrix},$$

即 f 遵循直和。

(iii) 给定 任意 $S\in\mathrm{GL}_n$，若 $X\in\Omega_n$ 且 $S^{-1}XS:=(S^{-1}X_1S,\ \cdots,\ S^{-1}X_dS)\in\Omega_n$，则

$$f(S^{-1}XS)=S^{-1}f(X)S,$$

即 f 遵循联合相似变换。

我们还需要考虑取值于 J – 和 B(H，J)– 的非交换函数，其中 J，H 是复数域上的有限维或可分希尔伯特空间。具体来说，给定一个非交换集合 $\Omega\subseteq\mathbb{C}^{(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\cdot d}$，若函数 $f:\Omega\to\mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\otimes$J 对任意固定的 $g\in$J 和 $Z\in\Omega_n$, $g^*\otimes I_nf(Z)=:f_g(Z)$ 都是满足上述公理 (i–iii) 的非交换函数，我们就称其为取值于 J– 的非交换函数。类似地，若给定任意 $h\in$H 和 $g\in$J，函数 $A:\Omega\to\mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\otimes$B(H，J) 是取值于 B(H，J)– 的非交换函数，

$$Z\in\Omega_n\ \mapsto\ A_{h,g}(Z):=h^*\otimes I_nA(Z)g\otimes I_n,\tag{2.1}$$

是一个非交换函数。也就是说，例如，取值于 $\mathbb{C}^{m\times n}$– 的非交换函数是一个由非交换函数构成的 $m\times n$ 矩阵。

注 2.1. 显然，按上述定义，取值于 NC J – 或 B(H，J)– 的函数不一定保持直和，即 公理 (ii)。例如，若 A 是取值于 NC 的 $\mathbb{C}^{2\times2}$– 函数，则

$$A(Z\oplus W)=\begin{bmatrix}a_{11}(Z)&0&a_{12}(Z)&0\\0&a_{11}(W)&0&a_{12}(W)\\a_{21}(Z)&0&a_{22}(Z)&0\\0&a_{21}(W)&0&a_{22}(W)\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}a_{11}(Z)&a_{12}(Z)&0&0\\a_{21}(Z)&a_{22}(Z)&0&0\\0&0&a_{11}(W)&a_{12}(W)\\0&0&a_{21}(W)&a_{22}(W)\end{bmatrix}=A(Z)\oplus A(W).$$

可以用某些常置换矩阵 $A(Z\oplus W)$对其进行共轭，使得若重新定义在 A 处的 $Z\oplus W$ 取值方式为用这些“洗牌矩阵”进行共轭，则 $A(Z\oplus W)=A(Z)\oplus A(W)$ [PV21]。

具体而言，若 H 是取值于 NC B(H，J)– 的函数，取 H 和 J 的标准正交基 (h_i) 和 (g_j)。在点 $Z\in\mathbb{B}^d_n$ 处计算 H 时，我们是在 Z 处计算 H 的每个“矩阵元素”，因此 $\mathrm{ev}_Z(H)\in\mathbb{C}^{n\times n}\otimes$ B(H，J)。令 $U_{\mathcal{H}}:\mathbb{C}^n\otimes$H $\to$H $\otimes\mathbb{C}^n$，并令 $U_{\mathcal{J}}$ 为由 $U_{\mathcal{H}}v\otimes h=h\otimes v$ 定义的“张量交换”酉算子，其中 $v\in\mathbb{C}^n$ 且$h\in$H。若对每个 $n\in\mathbb{N}$，将 $Z\in\mathbb{B}^d_n$ 处的取值重新定义为

$$H\ \mapsto\ U_{\mathcal{H}}\mathrm{ev}_Z(H)U^*_{\mathcal{J}}=:\widetilde{H}(Z),\tag{2.2}$$

~那么，根据此求值定义，H 保持直和，见 [PV21，第 4], 节，因此它确实是一个取值于B(H , J)的–NC函数，并满足全部三条公理（i–iii）。在本文余下部分，若 H是定义在NC集合Ω上的取值于B(H , J)的–NC函数，对于任意有限维或可分希尔伯特空间H、J，我们将 H在 Z处的求值定义为$H(Z):=U_{\mathcal{H}}\mathrm{ev}_Z(H)U^*_{\mathcal{J}}$，如上所述，从而 $H(Z)$保持直和。

任意由 d 个非交换变量构成的“自由多项式”，即自由结合代数 $\mathbb{C}$上的任意元素 p，$p \in \mathbb{C}\langle \mathfrak{z}_1, \cdots, \mathfrak{z}_d \rangle$，都是定义在整个非交换宇宙上的非交换函数。值得注意的是，对于任意定义在一致开NC集合 $\Omega \subseteq \mathbb{C}^{(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\cdot d}$上的非交换函数 f，以下条件等价：（a） f 在一致拓扑下局部有界；（b） f在一致拓扑下连续；（c） f 是全纯的，即对于任意$Y \in \Omega_m$ 和任意“方向” $H \in \mathbb{C}^{(m\times m)\cdot d}$， f 在 Y 处沿方向 H 的方向导数（或Gâteaux导数）存在：

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(Y+tH)-f(Y)}{t} =: \partial_H f(Y) \quad \exists,$$

(此外， f 具有总导数或 Fr´échet 导数（在 $\mathfrak{y}$处），并且 (d) f 在一致解析的邻域 Y 内一致解析，这意味着它在 Y 处有一个“绝对”收敛的泰勒型幂级数展开，该展开在正半径的 NC 行球 $r \cdot \mathbb{B}_m^d\mathbb{N}(\mathfrak{y})$内收敛， $r > 0$ [KV14，推论7.26和推论7.28]。

我们将特别关注在 NC单位行球 $\mathbb{B}_{\mathbb{N}}^d$ 内有界（因此一致解析）的非交换函数。首先，考虑一个自由形式幂级数 *(FPS)*，$f \in \mathbb{C}\langle\langle \mathfrak{z} \rangle\rangle = \mathbb{C}\langle\langle \mathfrak{z}_1, \cdots, \mathfrak{z}_d \rangle\rangle$。也就是说， f是关于 d 个非交换变量 $\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}_1, \cdots, \mathfrak{z}_d)$ 的形式幂级数，其系数为复数，

$$f(\mathfrak{z}) = \sum_{\omega\in\mathbb{F}_d^+} \hat{f}_\omega \mathfrak{z}^\omega; \qquad \hat{f}_\omega \in \mathbb{C}.$$

上述中，$\mathbb{F}_d^+$表示自由幺半群，即由从字母表 $\{1、\cdots、d\}$ 中选取的字母 i_j 构成的所有字的集合。如果 $\omega = i_1 \cdots i_k$，我们记作 $\mathfrak{z}^\omega := \mathfrak{z}_{i_1} \cdots \mathfrak{z}_{i_k}$；如果 $\omega = \emptyset$，则记作 $\mathfrak{z}^\emptyset =: 1$，即自由形式幂级数环的单位元。这里， $\mathbb{F}_d^+$ 是一个幺半群，其乘法为字的连接，单位元为 $\emptyset$，即空字。给定 $\omega = i_1 \cdots i_k \in \mathbb{F}_d^+$，我们用 $|\omega| = k$ 表示 ω 的长度，并将 ω 的转置定义为$\omega^{\mathrm{t}} := i_k \cdots i_1$，它是 $\mathbb{F}_d^+$ 上的一个对合。

自由 *Hardy* 空间 $\mathbb{H}_d^2$ 是所有复系数平方可和的自由形式幂级数构成的希尔伯特空间，

$$\mathbb{H}_d^2 = \left\{ f(\mathfrak{z}) = \sum_{\omega\in\mathbb{F}_d^+} \hat{f}_\omega \mathfrak{z}^\omega \;\middle|\; \sum_{\omega\in\mathbb{F}_d^+} |\hat{f}_\omega|^2 < +\infty \right\},$$

配备系数的 l^2–内积。（尽管我们不会采用这种观点，但 $\mathbb{H}_d^2$可以很容易地与 $l^2(\mathbb{F}_d^+)$ 以及 $\mathbb{C}^d$ 上的 F($\mathbb{C}^d$)（全Fock空间）相对应。）根据 [Pop06b，定理 1.1]，，任意 $f \in \mathbb{H}_d^2$ 的“收敛半径”至少为一，因此在单位行球 $\mathbb{B}_{\mathbb{N}}^d$ 中定义了一个一致解析非交换函数。根据 $\mathbb{H}_d^2$ 的定义显然可知，左乘任意 d非交换变量 $L_j := M_{\mathfrak{z}_j}^L$，会在 $\mathbb{H}_d^2$上定义等距算子，且其值域两两正交；因此， $L := (L_1, \cdots, L_d) : \mathbb{H}_d^2 \otimes \mathbb{C}^d \to \mathbb{H}_d^2$ 是从 d 份 $\mathbb{H}_d^2$ 到一份的等距算子。（这种等距算子称为行等距算子。）自由单项式 $\{\mathfrak{z}^\omega\}_{\omega\in\mathbb{F}_d^+}$构成 $\mathbb{H}_d^2$的一组标准正交基，因此转置酉算子 $U_{\mathrm{t}} : \mathbb{H}_d^2 \to \mathbb{H}_d^2$ 由 $U_{\mathrm{t}}\mathfrak{z}^\omega = \mathfrak{z}^{\omega^{\mathrm{t}}}$ 定义，是 $\mathbb{H}_d^2$上的自伴酉对合。可以验证，左自由移位在 U_{t} 下的像为$R_k := U_{\mathrm{t}} L_k U_{\mathrm{t}} = M_{\mathfrak{z}_k}^R$，即右自由移位，它们是由独立的非交换变量右乘所定义的等距算子。

我们还需要 *NC Hardy* 代数，

$$\mathbb{H}_d^\infty := \left\{ h \in \mathcal{O}(\mathbb{B}_{\mathbb{N}}^d) \,\middle|\, \sup_{Z\in\mathbb{B}_{\mathbb{N}}^d} \|h(Z)\| < +\infty \right\},$$

所有在非交换单位行球上一致有界（因而解析）的非交换函数构成的代数。赋予其在 $\mathbb{B}_{\mathbb{N}}^d$ 上的上确界范数后，它是一个含幺 Banach 代数，也是一种算子代数。具体而言，在非交换单位行球上一致解析的非交换函数 h $\in \mathcal{O}_d(\mathbb{B}_{\mathbb{N}}^d)$ 在 $\mathbb{B}_{\mathbb{N}}^d$ 中一致有界，即 h $\in \mathbb{H}_d^\infty$，当且仅当 h 定义了 $\mathbb{H}_d^2$ 上的一个左乘子。也就是说，h $\in \mathbb{H}_d^\infty$ 当且仅当对所有 $f \in \mathbb{H}_d^2$ [都有 h· $f \in \mathbb{H}_d^2$ SSS18, 定理 3.1][Pop06b, 定理 3.1], , 而由 h 左乘所定义的线性算子 h(L) : = M^Lh : $\mathbb{H}_d^2 \to \mathbb{H}_d^2$ 的算子范数，与其符号 $\|$h(L) $\| = \|$h$\|_\infty$ 在非交换单位行球上的上确界范数一致。Hardy 代数 $\mathbb{H}_d^\infty$ 也可以等同于 Alg{$I, L_1, \cdots, L_d$} 在弱算子拓扑（WOT）下的闭包；该代数是由左自由移位生成的含幺算子代数。

2.2. **算子值非交换舒尔类**。所有定义从 $\mathbb{H}_d^2 \otimes$H 到 $\mathbb{H}_d^2 \otimes$ J 的有界左乘子的 B(H, J)–值非交换函数构成的集合记为$\mathbb{H}_d^\infty \otimes$B(H, J)。这是一个在弱算子拓扑下闭合的算子空间，其闭单位球，即非交换算子值舒尔类，记为 $\mathcal{S}_d$(H, J)。给定一个 Banach 空间 X，其开单位球和闭单位球分别记为 (X)$_1$和 [X]$_1$。

与之前一样，$B \in [\mathbb{H}_d^\infty \otimes$B(H, J)]$_1 = \mathcal{S}_d$(H , J) 是压缩的（算子值）左乘子，当且仅当其在非交换单位行球上的上确界范数不超过 1。一般而言，若线性压缩算子 $T \in$B(H, J) 满足 $\|T\| < 1$，则称其为严格压缩；若 $\|Th\| < 1$ 对所有$h \in$H 均成立，则称其为纯压缩。类似地，若非交换舒尔类 $B \in \mathcal{S}_d$(H, J) 中的每个 $B(Z)$（ $Z \in \mathbb{B}_{\mathbb{N}}^d$）分别都是严格压缩或纯压缩，则称该类严格或纯压缩。

命题 *2.2.* 给定任意 $B \in \mathcal{S}_d(H, J)$，存在唯一的正交分解 $H = H_0 \oplus H'$ 且 $J = J_0 \oplus J'$，使得 $B = B_0 \oplus B'$ 其中 $B_0 \in \mathcal{S}_d(H_0, J_0)$ 是纯压缩的，而 $B' \in \mathcal{S}_d(H', J')$ 是酉常值函数。也就是说，对于任意 $Z \in \mathbb{B}_n^d$, $B'(Z) = B'(0_n)$，其中$B'(0_n)\, h' = B(0_n)h'$ 且 $\|B(0_n)h'\| = \|h'\|$，对任意 $h' \in H' \otimes \mathbb{C}^n$。

该命题及其证明基于 [SF70，第五章命题 2.1]。本文余下部分将只考虑纯压缩的 $B \in \mathcal{S}_d(\mathcal{H}, \mathcal{J})$，即我们假设非交换 Schur 类函数没有常值酉部分。

Pr呃。对于任意 $n \in \mathbb{N}$，定义 H$'_n \subseteq$H $\otimes \mathbb{C}^n =:$ H$_n$和 J$'_n \subseteq$J $\otimes \mathbb{C}^n =:$ J$_n$为

$$\mathcal{H}'_n := \{h' \in \mathcal{H}_n \mid h' = B(0_n)^* B(0_n) h'\}$$

and

$$\mathcal{J}'_n := \{g' \in \mathcal{J}_n \mid g' = B(0_n) B(0_n)^* g'\},$$

其中 0_n:=(0_n、 $\cdots$、 0_n) $\in \mathbb{B}_n^d$。由于 B是非交换的，显然 J$'_n$ =J$'$ $\otimes\mathbb{C}^n$且 H$'_n$ =H$'\otimes\mathbb{C}^n$，其中 J$'$ =J$'$1，H$'$ =H$'$1。根据此定义也显然可知， $B(0_n)$: H$'_n \twoheadrightarrow$J$'_n$是满射等距映射。

给定任意 $Z \in \mathbb{B}_n^d$和 $h' \in \mathrm{H}_m$，考虑 $b_{z,\ h'}(\lambda) := B(\lambda Z)h' \in H^2(\mathbb{D}) \otimes \mathrm{H}_m$。则计算得，

$$\begin{aligned}\langle B(0_n h', B(\lambda Z)h'\rangle_{H^2\otimes\mathcal{H}_n'} &= \int_{\partial\mathbb{D}} \langle B(0_n)h', B(\zeta Z)h'\rangle_{\mathcal{H}_n'}\, m(d\zeta)\\ &= \|B(0_n)h'\|^2 = \|h'\|^2 = \|h'\|\|B(0_n)h'\|\\ &\geq \|b_{Z,h'}\|_{H^2\otimes\mathcal{H}_n'}\|B(0_n)h'\|_{H^2\otimes\mathcal{H}_n'}.\end{aligned}$$

由柯西–施瓦茨不等式取等可得

$$b_{Z,h'}(\lambda) = \zeta B(0_n)h' = \zeta b_{Z,h'}(0),$$

对任意 $\lambda \in \mathbb{D}$，因此 $\zeta = 1$和 $B(Z)h' = B(0_n)\,h'$。由于 $Z \in \mathbb{B}_n^d$和 $n \in \mathbb{N}$任意，我们有 $B(Z)h' = B(0_n)h'$，对每个 $n \in \mathbb{N}$和 $Z \in \mathbb{B}_n^d$均成立。

对 $b_{Z,g'}(\lambda) := B(\lambda Z)^* g'$，其中 $Z \in \mathbb{B}_n^d$和 $g' \in \mathrm{J}_n'$，重复同样的论证可得 $B(Z)^* g' = B(0_n)^* g'$，对每个 $g' \in \mathrm{J}_m$均成立。现在令 $\mathrm{H}_{(0)_n} := \mathrm{H}_n \ominus \mathrm{H}_n'$，$\mathrm{J}_{(0)_n} := \mathrm{J}_n \ominus \mathrm{J}_m$。若$h_0 \in \mathrm{H}_{(0)_n}$，$g' \in \mathrm{J}_n'$，则

$$\langle g', B(Z)h_0\rangle = \langle B(Z)^* g', h_0\rangle = \langle B(0_n)^* g', h_0\rangle = 0,$$

使得 $B(Z)|_{\mathcal{H}^{(0)_n}} : \mathrm{H}_{(0)_n} \to \mathrm{J}_{(0)_n}$。我们声称 $B_0(Z) := B(Z)|_{\mathcal{H}^{(0)_n}}$是纯压缩的。事实上，若存在 $h_0 \in \mathrm{H}_{(0)_n}$使得 $\|B_0(0_n)\, h_0\| = \|h_0\|$，那么

$$\begin{aligned}\langle h_0, I - B(0_n)^* B(0_n)h_0\rangle &= \|h_0\|^2 - \|B(0_n)h_0\|^2\\ &= \|h_0\|^2 - \|B_0(0_n)h_0\|^2 = 0.\end{aligned}$$

因此 $h_0 = B(0_n)^* B(0_n)h_0$，使得 $h_0 \in \mathrm{H}_n' \cap \mathrm{H}_{(0)_n} = \{0\}$。分解随即成立，唯一性也可直接验证。

■

引理 2.3. 元素 $B \in \mathcal{S}_d(\mathcal{H}, \mathcal{J})$严格压缩，当且仅当 $B(0) \in \mathcal{S}_d(\mathcal{H}, \mathcal{J})$是严格压缩映射。

证明。 若 $B(0)$ 是严格压缩映射，则根据 [MR19, 引理5.2.ii], 算子–M¨obius变换，

$$B_0(L) := (I_{\mathbb{H}_d^2} \otimes D_{B(0)^*})(I - B(L)I_{\mathbb{H}_d^2} \otimes B(0)^*)^{-1}(B(L) - I_{\mathbb{H}_d^2} \otimes B(0))I_{\mathbb{H}_d^2} \otimes D_{B(0)}^{-1},$$

属于非交换算子值舒尔类，$B_0 \in \mathcal{S}_d(\mathcal{H}, \mathcal{J})$。此外，根据[MR19，引理5.2.ii]，，由于 $D_{B(0)} = \sqrt{I_{\mathcal{H}} - B(0)^* B(0)}$ 可逆，对于任意$h \in \mathbb{C}^n \otimes \mathcal{H}$和 $Z \in \mathbb{B}_n^d$，令 $0_n = (0_n, \cdots, 0_n) \in \mathbb{B}_n^d$，

$$\begin{aligned}&\|h\|^2 - \|B_0(Z)h\|^2\\ &= \left\langle h, D_{B(0_n)}(I_{\mathbb{C}^n\otimes\mathcal{H}} - B(L)^* B(0_n)I)^{-1}(I_{\mathbb{C}^n\otimes\mathcal{H}} - B(Z)^* B(Z))(I_{\mathbb{C}^n\otimes\mathcal{H}} - B(0_n)^* B(Z))^{-1} D_{B(0_n)}h\right\rangle.\end{aligned}$$

由此可知，B 在 $\mathbb{B}_{\mathbb{N}}^d$ 中严格压缩，当且仅当 B_0 是严格压缩的，其中 $B_0(0) = 0$。对于任意单位向量$h \in \mathrm{H}$和 $g \in \mathrm{J}$，标量非交换函数$b_{g,\ h}(Z) := g^* B_0(Z)h$在 $\mathbb{B}_{\mathbb{N}}^d$ 上是压缩的，并满足$b_{g,\ h}(0) = 0$。因此，根据 [Pop06b的非交换施瓦茨引理，推论2.5], $\|b_{g,\ h}(Z)\| \leq \|Z\|_{\mathrm{row}}$。由于$h$，$g$是任意单位向量，可知$\|B_0(Z)\| \leq \|Z\|_{\mathrm{row}} < 1$，因此 B_0在 $\mathbb{B}_{\mathbb{N}}^d$中是严格压缩的，从而 B也是如此。

■

推论 2.4. 若 $B \in \mathcal{S}_d(\mathcal{H},\ \mathcal{J})$是纯压缩，且 $\dim\mathcal{H} < +\infty$或 $\dim\mathcal{J} < +\infty$，则$B$ 是严格压缩的。

证明。若 $B \in \mathcal{S}_d(\mathrm{H}, \mathrm{J})$ 是纯压缩，则对每个 $h \in \mathrm{H}$ 和 $g \in \mathrm{J}$，$\|B(0)h\| < \|h\|$ 且 $\|B(0)^* g\| < \|g\|$。若 $\dim \mathrm{H} < +\infty$，则显然 $\|B(0)\| < 1$。类似地，若 $\dim \mathrm{J} < +\infty$，则 $\|B(0)\| = \|B(0)^*\| < 1$。结论由前一个引理得出。 ∎

如 [JM17 中所定义；JM20]，$B \in \mathcal{S}_d(\mathcal{H}, \mathcal{J})$ 称为列极端(CE)，如果对于任意 $A \in \mathcal{S}_d(\mathcal{H}, \mathcal{J}')$，

$$\begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_d(\mathcal{H}, \mathcal{J} \oplus \mathcal{J}') \quad \Rightarrow \quad A = 0.$$

由 [JM20 定理 6 证明，4],以下条件等价：

(i) $B \in \mathcal{S}_d(\mathrm{H}, \mathrm{J})$ 是完全等距的，

(ii) 对任意 $h \in \mathrm{H}$，$B1 \otimes h \notin \mathrm{H}(B$。

经典地，$b \in \mathcal{S}(\mathrm{H}, \mathrm{J})$ 是完全等距的，当且仅当它是 $\mathbb{D}$ 中取值于 $\mathrm{B}(\mathrm{H}, \mathrm{J})$– 的压缩解析函数的极端点。

2.3. 非交换再生核希尔伯特空间。设 $\Omega \subseteq \mathbb{C}^{(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\cdot d}$ 为一个非交换集合。定义在 Ω 上、由非交换函数构成的希尔伯特空间 H，若对于每个 $Z \in \Omega_n$、$n \in \mathbb{N}$，线性点求值映射 $\mathrm{l}_Z : \mathrm{H} \to (\mathbb{C}^{n\times n}, \mathrm{tr})$ 从 H 映入希尔伯特空间 $\mathbb{C}^{n\times n}$（其中 tr 表示迹），且该空间配备希尔伯特–施密特（迹）内积 $f \in \mathrm{H}\ \mathrm{l} \overset{Z}{\mapsto} f(Z)$ 有界 [BMV16]，则称其为非交换再生核希尔伯特空间（NC-RKHS）。此时，令 $K_Z := (\mathrm{l}_Z)^* : (\mathbb{C}^{n\times n}, \mathrm{tr}) \to \mathrm{H}$ 表示希尔伯特空间伴随算子，则对于任意秩为一的矩阵，$yv^* \in \mathbb{C}^{n\times n}$、$y$、$v \in \mathbb{C}^n$，

$$\langle K_Z yv^*, f\rangle_{\mathcal{H}} = \mathrm{tr}\, vy^* f(Z) = y^* f(Z) v.$$

也就是说，与非交换核向量 $K\{Z, y, v\} := K_Z(yv^*)$ 的内积给出有界线性泛函 $\mathrm{l}_{Z,y,v} : \mathrm{H} \to \mathbb{C}$ defined by $\mathrm{l}_{Z,y,v}(f) := y^* f(Z) v$。若 H 是定义在 Ω 上的任意非交换再生核希尔伯特空间，且具有非交换核向量 $K\{Z, y, v\}$，则定义 H 的非交换再生核 $K : \Omega_m \times \Omega_n \to \mathrm{B}(\mathbb{C}^{m\times n})$ 如下：给定 $Z \in \Omega_m$，$y, v \in \mathbb{C}^m$，$X \in \Omega_n$ 和 $x, u \in \mathbb{C}^n$，

$$y^* K(Z, W)[vu^*]x := \langle K\{Z, y, v\}, K\{W, x, u\}\rangle_{\mathcal{H}}.$$

这定义了一族（完全有界的）线性映射

$$\{K(Z, W)[\cdot] \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^{m\times n}) |\ Z \in \Omega_m, W \in \Omega_n\},$$

使得对于每个 $m \in \mathbb{N}$，$K(Z, Z)[\cdot] : \mathbb{C}^{m\times m} \to \mathbb{C}^{m\times m}$ 都是完全正的。因此，这个非交换再生核称为完全正非交换（CPNC）核。正如 [BMV16，第 2] 节所示，可以将非交换集合 Ω 上的 CPNC 核 $K(Z, W)[\cdot]$, 定义为$\Omega \times \Omega$上的一个函数，其取值为完全有界线性映射，并且对于分次结构、直和以及联合相似变换具有自然的不变性。Aronszajn 和 Moore 的许多经典再生核理论都自然地扩展到了这一非交换背景中 [BMV16]。特别地，非交换集合 Ω 上的 CPNC 核 K 与 Ω上的非交换函数的非交换再生核希尔伯特空间之间存在双射对应：若 H 是Ω上的非交换再生核希尔伯特空间，则其非交换再生核是一个 CPNC 核；反过来，给定 Ω上的 CPNC 核 K，可以构造一个由 Ω上的非交换函数组成的非交换再生核希尔伯特空间 H，使得 K 是其非交换再生核 [BMV16，定理 3.1]。这促使我们采用记号 $\mathrm{H} = \mathrm{H}_{nc}(K)$：若 H 是具有 CPNC 再生核 K 的非交换再生核希尔伯特空间。

特别地，自由 Hardy 空间 $\mathbb{H}_d^2$ 是非交换集合 $\Omega = \mathbb{B}_{\mathbb{N}}^d$——非交换单位行球——上的非交换再生核希尔伯特空间。给定 $Z \in \mathbb{B}_m^d$、$W \in \mathbb{B}_n^d$ 和 $P \in \mathbb{C}^{m\times n}$，$\mathbb{H}_d^2$ 的 CPNC 再生核是非交换 *Szegö* 核，

$$K(Z,W)[P] := \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathrm{Ad}_{Z,W^*}^{\circ\ell}(P) = \sum_{\omega\in\mathbb{F}_d^+} Z^\omega P W^{\omega *},$$

其中 $\mathrm{Ad}_{Z,W^*}: \mathbb{C}^{m\times n} \to \mathbb{C}^{m\times n}$ 是由 Z 和 W 通过伴随运算得到的线性映射 *，

$$\mathrm{Ad}_{Z,W^*}(P) := \sum_{j=1}^{d} Z_j P W_j^*,$$

而 $\mathrm{Ad}_{Z,W^*}^{\circ\ell}$ 表示其 ℓ–重自身复合，而 $\mathrm{Ad}_{Z,W^*}^{\circ 0} := \mathrm{id}_{m\times n}$ 定义为矩阵上的线性恒等映射 $m\times n$。（例如参见 [BMV16; JM20; SSS18]。）在上述 $W^{\omega *} := (W^\omega)^* = (W^*)^{\omega^{\mathrm{t}}}$。

本文所考虑的所有非交换再生核希尔伯特空间都是定义在非交换单位行球上的一致解析非交换函数的非交换再生核希尔伯特空间。不过，我们还需要考虑向量值非交换再生核希尔伯特空间。具体而言，设 J 是有限维或可分的希尔伯特空间。设 H 是定义在 $\Omega \subseteq \mathbb{C}^{(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\cdot d}$ 上的取值于 J –的非交换函数所构成的希尔伯特空间；如果对于任意 $Z \in \Omega_n$、$n \in \mathbb{N}$，点求值映射 $l_Z: \mathrm{H} \to \mathbb{C}^{n\times n} \otimes \mathrm{J}$ 是映射到希尔伯特空间 $\mathbb{C}^{n\times n} \otimes \mathrm{J}$ 的有界线性映射，其中 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 配备希尔伯特–施密特内积，则 H 是一个（向量值）非交换再生核希尔伯特空间。在这种情况下，与之前一样，对于任意 $Z \in \Omega_m$、y、$v \in \mathbb{C}^m$ 以及 $g \in \mathrm{J}$，非交换核向量、

$$k\{Z, y\otimes g, v\} := \ell_Z^*(yv^*\otimes g) \in \mathcal{H},$$

实现点求值的线性泛函

$$\langle k\{Z, y\otimes g, v\}, f\rangle_{\mathcal{H}_{nc}(k)} = \langle y\otimes g, f(Z)v\rangle_{\mathbb{C}^m\otimes\mathcal{J}}.$$

同样，与前面一样，对于 $Z \in \Omega_m$ 和 $W \in \Omega_n$，可按下式定义非交换再生核 k，$k(Z, W)[\cdot] \in \mathrm{B}(\mathbb{C}^{m\times n}, \mathbb{C}^{m\times n}\otimes\mathrm{B}(\mathrm{J}))$，

$$(y\otimes g)^* k(Z,W)[vu^*](x\otimes g') := \langle k\{Z, y\otimes g, v\}, k\{W, x\otimes g', u\}\rangle_{\mathcal{H}},$$

并记为 $\mathrm{H} = \mathrm{H}_{nc}(k)$。

2.4. 非交换 de Branges–Rovnyak 空间。为了构造非交换 de Branges–Rovnyak 模型，我们需要引入向量值自由 Hardy 空间之间压缩的算子值左乘子的（左）非交换 de Branges–Rovnyak 空间。设 H，J 为复可分（或有限维）希尔伯特空间，并考虑向量值自由 Hardy 空间 $\mathbb{H}_d^2 \otimes \mathrm{H}$ 和 $\mathbb{H}_d^2 \otimes \mathrm{J}$，它们可分别视为以 NC H 和 J 为值、定义在 $\mathbb{B}_{\mathbb{N}}^d$ 上的函数所构成的非交换再生核希尔伯特空间。这里，$\mathbb{H}_d^2 \otimes \mathrm{H}$ 的 B(H)值 CPNC Szegö 核 K 为

$$K(Z,W)[\cdot]\otimes I_{\mathcal{H}}[P\otimes A] := K(Z,W)[P]\otimes A; \qquad Z\in\mathbb{B}_m^d, W\in\mathbb{B}_m^d, P\in\mathbb{C}^{m\times n}, A\in\mathcal{B}(\mathcal{H}),$$

其中，K 表示 $\mathbb{H}_d^2$的非交换 Szegö 核。

我们将 B 的（左）*de Branges–Rovnyak* 空间定义为 $\mathrm{H}(B) := \mathrm{H}_{nc}(K^B)$，其中 K^B 是由下式定义的 CPNC *de Branges–Rovnyak* 核

$$K^B(Z,W)[P\otimes A] := K(Z,W)[P]\otimes A - B(Z)\cdot(K(Z,W)[P]\otimes A)\cdot B(W)^*,$$

其中 K 表示上文所述的 $\mathbb{H}_d^2$ 的 CPNC Sz¨ego 核。（也可以定义压缩的算子值右乘子的右非交换 de Branges–Rovnyak 空间。我们选择研究左非交换 de Branges–Rovnyak 空间。）容易验证，作为一个向量空间，$\mathrm{H}(B) \subseteq \mathbb{H}_d^2 \otimes \mathrm{J}$，且线性嵌入 $\mathrm{e} : \mathrm{H}(B) \hookrightarrow \mathbb{H}_d^2 \otimes \mathrm{J}$ 是一个压缩映射。也就是说，$\mathrm{H}(B)$压缩包含于 $\mathbb{H}_d^2 \otimes \mathrm{J}$ 中。

如同在经典情形中，非交换 de Branges–Rovnyak 空间也可以等价地定义为算子值域空间 [FM16b; Sar94]。给定任意一个（有界）线性算子，$A \in \mathrm{B}(\mathcal{H}, \mathcal{J})$，算子 *operator–range space* 的 A，$\mathrm{R}(A)$ 是一个希尔伯特空间，因此 $\mathrm{R}(A) = \mathrm{Ran}\, A \subseteq \mathcal{J}$ 作为复向量空间，并且关于内积是一个希尔伯特空间，

$$\langle Ax, Ay\rangle_{\mathscr{R}(A)} := \langle x, (I - P_{\mathrm{Ker}\, A})y\rangle_{\mathcal{H}}\,.$$

由此可知，嵌入映射 $\mathrm{e} : \mathrm{R}(A) \hookrightarrow \mathrm{J}$ 有界，且满足 $\|\mathrm{e}\| = \|A\|$。特别地，如果 A 是线性压缩算子，$\|A\|_{\mathscr{B}(\mathcal{H},\mathcal{J})} \leq 1$，则该嵌入是压缩的，我们称 $\mathrm{R}(A)$ 压缩包含于 J 中。此外，如果 A 是线性压缩算子，则将 A 的补空间定义为 $\mathrm{R}^{\mathrm{c}}(A) := \mathrm{R}(\sqrt{I_{\mathcal{J}} - AA^*})$，即缺陷算子的算子值域空间，$D_{A^*} = \sqrt{I - AA^*}$。关于~~算子值域~~空间的更多细节，参见 [FM16b，第 16] 章；关于其在再生核理论中的应用，参见 [BMN24，第 2.2] 小节。如 [Sar94], 所示，如果 $b \in [H_1^\infty]$ 是 $\mathbb{D}$中的压缩解析函数，则其 de Branges–Rovnyak 空间可定义为 $\mathrm{H}(b) := \mathrm{R}^c(b(S))$，其中 $b(S) = M_b : H^2 \to H^2$ 是由 b 左乘给出的压缩线性映射。也就是说，$\mathrm{H}(b) = \mathrm{R}(\sqrt{I - b(S)b(S)^*})$。类似地，给定任意 $B \in [\mathbb{H}_d^\infty \otimes \mathrm{B}(\mathrm{H}, \mathrm{J})]_1$，可以证明 $\mathrm{H}(B) = \mathrm{R}^c(B(L))$，其中 $B(L) := M_B^L : \mathbb{H}_d^2 \otimes \mathrm{H} \to \mathbb{H}_d^2 \otimes \mathrm{J}$ 是由 B [JM17; JM20]左乘给出的压缩线性映射。非交换 de Branges–Rovnyak 空间是经典单变量 de Branges–Rovnyak 空间的忠实类比，经典理论中的大部分内容都延伸到了这一非交换情形，参见例如 [JM12; JM17; JM20]。特别地，如 [BBF07],所述，任意（左）非交换 de Branges–Rovnyak 空间 $\mathrm{H}(B)$，$B \in [\mathbb{H}_d^\infty \otimes \mathrm{B}(\mathrm{H}, \mathrm{J})]_1$ 对于右自由移位是余不变的，$R_j^* \otimes I_{\mathcal{J}}\mathrm{H}(B) \subseteq \mathrm{H}(B)$，而且尽管 $B1 \otimes \mathrm{h}, \mathrm{h} \in \mathrm{H}$ 通常不属于 $\mathrm{H}(B)$，其右后向移位总是满足：

$$R_j^* B1 \otimes h \in \mathscr{H}(B); \qquad h \in \mathcal{H},\ 1 \leq j \leq d.$$

其中，$1 = \mathfrak{z}^{\emptyset}$ 是自由 Hardy 空间中的常值函数（或称“真空向量”）。

2.5. **CNC 行压缩算子的性质**。我们沿用 [MR19] 中的记号，并引入完全非余等距（*CNC*）行压缩算子。设 H 是一个复可分希尔伯特空间，或有限维希尔伯特空间。若线性映射 $T = (T_1, \cdots, T_d) : \mathrm{H} \otimes \mathbb{C}^d \to \mathrm{H}$ 满足 $\|T\|_{\mathscr{B}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d,\mathcal{H})} \leq 1$，或等价地，

$$\|TT^*\|_{\mathscr{B}(\mathcal{H})} = \left\|\sum_{j=1}^d T_j T_j^*\right\| \leq 1.$$

若上述条件中的不等式为严格不等式，则称 T 是严格行压缩算子。

定义 2.5。若行压缩算子 $T = (T_1, \ldots, T_d) : \mathrm{H} \otimes \mathbb{C}^d \to \mathrm{H}$ 不存在非平凡子空间 $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{H}$ 使得：则称其为完全非余等距（*CNC*）。

(i) $T_j^*\mathrm{K} \subseteq \mathrm{K}$ 对于每个 $1 \leq j \leq d$，即 K 对于 T 是余不变的，

并且 (ii) $T^*|_{\mathrm{K}} : \mathrm{K} \to \mathrm{K} \otimes \mathbb{C}^d$ 是列等距映射。

首先考虑*CNC* 行偏等距算子将会很方便，即 CNC 行压缩映射 $V\colon \mathrm{H}\otimes\mathbb{C}^d\to\mathrm{H}$，使得 V^*V（从而 VV^*）是投影，在这种情况下，$V^*V = I_{\operatorname{Ker} V^\perp}$。任意压缩映射 $T\in \mathrm{B(H，J)}$ 都具有一个等距–纯分解$T = V + C$，分解为一个偏等距算子 V 和一个纯压缩算子 C。回顾一下，对于 H 上的任意行压缩映射 $T\otimes\mathbb{C}^d$，缺陷算子定义为

$$D_T := \sqrt{I_{\mathcal{H}}\otimes I_d - T^*T} \quad \text{and} \quad D_{T^*} := \sqrt{I_{\mathcal{H}} - TT^*}.$$

引理 2.6。 *[MR19，引理 3。15]* 每个行压缩算子 $T\colon \mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d\to\mathcal{H}$ 都可以唯一分解为 $T = V + C$，其中

(*i*) $V\colon = TP_{\operatorname{Ker} D_T}$是 H 上的行偏等距算子$\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d$，(*ii*) $C\colon = TP_{\operatorname{Ker} D_T^\perp}$是纯的，即对于所有$\mathbf{h}\in\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d$，$\|C\mathbf{h}\| < \|\mathbf{h}\|$，(*iii*)核 $V =$核 $D_T^\perp$且值域 $V =$值域 $D_{T^*}^\perp \subseteq$值域 $C^\perp$。因此，T 是 *CNC* 当且仅当 V 是 *CNC*。

我们引入与给定的行偏等距算子 V（作用于 $\mathrm{H}\otimes\mathbb{C}^d$）相关的一些有用对象。对于任意 $Z\in\mathbb{B}_n^d$ 和 $n\in\mathbb{N}$，定义 $\mathrm{H}\otimes\mathbb{C}^n$ 中相应的限制值域空间 为

$$\mathcal{R}(V-Z) = \operatorname{Ran}\left[(V\otimes I_n - I_{\mathcal{H}}\otimes Z)(V^*V\otimes I_n)\right] \tag{2.3}$$

$$= \left[I_{\mathcal{H}}\otimes I_n - (V_1^*\otimes Z_1 + \cdots + V_d^*\otimes Z_d)\right](\operatorname{Ran} V\otimes\mathbb{C}^n). \tag{2.4}$$

我们通常将这些空间称为 $\mathcal{R}(V-Z)^\perp = \mathcal{H}\ominus\mathcal{R}(V-Z)$即 Z 的缺陷空间 V。为方便记号，我们将 (2.3) 和 (2.4) 写作

$$\mathcal{R}(V-Z) = \operatorname{Ran}\left[(V-Z)V^*V\right] = \left[I - ZV^*\right](\operatorname{Ran} V\otimes\mathbb{C}^n), \tag{2.5}$$

其中

$$ZV^* := (I_{\mathcal{H}}\otimes Z_1,\cdots,I_{\mathcal{H}}\otimes Z_d)\begin{bmatrix} V_1^*\otimes I_n \\ \vdots \\ V_d^*\otimes I_n\end{bmatrix} = \sum_{j=1}^d V_j^*\otimes Z_j.$$

对于每个 $n\in\mathbb{N}$，考虑以下子空间，

$$\mathcal{H}_n' := \bigcap_{Z\in\mathbb{B}_n^d}\mathcal{R}(V-Z)\subset\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^n, \tag{2.6}$$

and

$$\mathcal{H}' := \{h\in\mathcal{H}\mid h\otimes v\subseteq\mathcal{H}_n',\ \forall v\in\mathbb{C}^n,\ n\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathcal{H}. \tag{2.7}$$

这些对象之间的一个重要关系已在 [MR19], 中指出。为方便读者，我们在此列出这些结果。在下面的表述中，给定一个行偏等距算子 $V = (V_1,\cdots,V_d)\colon \mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d\to\mathcal{H}$以及一个行压缩算子 $T\colon \mathcal{J}\otimes\mathbb{C}^d\to\mathcal{J}$，若 T扩张 V，记作 $V\subseteq T$，当且仅当$\mathcal{H}\subseteq\mathcal{J}$且 $V = TV^*V$。（请注意，这并不一定意味着 $\operatorname{Ker} V\subseteq\operatorname{Ker} T$。）

引理 2.7。 *[MR19，引理 3。9]* 设$\mathcal{H}\subseteq\mathcal{J}$ 是复有限维希尔伯特空间或可分希尔伯特空间，设 V 是作用于$\mathcal{H}$ 上的行偏等距算子，且 T 是作用于$\mathcal{J}$ 上的行压缩算子，满足 $V\subseteq T$。那么，

$$[I - TZ^*]:\mathcal{R}(V-Z)^\perp\twoheadrightarrow\operatorname{Ran} V^\perp\otimes\mathbb{C}^n$$

对每个 $Z\in\mathbb{B}_n^d$ 和 $n\in\mathbb{N}$，都是线性同构（即 线性双射）。

在上述引理陈述中，

$$TZ^* = (ZT^*)^* = \sum_{j=1}^{d} T_j \otimes Z_j^*.$$

对于每个 $u \in \mathbb{C}^n$ 和 $n \in \mathbb{N}$，定义张量求值映射$I_{\mathcal{H}} \otimes u^* : \mathrm{H} \otimes \mathbb{C}^n \to \mathrm{H}$将很方便，其定义如下：

$$[I_{\mathcal{H}} \otimes u^*](f \otimes v) = (u^* v) f \text{ for all } f \in \mathcal{H}, v \in \mathbb{C}^n. \tag{2.8}$$

该线性映射的希尔伯特空间伴随算子，$[I_{\mathcal{H}} \otimes u] := [I_{\mathcal{H}} \otimes u^*]^* : \mathrm{H} \to \mathrm{H} \otimes \mathbb{C}^n$ 的作用为

$$[I_{\mathcal{H}} \otimes u]h := h \otimes u. \tag{2.9}$$

定理 2.8 (定理 3.2, [MR19])。若 V 是 $\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^d$上的行偏等距算子，则 $\mathcal{H}'$ 如 (2.7) 所示，是 $\mathcal{H}$ 中关于 V 满足 $V^*|_{\mathcal{H}'}$ 为列等距映射的最大余不变子空间。因此，V 是 *CNC*，当且仅当 $\mathcal{H} = \mathcal{H}'^{\perp}$。此外，

$$\mathcal{H}'^{\perp} = \bigvee_{\substack{u \in \mathbb{C}^n, Z \in \mathbb{B}_n^d, \\ n \in \mathbb{N}}} [I_{\mathcal{H}} \otimes u^*][I - VZ^*]^{-1}(\operatorname{Ran} V^{\perp} \otimes \mathbb{C}^n). \tag{2.10}$$

推论 2.9 (推论 3.4, [MR19])。若 T 是 $\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^d$上的行压缩算子，则 T 是 *CNC*，当且仅当

$$\mathcal{H} = \bigvee_{\substack{u \in \mathbb{C}^n, Z \in \mathbb{B}_n^d, \\ n \in \mathbb{N}}} [I_{\mathcal{H}} \otimes u^*][I - TZ^*]^{-1}(\operatorname{Ran} D_{T^*} \otimes \mathbb{C}^n).$$

还可以进一步证明

$$\bigvee_{\substack{u \in \mathbb{C}^n, Z \in \mathbb{B}_n^d, \\ n \in \mathbb{N}}} [I_{\mathcal{H}} \otimes u^*][I - TZ^*]^{-1}(\operatorname{Ran} D_{T^*} \otimes \mathbb{C}^n) = \bigvee_{\omega \in \mathbb{F}_d^+} T^{\omega} \operatorname{Ran} D_{T^*},$$

使得 T 是 CNC，当且仅当

$$\mathcal{H} = \bigvee_{\omega \in \mathbb{F}_d^+} T^{\omega} \operatorname{Ran} D_{T^*}, \tag{2.11}$$

参见 [MR19，推论 3。4]。

2.6. **Gleason 解**。自由 de Branges–Rovnyak 空间上的极值*Gleason* 解给出了 CNC 行压缩算子和 CNC 偏等距算子的具体例子。（我们的模型将表明，所有 CNC 行压缩算子都可由此类 Gleason 解给出，且在酉等价意义下成立。）

定义 2.10。设 $\mathrm{H}_{nc}(K)$ 是定义在非交换单位行球 $\mathbb{B}_{\mathbb{N}}^d$ 上的 $\mathrm{H}-$ 值非交换再生核希尔伯特空间。若对于每个 $f \in \mathrm{H}_{nc}(K)$ 以及每个 $Z = (Z_1, \cdots, Z_d) \in \mathbb{B}_n^d$，都有一个算子行 $d-$元组 $X = (X_1, \cdots, X_d) \in \mathrm{B}(\mathrm{H}_{nc}(K))^{1 \times d}$ 满足

$$(X^* f)(Z) \cdot Z := \sum_{j=1}^{d} (X_j^* f)(Z) Z_j = f(Z) - f(0_n), \tag{2.12}$$

参见 [JM17；JM20]。这样的（右）Gleason 解称为压缩的，如果

$$XX^* \leq I - K_0 K_0^*,$$

且在等式成立时为极值的：$XX^* = I - K_0 K_0^*$。

固定希尔伯特空间$\mathcal{H}$、$\mathcal{J}$，并令 $B \in \mathcal{S}_d$（H，J） $= [\mathbb{H}_d^\infty \otimes$B（H，$\mathcal{J}$]$_1$是从 $\mathbb{H}_d^2 \otimes \mathcal{H}$ 到 $\mathbb{H}_d^2 \otimes \mathcal{J}$的压缩左乘子。我们考虑左 de Branges–Rovnyak 空间H（B） $\subseteq \mathbb{H}_d^2 \otimes \mathcal{J}$，它是一个压缩包含。由于H （$B$）关于右自由移位 [BBF07],为余不变，我们定义

$$X_j^* := R_j^* \otimes I_{\mathcal{J}}\big|_{\mathscr{H}(B)} \text{ for all } 1 \le j \le d. \tag{2.13}$$

根据 [JM17；JM20], 对于任意非交换 de Branges–Rovnyak 空间 H(B)，其中$B \in \mathcal{S}_d(\mathcal{H}, \mathcal{J})$，H($B$)具有由（2.13）给出的唯一压缩 Gleason 解， X^*： $=R^* \otimes I_{\mathcal{J}_0}$，即右后向移位在 H($B$)上的限制。

定义 2.11。 线性映射 $\mathbf{B}$: H $\to$ H (B) $\otimes \mathbb{C}^d$ 称为 B 的*Gleason* 解，如果

$$\mathbf{B}(Z) \cdot Z := \sum_{j=1}^{d} \mathbf{B}_j(Z) Z_j = B(Z) - B(0_n). \tag{2.14}$$

这样的 Gleason 解**B**是压缩的，如果

$$\mathbf{B}(Z)^* \mathbf{B}(\mathbf{Z}) \le I_{\mathcal{H}} - B(0)^* B(0),$$

且若等号成立，则为极值的。

同样，根据 [JM17；JM20],任意 $B \in \mathcal{S}_d(\mathcal{H}, \mathcal{J})$的唯一压缩 Gleason 解由 B 给出，即$\mathbf{B} = [R^* \otimes I_{\mathcal{J}}]B$。根据 [JM20，定理 6。4],以下命题等价:

(i) $B \in \mathcal{S}_d$(H、J) 是列极值（CE）。（ii）
$\mathbf{B} := R^* \otimes I_{\mathcal{J}} B$ 是极值的，并且（iii） X:
$= \left[R^* \otimes I_{\mathcal{J}}|_{\mathscr{H}(B)}\right]^*$ 是极值的，且

$$\operatorname{supp}(B) = \bigvee_{\substack{Z \in \mathbb{B}_n^d; \\ y, v \in \mathbb{C}^n,\ n \in \mathbb{N}}} I_{\mathcal{H}} \otimes y^* B(Z)^* I_{\mathcal{J}} \otimes v = \mathcal{H}.$$

可以验证 X 与 **B** 之间存在如下关系，该关系将在后文中发挥作用。（这是 [JM20，命题 56]的“左”版本。）

命题 2.12。 设 $B \in \mathcal{S}_d(\mathcal{H}、\mathcal{J})$，并设 X、**B**分别是 H (B)和 B 的唯一压缩的 *Gleason* 解。则对于任意 $W \in \mathbb{B}_n^d$、 x、 $u \in \mathbb{C}^n$、 $g \in \mathcal{J}$和 $n \in \mathbb{N}$,

$$X^* K^B\{W, g \otimes x, u\} = K^B\{W, g \otimes x, \operatorname{col}(W)u\} - \mathbf{B}[I_{\mathcal{H}} \otimes u^*] B(W)^* g \otimes x. \tag{2.15}$$

在上述内容中,

$$K^B\{W, g \otimes x, \operatorname{col}(W)u\} := \begin{bmatrix} K^B\{W, g \otimes x, W_1 u\} \\ \vdots \\ K^B\{W, g \otimes x, W_d u\} \end{bmatrix} \in \mathscr{H}(B) \otimes \mathbb{C}^d.$$

我们现在断言，只要 X 是 B 是列极值的，它就是 CNC。稍后我们将在第4.2 节看到，每个 CNC 行压缩算子都可以由某个完全等距 $B \in \mathcal{S}_d(\mathcal{H},\mathcal{J})$所对应的（左）非交换 de Branges–Rovnyak 空间的极值 Gleason 解来建模。现在假设 B 是列极值的（CE），因此 X 是唯一极端 Gleason 解，即

$$XX^* = I_{\mathscr{H}(B)} - K_0^B K_0^{B*}.$$

这里， $K_0^B: \mathrm{J} \to \mathrm{H}(B)$ 定义为

$$K_0^B g := K^B\{0, g \otimes 1, 1\} \text{ for all } g \in \mathcal{J}.$$

于是，

$$K^B(0,0) = K_0^{B^*} K_0^B = I_{\mathcal{J}} - B(0)B(0)^* = D^2_{B(0)^*} \tag{2.16}$$

并令

$$\mathscr{H}_0 := \bigvee_{g \in \mathcal{J}} K_0^B g \subseteq \mathscr{H}(B),$$

我们有

$$P_{\mathscr{H}_0} = K_0^B K^B(0,0)^{-1} K_0^{B^*} = K_0^B D^{-2}_{B(0)^*} K_0^{B^*}. \tag{2.17}$$

注 2.13. 根据引理 2.3， $B \in \mathcal{S}_d(\mathrm{H}, \mathrm{J})$ 严格压缩当且仅当 $\|B(0)\| < 1$，此时两个缺陷算子 $D_{B(0)^*}$ 和 $D_B(0)$ 都可逆。如果 B 仅为纯压缩，那么缺陷空间 $\mathscr{D}_{B(0)^*}$ 和 $\mathscr{D}_{B(0)}$ 分别是 J 和 $\mathrm{H} \otimes \mathbb{C}^d$ 中非闭的稠密子空间，因此 $D_B^{-1}(0)^*$ 和 $D_B^{-1}(0)$ 是定义在这些缺陷空间上的闭稠密定义算子。由于 $K_0^{B*} K_0^B = D^2_B(0)^*$，由极分解可得 $\mathrm{Ran}\ K_0^{B*} \subseteq \mathrm{Dom}\ D_B^{-1}(0)^*$，因此 (2.17) 中的投影算子仍然定义良好。

备注 2.14。 值得指出的是， X 是行偏等距算子，当且仅当$B(0) = 0$。为说明这一点，注意到

$$\begin{aligned}
& XX^*XX^* = XX^* \\
\Longleftrightarrow\ & \left(I_{\mathscr{H}(B)} - K_0^b K_0^{B^*}\right)\left(I_{\mathscr{H}(B)} - K_0^B K_0^{B^*}\right) = \left(I_{\mathscr{H}(B)} - K_0^B K_0^{B^*}\right) \\
\Longleftrightarrow\ & K_0^B\left[I_{\mathscr{H}(B)} - D^2_{B(0)^*}\right]K_0^{B^*} = 0 \\
\Longrightarrow\ & K_0^{B^*} K_0^B \left(B(0)B(0)^*\right) K_0^{B^*} K_0^B = 0 \\
\Longrightarrow\ & D^2_{B(0)^*} B(0)B(0)^* D^2_{B(0)^*} = 0.
\end{aligned}$$

因此，如果 X 是行偏等距算子，那么 $D_{B(0)^*}$ 的单射性迫使 $B(0) = 0$。反之，如果 $B(0) = 0$，那么 $D_{B(0)^*} = I_{\mathscr{H}(B)}$，我们可以沿着上述逆向推导得出 X 是行偏等距算子。

注意到

$$\begin{aligned}
& D^2_{X^*} = I_{\mathscr{H}(B)} - XX^* = K_0^B K_0^{B^*}, \\
\Longrightarrow\ & \mathrm{Ker}\, D_{X^*} = \mathrm{Ker}\, D^2_{X^*} = \mathscr{H}_0^{\perp}, \\
\Longrightarrow\ & P_{\mathrm{Ker}\, D_{X^*}} = I_{\mathscr{H}(B)} - \left(K_0^B K^B(0,0)^{-1} K_0^{B^*}\right), \\
\Longrightarrow\ & V^* := X^* P_{\mathrm{Ker}\, D_{X^*}} = X^*\left[I_{\mathscr{H}(B)} - K_0^B D^{-2}_{B(0)^*} K_0^{B^*}\right].
\end{aligned} \tag{2.18}$$

由引理 2.6， V 是行偏等距算子。随后很容易验证

$$\mathrm{Ran}\, D_{X^*} = \mathrm{Ran}\, V^{\perp} = \mathscr{H}_0 = \bigvee \mathrm{Ran}\, K_0^B \tag{2.19}$$

因此，如果 $B(0)$ 是纯压缩算子，那么 $\Gamma(0) := K_0^B D_B^{-1}(0)^*: \mathscr{D}_{B(0)^*} \subseteq \mathrm{J} \twoheadrightarrow$ 值域 $V^{\perp}$可通过连续性延拓为从 J 到值域 $V^{\perp}$ 的满射等距映射。（如果 $B(0)$ 是严格压缩， $D_{B(0)^*}$ 则为双射且可逆。）

引理 2.15。 设 $B \in \mathcal{S}_d(\mathcal{H}, \mathcal{J})$ 如上。对于任意 $Z \in \mathbb{B}_n^d$、 u、 $x \in \mathbb{C}^n$、 $g \in \mathcal{J}$和 $n \in \mathbb{N}$，有

$$[I_{\mathscr{K}(B)} \otimes u^*][I - XZ^*]^{-1}(K_0^B g \otimes x) = K^B\{Z, g \otimes x, u\}. \tag{2.20}$$

特别是，

$$\mathscr{K}(B) = \bigvee_{\substack{u \in \mathbb{C}^n, Z \in \mathbb{B}_n^d, \\ n \in \mathbb{N}}} [I_{\mathscr{K}(B)} \otimes u^*][I - XZ^*]^{-1}(\operatorname{Ran}\Gamma(0) \otimes \mathbb{C}^n). \tag{2.21}$$

证明。 任取固定的 $f \in \mathrm{H}(B)$。则 $f \in \mathbb{H}_d^2 \otimes \mathrm{J}$，因此可表示为一个自由形式幂级数，

$$f = \sum_{\omega \in \mathbb{F}_d^+} \hat{f}_\omega \mathfrak{z}^\omega = \sum \hat{f}_{\omega^{\mathrm{t}}} \mathfrak{z}^{\omega^{\mathrm{t}}},$$

其中 $\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}_1, \cdots, \mathfrak{z}_d)$ 是一个由形式非交换变量构成的 d–元组，且系数 $\hat{} f_\omega \in \mathrm{J}$ 平方可和， $\sum \| \hat{} f_\omega \|_{\mathcal{J}}^2 < +\infty$。对于任意 $\alpha \in \mathbb{F}_d^+$，

$$R^{\alpha^{\mathrm{t}}*} \otimes I_{\mathcal{J}} f = \sum_{\omega \in \mathbb{F}_d^+} \hat{f}_\omega \underbrace{R^{\alpha^{\mathrm{t}}*} \mathfrak{z}^\omega}_{= R^{\alpha^{\mathrm{t}}*} R^{\omega^{\mathrm{t}}} 1},$$

其中 $R^{\alpha^{\mathrm{t}}*} R^{\omega^{\mathrm{t}}} 1$ 除非对于某个 $\beta \in \mathbb{F}_d^+$ 有 $\omega^{\mathrm{t}} = \alpha^{\mathrm{t}} \beta^{\mathrm{t}}$，否则为 0，因此

$$R^{\alpha^{\mathrm{t}}*} \otimes I_{\mathcal{J}} f = \sum_{\beta \in \mathbb{F}_d^+} \hat{f}_{\beta\alpha} R^{\beta^{\mathrm{t}}} 1 = \sum_\beta \hat{f}_{\beta\alpha} \mathfrak{z}^\beta.$$

因此，对于任意 $g \in \mathrm{J}$ 和任意 $\alpha \in \mathbb{F}_d^+$，

$$(K_0^B g)^* X^{\alpha^{\mathrm{t}}*} f = g^*(X^{*\alpha} f)(0) = g^* \hat{f}_\alpha. \tag{2.22}$$

因此我们可以计算

$$\begin{aligned}
&\left\langle [I_{\mathscr{K}(b)} \otimes u^*][I - XZ^*]^{-1}(K_0^B g \otimes x), f \right\rangle_{\mathscr{K}(B)} \\
&\qquad = \left\langle K_0^B g \otimes x, [I - X^* Z]^{-1}(f \otimes u) \right\rangle_{\mathscr{K}(B) \otimes \mathbb{C}^n} \\
&\qquad = \sum_{\alpha \in \mathbb{F}_d^+} \left\langle K_0^B g \otimes x, (X^{*\alpha} \otimes Z^\alpha)(f \otimes u) \right\rangle_{\mathscr{K}(B) \otimes \mathbb{C}^n} \\
&\qquad = \sum_{\alpha \in \mathbb{F}_d^+} x^* Z^\alpha u \left\langle K_0^B g, X^{\alpha^{\dagger}*} f \right\rangle_{\mathscr{K}(B)} \\
&\qquad = \sum_{\alpha \in \mathbb{F}_d^+} x^* Z^\alpha u \, \langle g, \hat{f}_\alpha \rangle_{\mathcal{J}_0} \\
&\qquad = \langle g \otimes x, f(Z)u \rangle_{\mathcal{J} \otimes \mathbb{C}^n} \\
&\qquad = \left\langle K^B\{Z, g \otimes x, u\}, f \right\rangle_{\mathscr{K}(B)}.
\end{aligned}$$

由于 $f \in \mathrm{H}(B)$ 的选取是任意的，我们得到（2.20）。 ∎

应用推论2.9、引理2.15和（2.19），可得 X 是 CNC .

推论 2.16. 设 $B \in \mathcal{S}_d(\mathcal{H}、\mathcal{J})$ 是一个完全等距且纯压缩（左）乘子。那么，$\mathrm{H}(B)$ 的极值 *Gleason* 解 X 是 *CNC*。

本节中，给定一个作用在复可分希尔伯特空间 H 上的 CNC 行部分等距算子 $V:\mathrm{H}\otimes\mathbb{C}^d\to\mathrm{H}$，我们将明确构造一个针对 V 的“函数”或函数论模型；V 是作用在单位行球 $\mathbb{B}_{\mathbb{N}}^d$ 上的分级函数希尔伯特空间上的算子。

3.1. 分次模型。

定义 3.1. 设 $V:\mathrm{H}\otimes\mathbb{C}^d\to\mathrm{H}$ 是一个行偏等距算子。一个关于 V 的模型三元组 $(\gamma,\mathrm{J}_\infty,\mathrm{J}_0)$ 由希尔伯特空间 J_∞ 和 J_0 以及

$$\dim\mathcal{J}_\infty=\dim\operatorname{Ker}V\quad\text{and}\quad\dim\mathcal{J}_0=\dim\operatorname{Ran}V^\perp,$$

和一个模型映射，

$$\gamma:\begin{cases}\mathbb{B}_n^d & \to\mathscr{B}(\mathcal{J}_0\otimes\mathbb{C}^n,\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^n)\\ \{\infty\} & \twoheadrightarrow\mathscr{B}(\mathcal{J}_\infty,\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d)\end{cases},$$

满足 $\gamma(\infty)$ 和 $\gamma(0)$ 分别是映 onto $\operatorname{Ker}V$ 和 $\operatorname{Ran}V^\perp$ 的等距算子，并且对每个 $Z\in\mathbb{B}_{\mathbb{N}}^d$，$\gamma(Z):\mathrm{J}_0\otimes\mathbb{C}^n\to\mathrm{H}\otimes\mathbb{C}^n$ 是线性同构，映 onto V 的 Z-缺陷空间，

$$\operatorname{Ran}\gamma(Z)=\mathcal{R}(V-Z)^\perp.$$

如果模型映射还具有如下性质：$\gamma(Z)^*:\mathrm{H}\otimes\mathbb{C}^n\to\mathrm{J}_0\otimes\mathbb{C}^n$ 是关于 $\mathbb{B}_{\mathbb{N}}^d$ 的 $\mathrm{B}(\mathrm{H},\mathrm{J}_0)$–值非交换函数，我们就称其为非交换模型映射。

注 3.2. 给定行偏等距算子 V 作用于 $\mathcal{H}$ 上，引理 2.7 表明，若 $T:\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d\to\mathcal{H}$ 是 V 的任意行压缩扩张，$V\subseteq T$(同样，这意味着 $TV^*V=V$)，则

$$[I-TZ^*]^{-1}:\operatorname{Ran}V^\perp\otimes\mathbb{C}^n\twoheadrightarrow\mathcal{R}(V-Z)^\perp$$

对每个 $Z\in\mathbb{B}_n^d$ 和 $n\in\mathbb{N}$ 都是线性同构。因此，对于每个这样的扩张 $T\supseteq V$，当其作用于 H 上时，我们得到模型映射，

$$\Gamma_T:\begin{cases}Z & \to\ [I-TZ^*]^{-1}|_{\operatorname{Ran}V^\perp\otimes\mathbb{C}^n},\ \forall Z\in\mathbb{B}_n^d\\ \infty & \to\ I_{\operatorname{Ker}V}.\end{cases},\tag{3.1}$$

以及模型三元组 $(\Gamma_T,\ \operatorname{Ker}V,\ \text{值域 }V^\perp)$。很容易验证，每个这样的 Γ_T 都是一个非交换模型映射，我们将 Γ_T 称为标准非交换模型映射。事实上，给定任意 $g\in$ 值域 $V^\perp$、$h\in\mathrm{H}$ 和 $Z\in\mathbb{B}_n^d$，

$$[h^*\otimes I_n]\Gamma_T(Z)^*[g\otimes I_n]=[h^*\otimes I_n][I_{\mathcal{H}}\otimes I_n-Z\otimes T^*]^{-1}[g\otimes I_n],\tag{3.2}$$

是一致解析非交换函数在 $\mathbb{B}_{\mathbb{N}}^d$ 中的实现公式，依照[AMS25]。最简单地，取 $T=V$，我们得到典范非交换模型映射 以及典范非交换模型三元组，$(\Gamma_V,\ \text{核 }V,\ \text{值域 }V^\perp)$。

设 $V:\mathrm{H}\otimes\mathbb{C}^d\to\mathrm{H}$ 是一个具有模型三元组 $(\gamma,\ \mathrm{J}_\infty,\ \mathrm{J}_0)$ 的行偏等距算子。对于任意 $h\in\mathrm{H}$、$W\in\mathbb{B}_n^d$ 和 $n\in\mathbb{N}$，我们定义映射 $h^\gamma(W):\mathbb{C}^n\to\mathrm{J}_0\otimes\mathbb{C}^n$ 如下

$$h^\gamma(W)v:=\gamma(W)^*(h\otimes v)\text{ for all }v\in\mathbb{C}^n.\tag{3.3}$$

现在我们考虑与 $(\gamma,\ \mathrm{J}_\infty,\ \mathrm{J}_0)$ 对应的模型空间，其定义为

$$\mathcal{H}^\gamma:=\{h^\gamma\mid h\in\mathcal{H}\}.$$

每个h^γ都可以看作一个函数$h^\gamma:\mathbb{B}_{\mathbb{N}}^d \to \mathrm{B}(\mathbb{C},\ \mathrm{J}_0)_{\mathbb{N}}$。这里，给定一个希尔伯特空间 J，我们定义 $\mathrm{J}_n := \mathrm{J}\otimes\mathbb{C}^{n\times n}$、$\mathrm{J}_{\mathbb{N}} := \bigsqcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{J}_n$，以及

$$\mathscr{B}(\mathbb{C},\mathcal{J})_{\mathbb{N}} := \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{B}(\mathbb{C}^n,\mathcal{J}\otimes\mathbb{C}^n) \cong \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{B}(\mathbb{C},\mathcal{J})\otimes\mathbb{C}^{n\times n} \cong \mathcal{J}_{\mathbb{N}}. \tag{3.4}$$

换言 之，H^γ是一个由从 $\mathbb{B}_{\mathbb{N}}^d$ 到 $\mathrm{J}_{0\mathbb{N}}$的分次函数构成的希尔伯特空间。

命题 3.3. 设 $V:\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d \to \mathcal{H}$ 是一个带有模型三元组$(\gamma,\mathcal{J}_\infty,\mathcal{J}_0)$的行偏等距算子。映射 $\mathcal{U}^\gamma:\mathcal{H}\to\mathcal{H}^\gamma$ 定义为

$$\mathcal{U}^\gamma h := h^\gamma \text{ for all } h\in\mathcal{H}$$

当且仅当 V 是 *CNC* 时，它是线性同构。若 V 是 *CNC*，则赋予推前内积后，$\mathcal{H}^\gamma$ 是一个希尔伯特空间：

$$\langle h^\gamma, g^\gamma\rangle_{\mathcal{H}^\gamma} := \langle h,g\rangle_{\mathcal{H}} \text{ for all } h^\gamma, g^\gamma\in\mathcal{H}^\gamma,$$

且$\mathcal{U}^\gamma:\mathcal{H}\twoheadrightarrow\mathcal{H}^\gamma$是满射等距映射。在这种情况下，$\mathcal{H}^\gamma$是一个定义在 $\mathbb{B}_{\mathbb{N}}^d$上的取值于$\mathcal{J}_{0\mathbb{N}}$的分次函数希尔伯特空间。

证明。 只需确定 U^γ的单射性，因为根据定义它是满射。为此，固定$h\in\mathrm{H}$，并注意，对于每个$W\in\mathbb{B}_n^d$和 $n\in\mathbb{N}$，我们有

$$\begin{aligned}
h\in\operatorname{Ker}\mathcal{U}^\gamma &\Leftrightarrow h^\gamma(W)\equiv 0\\
&\Leftrightarrow \langle g\otimes x, h^\gamma(W)u\rangle_{\mathcal{J}_0\otimes\mathbb{C}^n}=0, && \forall x,u\in\mathbb{C}^n \text{ and } g\in\mathcal{J}_0,\\
&\Leftrightarrow \langle g\otimes x, \gamma(W)^*(h\otimes u)\rangle_{\mathcal{J}_0\otimes\mathbb{C}^n}=0, && \forall x,u\in\mathbb{C}^n \text{ and } g\in\mathcal{J}_0,\\
&\Leftrightarrow \left\langle [I_{\mathcal{H}}\otimes u^*]\gamma(W)(g\otimes x), h\right\rangle_{\mathcal{H}}=0, && \forall x,u\in\mathbb{C}^n \text{ and } g\in\mathcal{J}_0.
\end{aligned}$$

由于$W\in\mathbb{B}_n^d$和 $n\in\mathbb{N}$ 是任意选取的，这意味着

$$h\in\operatorname{Ker}\mathcal{U}^\gamma \Leftrightarrow h\perp \bigvee_{\substack{u\in\mathbb{C}^n,\ Z\in\mathbb{B}_n^d,\\ n\in\mathbb{N}}} [I_{\mathcal{H}}\otimes u^*]\operatorname{Ran}\gamma(Z).$$

特别地，(2.10)意味着 $\operatorname{Ker}\mathcal{U}^\gamma = \mathcal{H}'^{\perp}$。由定理 2.8 可得$\mathcal{U}^\gamma$ 是单射，当且仅当 V 是 CNC。其余结论可由此观察轻易得出。 ∎

注 3.4。 对于如上定义 3.1 中所定义的任意行偏等距算子 V，模型映射 γ 不一定保持直和或联合相似变换。因此，相应的模型空间 H^γ 不一定是由非交换函数构成的希尔伯特空间。不过，我们将看到，对于任意 $Z\in\mathbb{B}_n^d$, $y,v\in\mathbb{C}^n$和 $g\in\mathrm{J}_0$,，线性泛函 $l_{Z,g\otimes y,v}:\mathrm{H}^\gamma\to\mathbb{C}$ 定义为

$$\ell_{Z,g\otimes y,v}(h^\gamma) := \langle g\otimes y, h^\gamma(Z)v\rangle_{\mathcal{J}_0\otimes\mathbb{C}^n},$$

有界。因此，H^γ确实由定义在非交换单位行球上的 J_0–值函数组成，这些函数按如下意义分次：对任意 $Z\in\mathbb{B}_n^d$，分次 函数$h^\gamma(Z)\in\mathrm{J}_0\otimes\mathbb{C}^{n\times n}$，并且在上述意义下构成一个再生核希尔伯特空间。我们称 H^γ 为 $\mathbb{B}_{\mathbb{N}}^d$上的分次再生核希尔伯特空间 。也就是说，对每个 $Z, g\otimes y$ 以及上述的 v，根据里斯引理，存在唯一的 $K^\gamma\{Z,g\otimes y,v\}\in\mathrm{H}^\gamma$，使得

$$\ell_{Z,g\otimes y,v}(h^\gamma) = \langle K^\gamma\{Z,g\otimes y,v\}, h^\gamma\rangle_{\mathcal{H}^\gamma}.$$

我们还将像非交换再生核希尔伯特空间的情形一样，为 H^γ 定义分次再生核：对每个 $Z \in \mathbb{B}_m^d$ y, $v \in \mathbb{C}^m$, $W \in \mathbb{B}_n^d$, $x, u \in \mathbb{C}^n$ 以及 $f, g \in \mathrm{J}0$, $K^\gamma(Z,W)$ $[\cdot]$: $\mathbb{C}^{m\times n} \to \mathrm{B}(\mathrm{J}_0) \otimes \mathbb{C}^{m\times n}$ 是由下式定义的线性映射

$$f^* \otimes y^* K^\gamma(Z,W)[vu^*]g \otimes x := \langle K^\gamma\{Z, f\otimes y, v\}, K^\gamma\{W, g\otimes x, u\}\rangle_{\mathcal{H}^\gamma}.$$

若 γ 是一个非交换模型，例如用于 $T \supseteq V$ 的标准非交换模型之一 Γ_T，或典范 NC 模型 $\gamma = \Gamma_V$，则很容易验证，任意 $h^\gamma \in \mathrm{H}^\gamma$ 都是一个取值于 J_0- 的非交换函数，而 $\mathrm{H}^\gamma = \mathrm{H}_{nc}(K^\gamma)$ 将是一个由取值于 J_0- 的非交换函数构成的非交换再生核希尔伯特空间。

现在，我们通过将 H^γ 实现为一个由取值于 $\mathrm{J}_{0\mathbb{N}}$ 的分次函数构成的再生核希尔伯特空间，来探讨它的函数论性质。

命题 3.5. 对于任意给定的 $W \in \mathbb{B}_n^d$、x、$u \in \mathbb{C}^n$、$n \in \mathbb{N}$ 和 $g \in \mathcal{J}_0$,，令

$$K^\gamma\{W, g\otimes x, u\} := [\mathcal{U}^\gamma \otimes u^*]\gamma(W)(g\otimes x) \in \mathcal{H}^\gamma. \tag{3.5}$$

那么，对于所有 $h^\gamma \in \mathcal{H}^\gamma$，有

$$\langle K^\gamma\{W, g\otimes x, u\}, h^\gamma\rangle_{\mathcal{H}^\gamma} = \langle g\otimes x, h^\gamma(W)u\rangle_{\mathcal{J}_0\otimes\mathbb{C}^n}. \tag{3.6}$$

特别地，对于每个 $W \in \mathbb{B}_n^d$ 和 $n \in \mathbb{N}$，由 $\Lambda_W h^\gamma := h^\gamma(W)$ 给出的求值映射 $\Lambda_W : \mathcal{H}^\gamma \to \mathrm{B}(\mathbb{C}^n, \mathcal{J}_0 \otimes \mathbb{C}^n)$ 是有界的。

在上述命题的陈述中，算子 $[U^\gamma \otimes u^*]$ 定义为以下复合映射：$U^\gamma[I_\mathcal{H} \otimes u^*]$，其中 $I_\mathcal{H} \otimes u^* : \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^n \to \mathcal{H}$ 是式（2.9）中定义的线性张量映射。

证明。 设 $K^\gamma\{W, g\otimes x, u\}$ 如假设所述。于是，利用式（2.9），对每个 $h^\gamma \in \mathcal{H}^\gamma$,

$$\begin{aligned}\left\langle K^\gamma\{W, g\otimes x, u\}, h^\gamma\right\rangle_{\mathcal{H}^\gamma} &= \left\langle [U^\gamma \otimes u^*]\gamma(W)(g\otimes x), U^\gamma h\right\rangle_{\mathcal{H}^\gamma}\\ &= \langle \gamma(W)g\otimes x, [I_\mathcal{H}\otimes u]h\rangle_\mathcal{H}\\ &= \langle g\otimes x, \gamma(W)^*(h\otimes u)\rangle_{\mathcal{J}_0\otimes\mathbb{C}^n}\\ &= \langle g\otimes x, h^\gamma(W)u\rangle_{\mathcal{J}_0\otimes\mathbb{C}^n}.\end{aligned}$$

因此，式（3.6）成立。最后的断言由上文立即得出。 ∎

映射 $K^\gamma\{W, g\otimes x, u\}$ 将称为 H^γ 的核函数。

定理 3.6。 若 V 是 CNC，则 $\mathcal{H}^\gamma$ 是一个分级再生核希尔伯特空间，其元素为取值于 $\mathcal{J}_{0\mathbb{N}}$ 的分级函数，定义在 $\mathbb{B}_\mathbb{N}^d$ 上，具有分次核 K^γ: $\mathbb{B}_\mathbb{N}^d \times \mathbb{B}_\mathbb{N}^d \to \mathrm{B}(\mathbb{C}, \mathrm{B}(\mathcal{J}_0))_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$，其定义如下：

$$K^\gamma(Z,W)[A] := \gamma(Z)^*[I_\mathcal{H}\otimes A]\gamma(W), \tag{3.7}$$

对每个 $Z \in \mathbb{B}_n^d$、$W \in \mathbb{B}_m^d$、$A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 和 n、$m \in \mathbb{N}$。

分次　　分次函数再生核希尔伯特空间的核，定义于 $\mathbb{B}_\mathbb{N}^d$，见备注3。　　4.

证明。 对于每一对核函数 $K^\gamma\{Z,\ f\otimes y,\ v\}$ 和 $K^\gamma\{W,\ g\otimes x,\ u\}$ 满足 $Z \in \mathbb{B}_n^d$，$W \in \mathbb{B}_m^d$，$m,\ n \in \mathbb{N}$ 且 $f,\ g \in \mathcal{J}_0$,，我们使用张量映射（2.9）得到

$$\begin{aligned}\langle K^\gamma\{Z, f\otimes y, v\}, K^\gamma\{W, g\otimes x, u\}\rangle_{\mathcal{H}^\gamma} &= \left\langle [\mathcal{U}^\gamma \otimes v^*]\gamma(Z)(f\otimes y), [\mathcal{U}^\gamma \otimes u^*]\gamma(W)(g\otimes x)\right\rangle_{\mathcal{H}^\gamma}\\ &= \left\langle f\otimes y, \gamma(Z)^*[I_\mathcal{H}\otimes vu^*]\gamma(W)(g\otimes x)\right\rangle_{\mathcal{J}_0\otimes\mathbb{C}^n}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

这意味着（3.7），因为 $K^\gamma(Z,W)$ 对所有 $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 的作用，都由其对秩一矩阵 vu^* 的作用决定，其中 $v \in \mathbb{C}^n, u \in \mathbb{C}^m$。

最后，我们需要证明

$$\mathcal{H}^\gamma = \widehat{\mathcal{H}}(K) := \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \{K^\gamma\{Z, f\otimes y, v\} |\, Z\in\mathbb{B}_n^d,\ y,v\in\mathbb{C}^n,\ f\in\mathcal{J}_0\}.$$

然而，这可由（3.6）及命题 3.3 得出，因为 $h^\gamma \in \mathcal{H}(K)^\perp$ 意味着 $h^\gamma(W) = 0$ 对所有 $W\in\mathbb{B}_{\mathbb{N}}^d$ 均成立。证明完毕。 ∎

3.2. **右移作用**。本节最后记录 CNC 行偏等距算子在 U^γ 作用下如何变换，其中该算子为 V。首先，对每个 $\mathbf{h}^\gamma \in \mathrm{H}^\gamma\otimes\mathbb{C}^d$ 和 $Z\in\mathbb{B}_{\mathbb{N}}^d$，我们定义右移 作用

$$M_Z^R\mathbf{h}^\gamma(Z) := \sum_{j=1}^d h_j^\gamma(Z)Z_j.$$

根据定义，不清楚上述方程右侧何时属于 H^γ。我们将在下一个命题中解决这一问题。

命题 3.7. 若 $\widehat{V} := \mathcal{U}^\gamma V[\mathcal{U}^{\gamma *}\otimes I_d] : \mathcal{H}^\gamma\otimes\mathbb{C}^d \to \mathcal{H}^\gamma$ 则，

$$\widehat{V}|_{\operatorname{Ker}\widehat{V}^\perp} = M_Z^R. \tag{3.9}$$

此外，$\widehat{V}|_{\operatorname{Ker}\widehat{V}^\perp}$ 是一个等距算子，并且

$$\operatorname{Ran}\widehat{V} = \{h^\gamma\in\mathcal{H}^\gamma \mid h^\gamma(0) = 0\}. \tag{3.10}$$

证明。固定 $\mathbf{h}^\gamma\in\operatorname{Ker}\widehat{V}^\perp$，$Z\in\mathbb{B}_n^d$ 并且 $v\in\mathbb{C}^n$ 对于某个 $n\in\mathbb{N}$，记 $\mathbf{h} := (\mathcal{U}^{\gamma *}\otimes I_d)\mathbf{h}^\gamma$。利用（3.3），注意到

$$\begin{aligned}
\widehat{V}\mathbf{h}^\gamma(Z)v &= [\mathcal{U}^\gamma V\mathbf{h}](Z)v\\
&= \gamma(Z)^*(V\mathbf{h}\otimes v)\\
&= \gamma(Z)^*[V\otimes I_n](\mathbf{h}\otimes v)\\
&= \gamma(Z)^*[V\otimes I_n - I_\mathcal{H}\otimes Z](\mathbf{h}\otimes v) + \gamma(Z)^*[I_\mathcal{H}\otimes Z](\mathbf{h}\otimes v).
\end{aligned}$$

由于 $\mathbf{h}\in\operatorname{Ker}V^\perp =$ 值域 V^*V，由（2.3）可知

$$[V\otimes I_n - I_\mathcal{H}\otimes Z](\mathbf{h}\otimes v)\in\mathcal{R}(V-Z)$$

因此，上面的第一个加项为 0。这里，$[I_\mathcal{H}\otimes Z] : \mathrm{H}\otimes\mathbb{C}^d\otimes\mathbb{C}^n \to \mathrm{H}\otimes\mathbb{C}^n$ 是通过以下方式定义的映射

$$[I_\mathcal{H}\otimes Z]\begin{bmatrix} h_1\otimes v_1\\ \vdots\\ h_d\otimes v_d\end{bmatrix} = \sum_{j=1}^d h_j\otimes Z_jv_j,\ \text{for all } h_j\in\mathcal{H},\ v_j\in\mathbb{C}^n,\ 1\le j\le d.$$

接着继续上述计算，得到（3.9），如下所示：

$$\widehat{V}\vec{h^\gamma}(Z)v = \gamma(Z)^*[I_\mathcal{H}\otimes Z](\mathbf{h}\otimes v) = \gamma(Z)^*\sum_{j=1}^d h_j\otimes Z_jv = \sum_{j=1}^d h_j^\gamma(Z)Z_jv = M_Z^R\mathbf{h}^\gamma(Z)v.$$

这 V 在 Ker 上是等距算子 $V^\perp$ 这一点可由以下事实得出：V 在 Ker 上是等距算子 $V^\perp$，且 $\mathcal{U}^\gamma$ 是酉算子。最后，为了证明（3.10），注意，任意满足 $h^\gamma\in\mathcal{H}^\gamma$ 且 $h^\gamma(0) = 0$ 的元素，都对应于一个 $h\in$ 值域 V 中的元素，其对应关系由 $\mathcal{U}^\gamma$ 和（3.3）给出。由此对应关系可轻易推出方程（3.10）。 ∎

注 3.8。尽管 V 在其初始空间上等同于右乘 Z，但根据上述命题，它不能在整个空间 H^{γ}上等同于右乘 Z。这是因为，正如我们将在第 3.3 节中最终看到的，V 与 X酉等价；后者是列极值（CE）压缩算子值乘子 $B \in \mathcal{S}_d(\mathrm{J}_\infty, \mathrm{J}_0)$ 的极值 Gleason 解，该乘子作用于向量值自由 Hardy 空间之间，并通过酉左乘算子 $M_f^L \colon \mathrm{H}^{\gamma} \twoheadrightarrow \mathrm{H}(B)$ 实现。任意压缩（且算子值）左乘子 B的压缩 Gleason 解 X，恰好是右后向移位 $X^* := [R^* \otimes I_{\mathcal{J}_0}]|_{\mathscr{K}(B)}$的限制；由于 B 是 CE，根据 JM20 定理 6.4],，不存在使得 $B1 \otimes g \in \mathrm{H}(B)$ 的 $g \in \mathrm{J}_\infty$。因此，根据 JM20 推论 6.14]，不存在满足$R_j \otimes I_{\mathcal{J}_0}\mathrm{h} \in \mathrm{H}(B)$ 的 $\mathrm{h} \in \mathrm{H}(B)$，对任意 $1 \le j \le d$皆如此。于是，V不可能等于右乘 Z，否则 X 也会等同于右乘 Z，这与 B 是 CE 相矛盾。

引理 3.9。对于任意核函数 $K^{\gamma}\{W、\ g \otimes x、\ u\}$，

$$\widehat{V}^* K^{\gamma}\{W, g \otimes x, u\} = (I_{\mathcal{H}^{\gamma} \otimes \mathbb{C}^d} - P_\infty) \begin{bmatrix} K^{\gamma}\{W, g \otimes x, W_1 u\} \\ \vdots \\ K^{\gamma}\{W, g \otimes x, W_d u\} \end{bmatrix} = K^{\gamma}\{W, g \otimes x, \mathrm{col}(W)u\}.$$

证明。令 $\mathbf{f}^{\gamma} \in \mathrm{H}^{\gamma} \otimes \mathbb{C}^d$ 为固定但任意的，并令

$$\mathbf{h}^{\gamma} := (I_{\mathcal{H}^{\gamma} \otimes \mathbb{C}^d} - P_\infty)\mathbf{f}^{\gamma} \in \operatorname{Ker} \widehat{V}^{\perp}.$$

那么，注意到由于 V 在其初始空间上充当 Z 的右乘，

$$\begin{aligned}
\left\langle \widehat{V}^* K^{\gamma}\{W, g \otimes x, u\}, \mathbf{h}^{\gamma} \right\rangle_{\mathcal{H}^{\gamma} \otimes \mathbb{C}^d} &= \left\langle K^{\gamma}\{W, g \otimes x, u\}, \widehat{V}\mathbf{h}^{\gamma} \right\rangle_{\mathcal{H}^{\gamma}} \\
&= \sum_{j=1}^{d} \left\langle g \otimes x, \mathbf{h}_j^{\gamma}(W) W_j u \right\rangle_{\mathcal{J}_0 \otimes \mathbb{C}^n} \\
&= \sum_{j=1}^{d} \left\langle K^{\gamma}\{W, g \otimes x, W_j u\}, \mathbf{h}_j^{\gamma} \right\rangle_{\mathcal{H}^{\gamma}} \\
&= \left\langle \begin{bmatrix} K^{\gamma}\{W, g \otimes x, W_1 u\} \\ \vdots \\ K^{\gamma}\{W, g \otimes x, W_d u\} \end{bmatrix}, \mathbf{h}^{\gamma} \right\rangle_{\mathcal{H}^{\gamma} \otimes \mathbb{C}^d} \\
&= \left\langle (I_{\mathcal{H}^{\gamma} \otimes \mathbb{C}^d} - P_\infty) K^{\gamma}\{W, g \otimes x, \mathrm{col}(W)u\}, \mathbf{f}^{\gamma} \right\rangle_{\mathcal{H}^{\gamma} \otimes \mathbb{C}^d}.
\end{aligned}$$

证明完毕。 ∎

3.3. **特征函数**。在本小节中，我们分析 K^{γ} 定理 3.6 中引入的分次再生核，并证明从我们的模型子空间 $\mathcal{H}^{\gamma}$到一个非交换 de Branges–Rovnyak 空间存在酉左乘子。我们首先为任意 CNC 行部分等距算子的模型三元组构造 NC Schur 类特征函数。回顾（3.4），我们定义

$$\mathscr{B}(\mathcal{J}, \mathcal{K})_{\mathbb{N}} = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}(\mathcal{J}, \mathcal{K}) \otimes \mathbb{C}^{n \times n}.$$

定义 3.10。 给定一个 CNC 行部分等距算子 $V : \mathrm{H} \otimes \mathbb{C}^d \to \mathrm{H}$ 及其模型三元组（γ，J_∞，J_0），定义分次映射 $D^\gamma\colon \mathbb{B}_{\mathbb{N}}^d \to \mathrm{B}(\mathrm{J}_0)_{\mathbb{N}}$和 $N^\gamma\colon \mathbb{B}_{\mathbb{N}}^d \to \mathrm{B}(\mathrm{J}_\infty, \mathrm{J}_0)_{\mathbb{N}}$为

$$D^\gamma(Z) := \gamma(Z)^*[\gamma(0) \otimes I_n],$$
$$N^\gamma(Z) := \gamma(Z)^*[I_{\mathcal{H}} \otimes Z][\gamma(\infty) \otimes I_n].$$

于是，特征映射 $B^\gamma\colon \mathbb{B}_{\mathbb{N}}^d \to \mathrm{B}(\mathrm{J}_\infty, \mathrm{J}_0)_{\mathbb{N}}$ 定义为

$$B^\gamma(Z) := D^\gamma(Z)^{-1} N^\gamma(Z), \tag{3.11}$$

并且显然满足 $B^\gamma(0) = 0$。

可逆性 $D^\gamma(Z)$ 并非显而易见，需要在（3.11）中加以证明。

引理 3.11。 分次函数 $D^\gamma(Z)$ 对每个 $Z \in \mathbb{B}_n^d$ 和 $n \in \mathbb{N}$ 都可逆。

证明。 固定 $n \in \mathbb{N}$ 和 $Z \in \mathbb{B}_n^d$。只需证明，对于每个这样的 Z， $D^\gamma(Z)$ 都是双射。首先，假设存在一个 $0 \neq \widehat{g} \in \operatorname{Ker} D^\gamma(Z)^*$。由于

$$\gamma(Z)\widehat{g} \in \operatorname{Ran} \gamma(Z) = \mathcal{R}(V - Z)^\perp$$

并且 $\gamma(0)$是到值域 $V^\perp$上的等距算子，因此我们使用引理 2.7得出存在

$\frown$ $\frown 0 \neq f \in \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^n$使得 $[\gamma(0) \otimes I_n]f \in$值域 $V^\perp \otimes \mathbb{C}^n$并且

$$\gamma(Z)\widehat{g} = [I - VZ^*]^{-1}[\gamma(0) \otimes I_n]\widehat{f}.$$

然后，注意到

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \widehat{f}, D^\gamma(Z)^*\widehat{g} \right\rangle_{\mathcal{J}_0 \otimes \mathbb{C}^n} \\ &= \left\langle [\gamma(0) \otimes I_n]\widehat{f}, \gamma(Z)\widehat{g} \right\rangle_{\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^n} \\ &= \left\langle [\gamma(0) \otimes I_n]\widehat{f}, [I - VZ^*]^{-1}[\gamma(0) \otimes I_n]\widehat{f} \right\rangle_{\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^n} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \left\langle [\gamma(0) \otimes I_n]\widehat{f}, [VZ^*]^k[\gamma(0) \otimes I_n]\widehat{f} \right\rangle_{\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^n}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

回忆 $\widehat{f}$ is $\frown$选取为使得 $[\gamma(0) \otimes I_n]f \in$值域 $V^\perp \otimes \mathbb{C}^n$。然而，对于 $k > 0$我们有

$$[VZ^*]^k[\gamma(0) \otimes I_n]\widehat{f} \in \operatorname{Ran} V \otimes \mathbb{C}^n.$$

由（3.12）继续推导，我们因此得到

$$0 = \left\langle [\gamma(0) \otimes I_n]\widehat{f}, [\gamma(0) \otimes I_n]\widehat{f} \right\rangle_{\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^n},$$

$\frown$这是一个矛盾，因为 $f \neq 0$ 且 $\gamma(0)$ 是等距算子。因此我们得出 $\operatorname{Ker} D^\gamma(Z)^* = \{0\}$，从而 $D^\gamma(Z)$ 具有稠密值域。（如果 $\dim \mathrm{J}_0 < +\infty$，这足以证明 $D^\gamma(Z)$ 是可逆的。）

我们进一步断言， $D^\gamma(Z)$ 有下界，因此它具有闭值域，进而是满射的。否则，存在一个单位向量序列（g_n） $\subseteq \mathrm{J}_0 \otimes \mathbb{C}^n$, $\|g_n\|_{\mathcal{J}_0 \otimes \mathbb{C}^n} = 1$，使得 $\|D^\gamma(Z)g_n\| \to 0$。令

$$G_n := [\gamma(0) \otimes I_n]g_n,$$

我们有 $\|G_n\| = 1$，因为 $\gamma(0)$ 是一个等距算子。利用 $\gamma(Z) : \mathrm{J}_0 \otimes \mathbb{C}^n \twoheadrightarrow \mathrm{R}(V - Z)^\perp$ 和 $[I - VZ^*]\colon \mathrm{R}(V - Z)^\perp \to \operatorname{Ran} V^\perp \otimes \mathbb{C}^n$ 是线性同构这一点，若选取 $H_n \in \mathrm{R}(V - Z)^\perp$ 和 $h_n \in \mathrm{J}_0 \otimes \mathbb{C}^n$，使得

$$[I - VZ^*]H_n = G_n \quad \text{and} \quad \gamma(Z)h_n = H_n,$$

那么序列 (H_n)、(h_n) 的范数均被严格正常数一致地从上、下界住。特别地，存在 C， $c>0$，使得

$$\|h_n\| \le C \quad \text{and} \quad \|H_n\| \ge c.$$

于是，

$$\begin{aligned} C\|D^\gamma(Z)g_n\| &\ge \langle H_n, D^\gamma(Z)g_n\rangle = \langle \gamma(Z)h_n, \gamma(0)\otimes I_n g_n\rangle = \langle H_n, G_n\rangle \\ &= \langle H_n, [I - VZ^*]H_n\rangle = \langle H_n, [I - ZV^*VZ^* - (V-Z)V^*VZ^*]H_n\rangle \\ &= \langle H_n, [I - ZV^*VZ^*]H_n\rangle \qquad (\because H_n \perp \mathscr{R}(V-Z).) \\ &\ge (1 - \|Z\|_{\text{row}}^2)\|H_n\|^2 \ge (1-\|Z\|_{\text{row}}^2)c. \end{aligned}$$

这就产生了矛盾，因为该方程左端在极限下趋于零，因此我们得出 $D^\gamma(Z)$ 是满射。

下面证明单射性。现在假设存在 $0 \neq f \in \operatorname{Ker} D^\gamma(Z)$。由于$\gamma(0)$ 是到值域 $V^\perp \otimes \mathbb{C}^n$ 上的等距算子，因此

$$0 \neq [\gamma(0)\otimes I_n]\widehat{f} \in (\operatorname{Ran} V^\perp \otimes \mathbb{C}^n) \cap \operatorname{Ker}\gamma(Z)^* = (\operatorname{Ran} V^\perp \otimes \mathbb{C}^n) \cap \operatorname{Ran}\gamma(Z)^\perp.$$

Now，我们再次使用引理 2.7 得到 $0 \neq \widehat{g} \in \mathscr{R}(V-Z)^\perp$ 使得

$$[\gamma(0)\otimes I_n]\widehat{f} = [I - VZ^*]\widehat{g}.$$

因此，我们注意到对每个 $h \in \mathcal{J}_0 \otimes \mathbb{C}^n$，都有

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \gamma(Z)\widehat{h}, [\gamma(0)\otimes I_n]\widehat{f}\right\rangle_{\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^n} \\ &= \left\langle \gamma(Z)\widehat{h}, [I - VZ^*]\widehat{g}\right\rangle_{\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^n} \\ &= \left\langle \gamma(Z)\widehat{h}, [I - (VZ^*)^*VZ^*]\widehat{g}\right\rangle_{\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^n} - \underbrace{\left\langle \gamma(Z)\widehat{h}, \overbrace{[(V-Z)V^*V](Z^*\widehat{g})}^{\in \mathscr{R}(V-Z)}\right\rangle_{\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^n}}_{=0,\ \text{as } \operatorname{Ran}\gamma(Z) = \mathscr{R}(V-Z)^\perp} \\ &= \left\langle \gamma(Z)\widehat{h}, [I - (VZ^*)^*VZ^*]\widehat{g}\right\rangle_{\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^n}. \end{aligned}$$

由于值域 $\gamma(Z) = \operatorname{Ran}(V-Z)^\perp$，我们可以选择上面的 h 使得 $\gamma(Z)h = \widehat{g}$。因此，上面的最后一个等式导致矛盾，因为

$$\left\langle \widehat{g}, [I - (VZ^*)^*VZ^*]\widehat{g}\right\rangle_{\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^n} \ge (1 - \|Z\|_{\text{row}}^2)\|\widehat{g}\|^2 > 0.$$

因此，$\operatorname{Ker} D^\gamma(Z) = \{0\}$，证明完毕。 ∎

现在我们可以证明本小节的主要结果了。

定理 3.12。 分次再生核希尔伯特空间 $\mathcal{H}^\gamma$ 的分次再生核 K^γ 可以表示为 *s*

$$\begin{aligned} K^\gamma(Z,W)[A] &= D^\gamma(Z)\left[I_{\mathcal{J}_0}\otimes K(Z,W)[A]\right]D^\gamma(W)^* - N^\gamma(Z)\left[I_{\mathcal{J}_\infty}\otimes K(Z,W)[A]\right]N^\gamma(W)^* \\ &= D^\gamma(Z)\left\{\left[I_{\mathcal{J}_0}\otimes K(Z,W)[A]\right] - B^\gamma(Z)\left[I_{\mathcal{J}_\infty}\otimes K(Z,W)[A]\right]B^\gamma(W)^*\right\}D^\gamma(W)^*, \end{aligned} \tag{3.13}$$

其中， K 表示 $\mathbb{H}_d^2$的非交换 *Szeg¨o* 核，而 $Z \in \mathbb{B}_n^d$、 $W \in \mathbb{B}_m^d$、 $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 和 $n \in \mathbb{N}$ 均为任意的。因此， B^γ 是定义在 $\mathbb{B}_{\mathbb{N}}^d$上的一个压缩的$\mathrm{B}(\mathcal{J}_\infty, \mathcal{J}_0)$值分次映射。

证明。 我们定义投影

$$P_0 := P_{\operatorname{Ran}\widehat{V}^\perp} = \mathcal{U}^\gamma\gamma(0)\gamma(0)^*\mathcal{U}^{\gamma *}, \tag{3.14}$$

$$P_\infty := P_{\operatorname{Ker}\widehat{V}} = [\mathcal{U}^\gamma \otimes I_d]\gamma(\infty)\gamma(\infty)^*[\mathcal{U}^{\gamma *} \otimes I_d]. \tag{3.15}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }\widehat{\ }$由于 V是偏等距算子，因此可得 $VV^* = P_{\operatorname{Ran}\widehat{V}}$，从而

$$\widehat{V}\widehat{V}^* = I_{\mathcal{H}^\gamma} - P_0. \tag{3.16}$$

我们打算用两种方法计算任意两个核函数的内积:

$$Q = \langle K^\gamma\{Z, f \otimes y, v\}, \widehat{V}\widehat{V}^* K^\gamma\{W, g \otimes x, u\}\rangle_{\mathcal{H}^\gamma}$$

首先，我们使用（3.16），并注意到

$$\begin{aligned} Q &= \langle K^\gamma\{Z, f \otimes y, v\}, (I_{\mathcal{H}^\gamma} - P_0)K^\gamma\{W, g \otimes x, u\}\rangle_{\mathcal{H}^\gamma} \\ &= \underbrace{\langle K^\gamma\{Z, f \otimes y, v\}, K^\gamma\{W, g \otimes x, u\}\rangle_{\mathcal{H}^\gamma}}_{Q_1} - \underbrace{\langle K^\gamma\{Z, f \otimes y, v\}, P_0 K^\gamma\{W, g \otimes x, u\}\rangle_{\mathcal{H}^\gamma}}_{Q_2}. \end{aligned}$$

接下来，我们应用引理 3.9来计算

$$\begin{aligned} Q &= \left\langle \widehat{V}^* K^\gamma\{Z, f \otimes y, v\}, \widehat{V}^* K^\gamma\{W, g \otimes x, u\}\right\rangle_{\mathcal{H}^\gamma \otimes \mathbb{C}^d} \\ &= \left\langle K^\gamma\{Z, f \otimes y, \operatorname{col}(Z)v\}, (I_{\mathcal{H}^\gamma \otimes \mathbb{C}^d} - P_\infty)K^\gamma\{W, g \otimes x, \operatorname{col}(W)u\}\right\rangle_{\mathcal{H}^\gamma \otimes \mathbb{C}^d} \\ &= \underbrace{\langle K^\gamma\{Z, f \otimes y, \operatorname{col}(Z)v\}, K^\gamma\{W, g \otimes x, \operatorname{col}(W)u\}\rangle_{\mathcal{H}^\gamma \otimes \mathbb{C}^d}}_{Q_3} \\ &\quad - \underbrace{\langle K^\gamma\{Z, f \otimes y, \operatorname{col}(Z)v\}, P_\infty K^\gamma\{W, g \otimes x, \operatorname{col}(W)u\}\rangle_{\mathcal{H}^\gamma \otimes \mathbb{C}^d}}_{Q_4}. \end{aligned}$$

让我们化简 每一个 Q_j。应用（3.8）以及 K（Z, W 的可逆性可得 s

$$\begin{aligned} Q_1 - Q_3 &= \left\langle f \otimes y, K^\gamma(Z, W)[vu^*](g \otimes x)\right\rangle_{\mathcal{J}_0 \otimes \mathbb{C}^n} - \sum_{j=1}^{d} \left\langle f \otimes v, K^\gamma(Z, W)[Z_j(vu^*)W_j^*](g \otimes x)\right\rangle \\ &= \left\langle f \otimes y, K^\gamma(Z, W)\left[K^{-1}(Z, W)[vu^*]\right](g \otimes x)\right\rangle_{\mathcal{J}_0 \otimes \mathbb{C}^n}. \end{aligned}$$

接下来，我们利用（3.5）和（3.14）得到

$$\begin{aligned} Q_2 &= \left\langle [\mathcal{U}^\gamma \otimes v^*]\gamma(Z)(f \otimes y), \mathcal{U}^\gamma\gamma(0)\gamma(0)^*\mathcal{U}^{\gamma *}[\mathcal{U}^\gamma \otimes u^*]\gamma(W)(g \otimes x)\right\rangle_{\mathcal{H}^\gamma} \\ &= \left\langle f \otimes y, \gamma(Z)^*[I_{\mathcal{H}} \otimes v^*]^*\gamma(0)\gamma(0)^*[I_{\mathcal{H}} \otimes u^*]\gamma(W)(g \otimes x)\right\rangle_{\mathcal{J}_0 \otimes \mathbb{C}^n} \\ &= \left\langle f \otimes y, \gamma(Z)^*[\gamma(0) \otimes I_n][I_{\mathcal{J}_0} \otimes (v \otimes u^*)][\gamma(0) \otimes I_n]^*\gamma(W)(g \otimes x)\right\rangle_{\mathcal{J}_0 \otimes \mathbb{C}^n} \\ &= \left\langle f \otimes y, D^\gamma(Z)[I_{\mathcal{J}_0} \otimes (v \otimes u^*)]D^\gamma(W)^*(g \otimes x)\right\rangle_{\mathcal{J}_0 \otimes \mathbb{C}^n}. \end{aligned}$$

最后，利用（3.5）和（3.15），我们可以计算

$$
\begin{aligned}
Q_4 &= \left\langle \begin{bmatrix} [\mathcal{U}^\gamma \otimes v^* Z_1^*]\gamma(Z)(f\otimes y) \\ \vdots \\ [\mathcal{U}^\gamma \otimes v^* Z_d^*]\gamma(Z)(f\otimes y) \end{bmatrix}, \mathcal{U}^\gamma \otimes I_d\, \gamma(\infty)\gamma(\infty)^*\, \mathcal{U}^{\gamma *} \otimes I_d \begin{bmatrix} [\mathcal{U}^\gamma \otimes u^* W_1^*]\gamma(W)(g\otimes x) \\ \vdots \\ [\mathcal{U}^\gamma \otimes u^* W_d^*]\gamma(W)(g\otimes x) \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}^\gamma \otimes \mathbb{C}^d} \\
&= \left\langle \begin{bmatrix} [I_{\mathcal{H}} \otimes v^* Z_1^*]\gamma(Z)(f\otimes y) \\ \vdots \\ [I_{\mathcal{H}} \otimes v^* Z_d^*]\gamma(Z)(f\otimes y) \end{bmatrix}, \gamma(\infty)\gamma(\infty)^* \begin{bmatrix} [I_{\mathcal{H}} \otimes u^* W_1^*]\gamma(W)(g\otimes x) \\ \vdots \\ [I_{\mathcal{H}} \otimes u^* W_d^*]\gamma(W)(g\otimes x) \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d} \\
&= \left\langle [I_{\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d} \otimes v^*][I_{\mathcal{H}} \otimes Z^*]\gamma(Z)(f\otimes y), \gamma(\infty)\gamma(\infty)^*[I_{\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d} \otimes u^*][I_{\mathcal{H}} \otimes W^*]\gamma(W)(g\otimes x) \right\rangle_{\mathcal{J}_\infty} \\
&= \left\langle \gamma(\infty)^*[I_{\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d} \otimes v^*][I_{\mathcal{H}} \otimes Z]^*\gamma(Z)(f\otimes y), \gamma(\infty)^*[I_{\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d} \otimes u^*][I_{\mathcal{H}} \otimes W]^*\gamma(W)(g\otimes x) \right\rangle_{\mathcal{J}_\infty} \\
&= \left\langle [I_{\mathcal{J}_\infty} \otimes v^*][\gamma(\infty)^* \otimes I_n][I_{\mathcal{H}} \otimes Z^*]\gamma(Z)(f\otimes y), [I_{\mathcal{J}_\infty} \otimes u^*][\gamma(\infty)^* \otimes I_n][I_{\mathcal{H}} \otimes W^*]\gamma(W)(g\otimes x) \right\rangle_{\mathcal{J}_\infty} \\
&= \left\langle [I_{\mathcal{J}_\infty} \otimes v^*] N^\gamma(Z)^*(f\otimes y), [I_{\mathcal{J}_\infty} \otimes u^*] N^\gamma(W)^*(g\otimes x) \right\rangle_{\mathcal{J}_\infty} \\
&= \left\langle f\otimes y, N^\gamma(Z)[I_{\mathcal{J}_\infty} \otimes (v\otimes u^*)] N^\gamma(W)^*(g\otimes x) \right\rangle_{\mathcal{J}_0\otimes\mathbb{C}^n}.
\end{aligned}
$$

上述化简与方程 $Q_1 - Q_3 = Q_2 - Q_4$ 一起推出，对所有 $A = K^{-1}(Z, W)[v \otimes u^*]$，均有（3.13）。然而，由于 NC Szegö 核 $K(Z, W)[\cdot]$ 对所有 $Z \in \mathbb{B}_n^d$ 和 $W \in \mathbb{B}_m^d$ 都是可逆线性映射，并且形如 $v \otimes u^*$ 的矩阵张成 $\mathbb{C}^{n\times m}$，我们立即得到（3.13）。通过 RKHS 理论中的标准论证（例如参见 [BTV01，定理 2.1]），很容易推出 B^γ 是压缩的。 ∎

现在我们可以对给定的 CNC 行偏等距算子的所有分次模型进行分类， V。我们通过证明相应特征函数的唯一性来实现这一点。

定义 3.13. 若存在固定的酉算子 $U_0 \in \mathrm{B}(\mathcal{J}_{(1)0}, \mathcal{J}_{(2)0})$ 和 $U_\infty \in \mathrm{B}(\mathcal{J}_{(1)\infty}, \mathcal{J}_\infty^{(2)})$，使得两个映射 $B_j\colon \mathbb{B}_{\mathbb{N}}^d \to \mathrm{B}(\mathcal{J}_{(j)\infty}, \mathcal{J}_{(j)0})_{\mathbb{N}}$ 满足

$$
[U_0 \otimes I_n] B_1(Z) = B_2(Z)[U_\infty \otimes I_n] \text{ for all } n \in \mathbb{N} \text{ and } Z \in \mathbb{B}_{\mathbb{N}}^d. \tag{3.17}
$$

容易验证这是一种等价关系，因此对于每个 $B : \mathbb{B}_{\mathbb{N}}^d \to \mathrm{B}(\mathcal{J}_\infty, \mathcal{J}_0)$，我们都能得到一个相应的等价类，称为 B的酉重合类。

命题 3.14. 设 $(\gamma_j, \mathcal{J}_{(j)\infty}, \mathcal{J}_{(j)0})$ 是 V的两个模型三元组。那么，相应的特征映射 B^{γ_j} 必属于同一个酉重合类。

证明。 定义 $U_0 = \gamma_2(0)^*\gamma_1(0)$ 和 $U_\infty = \gamma_2(\infty)^*\gamma_1(\infty)$，并注意到它们是酉算子，因为对于 $j = 1, 2$，$\gamma_j(0)$ 和 $\gamma_j(\infty)$ 分别是映到 Ran $V^\perp$ 和 Ker V 上的等距算子。为方便记号，我们还引入线性同构 $C(Z) \in \mathrm{B}(\mathcal{J}_{(2)0}, \mathcal{J}_{(1)0})$，对每个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $Z \in \mathbb{B}_n^d$ 定义为

$$
C(Z) := \gamma_2(Z)^*(\gamma_1(Z)\gamma_1(Z)^*)^{-1}\gamma_1(Z).
$$

现在，我们计算

$$
\begin{aligned}
[U_0 \otimes I_n] B^{\gamma_1}(Z) &= [U_0 \otimes I_n] D^{\gamma_1}(Z)^{-1} N^{\gamma_1}(Z) \\
&= [U_0 \otimes I_n] D^{\gamma_1}(Z)^{-1} C(Z)^{-1} C(Z) N^{\gamma_1}(Z) \\
&= \left(C(Z) D^{\gamma_1}(Z)[U_0^* \otimes I_n]\right)^{-1} C(Z) N^{\gamma_1}(Z).
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

然后注意到

$$\begin{aligned} C(Z)D^{\gamma_1}(Z) &= \gamma_2(Z)^*(\gamma_1(Z)\gamma_1(Z)^*)^{-1}\gamma_1(Z)\gamma_1(Z)^*[\gamma_1(0)\otimes I_n] \\ &= \gamma_2(Z)^*[\gamma_1(0)\otimes I_n] \\ &= \gamma_2(Z)^*[\gamma_2(0)\otimes I_n][(\gamma_2(0)^*\gamma_1(0))\otimes I_n] \\ &= D^{\gamma_2}(Z)[R\otimes I_n] \end{aligned} \tag{3.19}$$

并且，类似地，

$$\begin{aligned} C(Z)N^{\gamma_1}(Z) &= \gamma_2(Z)^*(\gamma_1(Z)\gamma_1(Z)^*)^{-1}\gamma_1(Z)\gamma_1(Z)^*[I_{\mathcal{H}}\otimes Z][\gamma_1(\infty)\otimes I_n] \\ &= \gamma_2(Z)^*[I_{\mathcal{H}}\otimes Z][\gamma_2(\infty)\otimes I_n][U_\infty\otimes I_n] \\ &= N^{\gamma_2}(Z)[U_\infty\otimes I_n]. \end{aligned} \tag{3.20}$$

结合（3.18）、（3.19）和（3.20）可得（3.17），由此完成证明。 ∎

回顾备注 3.2，每个行偏等距算子 V 都配备有典范非交换模型三元组 $(\Gamma, \text{核 } V, \text{值域 } V^\perp)$，其中

$$\Gamma(Z) = [I - VZ^*]^{-1}|_{\operatorname{Ran} V^\perp\otimes\mathbb{C}^n} \text{ for all } Z\in\mathbb{B}_n^d,\ n\in\mathbb{N}.$$

由（3.2）可立即得知，D^Γ、N^Γ 和 B^Γ 都是定义在$\mathbb{B}_{\mathbb{N}}^d$ 上的算子值 NC 映射（意义见（2.1））。结合对标准 NC 模型的这一了解与命题 3.14，可得到以下重要结论：

定理 3.15。 若$(\gamma, \mathcal{J}_\infty.\mathcal{J}_0)$ 是给定 *CNC* 行偏等距算子 V 的任意模型三元组，则其特征函数 B^γ 是 *NC Schur* 类 $\mathcal{S}_d(\mathcal{J}_\infty, \mathcal{J}_0)$ 中的严格压缩的 *CE* 元素，且满足 $B^\gamma(0) = 0$。

此外，$M_{D^\gamma}^L$，即由 D^γ 左乘，是从 $\mathrm{H}(B^\gamma)$ 到 $\mathcal{H}^\gamma$ 的酉映射，$X^\gamma := M_{D^\gamma}^{L\,*}\mathcal{U}^\gamma V\left[\mathcal{U}^{\gamma *}M_{D^\gamma}^L\otimes I_d\right]$ 是 $\mathrm{H}(B^\gamma)$和$\mathbf{B}^\gamma := \left[M_{D^\gamma}^{L\,*}\mathcal{U}^\gamma\otimes I_d\right]\gamma(\infty)$的唯一极端 *Gleason* 解，是 B^γ 的唯一极端 *Gleason* 解。

注 3.16。 也就是说，尽管我们并未假设分次模型 $(\gamma, \mathcal{J}_\infty, \mathcal{J}_0)$ 保持直和或联合相似变换，该定理仍证明特征函数 B^γ 与一个 NC Schur 类元素酉等价，因此 B^γ 也属于 NC Schur 类，并且是单位行球上的 NC 算子值函数。

证明。由于 B^Γ（即对应于典范非交换模型三元组的特征映射）是一个非交换映射，由 (3.17) 可知，B^γ 在 $\mathbb{B}_{\mathbb{N}}^d$ 中也是一个非交换算子值函数。定理 3.12 已经证明 B^γ 是一个压缩映射，因此，$B^\gamma \in \mathcal{S}_d(\mathcal{J}_\infty, \mathcal{J}_0)$ 立刻成立。$B^\gamma(0) = 0$也显然成立，因为根据定义，$N^\gamma(0) = 0$。最后，D^γ是从 $\mathrm{H}(B^\gamma)$ 到 H^γ的酉左乘子，这由 (3.13) 及对 BTV01 定理 2.1]中关于分级核的结果作简单修改即可得出。

接下来，我们验证 X^γ如假设所述，是$\mathrm{H}(B^\gamma)$的唯一极值 Gleason 解。为简化下面的记号，我们暂时省略上标 γ。回忆命题3.7指出，$\widehat{V} := \mathcal{U}V[\mathcal{U}^*\otimes I_d]$ 在其初始空间上的作用为 M_Z^R，并且

$$\operatorname{Ran}\widehat{V} = \{h\in\mathcal{H} \mid h(0) = 0\}.$$

由于 D 是酉左乘子，因此 X 在其初始空间上也作为 M_Z^R 作用，并且

$$\operatorname{Ran} X = \{f\in\mathscr{H}(B) \mid f(0) = 0\}.$$

因此，我们有

$$XX^* = I_{\mathscr{K}(B)} - K_0^B K_0^{B^*}$$

并且，对于每个 $f \in \mathrm{H}(B)$、$Z \in \mathbb{B}_n^d$ 和 $n \in \mathbb{N}$，我们可以计算

$$M_Z^R(X^* f)(Z) = (XX^* f)(Z) = f(Z) - \left(K_0^B K_0^{B^*} f\right)(Z) = f(Z) - K^B\{0, f(0) \otimes 1, 1\}(Z).$$

由于 $B(0) = 0$，容易验证 $K^B\{0,\ f(0) \otimes 1,\ 1\}(Z) = f(0_n)$。因此，$X$ 是 $\mathrm{H}(B)$ 的唯一极端 Gleason 解，正如所声称的那样。

还需验证，假设中定义的 $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \cdots \\ B_d \end{bmatrix}$ 是 B 的唯一极值 Gleason 解。首先注意到

$$\mathbf{B}^*\mathbf{B} = \gamma(\infty)^*\gamma(\infty) = I_{\mathcal{J}_\infty}.$$

由于 $B(0) = 0$，如果$\mathbf{B}$是 B 的 Gleason 解，则前面的方程意味着它是压缩的且为极值的。对于每个 $g \in \mathcal{J}_0, h \in \mathcal{J}_\infty$、$Z \in \mathbb{B}_n^d$、$x$，$u \in \mathbb{C}^n$ 和 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$\begin{aligned}
\left\langle g \otimes x, \sum_{j=1}^d [B_j h(Z)](Z_j u) \right\rangle_{\mathcal{J}_0 \otimes \mathbb{C}^n} &= \sum_{j=1}^d \left\langle K^B\{Z, g \otimes x, Z_j u\}, B_j h \right\rangle_{\mathscr{K}(B)} \\
&= \left\langle K^B\{Z, g \otimes x, \mathrm{col}(Z)u\}, \mathbf{B}h \right\rangle_{\mathscr{K}(B) \otimes \mathbb{C}^d} \\
&= \left\langle \begin{bmatrix} \mathcal{U}^* M_D^L K^B\{Z, g \otimes x, Z_1 u\} \\ \vdots \\ \mathcal{U}^* M_D^L K^B\{Z, g \otimes x, Z_d u\} \end{bmatrix}, \gamma(\infty) h \right\rangle_{\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^d}.
\end{aligned}$$

接下来可以直接验证

$$\begin{aligned}
M_D^L K^B\{Z, g \otimes x, Z_j u\} &= (M_{D^{-1}}^L)^* K^B\{Z, g \otimes x, Z_j u\} \\
&= K^\gamma\{Z, D(Z)^{-*} g \otimes x, Z_j u\}. \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

因此，继续上述计算可得

$$\begin{aligned}
\left\langle g \otimes x, \sum_{j=1}^d [B_j h(Z)](Z_j u) \right\rangle_{\mathcal{J}_0 \otimes \mathbb{C}^n} &= \left\langle \begin{bmatrix} \mathcal{U}^* M_D^L K^B\{Z, g \otimes x, Z_1 u\} \\ \vdots \\ \mathcal{U}^* M_D^L K^B\{Z, g \otimes x, Z_d u\} \end{bmatrix}, \gamma(\infty) h \right\rangle_{\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^d} \\
&= \left\langle \begin{bmatrix} \mathcal{U}^* K^\gamma\{Z, D(Z)^{-*} g \otimes x, Z_1 u\} \\ \vdots \\ \mathcal{U}^* K^B\{Z, (D(Z)^{-1})^*(g \otimes x), Z_d u\} \end{bmatrix}, \gamma(\infty) h \right\rangle_{\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^d} \\
&= \left\langle \begin{bmatrix} [I_{\mathcal{H}} \otimes u^* Z_1^*] \gamma(Z)^* D(Z)^{-*} g \otimes x \\ \vdots \\ [I_{\mathcal{H}} \otimes u^* Z_d^*] \gamma(Z)^* D(Z)^{-*} g \otimes x \end{bmatrix}, \gamma(\infty) h \right\rangle_{\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^d} \\
&= \langle [I_{\mathcal{H}} \otimes u^*][I_{\mathcal{H}} \otimes Z]^* \gamma(Z)^* D(Z)^{-*} g \otimes x, \gamma(\infty) h \rangle_{\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^d} \\
&= \left\langle g \otimes x, D(Z)^{-1} \gamma(Z) [I_{\mathcal{H}} \otimes Z][\gamma(\infty) \otimes I_n](h \otimes u) \right\rangle_{\mathcal{J}_0 \otimes \mathbb{C}^n} \\
&= \left\langle g \otimes x, B(Z)(h \otimes u) \right\rangle_{\mathcal{J}_0 \otimes \mathbb{C}^n}.
\end{aligned}$$

由于 $B(0) = 0$，可知$\mathbf{B}$ 是 B的（必然）唯一 Gleason 解。此外，由于$\mathbf{B}$ 是极值的，可由 B 是列极端的；根据 [JM20，定理 6。4]。 ∎

针对给定的行偏等距算子，计算相对于典范 NC 模型的特征函数，并结合命题3.14与定理3.15 ，即可得到 CNC 行偏等距算子的主模型。

定理 3.17 (CNC 行偏等距算子的非交换 de Branges–Rovnyak 模型）。行偏等距算子 $V : \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^d \to \mathcal{H}$ 是 *CNC*，当且仅当它酉等价于某个非交换 *de Branges–Rovnyak* 空间 $\mathrm{H}(B_V)$对应的唯一极端 *Gleason* 解，其中$B_V \in \mathcal{S}_d$(核 V, 值域 $V^{\perp}$)是完全等距，且满足 $B(0) = 0$。这个非交换 *Schur* 类函数 B_V 在酉重合意义下唯一，并由下式给出

$$\begin{aligned} B_V(Z) &= D_V(Z)^{-1} N_V(Z); \qquad Z \in \mathbb{B}_n^d,\ n \in \mathbb{N}, \\ \textit{where,}\quad D_V(Z) &= [I - VV^*][I - ZV^*]^{-1}[I - VV^*] \otimes I_n \quad \textit{and} \\ N_V(Z) &= [I - VV^*][I - ZV^*]^{-1}[I_{\mathcal{H}} \otimes Z]\,[I - V^*V] \otimes I_n. \end{aligned} \tag{3.22}$$

3.4. **Gleason 解偏等距部分的模型**。回顾一下，对于列极端非交换 Schur 类函数 $B \in \mathcal{S}_d$(J , K)，其唯一的压缩 Gleason 解 $X := R^* \otimes I_{\mathcal{K}}|_{\mathscr{H}(B)}$ 是极值的且为 CNC。因此， X具有等距–纯分解 $X = V + C$，其中 V 是一个 CNC 行偏等距算子。在本小节中，我们计算 V 的特征函数 B_V，并确定 B_V与原始 B之间的关系。这将为我们把模型从 CNC 行偏等距算子推广到任意 CNC 行压缩算子提供依据。

进一步回顾第 2.6 节，若 $B \in \mathcal{S}_d$(J , K) 是完全等距的，则 $X^* := R^* \otimes I_{\mathcal{K}}|_{\mathscr{H}(B)}$是 H (B) 的唯一极值 CNC Gleason 解 X 。我们注意到， $\Gamma(0) := K_0^B D_B^{-1}(0)^* : \mathrm{J}_0 \twoheadrightarrow$值域 $V^{\perp}$可通过连续性延拓为满射等距映射，其中 $V := XP_{\operatorname{Ker} D_X}$是 X 的行部分等距部分（如引理 2.6 所述）。若对每个 $Z \in \mathbb{B}_n^d$ 和$n \in \mathbb{N}$定义映射

$$\Gamma(Z) := [I - XZ^*]^{-1}[\Gamma(0) \otimes I_n] : \mathcal{K} \otimes \mathbb{C}^n \twoheadrightarrow \mathcal{R}(V - Z)^{\perp},$$

则 Γ 是标准非交换模型映射。为了完成模型三元组，我们需要确定一个映射 $\Gamma(\infty)$，使其为到 Ker V上的等距算子。我们将利用 B对应的唯一、压缩且极值的 Gleason 解$\mathbf{B}$来构造此映射。以下关系将在计算中发挥作用，

$$\mathbf{B}^* K^B\{W, g \otimes x, \mathrm{col}(W)u\} = [I_{\mathcal{J}} \otimes u^*]\big(B(W)^* - B(0_n)^*\big)(g \otimes x). \tag{3.23}$$

这是成立的，因为对于每个$h \in \mathcal{J}$，我们可以利用（2.14）计算

$$\begin{aligned} \big\langle \mathbf{B}^* K^B\{W, g \otimes x, \mathrm{col}(W)u\}, h \big\rangle_{\mathcal{J}} &= \big\langle K^B\{W, g \otimes x, \mathrm{col}(W)u\}, \mathbf{B}h \big\rangle_{\mathscr{H}(B) \otimes \mathbb{C}^d} \\ &= \sum_{j=1}^{d} \big\langle K^B\{W, g \otimes x, W_j u\}, B_j h \big\rangle_{\mathscr{H}(B)} \\ &= \sum_{j=1}^{d} \big\langle g \otimes x, B_j h(W) W_j u \big\rangle_{\mathcal{J} \otimes \mathbb{C}^n} \\ &= \big\langle g \otimes x, \big(B(W) - B(0_n)\big)(h \otimes u) \big\rangle_{\mathcal{J} \otimes \mathbb{C}^n} \\ &= \big\langle [I_{\mathcal{J}} \otimes u^*]\big(B(W)^* - B(0_n)^*\big)(g \otimes x), h \big\rangle_{\mathcal{J}}. \end{aligned}$$

引理 3.18. 映射 $\check{}\Gamma(\infty) := \mathbf{B} D_B^{-1}{}_{0()} : \mathcal{J}_\infty \to \mathrm{H}(B) \otimes \mathbb{C}^d$ 可通过连续性延拓为到核 V中的一个等距算子。

在上述陈述中，若 $B(0)$ 是严格压缩， $D_{B(0)}$ 可逆，且 $\check{\Gamma}(\infty)$ 在整个 $\mathcal{J}$ 上都有定义。然而，若 $B(0)$ 只是纯压缩算子，则 $\check{\Gamma}(\infty)$ 最初仅定义在稠密线性子空间 $\mathscr{D}_{B(0)}$ = 值域 $D_{B(0)}$ 上。不过，正如下文的证明所示，$\check{\Gamma}(\infty)$ 是等距算子，因此可通过连续性延拓为定义在 $\mathcal{J}_\infty$ 上的等距算子，而不论 $B(0)$ 是严格压缩还是纯压缩算子。

证明。 利用$\mathbf{B}$ 是极值的这一点，即 $\mathbf{B}^*\mathbf{B} = I_{\mathcal{J}} - B(0)^*B(0)$，很容易验证 $\check{\Gamma}(\infty)$ 是一个等距算子：

$$\check{\Gamma}(\infty)^*\check{\Gamma}(\infty) = D_{B(0)}^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{B}D_{B(0)}^{-1} = I_{\mathcal{J}}.$$

因此，只需证明 $\operatorname{Ran}\check{\Gamma}(\infty) \subseteq \operatorname{Ker} V = \operatorname{Ran} V^{*\perp}$。特别地，我们将证明，对于任意核函数 $K^B\{W, g\otimes x, u\}$，都有

$$\check{\Gamma}(\infty)^*V^*K^B\{W, g\otimes x, u\} = 0. \tag{3.24}$$

为此，我们使用（2.18），并注意到

$$\begin{aligned} & D_{B(0)}\check{\Gamma}(\infty)^*V^*K^B\{W, g\otimes x, u\} = \mathbf{B}^*V^*K^B\{W, g\otimes x, u\} \\ = \;& \mathbf{B}^*X^*\left[I_{\mathscr{K}(B)} - K_0^B D_{B(0)^*}^{-2}K_0^{B^*}\right]K^B\{W, g\otimes x, u\} \\ = \;& \mathbf{B}^*X^*K^B\{W, g\otimes x, u\} - \mathbf{B}^*X^*K_0^B \underbrace{K^B(0,0)^{-1}K_0^{B^*}K^B\{W, g\otimes x, u\}}_{=:g_0\in\mathcal{J}_0} \\ = \;& \mathbf{B}^*X^*K^B\{W, g\otimes x, u\} - \mathbf{B}^*X^*K^B\{0, g_0\otimes 1, 1\}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

我们来计算 两个项分别使用命题 2.12和（3.23）计算。首先，我们有 e

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^*X^*K^B\{W, g\otimes x, u\} &= \left[[I_{\mathcal{J}}\otimes u^*]\big(B(W)^* - B(0_n)^*\big) - (I_{\mathcal{J}} - B(0)^*B(0))[I_{\mathcal{J}}\otimes u^*]B(W)^*\right](g\otimes x) \\ &= -B(0)^*\big([I_{\mathcal{K}}\otimes u^*] - B(0)[I_{\mathcal{J}}\otimes u^*]B(W)^*\big)(g\otimes x) \\ &= -B(0)^*K^B(0,W)[u^*](g\otimes x). \end{aligned} \tag{3.26}$$

类似地，代入 g_0 的值可得

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^*X^*K^B\{0, g_0\otimes 1, 1\} &= -B(0)^*K^B(0,0)g_0 \\ &= -B(0)^*K_0^{B^*}K^B\{W, g\otimes x, u\} \\ &= -B(0)^*K^B(0,W)[u^*](g\otimes x). \end{aligned} \tag{3.27}$$

最后一个等式成立，是因为对于每个 $g'\in\mathcal{K}$，我们可以计算

$$\begin{aligned} \big\langle K_0^{B^*}K^B\{W, g\otimes x, u\}, g'\big\rangle_{\mathcal{K}} &= \big\langle K^B\{W, g\otimes x, u\}, K^B\{0, g'\otimes 1, 1\}\big\rangle_{\mathscr{H}(B)} \\ &= \big\langle g\otimes x, K^B(W,0)[u]g'\big\rangle_{\mathcal{K}\otimes\mathbb{C}^n} \\ &= \big\langle K^B(0,W)[u^*](g\otimes x), g'\big\rangle_{\mathcal{K}}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

将（3.26）和（3.27）中的计算结果代入（3.25），并注意到 $D_{B(0)}$ 是单射且具有稠密值域，立即可得（3.24）。证明至此完成。 ∎

注意，$\operatorname{Ran}\check{\Gamma}(\infty)$ 可能并不等于我们所要求的 $\operatorname{Ker} V$，但只需将任意等距算子 $\Gamma'(\infty) : \mathcal{J}' \to \operatorname{Ker} V \ominus \operatorname{Ran}\check{\Gamma}(\infty)$ 作为直和项附加上去，即可轻松解决。

$$\Gamma(\infty) := \check{\Gamma}(\infty)\oplus\Gamma'(\infty) : \mathcal{J}\oplus\mathcal{J}' \twoheadrightarrow \operatorname{Ker} V. \tag{3.29}$$

因此，我们结合第 2.6 节中的观察和引理 3.18，得出以下结论。

推论 3.19。设 $B \in \mathcal{S}_d(\mathcal{J}, \mathcal{K})$ 是一个纯压缩的 *CE*（左）乘子。那么，$(\Gamma, \mathcal{J} \oplus \mathcal{J}', \mathcal{K})$ 是唯一极端 *Gleason* 解 X 的行部分等距部分 V 的模型三元组，其中 X 是 $\mathrm{H}(B)$ 的唯一极端 *Gleason* 解，且

$$\Gamma := \begin{cases} 0 & \mapsto & \Gamma(0) := K_0^B D_{B(0)^*}^{-1}; \\ Z & \mapsto & [I - XZ^*]^{-1}[\Gamma(0) \otimes I_n],\ \forall Z \in \mathbb{B}_{\mathbb{N}}^d; \\ \infty & \mapsto & \check{\Gamma}(\infty) \oplus \Gamma'(\infty), \end{cases}$$

$\check{\Gamma}(\infty) = \mathbf{B}^{D_B^{-1}}{}_{0()}$ 以及 $\Gamma'(\infty)$ 是正弦函数(3.29)。

按照第 3.3 节中的定义，我们现在计算该模型三元组的特征映射 B^Γ。回顾一下，$B^\Gamma(Z) = D^\Gamma(Z)^{-1} N^\Gamma(Z)$，其中，对于每个 $Z \in \mathbb{B}_n^d$ 和 $n \in \mathbb{N}$，

$$\begin{aligned} D^\Gamma(Z) &:= \Gamma(Z)^*[\Gamma(0) \otimes I_n]; \\ N^\Gamma(Z) &:= \Gamma(Z)^*[I_{\mathscr{H}(B)} \otimes Z][\Gamma(\infty) \otimes I_n]. \end{aligned}$$

定理 3.20。设 $B \in \mathcal{S}_d(\mathcal{J}, \mathcal{K})$ 和 $(\Gamma, \mathcal{J} \oplus \mathcal{J}', \mathcal{K})$ 如推论 *3.19* 中所述。那么，与该模型三元组对应的特征映射 B^Γ 由下式给出

$$B^\Gamma(Z) = D_{B(0_n)^*}\left[I_{\mathcal{K}\otimes\mathbb{C}^n} - B(Z)B(0_n)^*\right]^{-1}\left(B(Z) - B(0_n)\right)D_{B(0_n)}^{-1} \oplus [\mathbf{0}_{\mathcal{J}',\mathcal{K}} \otimes I_n]. \tag{3.30}$$

在上述内容中，$\mathbf{0}_{\mathcal{J}',\mathcal{K}}$ 表示相应空间之间的零算子。

证明。任取固定的 $Z \in \mathbb{B}_n^d$ 和 $n \in \mathbb{N}$。由定义可得

$$\begin{aligned} D^\Gamma(Z) &= \Gamma(Z)^*[\Gamma(0) \otimes I_n] \\ &= \left[D_{B(0)^*}^{-1} K_0^{B^*} \otimes I_n\right][I - ZX^*]^{-1}\left[K_0^B D_{B(0)^*}^{-1} \otimes I_n\right] \\ &= D_{B(0_n)^*}^{-1}\left[K_0^{B^*} \otimes I_n\right][I - ZX^*]^{-1}\left[K_0^B \otimes I_n\right]D_{B(0_n)^*}^{-1}. \end{aligned}$$

对于每个 $g, h \in \mathcal{K}$ 和 $x, u \in \mathbb{C}^n$ 我们可以利用（2.20）得到

$$\begin{aligned} \left\langle g \otimes x, K_{0_n}^{B\,*}[I - ZX^*]^{-1}K_{0_n}^B(h \otimes u)\right\rangle_{\mathcal{K}\otimes\mathbb{C}^n} &= \left\langle [I - XZ^*]^{-1}\left[K_0^B g \otimes x\right], K_0^B h \otimes u\right\rangle_{\mathscr{H}(B)\otimes\mathbb{C}^n} \\ &= \left\langle [I_{\mathscr{H}(B)} \otimes u^*][I - XZ^*]^{-1}\left[K_0^B g \otimes x\right], K_0^B h\right\rangle_{\mathscr{H}(B)} \\ &= \left\langle K^B\{Z, g \otimes x, u\}, K^B\{0, h \otimes 1, 1\}\right\rangle_{\mathscr{H}(B)} \\ &= \left\langle g \otimes x, \left(K^B(Z, 0)[I_{\mathscr{H}(B)} \otimes u]\right)(h \otimes 1)\right\rangle_{\mathcal{K}\otimes\mathbb{C}^n} \\ &= \left\langle g \otimes x, h \otimes u - B(Z)[I_{\mathscr{H}(B)} \otimes u]B(0)^* h\right\rangle_{\mathcal{K}\otimes\mathbb{C}^n} \\ &= \left\langle g \otimes x, \left[I_{\mathcal{K}\otimes\mathbb{C}_n} - B(Z)B(0_n)^*\right](h \otimes u)\right\rangle_{\mathcal{K}\otimes\mathbb{C}^n}. \end{aligned}$$

总之，

$$D^\Gamma(Z) = D_{B(0_n)^*}^{-1}\left[I_{\mathcal{K}\otimes\mathbb{C}^n} - B(Z)B(0_n)^*\right]D_{B(0_n)^*}^{-1}. \tag{3.31}$$

接下来，我们将 $N^\Gamma(Z)$ 分成两部分来计算：

$$N^\Gamma(Z) = \underbrace{\Gamma(Z)^*[I_{\mathscr{H}(B)} \otimes Z][\check{\Gamma}(\infty) \otimes I_n]}_{N^{\check{\Gamma}}(Z)} \oplus \underbrace{\Gamma(Z)^*[I_{\mathscr{H}(B)} \otimes Z][\Gamma'(\infty) \otimes I_n]}_{N^{\Gamma'}(Z)}$$

首先证明 $N^{\Gamma'}(Z) = [\mathbf{0}_{\mathcal{J}',\mathcal{K}} \otimes I_n]$，也就是说，$\operatorname{Ran}\ \Gamma'(\infty)\ \otimes \mathbb{C}^n \subset \operatorname{Ker}\ \Gamma(Z)^*[I_{\mathscr{H}(B)} \otimes Z]$。
为此，任取 $f \in \operatorname{Ran}\Gamma'(\infty)$ 和 $u \in \mathbb{C}^n$，并注意到

$$\vec{f} \in \operatorname{Ker} V \cap \operatorname{Ran} \check{\Gamma}(\infty)^{\perp} = \operatorname{Ker} V \cap \operatorname{Ker} \mathbf{B}^*.$$

接下来，注意到

$$\begin{aligned}\Gamma(Z)^*[I_{\mathscr{H}(B)} \otimes Z](\vec{f} \otimes u) &= [\Gamma(0)^* \otimes I_n][I - ZX^*]^{-1}[I_{\mathscr{H}(B)} \otimes Z](\vec{f} \otimes u) \\ &= D^{-1}_{B(0_n)^*}\left[K_0^{B^*} \otimes I_n\right][I - ZX^*]^{-1}\left(\sum_{j=1}^{d} f_j \otimes Z_j u\right).\end{aligned}$$

We 于是固定 $g \in \mathcal{K}$ 和 $x \in \mathbb{C}^n$ 任意的，并利用（2.20）和（2.15）得到 n

$$\begin{aligned}&\left\langle g \otimes x, \left[K_0^{B^*} \otimes I_n\right][I - X^*Z]^{-1}\left(\sum_{j=1}^{d} f_j \otimes Z_j u\right)\right\rangle_{\mathcal{K}\otimes\mathbb{C}^n} \\ &\qquad = \sum_{j=1}^{d} \left\langle K^B\{Z, g \otimes x, Z_j u\}, f_j\right\rangle_{\mathscr{H}(B)} \\ &\qquad = \left\langle K^B\{Z, g \otimes x, \operatorname{col}(Z)u\}, \vec{f}\right\rangle_{\mathcal{H}(B)\otimes\mathbb{C}^d} \\ &\qquad = \left\langle X^*K^B\{Z, g \otimes x, u\}, \vec{f}\right\rangle_{\mathscr{H}(B)\otimes\mathbb{C}^d} + \underbrace{\left\langle \mathbf{B}[I_{\mathscr{H}(B)} \otimes u^*]B(Z)^*(g \otimes x), \vec{f}\right\rangle_{\mathscr{H}(B)\otimes\mathbb{C}^d}}_{=0,\ \text{since}\ \vec{f} \in \operatorname{Ker}\mathbf{B}^*} \\ &\qquad = \left\langle K^B\{Z, g \otimes x, u\}, X\vec{f}\right\rangle_{\mathscr{H}(B)}.\end{aligned}$$

由（2.18）可知 $V = X - K_0^B D_B^{-2}(0)^* K_0^{B^*} X$。因此，由于 $\vec{f} \in \operatorname{Ker}\ V$是按选择取定的，我们得到

$$X\vec{f} = K_0^B D^{-2}_{B(0)^*} K_0^{B^*} X\vec{f}.$$

取 $W = 0$ 和 $x = u = 1$ 在（2.15）中，可以直接验证

$$X^*K_0^B = -\mathbf{B}B(0)^*, \tag{3.32}$$

这进一步意味着

$$K_0^{B^*} X\vec{f} = -B(0)\mathbf{B}^*\vec{f} = 0,$$

因为 $\vec{f} \in \operatorname{Ker}\ \mathbf{B}^*$是按选择取定的。因此，我们得到 $N^{\Gamma'}(Z) = [\mathbf{0}_{\mathcal{J}',\mathcal{K}} \otimes I_n]$，如所述。

最后，请注意

$$\begin{aligned}N^{\check{\Gamma}}(Z) &= [\Gamma(0)^* \otimes I_n][I - ZX^*]^{-1}[I_{\mathscr{H}(B)} \otimes Z][\check{\Gamma}(\infty) \otimes I_n] \\ &= D^{-1}_{B(0_n)^*}\left[K_0^{B^*} \otimes I_n\right][I - ZX^*]^{-1}[I_{\mathscr{H}(B)} \otimes Z][\mathbf{B} \otimes I_n]D^{-1}_{B(0_n)}.\end{aligned}$$

因此，对于每个 $h \in \mathbb{J}_\infty$ 和 $u \in \mathbb{C}^n$，我们有

$$\begin{aligned}[I_{\mathscr{H}(B)} \otimes Z][\mathbf{B} \otimes I_n](h \otimes u) &= [I_{\mathscr{H}(B)} \otimes Z]\begin{bmatrix} B_1 h \otimes u \\ \vdots \\ B_d h \otimes u \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{d} B_j h \otimes Z_j u.\end{aligned}$$

我们可以 因此，利用 $g \in \mathcal{K}$ 和 $x \in \mathbb{C}^n$ 式（2.20）及（2.13）分别计算，得到

$$\begin{aligned}
&\left\langle g \otimes x, \left[K_0^{B^*} \otimes I_n\right][I - ZX^*]^{-1}[I_{\mathscr{H}(B)} \otimes Z][\mathbf{B} \otimes I_n](h \otimes u)\right\rangle_{\mathcal{K} \otimes \mathbb{C}^n} \\
&\qquad = \sum_{j=1}^{d} \left\langle [I - XZ^*]^{-1}\left[K_0^B \otimes I_n\right](g \otimes x), B_j h \otimes Z_j u\right\rangle_{\mathscr{H}(B) \otimes \mathbb{C}^n} \\
&\qquad = \sum_{j=1}^{d} \left\langle K^B\{Z, g \otimes x, Z_j u\}, B_j h\right\rangle_{\mathscr{H}(B)} \\
&\qquad = \sum_{j=1}^{d} \left\langle g \otimes x, B_j h(Z) Z_j u\right\rangle_{\mathcal{K} \otimes \mathbb{C}^n} \\
&\qquad = \left\langle g \otimes x, \left(B(Z) - B(0_n)\right)(f \otimes u)\right\rangle_{\mathcal{K} \otimes \mathbb{C}^n}. \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

将 $N^{\curlywedge\Gamma}$ 和 $N^{\Gamma'}$ 的计算结果合并，得到

$$N^{\Gamma}(Z) = D^{-1}_{B(0_n)^*}\left(B(Z) - B(0_n)\right) D^{-1}_{B(0_n)} \oplus [\mathbf{0}_{\mathcal{J}',\mathcal{K}} \otimes I_n]. \qquad (3.34)$$

结合（3.31）和（3.34）立即得到（3.30），如所需。 ∎

回顾备注2.14 可知， X 是行偏等距算子，当且仅当 B（0） $= 0$。在上述定理中加入这一假设，并使用（3.13），即可得到以下结论。

推论 3.21。 若除了定理*3.20*的假设外，我们还假设 B（0） $= 0$，则

$$B^{\Gamma}(Z) = B(Z) \oplus [\mathbf{0}_{\mathcal{J}',\mathcal{K}} \otimes I_n].$$

因此， $K^{\Gamma} = K^B$，从而$\mathcal{H}^{\Gamma}$ =H （B）。

上述定理表明， B^{Γ} 与*M¨obius* 变换相似，且该变换满足 B $B^{\Gamma}(0)$ $= 0$。接下来，我们利用这一结果：对于给定的 CNC 行压缩算子，通过对其行部分等距部分的特征映射施加上述 Möbius 变换的逆变换，构造相应的特征映射。

3.5. **弱重合**。我们在引言中介绍了 NC Schur 函数 B 的酉重合类这一概念。下文中，使用较弱的同构概念会更方便。首先，回顾一下，对于给定的 $B \in \mathcal{S}_d(\mathcal{J}_\infty, \mathcal{J}_0)$，其支撑定义为

$$\operatorname{supp}(B) = \bigvee_{\substack{y,v \in \mathbb{C}^n \\ Z \in \mathbb{B}_n^d,\, n \in \mathbb{N}}} \operatorname{Ran}\left[I_{\mathcal{J}_\infty} \otimes y^*\right] B(Z)^* \left[I_{\mathcal{J}_0} \otimes v\right] \subseteq \mathcal{J}_\infty.$$

根据构造，$\mathcal{J}_\infty$ = 支撑(B) $\oplus$支撑$(B)^{\perp}$，并且 $B(Z)g = 0$ 对任意 $g \in$ 支撑$(B)^{\perp}$成立。也就是说，如上文（3.21）所示， B 具有如下直和分解，

$$B = B|_{\operatorname{supp}(B)} \oplus \mathbf{0}_{\operatorname{supp}(B)^{\perp}, \operatorname{supp}(B^*)^{\perp}},$$

其中，supp(B^*) 的定义见引言。

定义 3.22。 若两个算子值非交换舒尔类函数 $B \in \mathcal{S}_d(\mathcal{J}, \mathcal{K})$和 $B' \in \mathcal{S}_d(\mathcal{J}', \mathcal{K}')$满足 弱一致，即 $B|_{\operatorname{supp}(B)}$且 $B'|_{\operatorname{supp}(B')}$一致（如（3.17）所示）。

下面的引理给出了弱重合的一种等价表述，并且还表明弱重合是非交换 Schur 类函数上的等价关系。

引理 3.23。 两个算子值非交换舒尔类函数， $B \in \mathcal{S}_d(\mathcal{J}, \mathcal{K})$和 $B' \in \mathcal{S}_d(\mathcal{J}', \mathcal{K}')$弱重合，当且仅当存在一个常值酉算子 $U:\mathcal{K} \to \mathcal{K}'$，它定义了一个酉左乘子，将 $\mathrm{H}(B)$ 映到 $\mathrm{H}(B')$上。

证明。 如果 $B = B_0 \oplus \mathbf{0}$ 和 $B' = B'_0 \oplus \mathbf{0}$ 是 B 和 B' 在 $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \oplus \mathcal{J}_0^{\perp}$和 $\mathcal{J}' = \mathcal{J}'_0 \oplus \mathcal{J}'^{\perp}_0$上的支撑分解，那么根据假设，存在酉算子 $U: \mathcal{K} \to \mathcal{K}'$和$T: \mathcal{J}_0 \to \mathcal{J}'_0$，使得 $UB_0 = B'_0T$。因此，

$$I_{\mathbb{H}^2_d} \otimes I_{\mathcal{K}'} - B'(L)B'(L)^* = \left[I_{\mathbb{H}^2_d} \otimes U\right]\left[I_{\mathbb{H}^2_d} \otimes I_{\mathcal{K}} - B(L)B(L)^*\right]\left[I_{\mathbb{H}^2_d} \otimes U^*\right],$$

使得

$$\begin{aligned}\mathscr{H}(B') &= \operatorname{Ran}\sqrt{I_{\mathbb{H}^2_d} \otimes I_{\mathcal{K}'} - B'(L)B'(L)^*} \\ &= \left[I_{\mathbb{H}^2_d} \otimes U\right]\operatorname{Ran}\sqrt{I_{\mathbb{H}^2_d} \otimes I_{\mathcal{K}} - B(L)B(L)^*} \\ &= \left[I_{\mathbb{H}^2_d} \otimes U\right]\mathscr{H}(B).\end{aligned}$$

反向结论很容易验证。 ∎

注 3.24。 显然，如果 B 和 B' 重合，那么它们也弱重合。然而，反之并不成立。为此，任取 $B(Z) \in \mathcal{S}_d(\mathcal{J}_\infty, \mathcal{J}_0)$，注意到当 $\mathcal{J}'$是非平凡希尔伯特空间时，它并不与 $B'(Z) := B(Z) \oplus [\mathbf{0}_{\mathcal{J}',\mathcal{J}_0} \otimes I_n] \in \mathcal{S}_d(\mathcal{J}_\infty \oplus \mathcal{J}', \mathcal{J}_0)$重合。然而，$\operatorname{supp}(B') \cong \operatorname{supp}(B)$，因此它们弱重合。

结合 定理3.17和引理3.23 立即给出以下结果 .

推论 3.25。 非交换特征函数， $B_V \in \mathcal{S}_d$（核 V、值域 $V^{\perp}$）（如（3.22）中所述）的 *CNC* 行偏等距算子 V 是完全酉不变量：在 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}'$ 上的两个 *CNC* 行偏等距算子V、V'分别酉等价，当且仅当它们的非交换特征函数 B_V、$B_{V'}$ 弱重合。

鉴于上述唯一性结果，我们将 B_V 与其弱重合类等同，并将给定 CNC 行偏等距算子 V的 B_V 称为非交换特征函数。

4. CNC 行压缩算子的非交换 DE BRANGES–ROVNYAK 模型

4.1. 非交换 Frostman 平移。设 $\mathcal{J}$、$\mathcal{K}$ 为任意两个希尔伯特空间，并考虑 $(\mathrm{B}(\mathcal{J}, \mathcal{K}))_1$和 $[\mathrm{B}(\mathcal{J}, \mathcal{K})]_1$，即 $\mathrm{B}(\mathcal{J}, \mathcal{K})$ 的开单位球和闭单位球。对于任意纯压缩算子， $\alpha \in [\mathrm{B}(\mathcal{J}, \mathcal{K})]_1$，一个 α–Möbius 变换 φ_α：$(\mathrm{B}(\mathcal{J}, \mathcal{K}))_1 \to (\mathrm{B}(\mathcal{J}, \mathcal{K}))_1$作为映射在 [MR19，第 5 节1]中被引入，其形式为

$$\Phi_\alpha(\zeta) := D_{\alpha^*}(I_{\mathcal{K}} - \zeta\alpha^*)^{-1}(\zeta - \alpha)D_\alpha^{-1}; \qquad \zeta \in (\mathscr{B}(\mathcal{J}, \mathcal{K}))_1$$

具有复合逆，

$$\Phi_\alpha^{-1}(\zeta) = \Phi_{-\alpha^*}(\zeta^*)^* = D_{\alpha^*}^{-1}(\zeta + \alpha)(I_{\mathcal{K}} - \zeta^*\alpha)^{-1}D_\alpha. \tag{4.1}$$

引理 4.1. *[MR19, 引理 5。2]* 设 $\alpha \in [\mathrm{B}(\mathcal{J}, \mathcal{K})]_1$是一个压缩映射。

(i) 若 α是纯压缩算子，则 Φ_α： $(\mathrm{B}(\mathcal{J}, \mathcal{K}))_1 \to (\mathrm{B}(\mathcal{J}, \mathcal{K}))_1$是一个双射，其复合逆为 Φ_α^{-1}。*(ii)* 若 α是严格压缩，则 Φ_α： $[\mathrm{B}(\mathcal{J}, \mathcal{K})]_1 \to [\mathrm{B}(\mathcal{J}, \mathcal{K})]_1$是一个双射，其复合逆为 Φ_α^{-1}。此外， Φ_α 是 $[\mathrm{B}(\mathcal{J}, \mathcal{K})]_1$ 中所有纯压缩算子到其自身的双射。

(iii) 设 α 是一个纯压缩算子，且 $\beta \in (\mathrm{B}(\mathcal{J} \otimes \mathbb{C}^m, \mathcal{K} \otimes \mathbb{C}^m))_1$、$\gamma \in (\mathrm{B}(\mathcal{J} \otimes \mathbb{C}^n, \mathcal{K} \otimes \mathbb{C}^n))_1$ 是严格压缩。则对每个 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$，有

$$I_{\mathcal{K}} \otimes A - \Phi_\alpha(\beta)[I_{\mathcal{J}} \otimes A]\Phi_\alpha(\gamma)^* = \tag{4.2}$$
$$\left[D_{\alpha^*} \otimes I_m\right]\left[I_{\mathcal{K}\otimes\mathbb{C}^m} - \beta[\alpha^* \otimes I_m]\right]^{-1}\left[I_{\mathcal{K}} \otimes A - \beta[I_{\mathcal{J}} \otimes A]\gamma^*\right]\left[I_{\mathcal{K}\otimes\mathbb{C}^n} - [\alpha \otimes I_n]\gamma^*\right]^{-1}\left[D_{\alpha^*} \otimes I_n\right].$$

注 4.2。上述引理的陈述 (i–ii) 出自 [MR19，引理5.2 (i– ii)]。陈述 (iii) 是对 [MR19，引理5.2 (iii)] 所作的技术性修改，我们将会用到。上述引理中的条目 (i) 比 [MR19，引理5.2 (i)]中的陈述略强。不过，这可以由该结果的证明推出。事实上，若 α 是任意纯压缩算子，且 β 是严格压缩，则在 [MR19，引理5.2]的证明中已证明，对任意 $h \in$ 值域 D_α，

$$\|h\|^2 - \|\Phi_\alpha(\beta)h\|^2 = \left\langle h, D_\alpha(I - \beta^*\alpha)^{-1}(I - \beta^*\beta)(I - \alpha^*\beta)^{-1}D_\alpha h\right\rangle.$$

因此，若 $\|\beta\| < 1$，则由连续性可知 $\Phi_\alpha(\beta)$ 可延拓为严格压缩映射。同样，这个方程表明，若 α 是严格压缩，且 β 是纯压缩算子，则 $\Phi_\alpha(\beta)$ 是纯压缩算子。

为简化方程，引入以下记号将很方便。对于任意$l \in \mathbb{N}, \beta \in (\mathrm{B}(\mathrm{J} \otimes \mathbb{C}^\ell, \mathrm{K} \otimes \mathbb{C}^\ell))_1$ 以及任意纯压缩算子 α，令

$$\Xi_\alpha(\beta) := \left[D_{\alpha^*} \otimes I_\ell\right]\left[I_{\mathcal{K}\otimes\mathbb{C}^\ell} - \beta[\alpha^* \otimes I_\ell]\right]^{-1}, \tag{4.3}$$
$$\Theta_\alpha(\beta) := (\beta - [\alpha \otimes I_\ell])\left[D_\alpha^{-1} \otimes I_\ell\right]. \tag{4.4}$$

于是，(4.2) 可用伴随映射（定义在适当的定义域上）来解释为

$$I_{\mathcal{K}\otimes\mathbb{C}^{n\times m}} - \mathrm{Ad}_{\Phi_\alpha(\zeta),\Phi_\alpha(\omega)^*} = \mathrm{Ad}_{\Xi_\alpha(\zeta),\Xi_\alpha(\omega)^*} \circ \left[I_{\mathcal{K}\otimes\mathbb{C}^{n\times m}} - \mathrm{Ad}_{\zeta,\omega^*}\right]. \tag{4.5}$$

证明。我们仅证明 (iii)；(i–ii) 的证明见 [MR19，引理 5。2]注意到$\Phi_\alpha(\beta) = \Xi_\alpha(\beta)\Theta_\alpha(\beta)$对每个 $\beta \in [\mathrm{B}(\mathcal{J},\mathcal{K})_{\mathbb{N}}]_1$都成立。因此，我们有

$$I_{\mathcal{K}\otimes\mathbb{C}^{n\times m}} - \mathrm{Ad}_{\Phi_\alpha(\beta),\Phi_\alpha(\gamma)^*} = I_{\mathcal{K}\otimes\mathbb{C}^{n\times m}} - \left[\mathrm{Ad}_{\Xi_\alpha(\beta),\Xi_\alpha(\gamma)^*} \circ \mathrm{Ad}_{\Theta_\alpha(\beta),\Theta_\alpha(\gamma)^*}\right] \tag{4.6}$$

考察 (4.5) 和 (4.6)，接下来只需证明

$$I_{\mathcal{K}\otimes\mathbb{C}^{n\times m}} - \mathrm{Ad}_{\beta,\gamma^*} = \mathrm{Ad}_{\Xi_\alpha(\beta)^{-1},\Xi_\alpha(\gamma)^{*-1}} - \mathrm{Ad}_{\Theta_\alpha(\beta),\Theta_\alpha(\gamma)^*}. \tag{4.7}$$

首先，我们计算

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}_{\Xi_\alpha(\beta)^{-1},\Xi_\alpha(\gamma)^{*-1}}[I_{\mathcal{K}} \otimes A] &= \left[I_{\mathcal{K}\otimes\mathbb{C}^n} - \beta[\alpha^* \otimes I_n]\right]\left[D_{\alpha^*}^{-2} \otimes A\right]\left[I_{\mathcal{K}\otimes\mathbb{C}^m} - [\alpha \otimes I_m]\gamma^*\right] \\ &= \left[D_{\alpha^*}^{-2} \otimes A\right] - \beta\left[\alpha^* D_{\alpha^*}^{-2} \otimes A\right] - \left[D_{\alpha^*}^{-2}\alpha \otimes A\right]\gamma^* + \beta\left[\alpha^* D_{\alpha^*}^{-2}\alpha \otimes A\right]\gamma^*.\end{aligned} \tag{4.8}$$

类似地，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}_{\Theta_\alpha(\beta),\Theta_\alpha(\gamma)^*}[I_{\mathcal{K}} \otimes A] &= (\beta - [\alpha \otimes I_n])\left[D_\alpha^{-2} \otimes A\right](\gamma^* - [\alpha^* \otimes I_m]) \\ &= \left[\alpha D_\alpha^{-2}\alpha^* \otimes A\right] - \beta\left[D_\alpha^{-2}\alpha^* \otimes A\right] - \left[\alpha D_\alpha^{-2} \otimes A\right]\gamma^* + \beta\left[D_\alpha^{-2} \otimes A\right]\gamma^*.\end{aligned} \tag{4.9}$$

利用缺陷算子的性质，可以直接验证

$$D_{\alpha^*}^{-2} - \alpha D_\alpha^{-2}\alpha^* = I_{\mathcal{K}};\ \ \alpha^* D_{\alpha^*}^{-2} = D_\alpha^{-2}\alpha^*;\ \ D_{\alpha^*}^{-2}\alpha = \alpha D_\alpha^{-2};\ \ \alpha^* D_{\alpha^*}^{-2}\alpha - D_\alpha^{-2} = -I_{\mathcal{J}}.$$

因此，从（4.9）中减去（4.8）立即得到（4.6），如所要求。 ∎

设 $B \in \mathcal{S}_d(\mathrm{J}, \mathrm{K})$。若 B 是严格压缩的（因此 $B(0)$ 是严格压缩映射），则 $B^{\langle 0\rangle} := \Phi_{B(0)\otimes I_{\mathbb{H}_d^2}} \circ B \in \mathcal{S}_d(\mathrm{J}_\infty, \mathrm{J}_0)$ 根据引理 4.1 的 (ii) 项是严格压缩的。事实上，$B(L) \in \mathrm{B}(\mathrm{J}\otimes\mathbb{H}_d^2, \mathrm{K}\otimes\mathbb{H}_d^2)$，因此 $\Phi_{B(0)} \circ B \in \mathcal{S}_d(\mathrm{J}, \mathrm{K})$。此外，对于任意 $Z \in \mathbb{B}_n^d$，$B(Z)$ 是严格压缩映射，因此根据引理 4.1 (ii)，$B^{\langle 0\rangle}(Z)$ 是严格压缩映射。若 $B \in \mathcal{S}_d(\mathrm{J}, \mathrm{K})$ 仅是纯压缩的，那么根据定理 3.20，我们仍可将 $B^{\langle 0\rangle} \in \mathcal{S}_d(\mathrm{J}, \mathrm{K})$ 定义为 NC Schur 类函数，

$$B^{\langle 0\rangle}(Z) := D_{B(0_n)}^*(I_{\mathcal{K}\otimes\mathbb{C}^n} - B(Z)B(0_n)^*)^{-1}(B(Z) - B(0_n))D_{B(0_n)}^{-1}; \quad Z \in \mathbb{B}_n^d.$$

由于根据构造，$B^{\langle 0\rangle}(0) = 0$，可知对于任意 $B \in \mathcal{S}_d(\mathrm{J}, \mathrm{K})$，$B^{\langle 0\rangle}$ 都是严格压缩的舒尔类函数。因此，给定任意纯压缩算子 $\alpha \in \mathrm{B}(\mathrm{J}, \mathrm{K})$ 和任意纯压缩的 $B \in \mathcal{S}_d(\mathrm{J}, \mathrm{K})$，我们可以逐点定义 $B^{\langle\alpha\rangle} := \Phi_\alpha^{-1} \circ B^{\langle 0\rangle} \in \mathcal{S}_d(\mathrm{J}, \mathrm{K})$：

$$B^{\langle\alpha\rangle}(Z) = \Phi_{\alpha\otimes I_n}^{-1} \circ B^{\langle 0\rangle}(Z), \qquad Z \in \mathbb{B}_n^d,$$

由引理 4.1 (i)，由于 $B^{\langle 0\rangle}(Z)$ 对于任意 $Z \in \mathbb{B}_{\mathbb{N}}^d$ 都是严格压缩算子。

定义 4.3。设 $B \in \mathcal{S}_d(\mathrm{J}, \mathrm{K})$ 是纯压缩的，且 $\alpha \in [\mathrm{B}(\mathrm{J}, \mathrm{K})]_1$ 是纯压缩算子。则 B 的 α–弗罗斯曼平移是非交换算子值舒尔类函数 $B^{\langle\alpha\rangle} = \Phi_\alpha^{-1} \circ B^{\langle 0\rangle} \in \mathcal{S}_d(\mathrm{J}, \mathrm{K})$。

引理 4.4. 对于任意纯压缩且列极端的 $B \in \mathcal{S}_d(\mathcal{J}, \mathcal{K})$，我们有 $B = B^{\langle B(0)\rangle} = (B^{\langle 0\rangle})^{\langle B(0)\rangle}$。

证明。若 $B \in \mathcal{S}_d(\mathrm{J}, \mathrm{K})$ 是严格压缩的，则由引理 4.1 可立即得出结论。若 B 是纯压缩的，即 $B(0)$ 是纯压缩算子，则由定理 3.20 定义 $B^{\langle 0\rangle} \in \mathcal{S}_d(\mathrm{J}, \mathrm{K})$。此外，根据构造，$B^{\langle 0\rangle}(0) = 0$，因此由引理 2.3 可知 $B^{\langle 0\rangle}$ 是严格压缩的。为证明 $B^{\langle B(0)\rangle} := \Phi_{B^{\langle 0\rangle}(0)}^{-1} \circ B^{\langle 0\rangle} = B$，考虑定理 3.20 的证明中使用的标准非交换模型三元组。具体而言，回顾一下，若定义 $\Gamma(Z) := (I - XZ^*)^{-1}K_0^B D_B^{-1}(0_n)^*$，以及 $\check{\Gamma}(\infty) := \mathrm{B}^{D_B^{-1}}(0)$，其中 X 是 $\mathrm{H}(B)$ 的唯一极端 Gleason 解，那么我们便可通过公式 $B^{\langle 0\rangle}(Z) \sim D(Z)^{-1}N(Z)$，在弱重合意义下恢复 $B^{\langle 0\rangle}$，其中

$$D(Z) = \Gamma(Z)^*\Gamma(0_n), \quad \text{and} \quad N(Z) = \Gamma(Z)^*[I_{\mathscr{H}(B)} \otimes Z][\check{\Gamma}(\infty) \otimes I_n].$$

我们断言 $D(Z) + N(Z)B(0_n)^* = I_{\mathscr{D}_{B(0_n)^*}}$。首先，考虑

$$D_{B(0_n)^*}D(Z)D_{B(0_n)^*} = [K_0^{B*} \otimes I_n][I - XZ^*]^{-*}[K_0^B \otimes I_n].$$

因此，给定任意 $g, g' \in \mathrm{K}$ 和 $x, u \in \mathbb{C}^n$，

$$\begin{aligned}
& \left\langle g\otimes x, [K_0^{B*}\otimes I_n][I - XZ^*]^{-*}(K_0^B g'\otimes u)\right\rangle_{\mathcal{K}\otimes\mathbb{C}^n} \\
= & \left\langle [I\otimes u^*][I - XZ^*]^{-1}(K_0^B g\otimes x), K_0^B g'\right\rangle_{\mathcal{K}} \\
= & \left\langle K^B\{Z, g\otimes x, u\}, K_0^B g'\right\rangle_{\mathscr{H}(B)} \qquad \text{(By Proposition 2.12.)} \\
= & (g\otimes x)^*\left(I_{\mathcal{K}}\otimes I_n - B(0_n)B(Z)^*\right)g'\otimes u.
\end{aligned}$$

类似地，

$$D_{B(0_n)^*}N(Z)B(0)^*D_{B(0_n)^*} = [K_0^{B*}\otimes I_n][I - XZ^*]^{-*}[I_{\mathscr{H}(B)}\otimes Z]\mathbf{B}B(0_n)^*,$$

并且我们像之前一样计算：对于任意的 $g, g' \in \mathrm{K}$ 和 $x, u \in \mathbb{C}^n$

$$\begin{aligned}
&\left\langle g \otimes x, [K_0^{B*} \otimes I_n][I - XZ^*]^{-*}[I_{\mathscr{H}(B)} \otimes Z]\mathbf{B}B(0_n)^*(g' \otimes u)\right\rangle_{\mathcal{K}\otimes\mathbb{C}^n} \\
= &\sum_{j=1}^{d} \left\langle K^B\{Z, g \otimes x, Z_j u\}, \mathbf{B}B(0)^* g'\right\rangle_{\mathscr{H}(B)} \\
= &\sum_{j=1}^{d} \left\langle g \otimes x, \mathbf{B}_j(Z) Z_j B(0_n)^*(g' \otimes u)\right\rangle_{\mathcal{K}\otimes\mathbb{C}^n} \\
= &(g \otimes x)^*(B(Z) - B(0_n))B(0_n)^*(g' \otimes u).
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
D_{B(0)^*}(D(Z) + N(Z)B(0_n)^*)D_{B(0)^*} &= I_{\mathcal{K}} \otimes I_n - B(0_n)B(Z)^* + B(0_n)B(Z)^* - B(0_n)B(0_n)^* \\
&= D^2_{B(0_n)^*},
\end{aligned}$$

由此可得

$$D(Z) + N(Z)B(0_n)^* = I_{\mathscr{D}_{B(0)^*}} \otimes I_n = I_{\mathscr{D}_{B(0_n)^*}}.$$

接下来计算该表达式的分母，

$$\begin{aligned}
B^{\langle B(0)\rangle}(Z) &= \left(\Phi^{-1}_{B(0)} \circ B^{\langle 0\rangle}\right)(Z) \\
&= D^{-1}_{B(0_n)^*}\left(B^{\langle 0\rangle}(Z) + B(0_n)\right)\left(I_{\mathcal{K}} \otimes I_n + B(0_n)^* B^{\langle 0\rangle}(Z)\right)^{-1} D_{B(0_n)}.
\end{aligned}$$

也就是说，

$$\begin{aligned}
I_{\mathcal{K}} \otimes I_n + B(0_n)^* B^{\langle 0\rangle}(Z) &= I + B(0_n)^* D(Z)^{-1} N(Z) \\
&= I + B(0_n)^*(I - N(Z)B(0_n)^*)^{-1} N(Z) \\
&= I + (I - B(0_n)^* N(Z))^{-1} B(0_n)^* N(Z) \\
&= I + (I - B(0_n)^* N(Z))^{-1} - I = (I - B(0_n)^* N(Z))^{-1}.
\end{aligned}$$

总之，利用（3.34），我们得到

$$\begin{aligned}
D_{B(0_n)^*} B^{\langle B(0)\rangle}(Z) &= \left(D(Z)^{-1} N(Z) + B(0_n)\right)(I - B(0_n)^* N(Z))\, D_{B(0_n)} \\
&= (D(Z)^{-1} N(Z) + B(0_n) - D(Z)^{-1} N(Z) B(0_n)^* N(Z) - B(0_n)B(0_n)^* N(Z)) D_{B(0_n)} \\
&= (D(Z)^{-1} N(Z) + B(0_n) - D(Z)^{-1}(I - D(Z)) N(Z) - B(0_n)B(0_n)^* N(Z)) D_{B(0_n)} \\
&= (D(Z)^{-1} N(Z) + B(0_n) - D(Z)^{-1} N(Z) + N(Z) - B(0_n)B(0_n)^* N(Z)) D_{B(0_n)} \\
&= B(0_n) D_{B(0_n)} + D^2_{B(0_n)^*} N(Z) D_{B(0_n)} \\
&= D_{B(0_n)^*}(B(0_n) + B(Z) - B(0_n)) = D_{B(0_n)^*} B(Z).
\end{aligned}$$

也就是说， $B^{\langle B(0)\rangle}(Z) = B(Z)$，证明完毕。 ∎

本小节的第一个主要结果引入了 $M^{\langle\alpha\rangle}$ ——一种*Crofoot* 乘子/变换的非交换算子值类比。回顾记号 Ξ_α 见（4.3）。

定理 4.5。设 $B \in \mathcal{S}_d(\mathcal{J}_\infty, \mathcal{J}_0)$ 是纯压缩的，并设 $\alpha \in [\mathrm{B}(\mathcal{J}_\infty, \mathcal{J}_0)]_1$ 是纯压缩算子。则， $B^{\langle\alpha\rangle} \in \mathcal{S}_d(\mathcal{J}_\infty, \mathcal{J}_0)$ 是纯压缩的。

此外，存在一个酉乘子 $M_{\langle\alpha\rangle} : \mathrm{H}(B^{\langle 0\rangle}) \twoheadrightarrow \mathrm{H}(B^{\langle\alpha\rangle})$，其定义为

$$M^{\langle\alpha\rangle}(Z) := \Xi_{-\alpha}(B^{\langle 0\rangle}(Z)) = \left[\Xi_\alpha(B^{\langle\alpha\rangle}(Z))\right]^{-1} \text{ for all } Z \in \mathbb{B}^d_{\mathbb{N}}.$$

证明。 利用引理 4.1(iii) 以及（4.3）中的记号，可得

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{J}_0\otimes\mathbb{C}^{n\times m}} - \mathrm{Ad}_{B^{\langle 0\rangle}(Z),B^{\langle 0\rangle}(W)^*} &= I_{\mathcal{J}_0\otimes\mathbb{C}^{n\times m}} - \mathrm{Ad}_{\Phi_\alpha(B^{\langle\alpha\rangle}(Z)),\Phi_\alpha(B^{\langle\alpha\rangle}(W))^*} \\ &= \Xi_\alpha\big(B^{\langle\alpha\rangle}(Z)\big)\Big[I_{\mathcal{J}_0\otimes\mathbb{C}^{n\times m}} - \mathrm{Ad}_{B^{\langle\alpha\rangle}(Z),B^{\langle\alpha\rangle}(W)^*}\Big]\Xi_\alpha\big(B^{\langle\alpha\rangle}(W)\big)^*. \end{aligned}$$

同样，由于 $\Phi_\alpha^{-1}(\beta) = \big[\Phi_{-\alpha^*}(\beta^*)\big]^*$，我们可以修改引理 4.1(*iii*)，得到

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{J}_0\otimes\mathbb{C}^{n\times m}} - \mathrm{Ad}_{B^{\langle\alpha\rangle}(Z),B^{\langle\alpha\rangle}(W)^*} &= I_{\mathcal{J}_0\otimes\mathbb{C}^{n\times m}} - \mathrm{Ad}_{\Phi_\alpha^{-1}(B^{\langle 0\rangle}(Z)),\Phi_\alpha^{-1}(B^{\langle 0\rangle}(W))^*} \\ &= \Xi_{-\alpha}\big(B^{\langle 0\rangle}(Z)\big)\Big[I_{\mathcal{J}_0\otimes\mathbb{C}^{n\times m}} - \mathrm{Ad}_{B^{\langle 0\rangle}(Z),B^{\langle 0\rangle}(W)^*}\Big]\Xi_{-\alpha}\big(B^{\langle 0\rangle}(W)\big)^*. \end{aligned}$$

结合这两个方程，并利用 $B^{\langle 0\rangle}\in\mathcal{S}_d(\mathcal{J}_\infty,\mathcal{J}_0)$ 这一事实，立即可由对 [BTV01，定理 2.1] 作简单的非交换修改，得出 $B^{\langle\alpha\rangle}\in\mathcal{S}_d(\mathcal{J}_\infty,\mathcal{J}_0)$，并且 $M^{\langle\alpha\rangle}$ 是酉左乘子。 ∎

下一个结果表明，$M^{\langle\alpha\rangle}$ 在相应空间中也保持压缩型和极值 Gleason 解。

定理 4.6. 设 $B\in\mathcal{S}_d(\mathcal{J}_\infty,\mathcal{J}_0)$ 是纯压缩的，设 $\alpha\in[\mathrm{B}(\mathcal{J}_\infty,\mathcal{J}_0)]_1$ 是纯压缩映射，并设$\mathbf{B}^{\langle\alpha\rangle}$ 和 $\mathbf{B}^{\langle 0\rangle}$ 分别是 $B^{\langle\alpha\rangle}$ 和$B^{\langle 0\rangle}$ 对应的唯一压缩 *Gleason* 解。那么，

$$\big[M^{\langle\alpha\rangle}\otimes I_d\big]^{-1}\mathbf{B}^{\langle\alpha\rangle}D_\alpha^{-1} = \mathbf{B}^{\langle 0\rangle}.$$

此外，$\mathbf{B}^{\langle\alpha\rangle}$ 是极值的，当且仅当$\mathbf{B}^{\langle 0\rangle}$ 是极值的。因此，B 是列极端的，当且仅当 $B^{\langle\alpha\rangle}$ 是列极端的。

证明。 设 $\widetilde{\mathbf{B}}^{\langle\alpha\rangle} := \big[M^{\langle\alpha\rangle}\otimes I_d\big]^{-1}\mathbf{B}^{\langle\alpha\rangle}D_\alpha^{-1}$。由于 $B^{\langle 0\rangle}\in\mathcal{S}_d(\mathcal{J}_\infty,\ \mathcal{J}_0)$和 $B^{\langle\alpha\rangle}(0)=\alpha$，我们可以利用（2.13）进行计算

$$\begin{aligned} \big[I_{\mathscr{K}(B^{\langle 0\rangle})}\otimes Z\big]\big[\widetilde{\mathbf{B}}^{\langle\alpha\rangle}(Z)\otimes I_n\big] &= \big[I_{\mathscr{K}(B^{\langle 0\rangle})}\otimes Z\big]\big[M^{\langle\alpha\rangle}(Z)^{-1}\otimes I_d\big]\big[\mathbf{B}^{\langle\alpha\rangle}D_\alpha^{-1}(Z)\otimes I_n\big] \\ &= M^{\langle\alpha\rangle}(Z)^{-1}\big[I_{\mathscr{K}(B^{\langle 0\rangle})}\otimes Z\big]\big[\mathbf{B}^{\langle\alpha\rangle}D_\alpha^{-1}(Z)\otimes I_n\big] \\ &= M^{\langle\alpha\rangle}(Z)^{-1}\big(B^{\langle\alpha\rangle}(Z)-B^{\langle\alpha\rangle}(0_n)\big)\big[D_\alpha^{-1}\otimes I_n\big] \\ &= B^{\langle 0\rangle}(Z) \\ &= B^{\langle 0\rangle}(Z)-B^{\langle 0\rangle}(0_n). \end{aligned}$$

如果 α 不是严格压缩，则 D_α^{-1}是一个定义域稠密的闭无界线性算子。上述计算在这种情况下仍然有效。例如，可以将上述方程两边乘以 D_α，从而得到相同的结论。现在注意到

$$(\widetilde{\mathbf{B}}^{\langle\alpha\rangle})^*\widetilde{\mathbf{B}}^{\langle\alpha\rangle} = D_\alpha^{-1}\mathbf{B}^{\langle\alpha\rangle^*}\mathbf{B}^{\langle\alpha\rangle}D_\alpha^{-1} \le D_\alpha^{-1}(I_{\mathcal{J}_\infty}-\alpha^*\alpha)D_\alpha^{-1} = I_{\mathcal{J}_0}.$$

因此，$\widetilde{\mathrm{B}}^{\langle\alpha\rangle} = \mathrm{B}^{\langle 0\rangle}$。又由于上述不等式取等号当且仅当 $\mathrm{B}^{\langle\alpha\rangle}$ 是极值的，因此 $\mathrm{B}^{\langle\alpha\rangle}$ 是极值的当且仅当 $\mathrm{B}^{\langle 0\rangle}$ 是极值的。回顾 JM20 定理 6.4],, $B\in\mathcal{S}_d(\mathrm{J},\mathrm{K})$ 是列极端的，当且仅当 B 的唯一压缩 Gleason 解 $\mathrm{B} = R^*\otimes I_{\mathcal{K}}B\in\mathrm{H}(B)\otimes\mathbb{C}^d$ 是极值的。因此，$\mathrm{B}^{\langle\alpha\rangle}$ 是极值的，当且仅当 $B^{\langle\alpha\rangle}$ 是完全等距，证明完毕。 ∎

我们在本小节最后记录一个观察结果，它将某个 $\mathrm{H}(B)$ 的任意极值 Gleason 解 X 的行部分等距部分，与上文引入的非交换算子值 Crofoot 变换 $M^{\langle\alpha\rangle}$ 联系起来。

命题 4.7。 设 $B \in \mathcal{S}_d(\mathcal{J}_\infty, \mathcal{J}_0)$ 是一个纯压缩且为完全等距的（左）乘子。此外，设 $X, X^{\langle 0\rangle}$ 分别是 $\mathrm{H}(B)$、$\mathrm{H}(B^{\langle 0\rangle})$ 对应的唯一极端 *Gleason* 解，并设 $\mathbf{B}$、$\mathbf{B}^{\langle 0\rangle}$ 分别是 B、$B^{\langle 0\rangle}$ 对应的 *Gleason* 解。若 $X = V + C$ 是 X 的等距–纯分解，则

$$V = M^{\langle B(0)\rangle} X^{\langle 0\rangle} \big[M^{\langle B(0)\rangle} \otimes I_d\big]^*.$$

证明。 我们在附加假设 $B(0)$ 是严格压缩的条件下给出证明；该论证可直接推广到 $B(0)$ 为任意纯压缩映射的情形。

只需验证 V^* 对每个核函数 $K^B\{W,\ g\otimes x,\ u\}$ 的作用，其中 $W \in \mathbb{B}_n^d$ 对某个 $n \in \mathbb{N}$ 成立。回顾式（2.18），有 $V^* = X^*\big[I_{\mathscr{H}(B)} - K_0^B D_{B^{(0)^*}}^{-2} K_0^{B^*}\big]$。结合式（2.15）、（3.28）和（3.32），得到

$$\begin{aligned}
V^*K^B\{W, g\otimes x, u\} &= X^*K^B\{W, g\otimes x, u\} - X^*K_0^B D_{B(0)^*}^{-2} K_0^{B^*} K^B\{W, g\otimes x, u\} \\
&= K^B\{W, g\otimes x, \mathrm{col}(W)u\} - \mathbf{B}[I_{\mathcal{J}_\infty}\otimes u^*]B(W)^*(g\otimes x) \\
&\qquad + \mathbf{B}B(0)^* D_{B(0)^*}^{-2} K^B(0, W)[u^*](g\otimes x) \\
&= K^B\{W, g\otimes x, \mathrm{col}(W)u\} - \mathbf{B}D_{B(0)}^{-2}\Big[\big(I_{\mathcal{J}_\infty} - B(0)^*B(0)\big)[I_{\mathcal{J}_\infty}\otimes u^*]B(W)^*(g\otimes x) \\
&\qquad - B(0)^*\big([I_{\mathcal{J}_0}\otimes u^*] - B(0)[I_{\mathcal{J}_\infty}\otimes u^*]B(W)^*\big)(g\otimes x)\Big] \\
&= K^B\{W, g\otimes x, \mathrm{col}(W)u\} - \mathbf{B}D_{B(0)}^{-2}\Big[[I_{\mathcal{J}_\infty}\otimes u^*]B(W)^* - B(0)^*[I_{\mathcal{J}_0}\otimes u^*]\Big](g\otimes x) \\
&= K^B\{W, g\otimes x, \mathrm{col}(W)u\} - \mathbf{B}D_{B(0)}^{-2}[I_{\mathcal{J}_\infty}\otimes u^*]\big(B(W)^* - B(0_n)^*\big)(g\otimes x).
\end{aligned}$$

由定义易知

$$\begin{aligned}
M^{\langle B(0)\rangle^*} K^B\{W, g\otimes x, u\} &= K^{B^{\langle 0\rangle}}\{W, M^{\langle B(0)\rangle}(W)^*(g\otimes x), u\}; \\
\big[M^{\langle B(0)\rangle}\otimes I_d\big] K^{B^{\langle 0\rangle}}\{W, g\otimes x, \mathrm{col}(W)u\} &= K^B\{W, M^{\langle B(0)\rangle}(g\otimes x), \mathrm{col}(W)u\}.
\end{aligned}$$

由于 $M^{\langle B(0)\rangle}$ 是酉算子，因此我们可以利用定理 4.6 轻松计算 e

$$\begin{aligned}
&\big[M^{\langle B(0)\rangle}\otimes I_d\big] X^{\langle 0\rangle^*} M^{\langle B(0)\rangle^*} K^B\{W, g\otimes x, u\} \\
&\quad = \big[M^{\langle B(0)\rangle}\otimes I_d\big] X^{\langle 0\rangle^*} K^{B^{\langle 0\rangle}}\{W, M^{\langle B(0)\rangle}(W)^*(g\otimes x), u\} \\
&\quad = K^B\{W, g\otimes x, \mathrm{col}(W)u\} - \big[M^{\langle B(0)\rangle}\otimes I_d\big]\mathbf{B}^{\langle 0\rangle}[I_{\mathcal{J}_\infty}\otimes u^*]B^{\langle 0\rangle}(W)^* M^{\langle B(0)\rangle}(W)^*(g\otimes x) \\
&\quad = K^B\{W, g\otimes x, \mathrm{col}(W)u\} - \mathbf{B}D_{B(0)}^{-1}[I_{\mathcal{J}_\infty}\otimes u^*]B^{\langle 0\rangle}(W)^* M^{\langle B(0)\rangle}(W)^*(g\otimes x) \\
&\quad = K^B\{W, g\otimes x, \mathrm{col}(W)u\} - \mathbf{B}D_{B(0)}^{-2}[I_{\mathcal{J}_\infty}\otimes u^*](B(W)^* - B(0_n)^*)(g\otimes x).
\end{aligned}$$

因此， $V = M^{\langle B(0)\rangle} X^{\langle 0\rangle}\big[M^{\langle B(0)\rangle}\otimes I_d\big]^*$ 如所需，证明完毕。 ∎

推论 *4.8.* 设 $B \in \mathcal{S}_d(J_\infty, J_0)$ 是纯压缩且完全等距的。若 $(\Gamma, J_\infty \oplus J', J_0)$ 是如推论 *3.19* 中所述，与 X 的行部分等距部分对应的模型三元组，则其特征映射 B^Γ 与 $B^{\langle 0\rangle} \in \mathcal{S}_d(J_\infty, J_0)$ 弱一致。特别地，若 $B(0) = 0$，则 B^Γ 与 B 弱一致。

回顾第 3.4 节可知，如果 $B \in \mathcal{S}_d(\mathcal{J}_\infty, \mathcal{J}_0)$ 是纯压缩的且为完全等距，并且 X 是 $\mathrm{H}(B)$ 的唯一极端 Gleason 解，其等距–纯分解为 $X = V + C$，

那么（Γ，J∞ ⊕J′，J0）是 V 的模型三元组，其中

$$\Gamma := \begin{cases} 0 & \mapsto & \Gamma(0) := K_0^B D_{B(0)^*}^{-1}; \\ Z & \mapsto & [I - XZ^*]^{-1}[\Gamma(0) \otimes I_n],\ \forall Z \in \mathbb{B}_{\mathbb{N}}^d; \\ \infty & \mapsto & \check{\Gamma}(\infty) \oplus \Gamma'(\infty), \end{cases}$$

且 $\check{\Gamma}(\infty) := \mathbf{B}^{D_B^{-1}}{}_{0()}$，$\Gamma'(\infty)$ 是（3.29）中的区域。

命题 4.9。 设 $B \in \mathcal{S}_d(\mathcal{J}_\infty, \mathcal{J}_0)$、$X = V + C$ 和 $(\Gamma, \mathcal{J}_\infty \oplus \mathcal{J}', \mathcal{J}_0)$ 如上所述。那么，

$$\delta_X^\Gamma := -\Gamma(0)^* C \Gamma(\infty) = B(0) \oplus \mathbf{0}_{\mathcal{J}', \mathcal{J}_\infty}.$$

因此，$B_X := B^{\Gamma\langle\delta_X^\Gamma\rangle}$ 与 B 弱相同。

证明。 由（2.18），显然 $C = K_0^B D_B^{-2}{}_{(0)^*} K_0^{B^*} X$。因此，由于 $\mathbf{B}$ 是极值的，我们可以利用（δ_X^Γ（2.16）、（3.32）以及值域 $\Gamma'(\infty) \subseteq$ 值域$\mathbf{B}$核$\mathbf{B}^*$ 这一事实来计算如下：

$$\begin{aligned} \delta_X^\Gamma &= -D_{B(0)^*}^{-1} \underbrace{K_0^{B^*} K_0^B D_{B(0)^*}^{-2}}_{=I_{\mathcal{J}_0}} K_0^{B^*} X \left[\mathbf{B} D_{B(0)}^{-1} \oplus \Gamma'(\infty)\right] \\ &= -D_{B(0)^*}^{-1} K_0^{B^*} X \left[\mathbf{B} D_{B(0)}^{-1} \oplus \Gamma'(\infty)\right] \\ &= D_{B(0)^*}^{-1} B(0) \mathbf{B}^* \left[\mathbf{B} D_{B(0)}^{-1} \oplus \Gamma'(\infty)\right] \\ &= D_{B(0)^*}^{-1} B(0) D_{B(0)} \oplus \mathbf{0}_{\mathcal{J}', \mathcal{J}_0} \\ &= B(0) \oplus \mathbf{0}_{\mathcal{J}', \mathcal{J}_0}. \end{aligned}$$

第二部分由引理 4.4 立即得出，因为根据推论 4.8我们知道 B^Γ 与 $B^{\langle 0\rangle}$弱相同。

■

4.2. **主模型**。 在接下来的讨论中，设 $T : \mathrm{H} \otimes \mathbb{C}^d \to \mathrm{H}$ 是一个具有等距–纯分解 $T = V + C$（因此 C 是纯行压缩）的 CNC 行压缩算子。此外，设 $(\gamma, \mathrm{J}_\infty, \mathrm{J}_0)$ 是与 V 对应的任意模型三元组。

定义 4.10。 T 的缺陷点（相对于 γ）定义为

$$\delta_T^\gamma := -\gamma(0)^* T \gamma(\infty) = -\gamma(0)^* C \gamma(\infty).$$

T的特征函数 B_T定义为 B_T^γ 的弱重合类：$= B^{\gamma\langle\delta_T^\gamma\rangle}$。

以下结果表明，V的选择与 B_T 无关。

引理 4.11。 如果$(\gamma_j, \mathcal{J}_{(j)\infty}, \mathcal{J}_{(j)0})$是与 V对应的任意两个模型三元组，那么 $B_T^{\gamma_1}$和$B_T^{\gamma_2}$重合（如(3.17)所示）。

证明。 如命题 3.14的证明中所示，我们有由 $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)U_0$、$\gamma_1(\infty) = \gamma_2(\infty)U_\infty$给出的酉算子 $U_0 \in \mathrm{B}(\mathrm{J}_{(1)0}, \mathrm{J}_{(2)0})$ 和$U_\infty \in \mathrm{B}(\mathrm{J}_{(1)\infty}, \mathrm{J}_{(2)\infty})$，使得

$$[U_0 \otimes I_n] B^{\gamma_1}(Z) = B^{\gamma_2}(Z)[U_\infty \otimes I_n] \text{ for all } Z \in \mathbb{B}_n^d \text{ and } n \in \mathbb{N}.$$

因此，请注意

$$\delta_T^{\gamma_1} = -\gamma_1(0)^* T \gamma_1(\infty) = -U_0^* \gamma_2(0)^* T \gamma_2(\infty) U_\infty = U_0^* \delta_T^{\gamma_2} U_\infty.$$

此外，根据定义3.10可回忆起，$B^{\gamma_j}(0)=0$，因此，$B^{\gamma_j}\langle 0\rangle = B^{\gamma_j}$。因此，我们可以针对每个 $Z\in\mathbb{B}_n^d$ 和 $n\in\mathbb{N}$ 计算出

$$
\begin{aligned}
&B_T^{\gamma_1}(Z)\\
&= B^{\gamma_1\langle \delta_T^{\gamma_1}\rangle}(Z)\\
&= \left[D^{-1}_{\delta_T^{\gamma_1 *}}\otimes I_n\right]\Big(B^{\gamma_1}(Z)+[\delta_T^{\gamma_1}\otimes I_n]\Big)\Big[I_{\mathcal{J}_0^{(1)}\otimes\mathbb{C}^n}+[\delta_T^{\gamma_1 *}\otimes I_n]B^{\gamma_1}(Z)\Big]^{-1}\Big[D_{\delta_T^{\gamma_1}}\otimes I_n\Big]\\
&= \left[U_0^* D^{-1}_{\delta_T^{\gamma_2 *}} U_0\otimes I_n\right][U_0^*\otimes I_n]\Big(B^{\gamma_2}(Z)+[\delta_T^{\gamma_2}\otimes I_n]\Big)[U_\infty\otimes I_n]\\
&\qquad\qquad [U_\infty^*\otimes I_n]\Big[I_{\mathcal{J}_0^{(2)}\otimes\mathbb{C}^n}+B^{\gamma_2}(Z)[\delta_T^{\gamma_2}\otimes I_n]\Big]^{-1}[U_\infty\otimes I_n]\Big[U_\infty^* D_{\delta_T^{\gamma_2}} U_\infty\otimes I_n\Big]\\
&= [U_0^*\otimes I_n]\Big[D^{-1}_{\delta_T^{\gamma_2 *}}\otimes I_n\Big]\Big(B^{\gamma_2}(Z)+[\delta_T^{\gamma_2}\otimes I_n]\Big)\Big[I_{\mathcal{J}_0^{(2)}\otimes\mathbb{C}^n}+[\delta_T^{\gamma_2 *}\otimes I_n]B^{\gamma_2}(Z)\Big]^{-1}\Big[D_{\delta_T^{\gamma_2}}\otimes I_n\Big][U_\infty\otimes I_n]\\
&= [U_0^*\otimes I_n]B_T^{\gamma_2}(Z)[U_\infty\otimes I_n].
\end{aligned}
$$

因此，$B_T^{\gamma_1}$ 与 $B_T^{\gamma_2}$ 重合，证毕。 ∎

结合定理3.17、命题4.9和引理 4.11可得以下结果。

定理 *4.12.* 设 $T: H\otimes\mathbb{C}^d\to H$ 是一个 *CNC* 行压缩算子，且 $T=V+C$ 是其等距–纯分解。T 的非交换特征函数 $B_T\in\mathcal{S}_d(\mathscr{D}_T,\mathscr{D}_{T^*})$，是算子莫比乌斯变换所得的弱重合类；该变换以纯压缩算子 $\delta_T\in B(\mathscr{D}_T,\mathscr{D}_{T^*})$ 为参数，作用于 V 的非交换特征函数 $B_V\in\mathcal{S}_d(\mathscr{D}_T,\mathscr{D}_{T^*})$（如 *(3.22)* 所示），且该纯压缩算子仅依赖于 C：

$$
B_T(Z)=\left[D_{\delta_T^*}\otimes I_n\right]\Big(B_V(Z)+\left[\delta_T\otimes I_n\right]\Big)\Big(I_{\mathscr{D}_T\otimes\mathbb{C}^n}+\left[\delta_T{}^*\otimes I_n\right]B_V(Z)\Big)^{-1}\left[D_{\delta_T}\otimes I_n\right]. \tag{4.10}
$$

特别地，T 是 *CNC* 行部分等距算子，当且仅当

$$
C=0\iff B_T=B_V\iff \delta_T=0\iff B_T(0)=0.
$$

要完成任意 CNC 行压缩算子的非交换 de Branges–Rovnyak 模型的构造，我们还需要最后一个要素。利用 $\gamma(0)$ 和 $\gamma(\infty)$ 是到上的等距算子这一事实，很容易验证以下结论。

引理 4.13。给定一个行偏等距算子 V 和一个模型三元组 $(\gamma,\mathcal{J}_\infty,\mathcal{J}_0)$，映射

$$
\delta\mapsto T_\delta := V+\gamma(0)\delta\gamma(\infty)^*
$$

在 $[\mathrm{B}(\mathcal{J}_\infty,\mathcal{J}_0)]_1$ 中的纯压缩算子与偏等距部分为 V 且纯压缩部分为 $\gamma(0)\delta\gamma(\infty)^*$的行压缩算子之间建立了一个双射。此外，$\delta$ 是严格压缩，当且仅当 T_δ 的纯压缩部分是严格行压缩。进一步，T_δ 是 *CNC*，当且仅当 V 是 *CNC*。

定理 4.14 (CNC 行压缩算子的非交换 de Branges–Rovnyak 模型)。行压缩算子 $T:\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d\to\mathcal{H}$ 是 *CNC* 的，当且仅当它酉等价于某个非交换 *de Branges–Rovnyak* 空间 $\mathrm{H}(B_T)$的（唯一）极值 *Gleason* 解，其中 B_T是纯压缩的 *CE*（左）乘子。此 B_T 在弱酉重合意义下唯一，并且可选取为使得 $B_T\in\mathcal{S}_d(\mathscr{D}_T,\mathscr{D}_{T^*})$ 由 (4.10)给出。

证明。 若 T 酉等价于假设中所述某个非交换 Schur 函数B 的极值 Gleason 解，则由推论 2.16 可知 T 是 CNC 的。

反过来，设 T 是 CNC，并令 $(\Gamma := \Gamma_V, \mathrm{J}_\infty := \mathrm{Ker}\ V, \mathrm{J}_0 := \mathrm{Ran}\ V^{\perp})$ 为 V 的典范 NC 模型三元组（如注 3.2 所述）。由定理 3.15 可知，V 酉等价于 $\mathrm{H}(B^\Gamma)$ 上的极值 Gleason 解 $X^\Gamma = M_{D^\Gamma}^L{}^* \mathrm{U}^\Gamma V[\mathrm{U}^{\Gamma *} M_{D^\Gamma}^L \otimes I_d]$，它对应于 B^Γ 的极值 Gleason 解 $\mathrm{B}^\Gamma = [M_{D^\Gamma}^L{}^* \mathrm{U}^\Gamma \otimes I_d]\Gamma(\infty)$。此外，若令 $\widehat{\mathrm{U}} := M_{D^\Gamma}^L{}^* \mathrm{U}^\Gamma$，则可得 $(\widehat{\Gamma} := \widehat{\mathrm{U}}\Gamma, \mathrm{J}_\infty, \mathrm{J}_0)$ 是与 X^Γ 对应的模型三元组。

根据定义，我们有 $B_T^\Gamma 0 = B^\Gamma$ 和 $B_T^\Gamma(0) = \delta_T^\Gamma$，因此定理 4.6 告诉我们，$\mathrm{B}_T := G_{\delta_T^\Gamma}{}^{-1} \mathrm{B}^\Gamma$ 是 B_T^Γ 的唯一极端 Gleason 解。若 X_T 是 $\mathrm{H}(B_T^\Gamma)$ 上对应的极值 Gleason 解，那么由命题 4.7 可知，V_T（即 X_T 的行部分等距部分）满足

$$V_T = M^{\langle \delta_T^\Gamma \rangle} X[M^{\langle \delta_T^\Gamma \rangle} \otimes I_d]^*.$$

为了证明 T 与 X_T酉等价，我们将证明

$$\widehat{T} := \widehat{\mathcal{U}} T[\widehat{\mathcal{U}} \otimes I_d]^* = M^{\langle \delta_T^\Gamma \rangle^*} X_T[M^{\langle \delta_T^\Gamma \rangle} \otimes I_d] =: \widehat{X}.$$

由于 X 和 T 都是行压缩算子，且其行部分等距部分为 X，引理4.13告诉我们，只需证明 $\delta_{\widehat{T}}^{\widehat{\Gamma}} = \delta_T^\Gamma$ 成立。因此，我们计算T X

$$\delta_{\widehat{T}}^{\widehat{\Gamma}} = -\Gamma(0)^* \widehat{\mathcal{U}}^* \widehat{T}[\widehat{\mathcal{U}} \otimes I_d]\Gamma(\infty) = -\Gamma(0) T \Gamma(\infty) = \delta_T^\Gamma.$$

类似地，我们有

$$\begin{aligned} \delta_{\widehat{X}}^{\widehat{\Gamma}} &= -(\widehat{\mathcal{U}}\Gamma(0))^* \widehat{X} \widehat{\mathcal{U}}\Gamma(\infty) \\ &= -(\widehat{\mathcal{U}}\Gamma(0))^* M^{\langle \delta_T^\Gamma \rangle^*} X_T[M^{\langle \delta_T^\Gamma \rangle} \otimes I_d]\mathbf{B}^\Gamma \\ &= -\left(X_T{}^* M^{\langle \delta_T^\Gamma \rangle} \widehat{\mathcal{U}}\Gamma(0)\right)^* \mathbf{B}_T D_{\delta_T^\Gamma}^{-1}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

现在，定义映射 $K_0^\Gamma \colon \mathrm{J}_0 \to \mathrm{H}^\Gamma$ 如下

$$K_0^\Gamma g := K^\Gamma\{0, g \otimes 1, 1\} \text{ for all } g \in \mathcal{J}_0.$$

那么，容易验证$\mathcal{U}^\Gamma \Gamma(0) = K_0^\Gamma$。接着，由于 $M_{D^\Gamma}^L = M_{D^{\Gamma^{-1}}}^L{}^*$ 是一个乘子的伴随算子，类似于（3.21）的计算可得

$$\widehat{\mathcal{U}}^\Gamma \Gamma(0) = K_0^{B_V} D(0)^{-*} = K_0^{B_V}.$$

类似地，$M_{\delta_T^\Gamma} = \left(M^{\langle \delta_T^\Gamma \rangle^{-1}}\right)^*$ 也是一个乘子，因此我们再次使用（3.21）来得出结论 de

$$M^{\langle \delta_T^\Gamma \rangle} \widehat{\mathcal{U}}^\Gamma \Gamma(0) = K_0^{B_T} M^{\langle \delta_T^\Gamma \rangle^{-*}}(0) = K_0^{B_T} D_{\delta_T^{\Gamma *}}^{-1}.$$

接下来，由于 X_T 是 $\mathrm{H}(B_T)$的极值 Gleason 解，我们可以对 2.15) 式应用于 $W = 0$，得到

$$X_T{}^* M^{\langle \delta_T^\Gamma \rangle} \widehat{\mathcal{U}}^\Gamma \Gamma(0) = -\mathbf{B}_T \delta_T^{\Gamma *} D_{\delta_T^{\Gamma *}}^{-1}.$$

Pl将其代回 4.11) 式，并利用$\mathbf{B}_T$是极值的这一事实，可得 u s

$$\delta^{\widehat{\Gamma}}_{\widehat{T}} = D^{-1}_{\delta^{\Gamma*}_T}\delta^{\Gamma}_T \mathbf{B}^{T^*}\mathbf{B}^T D^{-1}_{\delta^{\Gamma}_T} = \delta^{\Gamma}_T D^{-1}_{\delta^{\Gamma}_T} D^2_{\delta^{\Gamma}_T} D^{-1}_{\delta^{\Gamma}_T} = \delta^{\Gamma}_T,$$

因此 $\delta^{\Gamma}_{\widehat{T}} = \delta^{\Gamma}_{\widehat{X}}$，如所需。证明完毕。 ∎

推论 4.15. *CNC 行压缩算子 T 的非交换特征函数 B_T 是完全酉不变量：两个 CNC 行压缩算子 T、T' 分别作用于$\mathcal{H}$、$\mathcal{H}'$上，它们酉等价，当且仅当其非交换特征函数 B_T、$B_{T'}$ 弱一致。*

证明。 设 T，T' 是假设中的酉等价 CNC 行压缩算子，即存在酉算子 $U:\mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ 满足 $T' = UT[U^* \otimes I_d]$，并设 $T = V + C$ 和$T' = V' + C'$ 分别为相应的等距–纯分解。由引理2.6 可得

$$V' = UV[U^* \otimes I_d] \quad \text{and} \quad C' = UC[U^* \otimes I_d].$$

若 $(\gamma, \mathrm{J}_\infty, \mathrm{J}_0)$ 是与 V 对应的模型三元组，则显然 $(U\gamma, \mathrm{J}_\infty, \mathrm{J}_0)$ 是与 V'对应的模型三元组。此外，根据定义容易验证 $B^\gamma = B^{U\gamma}$，且 $\delta^\gamma_T = \delta^{U\gamma}_{T'}$。因此，我们得到 $B^{\gamma}{}_{\delta^\gamma_T} = B^{U\gamma}{}_{\delta^{U\gamma}_T}$，而引理 4.11 表明 $B_T = B_{T'}$。

反过来，假设 $B_T \in \mathcal{S}_d(\mathrm{J}, \mathrm{K})$ 与 $B_{T'} \in \mathcal{S}_d(\mathrm{J}', \mathrm{K}')$ 弱重合。根据引理 3.23，这意味着存在一个酉算子 $U: \mathrm{K} \to \mathrm{K}'$，使得 $\left[I_{\mathbb{H}^2_d} \otimes U\right]\mathrm{H}(B) = \mathrm{H}(B')$。利用 Gleason 解的唯一性并应用 (2.12)，我们立即得到，$\mathrm{H}(B)$、$\mathrm{H}(B')$ 的 Gleason 解 X, X' 满足

$$X' = \left[I_{\mathbb{H}^2_d} \otimes U\right] X \left[I_{\mathbb{H}^2_d} \otimes U \otimes I_d\right].$$

于是，定理 4.14 立即表明 T 与 T' 酉等价，证毕。 ∎

5. 交换与非交换模型之间的关系

在 [MR19], 行压缩算子 $T : \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^d \to \mathcal{H}$ 被称为满足交换 *CNC* 条件，记作 T 为 CCNC，当且仅当

$$\bigvee_{z \in \mathbb{B}^d} (I - Tz^*)^{-1} \mathrm{Ran}\, D_{T^*} = \mathcal{H},$$

其中 $\mathbb{B}^d$ 表示 $\mathbb{C}^d$的单位球。注意，根据方程 (2.11)，任何 CCNC 行压缩算子自动都是 CNC。 [MR19], 定理 5.14 的一项主要结果是，行压缩算子 T 是 CCNC，当且仅当它与多变量 de Branges–Rovnyak 空间 $\mathrm{H}(b)$ 中针对压缩乘子 $b \in [H^\infty_d \otimes \mathrm{B}(\mathrm{J}, \mathrm{K})]_1$, 的压缩极值格里森解酉等价；其中 H^∞_d表示 H^2_d（即 Drury–Arveson 空间）的乘子代数。根据 Popescu 关于行压缩算子的交换子提升定理，任意 $b \in [H^\infty_d \otimes \mathrm{B}(\mathrm{J}, \mathrm{K})]_1$ 都有一个压缩的（左）“自由提升”，成为压缩左乘子 $B \in \mathcal{S}_d(\mathrm{J}, \mathrm{K})$，但此提升未必唯一。根据 [JM17，推论 7.2], 当且仅当 b为列极值（CE）时，此提升才唯一。令 $S = (S_1, \cdots, S_d) : H^2_d \otimes \mathbb{C}^d \to H^2_d$表示 Drury–Arveson 空间 H^2_d上的 Arveson d–移位 $S_i := M_{z_i}$，我们将乘以 $F \in H^\infty_d$的线性算子 $F(S) := M_F$ 记作此形式。根据 [JM17，引理 7.5], , 存在一个余等距算子 C_{H^2}，将 $\mathrm{H}(B)$ 映到多变量 de Branges–Rovnyak 空间,

$$\mathscr{H}(b) := \mathscr{R}(\sqrt{I - b(S)b(S)^*}),$$

它压缩地包含于 $H^2_d \otimes$K 中，其初始空间为

$$(I_{\mathbb{H}^2_d} - B(L)B(L)^*)H^2_d \otimes \mathcal{J}$$

定义为

$$C_{H^2}(I_{\mathbb{H}^2} - B(L)B(L)^*)h := (I_{H^2} - b(S)b(S)^*)h; \qquad h \in H^2_d \otimes \mathcal{J}.$$

对于（交换）多变量 de Branges–Rovnyak 空间 H (*b*)， $b \in [H^\infty_d \otimes$B(J , K)$]_1$,，以及压缩的（Schur 类）乘子，其 Gleason 解的定义与自由情形类似（见第 2.6 节）。（与自由情形不同，向量值 Drury–Arveson 空间之间的压缩乘子的 Gleason 解，以及其 de Branges–Rovnyak 空间的 Gleason 解不一定唯一。若要使 $b \in [H^\infty_d \otimes$B(J , K)$]_1$ 存在唯一的压缩且极值的 Gleason 解 b，并使 H (*b*) 存在唯一的极值 Gleason 解 X，一个充分条件是 b 为列极端（CE），如第 2.2 节所述。）如果 X 是 H (*b*) 的一个压缩且极值的 Gleason 解，那么 H (*B*) 的唯一压缩 Gleason 解必然也是极值的，并且二者的关系为

$$X = C_{H^2} X^B [C^*_{H^2} \otimes I_d],$$

根据 [JM17，定理 713]。

因此，（假设 supp(B) = J），若 T 是 CCNC 行压缩算子，则其交换模型的特征函数为 b。然而，由于 T 必然是 CNC，它有一个非交换特征函数为 B_T 的非交换模型，而 T 与作用于 H(B_T) 上的极值 Gleason 解 X^B 酉等价。由于 X^B 是极值的， B 必然是完全等距。总之，我们得到以下结果：

推论 5.1。 一个纯压缩的 $b \in [H^\infty \otimes$B($\mathcal{J}$，$\mathcal{K}$)$]_1$ 有一个完全等距的自由提升 $B \in \mathcal{S}_d(\mathcal{J}$，$\mathcal{K}) = [\mathbb{H}^\infty_d \otimes$B($\mathcal{J}$，$\mathcal{K}$)$]_1$，当且仅当 H (*b*) 有一个压缩且极值的 *Gleason* 解。

证明。若 b 有一个列极值自由提升 $B \in \mathcal{S}_d$(J，K)，则 H (*B*) 的唯一压缩 Gleason 解 X^B 是极值的。根据 [JM17，定理 7，13],若如上定义 $X := C_{H^2} X^B [C^*_{H^2} \otimes I_d]$，则 X 是 H (*b*) 的一个极值 Gleason 解，而 X 因此是特征函数为 b 的 CCNC 行压缩算子，依据 [MR19]。

反之，若 H (*b*) 存在极值 Gleason 解 X，则根据 [MR19], , X 是 CCNC 行压缩算子，因此 X 也是 CNC。根据 [JM17, Theorem 7.13], , 存在 b 的一个自由提升 $B \in \mathcal{S}_d$ (J , K)，使得若 B 和 X^B 分别是 B 与 H (*B*) 的唯一压缩 Gleason 解，则 B 和 X^B 都是极值的，因此根据 [JM20, Theorem 6.4]， B 是列极端的。 ∎

附录 A. 与 Sz.-Nagy–Foias–Popescu 模型的比较

Popescu [Pop89a] 将经典的 CNC 压缩算子的 Sz.-Nagy–Foias 特征函数推广到了非交换行压缩算子的无限元组情形。在我们考虑的有限 d元行压缩算子组中，设其为 T : $\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^d \to \mathcal{H}$，Sz.-Nagy–Foias–Popescu 特征函数 $\Theta_T \in \mathcal{S}_d(\mathcal{D}_T$， $\mathcal{D}_{T^*})$ 定义如下：

$$\Theta_T(Z) := \Big(- [T \otimes I_n] + [D_{T^*} \otimes I_n][I - ZT^*]^{-1}[I_{\mathcal{H}} \otimes Z][D_T \otimes I_n] \Big)\Big|_{\mathcal{D}_T \otimes \mathbb{C}^n}.$$

定理 A.1。 设 $T : \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^d \to \mathcal{H}$ 是一个 *CNC* 行压缩算子。那么，特征函数 B_T 与 *Sz.–Nagy–Foias–Popescu* 特征函数 Θ_T弱一致。

证明。 利用主模型和定理 4.14，只需证明：若 $B \in \mathcal{S}_d(\mathcal{J},\mathcal{K})$是纯压缩且完全等距，并且 X 是 H(B) 的唯一极值 Gleason 解，那么 B 与 Θ_X 弱一致。

为此，设 $X = V + C$ 是 X 的等距–纯分解，并令 (Γ，J ⊕J′，K) 为推论 3.19 中关于 V 的模型三元组。由于 $\Gamma(0) := K_0^B D_B^{-1}(0)^*$ 和 $\Gamma(\infty) := \mathbf{B} D_B^{-1}(0) \oplus \Gamma'(\infty)$（其中 $\mathbf{B}$ 是 B 的唯一极端 Gleason 解）都是到上的等距算子，因此可知 Θ_X 在弱意义下与

$$\widetilde{\Theta}_X(Z) := -[\Gamma(0)^* X \Gamma(\infty) \otimes I_n] + [\Gamma(0) D_{X^*} \otimes I_n][I - ZX^*]^{-1}[I_{\mathscr{H}}(B) \otimes Z][D_X \Gamma(\infty) \otimes I_n],$$

并且，根据命题4.9，我们知道

$$\delta_X^\Gamma = -\Gamma(0)^* X \Gamma(\infty) = B(0) \oplus \mathbf{0}_{\mathcal{J}',\mathcal{J}}.$$

由于 X 是极值的，我们利用性质 $D_{X^*} = \sqrt{K_0^B K_0^{B^*} = K_0^B D_B^{-1}(0)} K_0^{B^*}$ 来计算

$$\begin{aligned}\widetilde{\Theta}_X(Z) &= B(0_n) \oplus [\mathbf{0}_{\mathcal{J}',\mathcal{J}} \otimes I_n] \ + \ [\Gamma(0) D_{X^*} \otimes I_n][I - ZX^*]^{-1}[I_{\mathscr{H}(B)} \otimes Z][D_X \Gamma(\infty) \otimes I_n] \\ &= B(0_n) \oplus [\mathbf{0}_{\mathcal{J}',\mathcal{J}} \otimes I_n] \ + \ [K_0^{B^*} \otimes I_n][I - ZX^*]^{-1}[I_{\mathscr{H}(B)} \otimes Z][D_X \Gamma(\infty) \otimes I_n]. \qquad \text{(A.1)}\end{aligned}$$

由于 $\Gamma(\infty)$ 是到 Ker V 上的等距算子，并且 $X^*X = V^*V + C^*C$，我们注意到

$$\begin{aligned}D_X \Gamma(\infty) &= \sqrt{I_{\mathscr{H}(B)} \otimes I_d - X^* X}\ \Gamma(\infty) \\ &= \sqrt{P_{\operatorname{Ker} V} - P_{\operatorname{Ker} V} C^* C P_{\operatorname{Ker} V}}\ \Gamma(\infty).\end{aligned}$$

在（2.18）中已观察到

$$V^* = X^* \left[I_{\mathscr{H}(B)} - K_0^B D_{B(0)^*}^{-2} K_0^{B^*} \right],$$

由此利用（3.32）可得

$$C^* = X^* K_0^B D_{B(0)^*}^{-2} K_0^{B^*} = -\mathbf{B} B(0)^* D_{B(0)^*}^{-2} K_0^{B^*} = -\mathbf{B} D_{B(0)}^{-1} B(0)^* D_{B(0)^*}^{-1} K_0^{B^*}.$$

由此，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，很容易得到

$$(C^*C)^k = \mathbf{B} D_{B(0)}^{-1} (B(0)^* B(0))^k D_{B(0)}^{-1} \mathbf{B}^*.$$

因此，利用函数演算以及$\mathbf{B}$是极值的这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}\sqrt{I_{\mathscr{H}(B)\otimes\mathbb{C}^d} - X^* X}\ \Gamma(\infty) &= P_{\operatorname{Ker} V} \mathbf{B} D_{B(0)}^{-1} \sqrt{I - B(0)^* B(0)} D_{B(0)}^{-1} \mathbf{B}^* P_{\operatorname{Ker} V} \left[\mathbf{B} D_{B(0)}^{-1} \oplus \Gamma'(\infty) \right] \\ &= \mathbf{B} D_{B(0)}^{-1} \mathbf{B}^* \mathbf{B} D_{B(0)}^{-1} \oplus \mathbf{B} D_{B(0)}^{-1} \mathbf{B}^* \Gamma'(\infty) \\ &= \mathbf{B} \oplus \mathbf{B} D_{B(0)}^{-1} \mathbf{B}^* \Gamma'(\infty).\end{aligned}$$

根据 $\Gamma'(\infty)$ 的定义 （见（3.29）），我们有值域 $\Gamma'(\infty) = \operatorname{Ker} \mathbf{B}^*$，因此上面的最后一个方程变为

$$\sqrt{I_{\mathscr{H}(B)} \otimes I_d - X^* X} \Gamma(\infty) = \mathbf{B} \oplus \mathbf{0}_{\mathcal{J}',\mathscr{H}(B)\otimes\mathbb{C}^d}.$$

将其代入（A.1）并利用（3.33）可得

$$\widetilde{\Theta}_X(Z) = B(0_n) \oplus [\mathbf{0}_{\mathcal{J}',\mathcal{J}} \otimes I_n] \ + \ \big(B(Z) - B(0_n)\big) \oplus [\mathbf{0}_{\mathcal{J}',\mathcal{J}} \otimes I_n] = B(Z) \oplus [\mathbf{0}_{\mathcal{J}',\mathcal{J}} \otimes I_n].$$

~如备注 3.24 中所述，我们立即得出 Θ_X 与 B弱相同，因此 Θ_X也如此。至此，证明完成。 ∎

借助 [BBF07] 的传递函数和实现理论，可以给出一个简单的替代证明，说明任何 CNC 行压缩算子都能由某个非交换 de Branges–Rovnyak 空间的极值 Gleason 解建模。我们认为，我们的方法提供了额外的信息，且本身也值得关注；不过，若不解释这一替代证明，我们便有失妥当。

给定 comp lex、可分希尔伯特空间 H、J 和 K，考虑一个分块算子矩阵 ，

$$M := \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathcal{H} \\ \mathcal{J} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^d \\ \mathcal{K} \end{pmatrix}.$$

这种分块算子矩阵称为一个耦合算子。若 M 是压缩的，则四元组 $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ 通过实现公式定义一个*NC* 传递函数， $B \in \mathcal{S}_d(\mathrm{J}, \mathrm{K})$:

$$B(X) := I_n \otimes \hat{D} + I_n \otimes \hat{C} L_{\hat{A}}(X)^{-1} X \otimes \hat{B}; \qquad X \in \mathbb{B}_n^d,$$

其中 $L^{\hat{}}{}_A(X) := I_n \otimes I_{\mathcal{H}} - \sum_{j=1}^d X_j \otimes \hat{A}_j$是 $\hat{A}$的首一仿射线性铅笔，且 $X \otimes \hat{B} := \sum_{j=1}^d X_j \otimes \hat{B}_j$ [。参见 BBF07，定理 3.1]。四元组 $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ 称为非交换函数 B 的 Fornasini–Marchesini (FM) 实现。反过来，任意 $B \in \mathcal{S}_d(\mathrm{J}, \mathrm{K})$ 都有其典范的 de Branges–Rovnyak 实现和耦合算子，定义如下

$$\begin{pmatrix} X^* & \mathbf{b} \\ K_0^{B*} & b(0) \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathscr{H}(B) \\ \mathcal{J} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathscr{H}(B) \\ \mathcal{K} \end{pmatrix},$$

其中 $X_j^* := R^* \otimes I_{\mathcal{K}}|_{\mathscr{H}(B)}$ 是 $\mathrm{H}(B)$ 的唯一 Gleason 解，且 $\mathbf{B} := R^* \otimes I_{\mathcal{J}} B \in \mathrm{H}(B) \otimes \mathbb{C}^d$ 是 B 的唯一 Gleason 解。该实现始终是余等距且可观测的，其意义是

$$\bigvee_{\omega \in \mathbb{F}_d^+} \operatorname{Ran} \hat{A}^{*\omega} \hat{C}^* = \mathscr{H}(B),$$

其中 $\hat{A} = X^*$ 和 $\hat{C}^* = K_0^B$。根据 [BBF07，推论 3.9 和定理 4。3], 任意两个关于 $B \in \mathcal{S}_d(\mathcal{J}、\mathcal{K})$ 的余等距且可观测实现，

$$\begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathcal{H} \\ \mathcal{J} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^d \\ \mathcal{K} \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} \widetilde{A} & \widetilde{B} \\ \widetilde{C} & \widetilde{D} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \widetilde{\mathcal{H}} \\ \mathcal{J} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \widetilde{\mathcal{H}} \otimes \mathbb{C}^d \\ \mathcal{K} \end{pmatrix},$$

~在酉等价意义下等价，即存在一个酉算子 $U : \mathrm{H} \twoheadrightarrow \mathrm{H}$ 满足

$$\begin{pmatrix} U \otimes I_d & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{K}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{A} & \widetilde{B} \\ \widetilde{C} & \widetilde{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{J}} \end{pmatrix}.$$

若 $T : \mathrm{H} \otimes \mathbb{C}^d \to \mathrm{H}$ 是任意行压缩算子，则其 *Julia* 矩阵，

$$U_T := \begin{pmatrix} T^* & D_T \\ D_{T^*} & -T \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathcal{H} \\ \operatorname{Ran} D_T \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^d \\ \operatorname{Ran} D_{T^*} \end{pmatrix},$$

是满射 等距算子。特别地， U_T 是余等距的，并令 $A := T^*, C := D_{T^*}$ ，

$$\bigvee A^{*\omega} C^* = \bigvee_{\omega \in \mathbb{F}_d^+} T^\omega D_{T^*},$$

因此，只要 T 由（2.11）可知是 CNC 的，这个 FM 耦合算子就是可观测的。

根据 [BBF07，定理 3.1]，， U_T 的 NC 传递函数 B_T 属于 NC Schur 类 $B_T \in \mathcal{S}_d(\mathcal{D}_T, \mathcal{D}_{T^*})$；根据 [BBF07，定理 4.3]，， B_T的典范 de Branges–Rovnyak 耦合与 U_T 酉等价。因此， T^*与 X^*酉等价，其中 $X^* := R^* \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}}|_{\mathcal{H}(B_T)}$ 是 $\mathrm{H}(B_T)$ 的唯一压缩且极值的 Gleason 解，所以 T与 X酉等价。此外，根据我们先前的结果，这个算子值非交换舒尔类函数 B_T 与 T的非交换特征函数一致。

参考文献

[AMY20] J. Agler, J.E. McCarthy 和 N.J. Young。《算子分析：复分析中的希尔伯特空间方法》。第 219 卷。剑桥大学出版社，2020（引于第 2 页）。[AMR13] A. Aleman、R.T.W. Martin 和 W.T. Ross。“关于 Livsic 定理 ”。载于：《J. Funct. Anal.》 264 （ 2013 ），第 999–1048 页（引于第 2 页）。[AMS25] M.L. Augat、R.T.W. Martin 和 E. Shamovich。“非交换解析函数的算子实现”。载于：《数学论坛：西格玛》13（2025），e137（引于第 4、18 页）。[BMN24] J. Bal、R.T.W. Martin 和 F. Naderi。“ Lebesgue 分解的再生核方法”。载于：《加拿大数学杂志》（2024），第 1–41 页（引于第 12 页）。[BBF07] J.A. Ball、V. Bolotnikov 和 Q. Fang。“福克空间上的 Schur 类乘子：de Branges-Rovnyak 再生核空间与转移函数实现”。载于：《算子理论、结构矩阵与膨胀》，Theta 数学进展丛书，Tiberiu Constantinescu 纪念卷。第 7 卷。Theta 基金会，2007，第 101–130 页（引于第 3、4、12、15、46、47 页）。[BGM05] J.A. Ball、G. Groenewald 和 T. Malakorn。“结构化非交换多维线性系统”。载于：《SIAM 控制与优化杂志》44（2005），第 1474–1528 页（引于第 4 页）。[BK87] J.A. Ball 和 T.L. Kriete。“算子值 Nevanlinna-Pick 核与压缩算子的函数模型”。载于：《积分方程与算子理论》10（ 1987），第 17–61 页（引于第 1 页）。[BMV16] J.A. Ball、G. Marx 和 V. Vinnikov。“非交换再生核希尔伯特空间”。载于：《J. Funct. Anal.》271（2016），第 1844–1920 页（引于第 4、10、11 页）。[BTV 01] J.A. Ball、T.T. Trent 和 V. Vinnikov。“再生核希尔伯特空间中乘子的插值与交换子提升”。载于：《算子理论与分析》，算子理论进展与应用，第 122 卷。施普林格，2001，第 89–138 页（引于第 26、27、38 页）。[BR66] L. de Branges 和 J. Rovnyak。“关于平方可和幂级数的附录：量子散射理论中的典范模型”。载于：《微扰理论及其在量子力学中的应用》。威利，1966，第 295–392 页（引于第 1 页）。[BR15] L. de Branges 和 J. Rovnyak。《平方可和幂级数》。Courier Corporation，2015（引于第 1 页）。[CR94] P.M. Cohn 和 C. Reutenauer。“自由域中的一种标准形”。载于：《加拿大数学杂志》46（1994），第 517–531 页（引于第 4 页）。[CR99] P.M. Cohn 和 C. Reutenauer。“关于自由域的构造”。载于：《国际代数与计算杂志》9（1999），第 307–323 页（引于第 4 页）。[DP99] K.R. Davidson 和 D.R. Pitts。“ 自由半群代数的不变子空间与超反身性”。载于：《伦敦数学会会刊》78（1999），第 401–430 页（引于第 2 页）。[Fli70] M. Fliess。“将非交换有理级数代数嵌入一个除环”。载于：《巴黎科学院报告》，A 系列，271（1970），第 926–927 页（引于第 4 页）。[Fli74] M. Fliess。“关于形式级数的若干乘积”。载于：《法国数学会通报》102（1974），第 181–191 页（引于第 4 页）。[FM16a] E. Fricain 和 J. Mashreghi。《H(*b*) 空间理论》。第 1 卷。剑桥大学出版社，2016（引于第 2 页）。[FM16b] E. Fricain 和 J. Mashreghi。《H(*b*) 空间理论》。第 2 卷。剑桥大学出版社，2016（引于第 2、12 页）。[GMR16] S.R. Garcia、R.T.W. Martin 和 W.T. Ross。“偏等距算子上的偏序”。载于：《算子理论杂志》75（2016），第 409–442 页（引于第 2 页）。

[GG12] M.I. Gorbachuk 和 V.I. Gorbachuk（编）。M.G. Kreˇın 关于整函数算子的讲义。第 97 卷。算子理论进展与应用。Birkh¨auser，2012（引于第 2、5 页）。[HST06] U.V. Haagerup、H. Schultz 和 S. Thorbjørnsen。“一种研究 $C^*_{red}(\mathbb{F}_2)$ 中缺少投影的方法：随机矩阵方法”。载于：《Adv. Math.》204（2006），第 1–83 页（引于第 4 页）。[HT05] U.V. Haagerup 和 S. Thorbjørnsen。“随机矩阵的新应用：$C^*_{red}(\mathbb{F}_2)$ 不是群”。载于：《Ann. Math.》（2005），第 711–775 页（引于第 4 页）。[HMS18] J.W. Helton、T. Mai 和 R. Speicher。“实现（又称线性化）在自由概率中的应用”。载于：《J. Funct. Anal.》274（2018），第 1–79 页（引于第 4 页）。[HM12] J.W. Helton 和 S. McCullough。“每个凸自由基本半代数集都有一个 LMI 表示”。载于：《Ann. Math.》（2012），第 979–1013 页（引于第 4 页）。[HMV06] J.W. Helton、S.A. McCullough 和 V. Vinnikov。“非交换凸性源自线性矩阵不等式”。载于：《J. Funct. Anal.》240（2006），第 105–191 页（引于第 4 页）。[JM12] M.T. Jury 和 R.T.W. Martin。“非交换单位行球上的子 Hardy-Hilbert 空间”。载于：《函数空间、理论与应用》。Fields Institute Communications。施普林格，2012，第 349–398 页（引于第 2、12 页）。[JM17] M.T. Jury 和 R.T. W. Martin。“自由与阿贝尔 Toeplitz 代数的非交换 Clark 测度”。载于：《J. Math. Anal. Appl.》456（2017），第 1062–1100 页（引于第 10、12、14、15、43、44 页）。[JM20] M.T. Jury 和 R.T.W. Martin。“自由 Hardy 空间的列极端乘子”。载于：《J. Lond. Math. Soc.》101.2（2020），第 457–489 页（引于第 10–12、14、15、22、28、38、44 页）。[JM22] M.T. Jury 和 R.T.W. Martin。“非交换测度的 Fatou 定理”。载于：《Adv. Math.》400（2022），第 108293 页（引于第 2 页）。[JMS21] M.T. Jury、R.T.W. Martin 和 E. Shamovich。“自由非交换函数的 Blaschke–奇异–外因子分解”。载于：《Adv. Math.》384（2021），第 107720 页（引于第 2 页）。[KV14] D.S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi 和 V. Vinnikov。《自由非交换函数理论基础》。美国数学会，2014（引于第 2、7 页）。[KFA69] R.E. Kalman、P.L. Falb 和 M.A. Arbib。《数学系统理论专题》。麦格劳-希尔，1969（引于第 4 页）。[Kre49] M.G. Kreˇın。“亏指数为 (m, m) 的厄米算子表示理论的主要方面”。载于：《Ukrain. Mat. Zh.》2（1949），第 3–66 页（引于第 5 页）。[Liv46] M.S. Livˇsic。“希尔伯特空间上的一类线性算子”。载于：《Mat. Sbornik》19（1946），第 239–260 页（引于第 2、5 页）。[Liv47] M.S. Livˇsic。“关于亏指数相等的等距算子理论”。载于：《Dokl. Akad. Nauk SSSR》（新系列）58（1947），第 13–15 页（引于第 2 、 5 页）。[MSY23] T. Mai 、 R. Speicher 和 S. Yin。“ 自由域：通过无界算子实现及 Atiyah 性质 ”。载于：《J. Funct. Anal.》285（2023），第 110016 页（引于第 4 页）。[Mar15] R.T.W. Martin。“对称算子的扩张 I：内特征函数情形”。载于：《Concr. Oper.》2（2015），第 53–97 页（引于第 2 页）。[MR19] R.T.W. Martin 和 A. Ramanantoanina。“行压缩算子的 Gleason 解模型”。载于：《插值与实现理论及其在控制理论中的应用：纪念 Joe Ball》，施普林格，2019，第 249–305 页（引于第 2、5、9、12–14、34、35、43、44 页）。[NV86] N.K. Nikolskii 和 V.I. Vasyunin。“关于比伯巴赫猜想中两种函数模型的札记”。载于：《比伯巴赫猜想：证明之际召开的研讨会论文集》，《Math. Surveys》第 21 卷。美国数学会，1986，第 113–141 页（引于第 1 页）。[Pop89a] G. Popescu。“非交换算子无限序列的特征函数”。载于：《J. Oper. Theory》22（1989），第 51–71 页（引于第 2、5、44 页）。[Pop89b] G. Popescu。“非交换算子无限序列的模型”。载于：《Acta Sci. Math.》53（1989），第 355–368 页（引于第 2 页）。[Pop89c] G. Popescu。“多解析算子与若干因子分解定理”。载于：《Indiana Univ. Math. J.》38（1989），第 693–710 页（引于第 2 页）。[Pop95] G. Popescu。“福克空间上的多解析算子”。载于：《Math. Ann.》303（1995），第 31–46 页（引于第 2 页）。

[Pop06a] G. Popescu. 熵与多变量插值。美国数学会，2006（引文见第2页）。[Pop06b] G. Popescu. “B(H)″单位球上的自由全纯函数”。载于：《J. Funct. Anal.》241（2006），第268–333页（引文见第2、3、7–9页）。[PV21] M. Porat 和 V. Vinnikov. “矩阵中心附近的非交换有理函数的实现，I：综合、极小实现及在稳定有限代数上的求值”。载于：《J. Lond. Math. Soc.》104（2021），第1250–1299页（引文见第6页）。[SSS18] G. Salomon、O.M. Shalit 和 E. Shamovich. “非交换单位球子簇上的有界非交换解析函数代数”。载于：《美国数学会汇刊》370（2018），第8639–8690页（引文见第3、8、11页）。[Sar94] D. Sarason. 单位圆盘中的Sub-Hardy希尔伯特空间。约翰·威利父子公司，1994（引文见第1、2、12页）。[Sch61] M.P. Sch¨utzenberger. “关于自动机族的定义”。载于：《信息与控制》4（1961），第245–270页（引文见第4页）。[SF70] B. Sz.-Nagy 和 C. Foias.. 希尔伯特空间上算子的调和分析。爱思唯尔，1970（引文见第1、8页）。[Tay72] J.L. Taylor. “多算子函数演算的一般框架”。载于：《Adv. Math.》（1972）（引文见第2页）。[Tay73] J.L. Taylor. “多个非交换变量的函数”。载于：《美国数学会通报》（1973）（引文见第2页）。[Voi04] D.-V. Voiculescu. “自由分析问题 I：余代数的对偶变换 $\partial_{X:B}$”。载于：《国际数学研究通讯》（2004）（引文见第2页）。[Voi10] D.-V. Voiculescu. “自由分析问题 II：格拉斯曼完备化及原点处的级数展开”。载于：《纯粹与应用数学杂志》（2010）（引文见第2页）。

数学系，曼尼托巴大学，温尼伯，加拿大电子邮箱地址：Robert.Martin@umanitoba.ca

数学系，曼尼托巴大学，温尼伯，加拿大电子邮箱地址：
Jeet.Sampat@umanitoba.ca