孳生地控制下蚊种群动力学博弈论模型中的振荡状态

Mohammad Rubayet Rahman[1],Chanaka Kottegoda[2], 和 Lucas M. Stolerma n[3]

摘要

蚊媒疾病仍是重大公共卫生威胁，有效控制蚊虫种群需要家庭持续参与清除孳生地。尽管环境驱动因素造成的蚊虫振荡已得到广泛研究，但家庭自发决策对蚊虫种群动态的影响仍未得到充分理解。我们提出一种博弈论模型，其中，参与孳生地控制的家庭比例会通过由感知风险驱动的模仿动力学而发生变化。家庭行为调节蚊虫水生阶段的承载能力，从而在控制措施与蚊虫种群增长之间形成反馈。对于收益恒定的简化模型，我们刻画了四种局部稳定平衡，分别对应家庭全面控制或完全不控制，以及蚊虫种群的存在或缺失。当不控制孳生地的感知风险取决于蚊子流行率时，系统会出现一个家庭部分参与的额外平衡态。我们推导出该平衡态发生Hopf分岔的条件，由此产生仅由蚊虫丰度与家庭行为之间的相互作用所引发的持续振荡。数值模拟和参数探索进一步描述了这些振荡状态的振幅和相位特征。

arXiv:2601.05222v1 [math.DS] 8 Jan 2026

1 引言

登革热、寨卡、基孔肯雅热和黄热病等蚊媒疾病（MBDs）仍在全球范围内构成重大的公共卫生挑战 [1]。例如，近期估计显示，每年发生 1 亿至 4 亿例登革热感染，造成大量重症病例和死亡 [2]。蚊媒疾病传播是通过感染雌蚊叮咬实现的：它们吸食感染者的血液时获得病毒，随后将病毒传播给易感个体。由于大多数蚊媒疾病尚无普遍有效的疫苗或大规模治疗方案，公共卫生策略在很大程度上依赖于减少蚊子种群[3]。其中一项特殊挑战是蚊子偏好叮咬并吸食人血。埃及伊蚊等物种埃及伊蚊 和 白纹伊蚊 具有很强的嗜人性，主要在家庭附近的小型人工容器中孳生。因此，有效控制蚊虫种群必须包括清除孳生地 [4, 5, 6]。社区参与对于减少或消除城市地区的蚊幼虫栖息地至关重要 [7]。家庭是否愿意参与孳生地控制，取决于地方政府的沟通成效以及人们对蚊媒疾病危险性的感知 [8, 9]。即使需要付出劳动，控制蚊虫种群所带来的预期益处也能促使人们积极参与

必须清除盛水容器。

[1]俄克拉何马州立大学数学系，俄克拉何马州斯蒂尔沃特，邮编 74078，电子邮箱：rubayet.rahman@okstate.edu[2]马歇尔大学数学系与物理学系，西弗吉尼亚州亨廷顿，电子邮箱：kottegoda@marshall.edu[3]俄克拉何马州立大学数学系，俄克拉何马州斯蒂尔沃特，邮编 74078，电子邮箱：lucas.martins stolerman@okstate.edu

蚊种群动力学可能十分复杂，受到环境因素与生物因素相互作用的驱动。实证研究报告称，温度和降雨波动与显著的季节性成分及振荡模式相关 [10, 11, 12]。数学模型成功阐明了这些振荡背后的机制，包括气候驱动参数、非线性以及关键发育延迟的影响 [13, 14, 15, 16]。然而，尽管越来越多的证据表明人类行为具有重要影响，人类行为如何塑造蚊种群动力学仍未得到充分理解 [17, 18]。在孳生地控制方面，现有模型考察了由环境意识波动[19, 20]或周期性人为干预所驱动的脉冲式机械清除 [21]所引发的振荡。然而，据我们所知，尚无建模研究探讨受风险感知调节的家庭自发参与如何产生非平凡的动态。

本文提出一个模型，用于研究孳生地控制下的蚊种群动力学。受 Bauch 提出的、具有模仿动力学的疫苗接种博弈 [22], 启发，我们采用博弈论框架，其中采取控制措施的家庭比例由基于感知风险的收益决定。为整合行为学和昆虫学组成部分，我们假设水生种群的承载能力依赖于行为。对于收益恒定的简化模型，我们确定了四个局部稳定的稳态，分别对应于完全控制或不控制孳生地，以及蚊虫种群存在或不存在。随后，我们扩展模型，使不控制孳生地的收益取决于蚊子流行率，以体现家庭在频繁遇到蚊子时会感知到更高风险这一观点。在这种情况下，我们得到第五个稳态，即部分孳生地控制，并且模型在某些条件下会发生 Hopf分岔。我们通过数值模拟和参数探索，进一步分析所得稳定振荡的振幅和相位特征，以补充解析结果。

本文结构安排如下。第 2 节介绍行为—昆虫学模型，详细说明蚊种群动力学、支配家庭控制的模仿动力学，以及如何将行为依赖型承载量纳入模型。第 3 节给出恒定收益模型和收益依赖于流行率的完整博弈论模型的解析结果，包括识别 Hopf分岔的分析。第 4 节通过数值模拟补充理论发现，展示轨迹、振荡状态，以及振幅和相位对关键参数的依赖关系。最后，第 5 节讨论研究结果的意义、建模框架的局限性以及未来研究的潜在方向。

2 模型构建

2.1 蚊种群动力学

蚊子生命周期包括四个阶段：卵、幼虫、蛹和成蚊。这里将前三个阶段归入单一的水生种群区室。成蚊种群区室代表已完全发育、

能够飞行、繁殖和传播疾病的蚊子。遵循 Dumont和Thuilliez [21], 提出的方法，我们采用昆虫学模型：

$$\begin{aligned}\frac{dL_v}{dt} &= rbA_v\left(1-\frac{L_v}{K_v}\right)-(\nu_L+\mu_L)L_v\\ \frac{dA_v}{dt} &= \nu_L L_v-\mu_A A_v.\end{aligned} \tag{1}$$

这里， L_v 和 A_v 分别表示水生种群区室和成蚊种群区室。性比 r表示蚊子种群中雌蚊所占的比例。产卵率 b 表示雌蚊单位时间内产卵的平均数量。转移率 ν_L 表示蚊子从水生阶段发育至成蚊阶段的速率。参数 μ_L 和 μ_A 分别表示蚊子在水生阶段和成蚊阶段的自然死亡率。最后， K_v 表示承载能力，即蚊子孳生地的可用量。非线性项 $rbA_v\left(1-\frac{L_v}{K_v}\right)$ 表示水生蚊虫的增长率。基本繁殖数定义为

—

$$N=\frac{\nu_L rb}{(\nu_L+\mu_L)\mu_A}$$

它量化了一只成蚊在其一生中平均产生的成蚊数量。

2.2 家庭控制蚊子孳生地

我们假设家庭会决定是否采取机械控制措施来治理蚊子孳生地，下文将其称为孳生地控制，或简称控制。遵循疫苗接种策略背景下提出的模仿博弈框架 [22, 23], ，我们将实施孳生地控制的感知收益定义为$f_c=-r_c$，其中 $r_c>0$ 是对控制措施所带来负担的感知风险，例如时间或金钱成本。我们认为，家庭不实施控制的感知收益 f_d 取决于对蚊媒感染的感知风险（$r_d>0$），以及随时间暴露于传染性蚊虫叮咬的感知风险；我们假设后者会随成蚊种群 A_v的增加而上升。为简化起见，此处采用线性模型

$$f_d\left(A_v\right)=-r_d m A_v$$

其中， m 是一个参数，用于量化家庭行为对蚊子流行率变化的敏感程度。模仿动力学假设，家庭倾向于采取感知收益 [24]较高的策略。因此，执行和不执行孳生地控制的家庭比例 w 和 $\bar{w}$ 满足以下系统：

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= kf_c\bar{w}w-kf_d\bar{w}w\\ \frac{d\bar{w}}{dt} &= kf_d\bar{w}w-kf_c\bar{w}w\end{aligned}$$

其中， k 是表示模仿率的尺度系数。由于 $\bar{w} = 1 - w$，描述w 的微分方程为

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= kw(1-w)\left(f_c - f_d\left(A_v\right)\right) \\ &= kw(1-w)\left(-r_c + r_d m A_v\right). \end{aligned} \tag{2}$$

该模型结构与 Bauch 在 [22], 提出的疫苗接种博弈动态相呼应，其中孳生地控制和成蚊种群分别对应疫苗接种和疾病流行率。

2.3 与行为依赖型承载量相结合的模型

我们的模型捕捉了蚊虫控制措施对可用孳生地的影响，并以承载能力 K_v表示。图1展示了昆虫学模型（1）与方程（2）给出的行为动态的整合。为纳入家庭控制对蚊虫种群的影响，我们假设增长率 Λ 取决于 w，而 w 调节水生阶段的承载能力。具体而言，我们定义 $\Lambda(w) = rbA_v\left(1 - \frac{L_v}{K_v(w)}\right)$，其中 $K_v(w)$ 是一个线性函数，当 $w = 0$ 时取最大值 $K_{v_{\max}}$，当 $w = 1$ 时取最小值 $K_{v_{\min}}$。

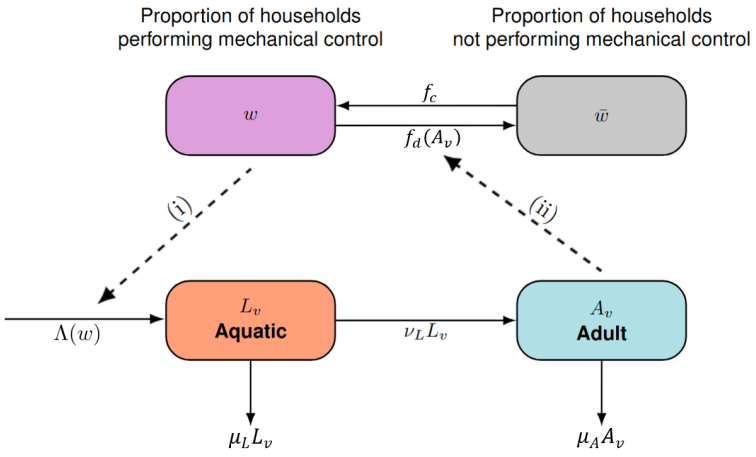


图1：我们对家庭蚊虫控制措施对孳生地可用性的动态影响进行建模。这里， w 和 $\bar{w}$ 分别表示实施和未实施孳生地控制的家庭比例。虚线箭头表示昆虫学和行为组成部分的整合方式：（i）水生蚊虫的增长率 $\Lambda(w)$，是实施控制的家庭比例的函数；（ii）未实施控制的感知收益 $f_d(A_v)$，是成蚊种群 A_v的函数。

模型方程由以下系统给出：

$$\begin{aligned} \frac{dL_v}{dt} &= rbA_v\left(1 - \frac{L_v}{K_v(w)}\right) - (\nu_L + \mu_L)L_v, \\ \frac{dA_v}{dt} &= \nu_L L_v - \mu_A A_v, \\ \frac{dw}{dt} &= kw(1-w)\left[-r_c + r_d m A_v\right]. \end{aligned} \tag{3}$$

其中 $K_v(w) = K_{v_{\max}} - w(K_{v_{\max}} - K_{v_{\min}})$。直观而言，当实施孳生地控制的收益高于不实施控制的收益时（即 $f_c > f_d$ 或 $r_d m A_v > r_c$），参与控制的家庭比例会增加（$\frac{dw}{dt} > 0$），从而使孳生地减少，这体现为承载能力$K_v(w)$的下降。相反，当 $f_c < f_d$时，家庭参与度下降（w 减少），可利用的孳生地随之增加。系统在时间 $t = 0$ 处的初始条件均为非负，且 $w(0) \in [0, 1]$。由于系统（ 3 ）的右端连续可微，柯西 - 利普希茨定理保证该初值问题存在唯一的极大解。此外，集合

$$K = \left\{(L_v, A_v, w) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \le L_v \le K_{v_{\max}}, \ 0 \le A_v \le \frac{\nu_L}{\mu_A} K_{v_{\max}}, \ 0 \le w \le 1\right\}.$$

根据（3），该集合是正向不变的。接下来，我们将分析模型的稳态和局部稳定性。为便于理解，我们先考察 $f_d = -r_d$ 的简单情形（第 3.1 节）。我们将系统（3）称为完整博弈论模型，并在第 3.2 节对其进行分析。

3 稳态与局部稳定性分析

3.1 具有恒定收益的简化模型

我们首先考虑这样一种情形：不采取孳生地控制的感知收益为 $f_d = -r_d$，其中 r_d 表示蚊媒感染的恒定感知风险。这种情形为系统（3）的分析奠定了基础。此外，在一些情况下，个体对蚊虫叮咬暴露风险的感知会随时间保持稳定，例如，获取昆虫学信息的渠道有限，或人们的感知主要受习惯、文化规范或长期宣传活动的影响。模型方程由以下系统给出：

$$\begin{aligned}
\frac{dL_v}{dt} &= rbA_v \left(1 - \frac{L_v}{K_v(w)}\right) - (\nu_L + \mu_L) L_v, \\
\frac{dA_v}{dt} &= \nu_L L_v - \mu_A A_v, \\
\frac{dw}{dt} &= kw(1 - w)\left[-r_c + r_d\right],
\end{aligned} \tag{4}$$

其中 $K_v(w) = K_{v_{\max}} - w(K_{v_{\max}} - K_{v_{\min}})$。

稳态

为求出系统（4）在生物学上合理（非负）的稳态，我们必须找到 L_v, A_v, w ，使得

模型所有分量的时间导数均为零。因此，我们必须求解以下系统：

$$\begin{aligned} rbA_v\left(1-\frac{L_v}{K_v(w)}\right)-(\nu_L+\mu_L)L_v&=0,\\ \nu_L L_v-\mu_A A_v&=0,\\ kw(1-w)(-r_c+r_d)&=0. \end{aligned}$$

We l命题1中的稳态列表。证明见补充材料 al.

命题1. 系统(4)的稳态(L_v^*, A_v^*, w^*) 及其解释如下：E_{01}：$(L_v^*, A_v^*, w^*) = (0, 0, 0)$：无蚊，不进行孳生地控制。

——

E_{02}：$(L_v^*, A_v^*, w^*) = (0, 0, 1)$：无蚊，全面孳生地控制。

E_{03}：

$$(L_v^*, A_v^*, w^*) = \left(K_{v_{\max}}\left(1-\frac{1}{N}\right), \frac{\nu_L}{\mu_A}K_{v_{\max}}\left(1-\frac{1}{N}\right), 0\right)$$

当且仅当 $N > 1$：有蚊，不进行孳生地控制。

E_{04}：

$$(L_v^*, A_v^*, w^*) = \left(K_{v_{\min}}\left(1-\frac{1}{N}\right), \frac{\nu_L}{\mu_A}K_{v_{\min}}\left(1-\frac{1}{N}\right), 1\right)$$

当且仅当 $N > 1$：有蚊，全面孳生地控制。

在获得稳态及其存在参数区域的显式表达式后，我们分析它们在小扰动下的局部稳定性。我们采用基于Hartman–Grobman定理 [25, 26], 的经典线性化方法，推导出各稳态局部渐近稳定（LAS）或不稳定的条件。系统的雅可比矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{rbA_v}{K_v(w)} - (\nu_L+\mu_L) & rb\left(1-\frac{L_v}{K_v(w)}\right) & \frac{-rbA_vL_v(K_{v_{\max}}-K_{v_{\min}})}{(K_v(w))^2} \\ \nu_L & -\mu_A & 0 \\ 0 & 0 & k(-r_c+r_d)(1-2w) \end{bmatrix}. \tag{5}$$

我们在每个稳态处计算雅可比矩阵（5）并求出其特征值。当所有特征值均具有负实部时，该稳态为局部渐近稳定；当至少有一个特征值具有正实部时，该稳态不稳定。稳定性条件总结如下定理所述。

定理1。系统（4）中各稳态的局部稳定性如下所述：

1. 如果 $r_c - r_d > 0$，且 $N < 1$，则 E_{01} 局部渐近稳定；E_{02} 不稳定。*2.* 如果 $r_c - r_d < 0$，且 $N < 1$，则 E_{02} 局部渐近稳定；E_{01} 不稳定。*3.* 如果 $r_c - r_d > 0$，且 $N > 1$，则 E_{03} 局部渐近稳定；E_{01}、E_{02} 和 E_{04} 不稳定。*4.* 如果 $r_c - r_d < 0$，且 $N > 1$，则 E_{04} 局部渐近稳定；E_{01}、E_{02} 和 E_{03} 不稳定。

证明。 我们将分别分析每个稳态，并证明第 1–4 项中的结论。

- E_{01}: 我们在稳态 E_{01} 处计算雅可比矩阵并求出特征值，然后推导稳定性条件。在 E_{01} 处的雅可比矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -(\nu_L + \mu_L) & rb & 0 \\ \nu_L & -\mu_A & 0 \\ 0 & 0 & k(r_d - r_c) \end{bmatrix}$$

由此得到的特征方程为 $\det(J - \lambda I) = 0$，其中

$$J - \lambda I = \begin{bmatrix} -(\nu_L + \mu_L) - \lambda & rb & 0 \\ \nu_L & -\mu_A - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & k(r_d - r_c) - \lambda \end{bmatrix}.$$

沿矩阵第三行展开即可计算该矩阵的行列式，即

$$\begin{aligned} \det(J - \lambda I) &= (k(r_d - r_c) - \lambda) \det \begin{bmatrix} -(\nu_L + \mu_L) - \lambda & rb \\ \nu_L & -\mu_A - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (k(r_d - r_c) - \lambda) \left(\lambda^2 + [(\nu_L + \mu_L) + \mu_A]\lambda + [(\nu_L + \mu_L)\mu_A - rb\nu_L]\right). \end{aligned}$$

因此，一个特征值为 $\lambda_1 = k(r_d - r_c)$，另外两个特征值是二次多项式的根，即

$$\lambda_{2,3} = \frac{-[(\nu_L + \mu_L) + \mu_A] \pm \sqrt{[(\nu_L + \mu_L) + \mu_A]^2 - 4[(\nu_L + \mu_L)\mu_A - rb\nu_L]}}{2}.$$

当 $k(r_d - r_c) < 0 \Leftrightarrow r_c - r_d > 0$ 时，特征值 λ_1 将为负；而另外两个特征值 $\lambda_{2,\,3}$ 的实部将为负，当

$$(\nu_L + \mu_L)\mu_A - rb\nu_L > 0 \quad \Leftrightarrow \quad N < 1.$$

因此， E_{01} 局部渐近稳定，这证明了第 1 项中所述的稳定性条件。另一方面，如果至少有一个特征值为正，则 E_{01} 会变得不稳定；当 $r_d - r_c > 0$ 或 $N > 1$ 时，就会出现这种情况。

- E_{02}: 特征方程为 $\det(J - \lambda I) = 0$，其中

$$J = \begin{bmatrix} -(\nu_L + \mu_L) & rb & 0 \\ \nu_L & -\mu_A & 0 \\ 0 & 0 & k(r_c - r_d) \end{bmatrix}.$$

行列式可沿第三行展开计算，即:

$$\det(J-\lambda I)=(k\,(r_c-r_d)-\lambda)\det\begin{bmatrix}-(\nu_L+\mu_L)-\lambda & rb\\ \nu_L & -\mu_A-\lambda\end{bmatrix}$$

$$=(k\,(r_c-r_d)-\lambda)\left(\lambda^2+[(\nu_L+\mu_L)+\mu_A]\,\lambda+[(\nu_L+\mu_L)\,\mu_A-rb\nu_L]\right)$$

第一个特征值为 $\lambda_1=k(r_c-r_d)$，另外两个特征值为

$$\lambda_{2,3}=\frac{-[(\nu_L+\mu_L)+\mu_A]\pm\sqrt{[(\nu_L+\mu_L)+\mu_A]^2-4\,[(\nu_L+\mu_L)\mu_A-rb\nu_L]}}{2}.$$

由于 $k>0$，特征值 λ_1 为负当且仅当 $r_c-r_d<0$。此外，由于 $(\nu_L+\mu_L)+\mu_A>0$，另外两个特征值 $\lambda_{2,3}$ 具有负实部当且仅当

$$(\nu_L+\mu_L)\,\mu_A-rb\nu_L>0\quad\Leftrightarrow\quad N<1.$$

因此，E_{02} 局部渐近稳定，如条目 2 所述；当 $r_c-r_d>0$ 或 $N>1$ 时则变得不稳定 .

- $\underline{E_{03}}$: E_{03} 处的雅可比矩阵为

$$J=\begin{bmatrix}-\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right) & \frac{rb}{N} & -rb\frac{\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)^2(K_{v_{\max}}-K_{v_{\min}})\\ \nu_L & -\mu_A & 0\\ 0 & 0 & k(r_d-r_c)\end{bmatrix}$$

特征方程为 $\det(J-\lambda I)=0$，其中

$$J-\lambda I=\begin{bmatrix}-\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)-\lambda & \frac{rb}{N} & -rb\frac{\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)^2(K_{v_{\max}}-K_{v_{\min}})\\ \nu_L & -\mu_A-\lambda & 0\\ 0 & 0 & k(r_d-r_c)-\lambda\end{bmatrix}.$$

这个矩阵的行列式可以沿第三行展开计算，即，

$$\det(J-\lambda I)=[k(r_d-r_c)-\lambda]\det\begin{bmatrix}-\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)-\lambda & \frac{rb}{N}\\ \nu_L & -\mu_A-\lambda\end{bmatrix}$$

$$=[k(r_d-r_c)-\lambda]$$

$$\left[\lambda^2+\left(\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)+\mu_A\right)\lambda+\left(\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)\mu_A-\frac{rb\nu_L}{N}\right)\right].$$

第一个特征值为 $\lambda_1 = k(r_d - r_c)$，另外两个特征值为

$$\lambda_{2,3} = \frac{-\left(\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)+\mu_A\right)}{2} \pm \frac{\sqrt{\left(\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)+\mu_A\right)^2 - 4\left(\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)\mu_A - \frac{rb\nu_L}{N}\right)}}{2}.$$

特征值 λ_1 为负当且仅当 $r_c - r_d > 0$。特征值 $\lambda_{2,3}$ 具有负实部当且仅当

$$\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)\mu_A - \frac{rb\nu_L}{N} > 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(1-\frac{2}{N}\right) > -\frac{(\nu_L+\mu_L)\,\mu_A}{rb\nu_L} = \frac{1}{N}$$

当 $N > 1$ 时该条件成立（ E_{03}的存在条件）。因此， E_{03} 是局部渐近稳定的，这证实了第 3 项中所述的稳定性条件。反之，当 $r_d - r_c > 0$时， E_{03} 是不稳定的。

- $\underline{E_{04}}$： E_{04} 处的雅可比矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right) & \frac{rb}{N} & -rb\frac{\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)^2\left(K_{v_{\max}}-K_{v_{\min}}\right) \\ \nu_L & -\mu_A & 0 \\ 0 & 0 & k(r_c-r_d) \end{bmatrix}$$

特征方程变为 $\det(J - \lambda I) = 0$，其中

$$J - \lambda I = \begin{bmatrix} -\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)-\lambda & \frac{rb}{N} & -rb\frac{\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)^2\left(K_{v_{\max}}-K_{v_{\min}}\right) \\ \nu_L & -\mu_A-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & k(r_c-r_d)-\lambda \end{bmatrix}.$$

沿该矩阵的第三行展开即可计算其行列式，即

$$\det(J-\lambda I) = [k(r_c-r_d)-\lambda]\det\begin{bmatrix} -\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)-\lambda & \frac{rb}{N} \\ \nu_L & -\mu_A-\lambda \end{bmatrix}$$

由此得到

$$\det(J-\lambda I) = [k(r_c-r_d)-\lambda]\cdot$$
$$\left[\lambda^2 + \left(\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)+\mu_A\right)\lambda + \left(\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)\mu_A - \frac{rb\nu_L}{N}\right)\right].$$

第一个特征值为 $\lambda_1 = k(r_c - r_d)$，另外两个特征值为

$$\lambda_{2,3} = \frac{-\left(\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)+\mu_A\right)}{2} \pm \frac{\sqrt{\left(\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)+\mu_A\right)^2 - 4\left(\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)\mu_A - \frac{rb\nu_L}{N}\right)}}{2}.$$

现在，当且仅当 $r_c - r_d < 0$ 时，特征值 λ_1 为负；另外两个特征值 $\lambda_{2,\ 3}$ 将具有负实部，如果

$$\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)\mu_A - \frac{rb\nu_L}{N} > 0$$

这与针对 E_{03} 得到的条件相同。由于 $N > 1$ 也是 E_{04} 的存在条件，分析证实 E_{04} 局部渐近稳定，从而确立了第4项所述的稳定性条件。另一方面，若 $r_c - r_d > 0$， E_{04} 将失去稳定性。

□

命题1和定理1的结果汇总于表 1。基本繁殖数 N 与感知风险之差 $r_c - r_d$ 划分出四个参数区域，每个区域均对应一个不同的局部渐近稳定平衡态，其余稳态则不稳定。这些发现具有生物学意义：N 和 $r_c - r_d$ 是相互独立的量，而已知 $N > 1$ 是无蚊稳态失去稳定性的充要条件 [21]。在此简化模型中，采取控制措施的家庭比例 w 的动态与蚊子种群动力学相互解耦。具体而言，当且仅当 $r_c - r_d < 0$ （即 $r_d > r_c$）时， $w \to 1$，这意味着不 进行孳生地控制的感知风险高于采取控制措施的感知风险。

参数区域	$\boldsymbol{N < 1}$	$\boldsymbol{N > 1}$
$\boldsymbol{r_c - r_d > 0}$	E_{01} 为局部渐近稳定。 E_{02} 为不稳定。 E_{03} 和 E_{04} 不存在。	E_{03} 为局部渐近稳定。 E_{01}， E_{02}， E_{04} 均不稳定。
$\boldsymbol{r_c - r_d < 0}$	E_{01} 不稳定。 E_{02} 是局部渐近稳定的。 E_{03} 和 E_{04} 不存在。	E_{04} 是局部渐近稳定的。 E_{01}， E_{02}， E_{03} 不稳定。

表 1：模型 (4) 的稳态及其在不同基本繁殖数 N 和行为收益差 $r_c - r_d$ 下的局部稳定性。

备注 1： 模型 (4) 的稳态与稳定性分析可扩展至存在持续公共卫生干预的情形，正如 Asfaw 等人 [27]所研究的那样。形式上，我们可以令 w 按以下规律演化

$$\frac{dw}{dt} = kw(1-w)(-r_c + r_d) + \gamma(1-w),$$

其中 $\gamma > 0$ 衡量此类干预的有效性。该修正系统同样有四个稳态，其局部稳定性由 $r_c - r_d$ 和 N的临界阈值决定。一个关键区别在于，若满足 $r_c - r_d \geq \frac{\gamma}{k}$（这确保了 $0 \leq w^* \leq 1$），则 w 可以取平衡态值 $w^* = \frac{\gamma}{k(r_c - r_d)}$，这表明持续的公共卫生行动能够维持一定比例的家庭实施孳生地控制。该模型的详细分析见补充材料。

3.2 完整博弈论模型

我们分析所提出的方程（3），其中包括对不实施孳生地控制的家庭的感知收益，该收益由线性函数 $f_d(A_v) = -r_d m A_v$给出。在命题2中，我们刻画了系统的稳态。证明见补充材料。

命题2。 系统 (3) 的稳态 (L_v^*, A_v^*, w^*) 包括 E_{01}、 E_{02}、 E_{03}以及 E_{04}，其已在命题*1*中刻画；此外还包括 E_{05}，表示具有部分孳生地控制的蚊虫阳性状态，其形式为

$$(L_v^*, A_v^*, w^*) = \left(\frac{\mu_A r_c}{r_d m \nu_L}, \frac{r_c}{r_d m}, \frac{K_{v_{\max}} - \frac{\mu_A r_c}{r_d m \nu_L \left(1 - \frac{1}{N}\right)}}{K_{v_{\max}} - K_{v_{\min}}} \right) \tag{6}$$

其存在当且仅当 $N > 1$ 且 $\frac{r_c}{r_d} \in \left[\alpha K_{v_{\min}} \left(1 - \frac{1}{N}\right), \alpha K_{v_{\max}} \left(1 - \frac{1}{N}\right)\right]$，其中 $\alpha = \frac{m\nu_L}{\mu_A}$.

这里， $\frac{r_c}{r_d}$ 的区间确保 $w^* \in [0, 1]$。值得注意的是， E_{05} 不仅取决于昆虫学参数，还取决于感知风险 r_c、 r_d 以及敏感性参数 m，这反映出一种在 E_{01} 至 E_{04}中不存在的行为组成部分。定理 2总结了从E_{01} 到 E_{04} 的均衡的稳定性条件（证明见补充材料）。

定理 2. 系统 (3) 中 $E_{01} - E_{04}$ 的局部稳定性特征如下：

1. E_{01} 在 $N < 1$ 时局部渐近稳定，在 $N > 1$时不稳定。*2.* E_{02} 不稳定。
3. E_{03} 在 $\frac{r_c}{r_d} > \alpha K_{v_{\max}} \left(1 - \frac{1}{N}\right)$ 时局部渐近稳定，在 $\frac{r_c}{r_d} < \alpha K_{v_{\max}} \left(1 - \frac{1}{N}\right)$.
时不稳定。*4.* E_{04} 在 $\frac{r_c}{r_d} < \alpha K_{v_{\min}} \left(1 - \frac{1}{N}\right)$ 时局部渐近稳定，在
$\frac{r_c}{r_d} > \alpha K_{v_{\min}} \left(1 - \frac{1}{N}\right)$.时不稳定。

稳定性条件需要对 E_{05} 进行单独分析。简言之，我们得到一个三次特征方程 on

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{7}$$

它无法进行简单因式分解。劳斯-赫尔维茨判据 [28] 保证，当且仅当满足以下条件时， E_{05} 是局部渐近稳定的：

$$a_2 > 0,\ a_1 > 0,\ a_0 > 0 \quad \text{and} \quad a_2 a_1 > a_0.$$

这里的系数为

$$a_2 = \frac{rb\nu_L\left(1-\frac{1}{N}\right)}{\mu_A} + (\nu_L + \mu_L + \mu_A), \qquad a_1 = rb\nu_L\left(1-\frac{1}{N}\right)$$

and

$$a_0 = P\left[\left(\alpha\left(1-\frac{1}{N}\right)K_{v_{\max}} - \frac{r_c}{r_d}\right)\left(-\alpha\left(1-\frac{1}{N}\right)K_{v_{\min}} + \frac{r_c}{r_d}\right)\right]$$

其中 $P = \frac{krbr_d\mu_A}{m}(K_{v_{\max}} - K_{v_{\min}})$。鉴于 $N > 1$，前两个条件 $a_2 > 0$ 和 $a_1 > 0$ 显然成立。此外，条件 $a_0 > 0$ 等价于 $\alpha K_{v_{\min}}\left(1-\frac{1}{N}\right) \le \frac{r_c}{r_d} \le \alpha K_{v_{\max}}\left(1-\frac{1}{N}\right)$，而这是稳态 E_{05}存在的必要条件。对于条件 $a_2a_1 > a_0$，我们可以看到

$$a_2a_1 - a_0 = \left(\frac{r_c}{r_d}\right)^2 - \alpha\left(1-\frac{1}{N}\right)(K_{v_{\max}} + K_{v_{\min}})\left(\frac{r_c}{r_d}\right) + \alpha^2\left(1-\frac{1}{N}\right)^2 K_{v_{\max}}K_{v_{\min}} + Q\alpha(K_{v_{\max}} - K_{v_{\min}})\left(1-\frac{1}{N}\right)$$

因此 $a \quad {}_2a_1 - a_0$ 具有二次形式 $f(x) = x^2 - Bx + C$，其中 $x = \frac{r_c}{r_d}$，系数由 b 给出 y

$$B = \alpha\left(1-\frac{1}{N}\right)(K_{v_{\max}} + K_{v_{\min}}), \tag{8}$$

and

$$C = \alpha^2\left(1-\frac{1}{N}\right)^2 K_{v_{\max}}K_{v_{\min}} + Q\alpha(K_{v_{\max}} - K_{v_{\min}})\left(1-\frac{1}{N}\right), \quad \text{where } Q = \frac{\mu_A^2 + rb\nu_L}{k\mu_A r_d}. \tag{9}$$

因此，不等式 $a_2a_1 > a_0$ 等价于 $f(x) > 0$。定理3总结了这一结果（详细证明见补充材料）。

定理3. 设 E_{05} 由方程 (6) 给出，且 f 为二次多项式 $f(x) = x^2 - Bx + C$，其中系数 B 和 C 由方程 (8) 和 (9)给出。则以下条件成立：

(i) If $B^2 - 4C < 0$, then E_{05} is LAS within the interval: $\alpha\left(1-\frac{1}{N}\right)K_{v_{\min}} < \frac{r_c}{r_d} < \alpha\left(1-\frac{1}{N}\right)K_{v_{\max}}$.

(ii) 若 $B^2 - 4C \ge 0$，则 E_{05} 是局部渐近稳定的，当

$$\alpha\left(1-\frac{1}{N}\right)K_{v_{\min}} < \frac{r_c}{r_d} < x_1 \quad or \quad x_2 < \frac{r_c}{r_d} < \alpha\left(1-\frac{1}{N}\right)K_{v_{\max}}.$$

其中 x_1 和 x_2 是 $f(x)$的实根。

定理3中的条件（ii）给出了稳态 E_{05} 可能失去稳定性的参数区域，即 $\frac{r_c}{r_d} \in (x_1, x_2)$。特别是，要发生Hopf分岔，三次特征方程（7）必须具有纯虚根。在 Routh–Hurwitz 边界 $a_0 = a_2a_1$处可以满足这一条件。事实上，将 $a_0 = a_2a_1$ 代入方程（7）可得

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_2a_1 = 0 \Rightarrow (\lambda + a_2)\left(\lambda^2 + a_1\right) = 0.$$

此时的根为 $\lambda_1 = -a_2$ 和 $\lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{a_1}$ 这意味着 $\lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{rb\nu_L\left(1-\frac{1}{N}\right)}$. 对于二次多项式 f，条件 $a_0 = a_2 a_1$ 等价于 $f(x) = 0$，由此可得

$$x_{1,2} = \frac{r_c}{r_d} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4C}}{2}.$$

下一个定理证实，在上述条件下， E_{05} 处会发生Hopf分岔。

定理4 (Hopf分岔)。 对于由方程(8) 和(9)定义的 B 和 C，若满足 $B^2 - 4C > 0$，则当 $E_{05} = (L_v^*, A_v^*, w^*)$ 取方程(6) 给出的值时，会发生*Hopf*分岔，条件是

$$\frac{r_c}{r_d} = \alpha\frac{K_{v_{\max}} + K_{v_{\min}}}{2}\left(1 - \frac{1}{N}\right) \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4C}}{2}.$$

证明。 这里，我们选择模仿率 k 作为分岔参数。设 $\lambda_1(k)$和 $\lambda_2(k)$是特征方程（7）的两个共轭复特征值。若 $\frac{r_c}{r_d} = \alpha\frac{K_{v_{\max}}+K_{v_{\min}}}{2}\left(1-\frac{1}{N}\right) \pm \frac{\sqrt{B^2-4C}}{2}$，则有 $a_0 = a_2 a_1$，因此 $\mathbb{R}e(\lambda_1(k)) = \mathbb{R}e(\lambda_2(k)) = 0$。为证明横截条件，我们对 $p(\lambda(k), k) = \lambda^3 + a_2(k)\lambda^2 + a_1(k)\lambda + a_0(k) \equiv 0$ 关于 k 进行隐式求导，得到

$$p_\lambda(\lambda, k)\lambda'(k) + p_k(\lambda, k) = 0 \Rightarrow \lambda'(k) = -\frac{p_k(\lambda, k)}{p_\lambda(\lambda, k)}.$$

如前所述，特征方程的系数为

$$a_2 = \frac{rb\nu_L(1-1/N)}{\mu_A} + (\nu_L + \mu_L + \mu_A), \quad a_1 = rb\nu_L(1-1/N),$$
$$a_0 = P\left[\left(\alpha(1-1/N)K_{v_{\max}} - \frac{r_c}{r_d}\right)\left(-\alpha(1-1/N)K_{v_{\min}} + \frac{r_c}{r_d}\right)\right],$$

其中 $P = \frac{krbr_d\mu_A}{m(K_{v_{\max}} - K_{v_{\min}})}$。由于只有 a_0 通过项 P 与 k 呈线性关系，因此我们有 $a_2'(k) = a_1'(k) = 0$以及 $a_0'(k) > 0$。

因此， $p_\lambda = 3\lambda^2 + 2a_2\lambda + a_1$，且 $p_k = a_2'\lambda^2 + a_1'\lambda + a_0' = a_0'(k)$。代入这些值并写为

$$\lambda'(k) = -\frac{a_0'(k)}{3\lambda^2 + 2a_2\lambda + a_1}. \tag{10}$$

现在假设当 $k = k_c$ 时，我们得到 $a_0 = a_2 a_1$，或等价地， $\frac{r_c}{r_d} = \alpha\frac{K_{v_{\max}}+K_{v_{\min}}}{2}\left(1-\frac{1}{N}\right) \pm \frac{\sqrt{B^2-4C}}{2}$。因此，我们得到 $\lambda_{2,3}(k_c) = \pm i\omega = \pm i\sqrt{a_1}$. 将这些值代入式（10），可得

$$\lambda'(k_c) = \frac{a_0'(k_c)}{2a_1 \pm 2a_2 i\sqrt{a_1}}.$$

取实部并化简可得

$$\frac{d}{dk}\,\mathrm{Real}(\lambda(k))\Big|_{k=k_c} = \frac{a_0'\,(k_c)}{2\,(a_1+a_2^2)} \neq 0,$$

由于 $a_1 > 0$，分母为正，且在 $k = k_c$， $a_0'(k_c) \neq 0$。因此，横截条件成立。

□

注释 2。 定理 3 和定理 4 的结果通过将二次函数 f表示为以 $\frac{r_c}{r_d}$ 和 k 为自变量的形式联系起来：

$$f\left(\frac{r_c}{r_d}, k\right) = \left(\frac{r_c}{r_d}\right)^2 - B\left(\frac{r_c}{r_d}\right) + C(k).$$

这里， B 由方程 8 给出，而 $C(k)$对应于方程 (9)，并显式表示其对模仿率 k的依赖关系，即，

$$C(k) = \alpha^2\left(1-\frac{1}{N}\right)^2 K_{v_{\max}} K_{v_{\min}} + Q(k)\,\alpha(K_{v_{\max}} - K_{v_{\min}})\left(1-\frac{1}{N}\right), \text{ where } Q(k) = \left(\frac{\mu_A^2 + rb\nu_L}{\mu_A r_d}\right)\frac{1}{k}.$$

因此， f 关于$\frac{r_c}{r_d}$ 是二次函数，并且关于 k递减。在分岔点 $k = k_c$处，我们知道 $f(r_c/r_d,\ k_c) = 0$。因此，当 $k < k_c$时，有

$$f\left(\frac{r_c}{r_d}, k\right) > f\left(\frac{r_c}{r_d}, k_c\right) = 0,$$

且 E_{05}是局部渐近稳定的。反之，对于 $k > k_c$，则 $f\left(\frac{r_c}{r_d}, k\right) < 0$和 E_{05}变得不稳定。

4 数值模拟

我们通过数值模拟所提出的模型，对稳定性分析进行了补充。使用 MATLAB 的 ode45 求解器（四/五阶龙格-库塔-费尔伯格方法）对系统进行数值积分。模拟旨在阐释并支持理论结果，而非穷尽式地探索参数。

恒定收益的简化模型

系统（4）的数值模拟结果如图 2 所示。中央色彩图显示了系统在一系列基本后代数（N）和感知风险差异（$r_c - r_d$）下模拟后达到的稳态。色彩图周围展示了各参数区域中四组具有代表性的时间序列。虚线表示命题 1中解析推导出的稳态。结果与我们的理论估计一致。例如，色彩图左上方的矩形区域（浅蓝色）显示了

根据定理1，稳态 E_{01} （“无蚊、无控制”）局部渐近稳定（LAS）时对应的参数区域。同样，左下方的紫色区域对应于 E_{02} （“无蚊、全面控制”）局部渐近稳定的条件。在此状态下，由于 $N<1$，蚊子种群逐渐减少直至灭绝；而家庭控制比例 $w(t)$ 收敛至 1，因为 $r_c-r_d<0$。右上方和右下方的矩形区域（深黄色和红色）对应于稳态 E_{03} 和 E_{04} 局部渐近稳定的情形。在这两种情况下，由于 $N>1$，蚊虫种群都会收敛至一个正稳态；而家庭控制比例 $w(t)$ 则根据 r_c-r_d 收敛至 0 或 1。

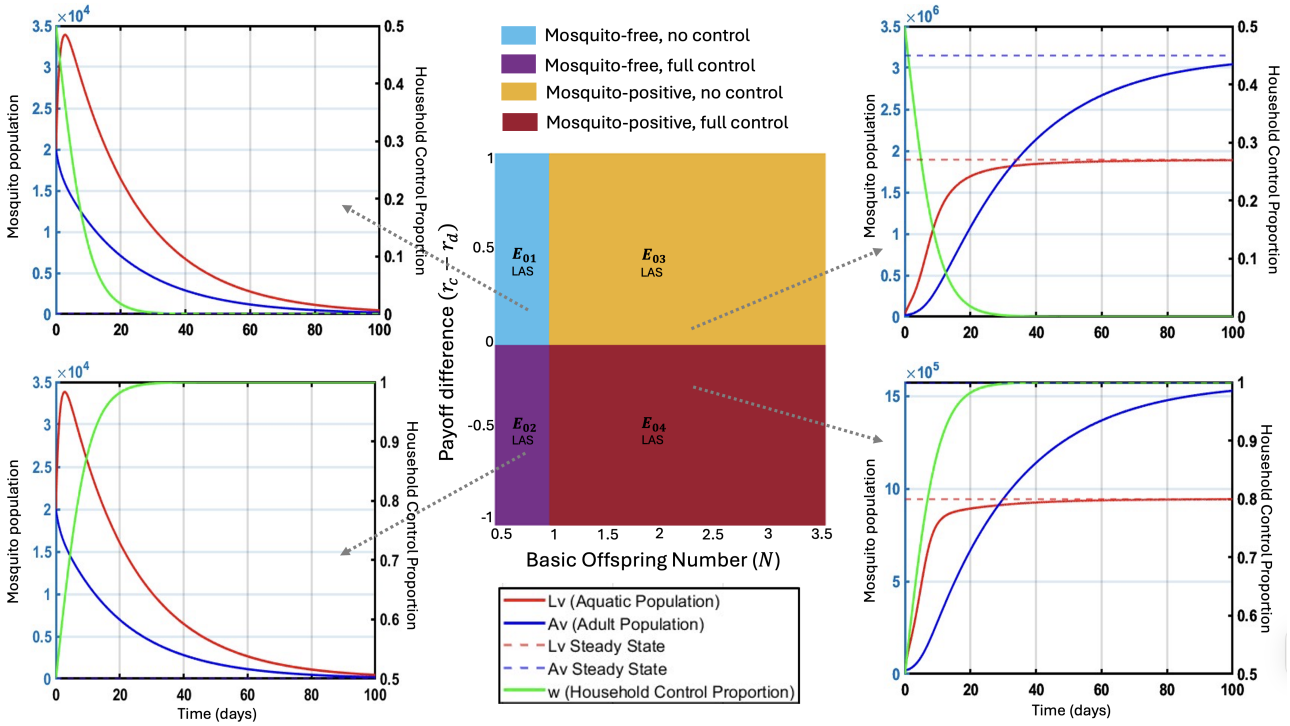


图 2：恒定收益下简化系统（4）的稳定性参数区域和示例轨迹。中央色彩图显示了四个区域，在这些区域中，稳态 $E_{01}-E_{04}$ 是局部渐近稳定的。对于每个区域，我们展示了收敛到相应稳态的轨迹。参数值取自 [21]：$r=0.5$、$\nu_L=0.067$ 天$^{-1}$、$\mu_L=0.62$天$^{-1}$和 $\mu_A=0.04$ 天$^{-1}$。其他参数设为合理值：$K_{v_{\max}}=2\times10^6$、$K_{v_{\min}}=1\times10^6$、$t_{\text{span}}=[0,100]$ 天、$k=0.8$ 天$^{-1}$，以及取值范围为 1 至 15 的 b，以生成不同的 N 值。初始条件：$L_0=20000$、$A_0=20000$和 $w_0=0.5$。

完整博弈论模型

在图3中，我们展示了完整博弈论模型（3）的数值模拟。我们考察平面 N 与$\frac{rc}{rd}$，该平面被划分为若干区域，其中每个稳态均为局部渐近稳定，以及 E_{05} 不稳定的区域。图中展示了具有代表性的轨迹，说明系统收敛至稳态或出现持续振荡。划分参数区域的边界由我们的解析结果推导得出。色彩图左侧对应的区域 $N<1$ 中，无蚊且不进行孳生地控制（E_{01}）的稳态为局部渐近稳定。当 $N>1$ 时，色彩图顶部（深黄色）和底部（深红色）区域分别对应 E_{03} 或 E_{04} 为局部渐近稳定的参数区域。这两个区域被内部平衡点 E_{05} 存在且可能稳定或不稳定的区域隔开。当 E_{05} 为局部渐近稳定时（浅黄色区域），

我们观察到阻尼振荡，并收敛至蚊虫种群和家庭控制均处于中间水平的状态（“有蚊、部分控制”）。当 E_{05} 不稳定时（中央的灰白色区域），模型轨迹会因Hopf分岔（定理4）而呈现持续振荡。

浅黄色区域由以下两个显式给出的曲线围成：

$$\frac{r_c}{r_d} = \alpha K_{v_{\min}}\left(1-\frac{1}{N}\right) \quad \text{and} \quad \frac{r_c}{r_d} = \alpha K_{v_{\max}}\left(1-\frac{1}{N}\right).$$

仅当 $\frac{r_c}{r_d}$ 严格位于这两个边界值之间时，才存在内部平衡点 E_{05} （见命题2）。灰白色区域对应满足定理3中条件（ii）的参数值，此时 E_{05} 不稳定。若 $B^2 - 4C < 0$，则该区域不会出现，因为在这种情况下，定理3中的条件（i）会排除 E_{05}发生任何不稳定性。

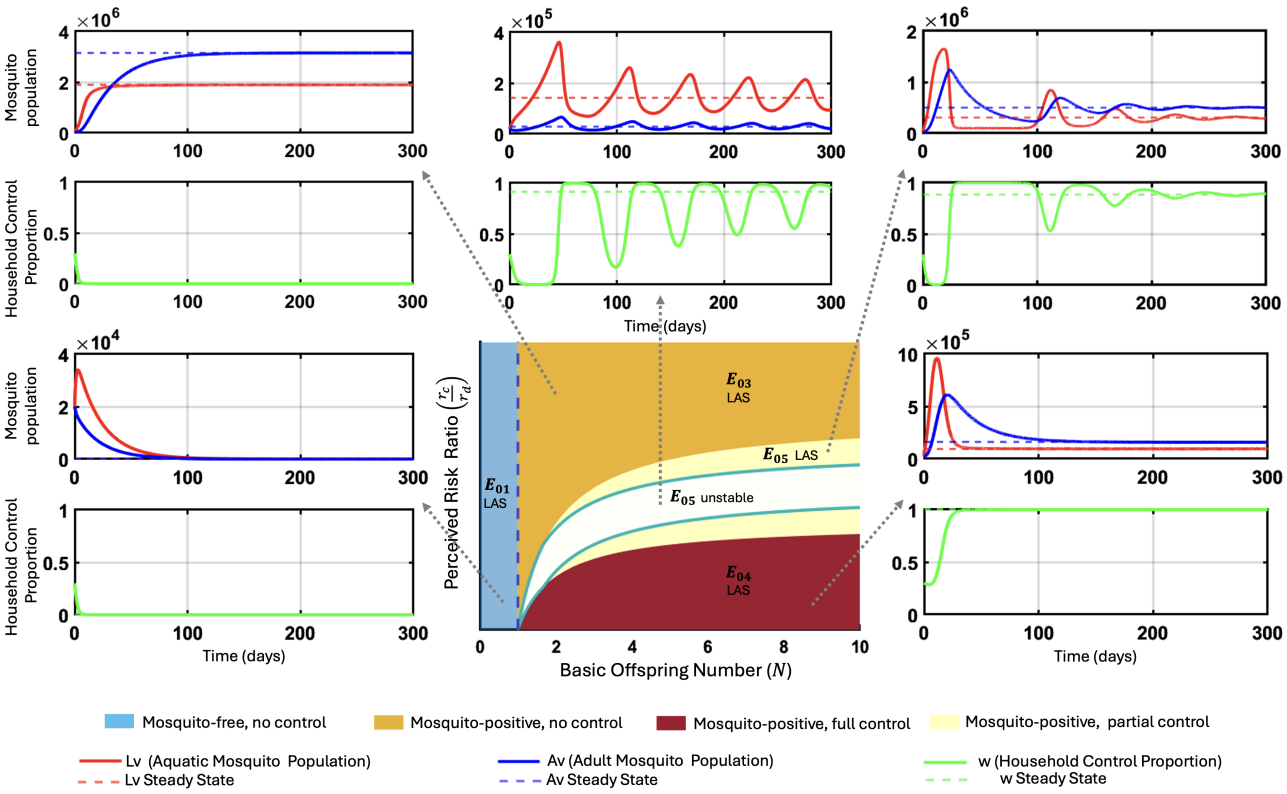


图3：完整博弈论模型(3)的稳定性参数区域和示例轨迹。色彩图突出显示了四个不同区域，其中稳态为局部渐近稳定；另有一个区域中 E_{05} 不稳定，并出现振荡。在每个区域中，相应的系统轨迹都会收敛至稳态或发生振荡。参数值取自 [21]： $r = 0.5$、 $\nu_L = 0.067$ 天$^{-1}$、 $\mu_L = 0.62$天$^{-1}$和 $\mu_A = 0.04$天$^{-1}$。其他参数取合理值： $K_{v_{\max}} = 2\times10^6$、 $K_{v_{\min}} = 1\times10^5$、 $t_{\text{span}} = [0, 300]$ 天、 $k \in [0.5, 0.8]$ 天$^{-1}$、 $m = 0.3$ b 1 15 N $L_0 = 20000$ 只蚊子$^{-1}$，并在至之间取值以生成不同的值。初始条件：、$A_0 = 20000$和 $w_0 = 0.3$。

振荡的振幅和周期

我们研究 E_{05} 不稳定平衡区域中出现的持续振荡的振幅和周期。图4展示了图3中灰白色不稳定区域的一个子区域，其基本繁殖数约介于 1.4 和 2.8 之间。该区域分为两个面板，根据

水生蚊种群振荡的振幅和周期着色，这些数值针对每一组参数 $(N, r_c/r_d)$ 计算得出。色彩图周围展示了四条具有代表性的轨迹，其周期分别约为 50、86、109 和 165 天。 N 值越大，振幅越高、周期越短，这反映了蚊子的繁殖能力增强，以及家庭控制的响应速度加快。反之， N 值较低时，振荡振幅较小、周期较长，对应于蚊子种群与家庭行为之间较慢的增长—控制周期。当参数对 $(N, r_c/r_d)$ 接近任一 Hopf边界时，振荡的振幅和周期都会趋近于零。这表明系统接近稳定性阈值，此时极限环消失，轨迹回归稳定稳态。振幅和周期均使用 MATLAB 内置函数 *findpeaks* 计算。

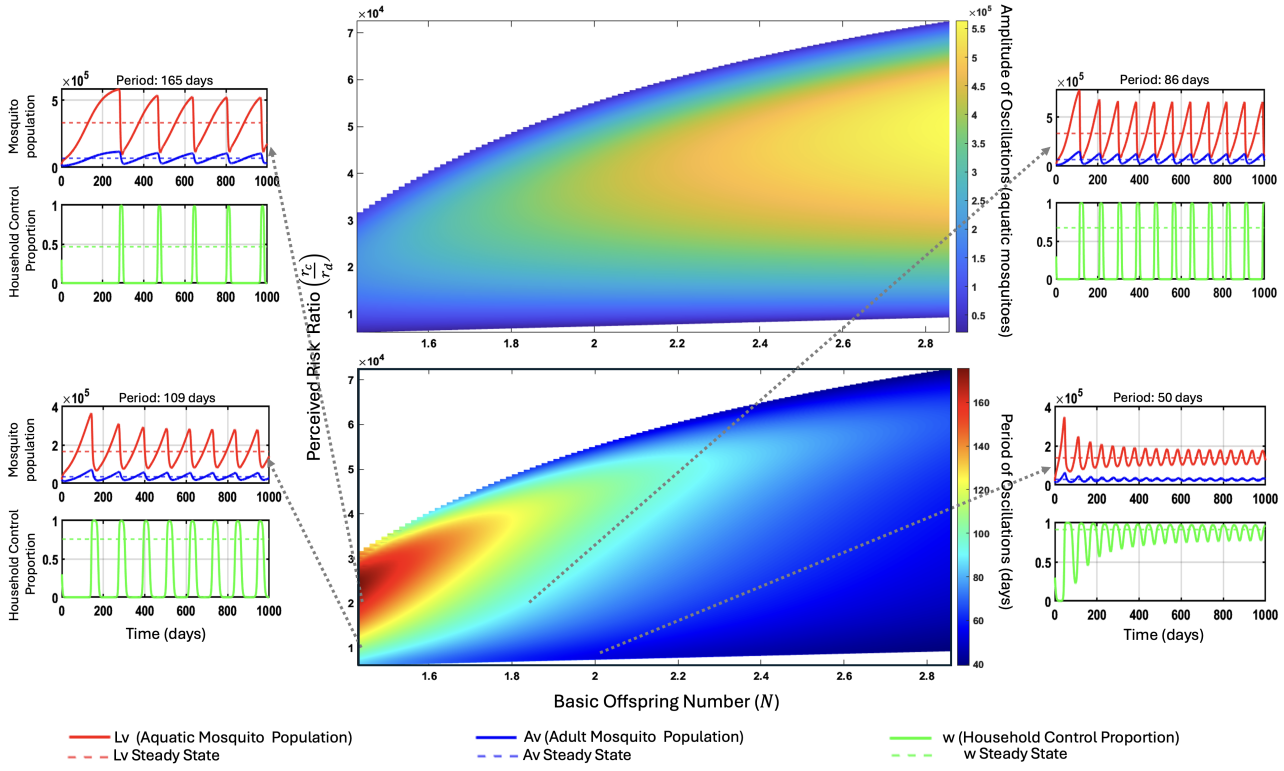


图4：蚊虫种群与家庭行为中持续振荡的振幅和周期。水生蚊虫（L_v）、成蚊（A_v）和家庭机械防治（w）的振荡随基本繁殖数 N 和感知风险比 r_c/r_d而变化。 N 值较大时，振荡的振幅较高、周期较短； N 值较小时，振幅较低、周期较长。参数值： $r = 0.5$, b 取值范围为 1 到 15，以产生不同的 N 值； $\nu_L = 0.04$天$^{-1}$、$\mu_L = 0.03$天$^{-1}$和 $\mu_A = 0.2$天$^{-1}$。其他参数设为合理值： $K_{v_{\max}} = 2 \times 10^6$, $K_{v_{\min}} = 1 \times 10^5$天、$t_{\text{span}} = [0, 1000]$ 天、 $k = 0.8$ 天$^{-1}$, $m = 0.3$ 只蚊子$^{-1}$。初始条件： $L_0 = 20000$、 $A_0 = 20000$和 $w_0 = 0.3$。

5 结论

我们构建了一个研究家庭控制孳生地时蚊种群动力学的博弈论模型。该框架通过以下两种方式将蚊子发育与人类策略性响应相结合：(i) 随着实施孳生地控制的家庭越来越多而线性降低的行为依赖型承载能力（$K_v = K_v(w)$），以及 (ii) 不实施控制的感知收益，该收益可能取决于蚊子流行率

（$f_d = f_d(A_v)$）。当将此类收益视为常数时，模型的行为组分与蚊子动态相互独立，实施控制的家庭比例会收敛至 0 或 1。此外，如果基本繁殖数 N 大于 1，水生种群和成蚊种群都会收敛至正稳态。相比之下，具有流行率依赖型收益的完整博弈论模型会呈现更丰富的动态：系统经历 Hopf分岔，进而产生蚊虫丰度和家庭行为的持续振荡。

一个反馈回路可以解释完整博弈论模型中观察到的振荡状态。当成蚊丰度增加时，家庭会加强孳生地控制，从而降低承载能力和蚊虫种群数量。随着蚊虫丰度下降，不采取控制措施所带来的感知风险也会降低，导致家庭放松防控力度。这种放松使蚊子种群得以恢复，开启新一轮的反弹与再次控制。在可能出现振荡的参数区域内，振幅和周期会随基本繁殖数 N 和感知风险比 r_c/r_d 而变化（图4）。 N 越大，蚊子种群增长越快，引发的行为反应也越剧烈，但持续时间更短。这一过程会产生振幅更大、周期更短的振荡。反之，当 N 从右侧趋近于1时，蚊子种群增长较慢，家庭的调整也更加渐进，因此产生的振荡振幅较小、周期较长。

在各种不同的模型框架中，已有研究记录了蚊虫种群模型中的持续振荡。多项研究表明，纳入时滞或环境驱动因素（例如温度或降水对产卵、发育或死亡率的影响）可能导致 Hopf 分岔和持续振荡动力学 [13, 14, 29, 30]。在纳入非线性因素的模型中也有研究报告了振荡，例如不育蚊释放策略中的饱和效应 [31, 32, 33, 34]。Strugarek等人证明，即使不存在季节性强迫或温度驱动速率，采用幼虫密度介导的孵化函数的模型也能产生稳定振荡 [35]。在时变环境容纳量的背景下（这也是本研究考察的情形），Dumont和Thuilliez [21] 表明，干预措施可能通过脉冲微分方程引发尖峰周期行为。在此，我们证明，通常见于博弈论模型文献中的反馈机制 [22, 24, 36], 也能产生持续振荡；这一机制源于行为依赖型承载能力的线性函数形式与依赖流行率的收益之间的耦合。

我们的研究存在一些局限性。要真实地描述蚊种群动力学，需要纳入环境因素，例如温度依赖型发育和存活率 [11]或降雨促成的幼虫栖息地形成 [13]。将此类天气敏感参数纳入我们的框架，是一个很有前景的研究方向，因为环境驱动因素与行为反馈的共同作用，或许能够重现实证数据中观察到的振荡行为。我们对完整博弈论模型中 Hopf 分岔的分析，仅限于依据 Routh–Hurwitz判据推导出的局部稳定性条件。要全面刻画该分岔，还需运用正规形理论计算第一Lyapunov系数 [37, 25]。虽然我们的模拟表明，轨迹会平滑地收敛到稳定周期轨道，

但要严格证明这些轨道的存在性和稳定性，仍有待未来研究。模型假设种群是同质的，即所有家庭对感知到的蚊媒风险都作出相同反应。事实上，不同社会经济群体、社区以及信息获取水平之间的行为反应各不相同。纳入异质性或多种行为类别，可能会改变振荡的出现时机或振幅。多斑块模型或网络建模可能揭示空间上不同步的振荡或局部行为效应。

6 致谢

作者感谢 Haridas Das 和 Abdullah Al Helal 对本研究提出的细致反馈，并感谢 Nick Belden 为手稿进行校对。L.M.S. 感谢美国国家科学基金会通过资助项目 DMS-2327844 提供的支持。

参考文献

[1] 美国疾病控制与预防中心。对抗世界上最致命的动物。https://www.cdc.gov/global-health/impact/fighting-the-worlds-deadliest-animal.html，2024年。访问日期：2025年11月27日。[2] 世界卫生组织。登革热和重症登革热，2024年。

[3] Anne L Wilson、Orin Courtenay、Louise A Kelly-Hope、Thomas W Scott、Willem Takken、Steve J Torr 和 Steve W Lindsay。病媒控制对于控制和消除媒介传播疾病的重要性。*PLOS*《被忽视的热带病》，14(1):e0007831，2020年。

[4] Duane J Gubler. 登革热、城市化与全球化：21世纪的邪恶三位一体。《热带医学与健康》，39(4SUPPLEMENT):S3–S11, 2011.

[5] Jacklyn Wong, Steven T Stoddard, Helvio Astete, Amy C Morrison, and Thomas W Scott. 登革热媒介埃及伊蚊的产卵地点选择及其对登革热防控的影响。*PLOS*《被忽视的热带病》, 5(4):e1015, 2011.

[6] Claudia Buhler, Volker Winkler, Silvia Runge-Ranzinger, Ross Boyce, and Olaf Horstick. 登革热媒介控制的环境方法——系统综述与荟萃分析。*PLOS*《被忽视的热带病》, 13(7):e0007420, 2019年.

[7] 世界卫生组织。动员社区持续开展登革热媒介控制。https://www.who.int/activities/engaging-communities-to-sustain-dengue-vector-control, 2024年。访问日期：2025-01-29.

[8] 乔斯琳·劳 de、Kimberly Chinfatt、Peiching Huang、Charles Olivier Betansedi、Kenneth Katumba、Nico le

Vernazza 和 Daniel Bley。《法国东南部伊蚊传播疾病感染风险相关的公众认知与行为：一项横断面研究》。*BMJ Open*，2(6):e002094，2012年。[9] Jos´ee M Dussault、Gabriela Paz-Bailey、Liliana S´anchez-Gonz´alez、Laura E Adams、Dania M Rodr´ıguez、Kyle R Ryff、Chelsea G Major、Olga Lorenzi 和 Vanessa Rivera-Amill。《虫媒病毒风险感知可预测波多黎各庞塞的蚊虫叮咬预防行为》。*PLOS*《被忽视的热带病》，16(7):e0010653，2022年。

[10]Charles Whittaker、Peter Winskill、Marianne Sinka、Samuel Pironon、Claire Massey、Daniel J Weiss、Michele Nguyen、Peter W Gething、Ashwani Kumar、Azra Ghani等。探索蚊虫种群种群动态和季节性的新型统计框架。《英国皇家学会学报B辑》，289(1972)：20220089，2018年。

[11] Raquel Martins Lana、Ma´ıra Moreira Morais、Tiago Fran¸ca Melo de Lima、Tiago Garcia de Senna Carneiro、´Lucas Martins Stolerman、Jefferson Pereira Caldas Dos Santos、Jos´e Joaqu´ın Carvajal Cort´es、Alvaro Ed- uardo Eiras和Cl´audia Torres Code¸co。使用数学建模评估基于诱捕器的埃及伊蚊监测项目。《PLoS《综合》》，13(1)：e0190673，2018年。

[12] Jeffrey Shaman 和 Jonathan F Day。蚊虫种群对降雨频率的繁殖阶段锁定。*PLoS*《综合》，2(3):e331，2007年。

[13] Ahmed Abdelrazec 和 Abba B Gumel。温度和降雨对蚊种群动力学作用的数学评估。《数学生物学杂志》，74(6):1351–1395，2017年。

[14] Kamaldeen Okuneye、Ahmed Abdelrazec 和 Abba B Gumel。蚊虫种群生态学天气驱动模型的数学分析。《数学生物科学与工程》，15(1):57–93，2018年。

[15] Hui Wan 和 Huaiping Zhu。一个带时滞的蚊种群动力学新模型。《数学生物科学与工程》，11(6):1395–1410，2014年。

[16] Li Juan、Fan Guihong、Zhang Xianghong 和 Zhu Huaiping。一个带分布时滞的蚊种群动力学两阶段模型。《动力系统与微分方程杂志》，第1–24页，2025年。

[17] Aubane Renard、Fernanda P´erez Lombardini、Mitsuri Pacheco Zapata、Thibaud Porphyre、Ana Bento、Gerardo Suz´an、David Roiz、Benjamin Roche 和 Audrey Arnal。人类行为因素的相互作用塑造了伊蚊属和库蚊传播虫媒病毒的过程。《病原体》，12(12)：1421，2023年。

[18] Panpim Thongsripong、James M Hyman、Durrell D Kapan 和 Shannon N Bennett。人类–蚊虫接触：我们理解蚊媒疾病传播动力学过程中缺失的一环。美国昆虫学会年刊，114(4)：397–414，2021年。

[19] M Predescu、R Levins 和 T Awerbuch。社区干预蚊虫防治非线性系统的分析。《离散与连续动力系统*B*辑》，6(3):605，2006年。

[20] Mihaela Predescu、George Sirbu、Richard Levins 和 Tamara Awerbuch-Friedlander。蚊虫防治确定性与随机模型的动力学。应用数学快报，20(8):919–925，2007年。[21] Y. Dumont 和 J. Thuilliez。人类行为：蚊虫防治面临的威胁？数学生物科学，281:9–23，2016年。[22] Chris T Bauch。模仿动力学可预测疫苗接种行为。英国皇家学会学报*B*辑：生物科学，272(1573):1669–1675，2005年。[23] Zhen Wang、Chris T Bauch、Samit Bhattacharyya、Alberto d'Onofrio、Piero Manfredi、Matjaˇz Perc、Nicola Perra、Marcel Salath´e 和 Dawei Zhao。疫苗接种的统计物理学。物理学报告，664:1–113，2016年。[24] Sheryl L Chang、Mahendra Piraveenan、Philippa Pattison 和 Mikhail Prokopenko。传染病动力学与干预方法的博弈论建模：综述。生物动力学杂志，14(1):57–89，2020年。[25] Stephen Wiggins。应用非线性动力系统与混沌导论。施普林格，2003年。[26] Steven H Strogatz。非线性动力学与混沌：及其在物理学、生物学、化学和工程学中的应用。CRC出版社，2018年。[27] M. D. Asfaw、B. Buonomo 和 S. M. Kassa。人类行为对杀虫蚊帐防治策略的影响，以预防媒介传播疾病的扩散。佩洛里塔纳学院院刊——物理、数学与自然科学类，96(S3):A2，2018年。[28] Katsuhiko Ogata 等。现代控制工程。印度普伦蒂斯·霍尔，2009年。[29] Gideon A Ngwa、Ashrafi M Niger 和 Abba B Gumel。非线性出生和成熟延迟对疟疾媒介种群动态作用的数学评估。应用数学与计算，217(7):3286–3313，2010年。[30] Liming Cai、Shangbing Ai 和 Guihong Fan。采用两种不同不育蚊释放策略的具有时滞的蚊虫种群模型的动力学。数学生物科学与工程，15(5):1181–1202，2018年。[31] Liming Cai、Shangbing Ai 和 Jia Li。采用不同不育蚊释放策略的蚊子种群动力学。工业与应用数学学会应用数学杂志，74(6):1786–1809，2014年。[32] Jicai Huang、Shigui Ruan、Pei Yu 和 Yuyue Zhang。具有不育蚊饱和释放率的蚊子种群模型的分岔分析。工业与应用数学学会应用动力系统杂志，18(2):939–972，2019年。[33] Ruqaya Hussein、Sergey Kryzhevich 和 Khosro Tajbakhsh。不育昆虫种群动力学中的残余生育力与时滞。*arXiv*预印本 *arXiv:2509.17519*，2025年。

[34] Yufeng Wang、Yining Chen、Bo Zheng 和 Jianshe Yu。基于感染沃尔巴克氏体的雄蚊的蚊虫种群抑制模型的周期动力学。离散与连续动力系统，44(8):2403–2437，2024年。

[35] Martin Strugarek、Laetitia Dufour、Nicolas Vauchelet、Luis Almeida、Benoˆıt Perthame 和 Daniel AM Villela。幼虫反馈影响卵孵化的蚊子种群模型中的振荡状态。生物动力学杂志，13(1):269–300，2019年。

[36] Yunhan Huang 和 Quanyan Zhu。流行病传播与人类决策的博弈论框架：综述。动态博弈与应用，12(1):7–48，2022年。

[37] Yuri A Kuznetsov。 应用分岔理论基础。施普林格，1998年。

7 补充材料

7.1 命题和定理的证明

命题*1*的证明。令行为方程等于零，可得 $w=0$、$w=1$ 和 $r_c=r_d$。然而，$r_c=r_d$ 并不能为 w提供典型的稳态。因此，解为 $w=0$ 和 $w=1$。代入 $A_v=\frac{\nu_L}{\mu_A}L_v$ 和 $K_v(w)=K_{v_{\max}}-w(K_{v_{\max}}-K_{v_{\min}})$，可得

$$rb\left(\frac{\nu_L}{\mu_A}L_v\right)\left(1-\frac{L_v}{K_v(w)}\right)-(\nu_L+\mu_L)L_v=0$$

即，

$$L_v\left[\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\right)\left(1-\frac{L_v}{K_v(w)}\right)-(\nu_L+\mu_L)\right]=0.$$

这给出了两个解

$$L_v=0$$

or

$$\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\right)\left(1-\frac{L_v}{K_v(w)}\right)=\nu_L+\mu_L$$

即，

$$L_v=K_v(w)\left(1-\frac{\mu_A\left(\nu_L+\mu_L\right)}{rb\nu_L}\right)$$
$$\Rightarrow L_v=K_v(w)\left(1-\frac{1}{N}\right)\text{ if and only if }N>1.$$

因此，$A_v=\frac{\nu_L}{\mu_A}L_v=\frac{\nu_L}{\mu_A}K_v(w)\left(1-\frac{1}{N}\right)$.

当 $w=0$，$L_v=0$ 时，我们得到 $A_v=0$. 此外，以下结论成立:

- When $w=1, L_v=0$ then we get $A_v=0$.
- When $w=0$, we get $L_v=K_v(0)\left(1-\frac{1}{N}\right)=K_{v_{\max}}\left(1-\frac{1}{N}\right)$ and $A_v=\frac{\nu_L}{\mu_A}K_v(0)\left(1-\frac{1}{N}\right)=\frac{\nu_L}{\mu_A}K_{v_{\max}}\left(1-\frac{1}{N}\right)$.
- When $w=1$, we get $L_v=K_v(1)\left(1-\frac{1}{N}\right)=K_{v_{\min}}\left(1-\frac{1}{N}\right)$ and $A_v=\frac{\nu_L}{\mu_A}K_v(1)\left(1-\frac{1}{N}\right)=\frac{\nu_L}{\mu_A}K_{v_{\min}}\left(1-\frac{1}{N}\right)$.

因此，我们得到了如下四个稳态

1. E_{01}: $(L_v^*,\ A_v^*,\ w^*)=(0,\ 0,\ 0)$，2. E_{02}: $(L_v^*,\ A_v^*,\ w^*)=(0,\ 0,\ 1)$，3. E_{03}: $(L_v^*,\ A_v^*,\ w^*)=\left(K_{v_{\max}}\left(1-\frac{1}{N}\right),\frac{\nu_L}{\mu_A}K_{v_{\max}}\left(1-\frac{1}{N}\right),0\right)$ 当且仅当 $N>1$，4. E_{04}: $(L_v^*,\ A_v^*,\ w^*)=\left(K_{v_{\min}}\left(1-\frac{1}{N}\right),\frac{\nu_L}{\mu_A}K_{v_{\min}}\left(1-\frac{1}{N}\right),1\right)$ 当且仅当 $N>1$.

□

命题*2*的证明。我们有 $\nu_L L_v = \mu_A A_v \Longrightarrow A_v = \frac{\nu_L}{\mu_A} L_v$，并且令导数为零，可得 $kw(1-w)[-r_c + r_d m A_v] = 0$，这意味着 $w = 0$，$w = 1$ 且 $A_v = \frac{r_c}{r_d m}$。

代入 $\mathrm{A}_v = \frac{\nu_L}{\mu_A} L_v$ 和 $w = 0$，可得

$$rb\left(\frac{\nu_L}{\mu_A} L_v\right)\left(1 - \frac{L_v}{K_v(0)}\right) - (\nu_L + \mu_L) L_v = 0 \Rightarrow L_v\left[\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\right)\left(1 - \frac{L_v}{K_{v_{\max}}}\right) - (\nu_L + \mu_L)\right] = 0$$

因此，我们有 $L_v = 0$ 或

$$\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\right)\left(1 - \frac{L_v}{K_{v_{\max}}}\right) = (\nu_L + \mu_L) \Rightarrow \quad L_v = K_{v_{\max}}\left(1 - \frac{1}{N}\right) \text{ if and only if } N > 1.$$

再次代入 $A_v = \frac{\nu_L}{\mu_A} L_v$ 和 $w = 1$，可得到另外两个稳态。因此，前四个稳态为

1. $\underline{E_{01}}$: $(L_v^*, A_v^*, w^*) = (0, 0, 0)$,
2. $\underline{E_{02}}$: $(L_v^*, A_v^*, w^*) = (0, 0, 1)$,
3. $\underline{E_{03}}$: $(L_v^*, A_v^*, w^*) = \left(K_{v_{\max}}\left(1 - \frac{1}{N}\right), \frac{\nu_L}{\mu_A} K_{v_{\max}}\left(1 - \frac{1}{N}\right), 0\right)$ if and only if $N > 1$ and
4. $\underline{E_{04}}$: $(L_v^*, A_v^*, w^*) = \left(K_{v_{\min}}\left(1 - \frac{1}{N}\right), \frac{\nu_L}{\mu_A} K_{v_{\min}}\left(1 - \frac{1}{N}\right), 1\right)$ if and only if $N > 1$.

对于 E_{05}，代入 $A_v = \frac{r_c}{r_d m}$ 和 $L_v = \frac{\mu_A r_c}{r_d m \nu_L}$，可得

$$\begin{aligned}
& rb\ \mathrm{A}_v\left(1 - \frac{L_v}{K_v(w)}\right) - (\nu_L + \mu_L) L_v = 0 \\
\Rightarrow\ & rb\frac{r_c}{r_d m}\left(1 - \frac{\mu_A r_c}{r_d m \nu_L k_v(w)}\right) - (\nu_L + \mu_L)\frac{\mu_A r_c}{r_d m \nu_L} = 0 \\
\Rightarrow\ & 1 - \frac{\mu_A r_c}{r_d m \nu_L k_v(w)} = \frac{(\nu_L + \mu_L)\mu_A}{\nu_L rb} \\
\Rightarrow\ & \frac{\mu_A r_c}{r_d m \nu_L k_v(w)} = 1 - \frac{1}{N} \\
\Rightarrow\ & k_v(w) = \frac{\mu_A r_c}{r_d m \nu_L\left(1 - \frac{1}{N}\right)} \\
\Rightarrow\ & K_{v_{\max}} - w\left(K_{v_{\max}} - K_{v_{\min}}\right) = \frac{\mu_A r_c}{r_d m \nu_L\left(1 - \frac{1}{N}\right)} \\
\Rightarrow\ & w = \frac{K_{v_{\max}} - \frac{\mu_A r_c}{r_d m \nu_L\left(1 - \frac{1}{N}\right)}}{\left(K_{v_{\max}} - K_{v_{\min}}\right)} \text{ if and only if } \quad N > 1 \quad \text{and}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 0 \leq \frac{K_{v_{\max}} - \frac{\mu_A r_c}{r_d m \nu_L\left(1 - \frac{1}{N}\right)}}{\left(K_{v_{\max}} - K_{v_{\min}}\right)} \leq 1 \\
\Rightarrow\ & \alpha K_{v_{\min}}\left(1 - \frac{1}{N}\right) \leq \frac{r_c}{r_d} \leq \alpha K_{v_{\max}}\left(1 - \frac{1}{N}\right) \text{ where } \alpha = \frac{m\nu_L}{\mu_A}.
\end{aligned}$$

因此，E_{05} 为

$$(L_v^*, A_v^*, w^*) = \left(\frac{\mu_A r_c}{r_d m \nu_L}, \frac{r_c}{r_d m}, \frac{K_{v_{\max}} - \frac{\mu_A r_c}{r_d m \nu_L \left(1 - \frac{1}{N}\right)}}{\left(K_{v_{\max}} - K_{v_{\min}}\right)} \right)$$

当且仅当 $N > 1$ 且 $\alpha K_{v_{\min}} \left(1 - \frac{1}{N}\right) \leq \frac{r_c}{r_d} \leq \alpha K_{v_{\max}} \left(1 - \frac{1}{N}\right)$，其中 $\alpha = \frac{m\nu_L}{\mu_A}$.

□

定理 *2* 的证明。 我们将分别分析每个稳态，并证明第 1–4 项中的结论。

- E_{01}: 我们评估稳态 E_{01} 处的雅可比矩阵。 E_{01} 处的雅可比矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -(\nu_L + \mu_L) & rb & 0 \\ \nu_L & -\mu_A & 0 \\ 0 & 0 & -kr_c \end{bmatrix}$$

特征方程为 $\det(J - \lambda I) = 0$ 其中

$$J - \lambda I = \begin{bmatrix} -(\nu_L + \mu_L) - \lambda & rb & 0 \\ \nu_L & -\mu_A - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -kr_c - \lambda \end{bmatrix}.$$

沿该矩阵的第三行展开即可计算其行列式，即

$$\begin{aligned} \det(J - \lambda I) &= (-kr_c - \lambda) \det \begin{bmatrix} -(\nu_L + \mu_L) - \lambda & rb \\ \nu_L & -\mu_A - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (-kr_c - \lambda)\left(-(\nu_L + \mu_L) - \lambda\right)(-\mu_A - \lambda) - (rb)(\nu_L) \\ &= (-kr_c - \lambda)\left(\lambda^2 + ((\nu_L + \mu_L) + \mu_A)\lambda + (\nu_L + \mu_L)\mu_A - rb\nu_L\right). \end{aligned}$$

特征值为 $\lambda_1 = -kr_c$ 和

$$\lambda_{2,3} = \frac{-(\nu_L + \mu_L + \mu_A) \pm \sqrt{(\nu_L + \mu_L + \mu_A)^2 - 4\left((\nu_L + \mu_L)\mu_A - rb\nu_L\right)}}{2}.$$

由于 $k > 0$，当且仅当 $-kr_c < 0 \Rightarrow r_c > 0$ 时，特征值 λ_1 为负。此外，由于 $(\nu_L + \mu_L + \mu_A) > 0$，另外两个特征值 $\lambda_{2,\ 3}$ 当且仅当具有负实部

$$(\nu_L + \mu_L)\mu_A - rb\nu_L > 0 \quad \Leftrightarrow \quad N < 1.$$

由于 $r_c > 0$也是我们的模型假设，分析证实 E_{01} 是局部渐近稳定的，从而确立了条目 2 中所述的稳定性条件。另一方面，若 $N > 1$， E_{01} 将失去稳定性。

- $\underline{E_{02}}$：我们在 E_{02} 处计算雅可比矩阵，并分析相应的特征值。随后确定稳态为局部渐近稳定的条件。在 E_{02} 处的雅可比矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -(\nu_L + \mu_L) & rb & 0 \\ \nu_L & -\mu_A & 0 \\ 0 & 0 & kr_c \end{bmatrix}.$$

现在，特征方程为 $\det(J - \lambda I) = 0$ 其中

$$J - \lambda I = \begin{bmatrix} -(\nu_L + \mu_L) - \lambda & rb & 0 \\ \nu_L & -\mu_A - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & kr_c - \lambda \end{bmatrix}.$$

沿第三行展开即可计算该矩阵的行列式，即

$$\begin{aligned} \det(J - \lambda I) &= (kr_c - \lambda) \det \begin{bmatrix} -(\nu_L + \mu_L) - \lambda & rb \\ \nu_L & -\mu_A - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (kr_c - \lambda) \left(\lambda^2 + [(\nu_L + \mu_L) + \mu_A] \lambda + [(\nu_L + \mu_L) \mu_A - rb\nu_L] \right). \end{aligned}$$

第一个特征值 $\lambda_1 = kr_c$，另外两个特征值

$$\lambda_{2,3} = \frac{-\left((\nu_L + \mu_L) + \mu_A\right) \pm \sqrt{\left((\nu_L + \mu_L) + \mu_A\right)^2 - 4\left((\nu_L + \mu_L)\mu_A - rb\nu_L\right)}}{2}.$$

由于 $k > 0$，因此特征值 λ_1 为负当且仅当 $kr_c < 0 \Leftrightarrow r_c < 0$，并且 $\lambda_{2,\,3}$ 具有负实部当且仅当

$$\left((\nu_L + \mu_L) \mu_A - rb\nu_L\right) > 0 \Leftrightarrow \quad N < 1.$$

这里 $r_c < 0$ 不可行，因为假设感知风险为正实数。因此， E_{02} 始终不稳定。

- $\underline{E_{03}}$：接下来， E_{03} 处的雅可比矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1 - \frac{1}{N}\right) + \nu_L + \mu_L\right) & \frac{rb}{N} & -rb\frac{\nu_L}{\mu_A}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 \left(K_{v_{\max}} - K_{v_{\min}}\right) \\ \nu_L & -\mu_A & 0 \\ 0 & 0 & k\left(-r_c + r_d m\left(\frac{\nu_L}{\mu_A} K_{v_{\max}}\ \left(1 - \frac{1}{N}\right)\right)\right) \end{bmatrix}$$

特征方程为 $\det(J - \lambda I) = 0$ 其中

$$J-\lambda I=\begin{bmatrix} -\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)-\lambda & \frac{rb}{N} & -rb\frac{\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)^2\left(K_{v_{\max}}-K_{v_{\min}}\right) \\ \nu_L & -\mu_A-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & k\left(-r_c+r_dm\left(\frac{\nu_L}{\mu_A}K_{v_{\max}}\left(1-\frac{1}{N}\right)\right)\right)-\lambda \end{bmatrix}.$$

现在可以沿第三行展开，计算该矩阵的行列式，即:

$$\det(J-\lambda I)=\left[k\left(-r_c+r_dm\left(\frac{\nu_L}{\mu_A}K_{v_{\max}}\left(1-\frac{1}{N}\right)\right)\right)-\lambda\right]$$
$$\det\begin{bmatrix} -\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)-\lambda & \frac{rb}{N} \\ \nu_L & -\mu_A-\lambda \end{bmatrix}$$
$$=\left[k\left(-r_c+r_dm\left(\frac{\nu_L}{\mu_A}K_{v_{\max}}\left(1-\frac{1}{N}\right)\right)\right)-\lambda\right]$$
$$\left[\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)+\lambda\right]\left[\mu_A+\lambda\right]-\left[\frac{rb}{N}\right]\left[\nu_L\right]$$

$$=\left[k\left(-r_c+r_dm\left(\frac{\nu_L}{\mu_A}K_{v_{\max}}\left(1-\frac{1}{N}\right)\right)\right)-\lambda\right]$$
$$\left[\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)\mu_A+\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)\lambda+\mu_A\lambda+\lambda^2-\frac{rb\nu_L}{N}\right]$$

$$=\left[k\left(-r_c+r_dm\left(\frac{\nu_L}{\mu_A}K_{v_{\max}}\left(1-\frac{1}{N}\right)\right)\right)-\lambda\right]$$
$$\left[\lambda^2+\left(\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)+\mu_A\right)\lambda+\left(\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)\mu_A-\frac{rb\nu_L}{N}\right)\right].$$

因此，我们得到特征值 $\lambda_1=k\left(-r_c+r_dm\left(\frac{\nu_L}{\mu_A}K_{v_{\max}}\left(1-\frac{1}{N}\right)\right)\right)$，当且仅当 $N>1$ 时，该结论成立，并且

$$\lambda_{2,3}=\frac{-\left(\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)+\mu_A\right)}{2}\pm$$
$$\frac{\sqrt{\left(\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)+\mu_A\right)^2-4\left(\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)\mu_A-\frac{rb\nu_L}{N}\right)}}{2}.$$

这里，特征值 λ_1 将为负，当且仅当

$$k\left[-r_c+r_dm\left(\frac{\nu_L}{\mu_A}K_{v_{\max}}\left(1-\frac{1}{N}\right)\right)\right]<0$$
$$\Rightarrow\frac{r_c}{r_d}>\frac{m\nu_L}{\mu_A}K_{v_{\max}}\left(1-\frac{1}{N}\right)$$
$$\Rightarrow\frac{r_c}{r_d}>\alpha K_{v_{\max}}\left(1-\frac{1}{N}\right)\text{ where }\alpha=\frac{m\nu_L}{\mu_A}$$

并且，特征值的实部 $\lambda_{2,\ 3}$ 将为负，当且仅当

$$\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)\mu_A-\frac{rb\nu_L}{N}>0\Leftrightarrow\quad N>1.$$

由于 $N>1$ 也是 E_{03}的存在条件，分析证实 E_{03} 是局部渐近稳定的，从而确立了

第 3 项中所述的稳定性条件。另一方面，当 $\frac{r_c}{r_d} < \alpha K_{v_{\max}}\left(1-\frac{1}{N}\right)$且 $\alpha = \frac{m\nu_L}{\mu_A}$时，$E_{03}$ 会失去稳定性。

- E_{04}: E_{04} 处的雅可比矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right) & \frac{rb}{N} & -rb\frac{\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)^2\left(K_{v_{\max}}-K_{v_{\min}}\right) \\ \nu_L & -\mu_A & 0 \\ 0 & 0 & -k\left(-r_c+r_d m\left(\frac{\nu_L}{\mu_A}K_{v_{\min}}\left(1-\frac{1}{N}\right)\right)\right) \end{bmatrix}.$$

特征方程为 $\det(J-\lambda I)=0$ 其中

$$J-\lambda I = \begin{bmatrix} -\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)-\lambda & \frac{rb}{N} & -rb\frac{\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)^2\left(K_{v_{\max}}-K_{v_{\min}}\right) \\ \nu_L & -\mu_A-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -k\left(-r_c+r_d m\left(\frac{\nu_L}{\mu_A}K_{v_{\min}}\left(1-\frac{1}{N}\right)\right)\right)-\lambda \end{bmatrix}.$$

该矩阵的行列式可沿第三行展开计算，即

$$\begin{aligned} \det(J-\lambda I) &= \left[-k\left(-r_c+r_d m\left(\frac{\nu_L}{\mu_A}K_{v_{\min}}\left(1-\frac{1}{N}\right)\right)\right)-\lambda\right] \\ &\det\begin{bmatrix} -\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)-\lambda & \frac{rb}{N} \\ \nu_L & -\mu_A-\lambda \end{bmatrix} \\ &= \left[-k\left(-r_c+r_d m\left(\frac{\nu_L}{\mu_A}K_{v_{\min}}\left(1-\frac{1}{N}\right)\right)\right)-\lambda\right]. \\ &\left[\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)+\lambda\right][\mu_A+\lambda]-\left[\frac{rb}{N}\right][\nu_L] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} =&\left[-k\left(-r_c+r_d m\left(\frac{\nu_L}{\mu_A}K_{v_{\min}}\left(1-\frac{1}{N}\right)\right)\right)-\lambda\right] \\ &\left[\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)\mu_A+\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)\lambda+\mu_A\lambda+\lambda^2-\frac{rb\nu_L}{N}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} =&\left[-k\left(-r_c+r_d tm\left(\frac{\nu_L}{\mu_A}K_{v_{\min}}\left(1-\frac{1}{N}\right)\right)\right)-\lambda\right] \\ &\left[\lambda^2+\left(\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)+\mu_A\right)\lambda+\left(\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)\mu_A-\frac{rb\nu_L}{N}\right)\right]. \end{aligned}$$

这里，特征值：$\lambda_1 = -k\left(-r_c+r_d m\left(\frac{\nu_L}{\mu_A}K_{v_{\min}}\left(1-\frac{1}{N}\right)\right)\right)$ 当且仅当 $N>1$ 且

$$\lambda_{2,3} = \frac{-\left(\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)+\mu_A\right)}{2} \pm \frac{\sqrt{\left(\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)+\mu_A\right)^2-4\left(\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)\mu_A-\frac{rb\nu_L}{N}\right)}}{2}.$$

要使稳态局部渐近稳定，特征值 λ_1 为负的充要条件是

$$-k\left[-r_c + r_d m\left(\frac{\nu_L}{\mu_A}K_{v_{\min}}\left(1-\frac{1}{N}\right)\right)\right] < 0 \Leftrightarrow \frac{r_c}{r_d} < \alpha K_{v_{\min}}\left(1-\frac{1}{N}\right) \text{ where } \quad \alpha = \frac{m\nu_L}{\mu_A}$$

且特征值 $\lambda_{2,3}$ 当且仅当具有负实部

$$\left(\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)\mu_A - \frac{rb\nu_L}{N}\right) > 0 \Leftrightarrow \quad N > 1.$$

由于 $N > 1$ 也是 E_{04}的存在条件，分析证实 E_{04} 是局部渐近稳定的，从而确立了第**4**项中所述的稳定性条件。反之，若 $\frac{r_c}{r_d} > \alpha K_{v_{\min}}\left(1-\frac{1}{N}\right)$，则 E_{04} 将是不稳定的，其中$\alpha = \frac{m\nu_L}{\mu_A}$。

□

定理***3***的证明。 我们将在给定稳态处计算雅可比矩阵

$$E_{05} = (L_v,\ \mathrm{A}_v, w) = \left(\frac{\mu_A r_c}{r_d m\nu_L}, \frac{r_c}{r_d m}, \frac{K_{v_{\max}} - \frac{\mu_A r_c}{r_d m\nu_L\left(1-\frac{1}{N}\right)}}{\left(K_{v_{\max}} - K_{v_{\min}}\right)}\right)$$

其中 $N > 1$和 $\frac{r_c}{r_d} \in \left[\alpha K_{v_{\min}}\left(1-\frac{1}{N}\right), \alpha K_{v_{\max}}\left(1-\frac{1}{N}\right)\right]$，其中 $\alpha = \frac{m\nu_L}{\mu_A}$.

$$\text{Given Jacobian Matrix } J = \begin{bmatrix} -\frac{rbA_v}{K_v(w)} - (\nu_L+\mu_L) & rb\left(1-\frac{L_v}{K_v(w)}\right) & \frac{-rbA_v L_v\left(K_{v_{\max}} - K_{v_{\min}}\right)}{(K_v(w))^2} \\ \nu_L & -\mu_A & 0 \\ 0 & kw(1-w)r_d m & k\left(-r_c + r_d m A_v\right)(1-2w) \end{bmatrix}.$$

代入后

$$L_v = \frac{\mu_A r_c}{r_d m\nu_L}, \quad A_v = \frac{r_c}{r_d m}, \quad \text{and } w = \frac{K_{v_{\max}} - \frac{\mu_A r_c}{r_d m\nu_L\left(1-\frac{1}{N}\right)}}{\left(K_{v_{\max}} - K_{v_{\min}}\right)},$$

我们得到矩阵 J的以下元素:

- J_{11}:

$$\begin{aligned} J_{11} &= -\frac{rbA_v}{K_v(w)} - (\nu_L+\mu_L) \\ &= -\frac{rb\frac{r_c}{r_d m}}{\frac{\mu_A r_c}{r_d m\nu_L\left(1-\frac{1}{N}\right)}} - (\nu_L+\mu_L) \\ &= \frac{-rb\nu_L\left(1-\frac{1}{N}\right)}{\mu_A} - (\nu_L+\mu_L) \end{aligned}$$

- J_{12}:

$$\begin{aligned} J_{12} &= rb\left(1-\frac{L_v}{K_v(w)}\right) \\ &= rb\left(1-\frac{\frac{\mu_A r_c}{r_d m\nu_L}}{\frac{\mu_A r_c}{r_d m\nu_L\left(1-\frac{1}{N}\right)}}\right) \\ &= \frac{rb}{N} \end{aligned}$$

- J_{13}:

$$\begin{aligned} J_{13} &= \frac{-rbA_vL_v\left(K_{v_{\max}}-K_{v_{\min}}\right)}{\left(K_v(w)\right)^2} \\ &= \frac{-rb\frac{r_c}{r_d m}\frac{\mu_A r_c}{r_d m\nu_L}\left(K_{v_{\max}}-K_{v_{\min}}\right)}{\left(\frac{\mu_A r_c}{r_d m\nu_L\left(1-\frac{1}{N}\right)}\right)^2} \\ &= \frac{-rb\nu_L\left(1-\frac{1}{N}\right)^2\left(K_{v_{\max}}-K_{v_{\min}}\right)}{\mu_A} \end{aligned}$$

- $J_{21}=v_L$、 $J_{22}=-\mu_A$、 $J_{23}=0$、 $J_{31}=0$

- J_{32}:

$$\begin{aligned} J_{32} &= kw(1-w)r_d m \\ &= K\left[\frac{k_{v_{\max}}-\frac{\mu_A r_c}{r_d m\nu_L\left(1-\frac{1}{N}\right)}}{k_{v_{\max}}-k_{v_{\min}}}\right]\left[1-\left\{\frac{k_{v_{\max}}-\frac{\mu_A r_c}{r_d m\nu_L\left(1-\frac{1}{N}\right)}}{k_{v_{\max}}-k_{v_{\min}}}\right\}\right] r_d m \\ &= kr_d m\left[\frac{k_{v_{\max}}-\frac{\mu_A r_c}{r_d m\nu_L\left(1-\frac{1}{N}\right)}}{k_{v_{\max}}-k_{v_{\min}}}\right]\left[\frac{-k_{v_{\min}}+\frac{\mu_A r_c}{r_d m\nu_L\left(1-\frac{1}{N}\right)}}{k_{v_{\max}}-k_{v_{\min}}}\right] \\ &= \frac{kr_d m}{\left(k_{v_{\max}}-k_{v_{\min}}\right)^2}\left[k_{v_{\max}}-\frac{\mu_A r_c}{r_d m\nu_L\left(1-\frac{1}{N}\right)}\right]\left[-k_{v_{\min}}+\frac{\mu_A r_c}{r_d m\nu_L\left(1-\frac{1}{N}\right)}\right] \\ &= \frac{kr_d m}{\left(k_{v_{\max}}-k_{v_{\min}}\right)^2}\left[\frac{\left(k_{v_{\max}}r_d m\nu_L\left(1-\frac{1}{N}\right)-\mu_A r_c\right)\left(-k_{v_{\min}}r_d m\nu_L\left(1-\frac{1}{N}\right)+\mu_A r_c\right)}{\left(r_d m\nu_L\left(1-\frac{1}{N}\right)\right)^2}\right] \\ &= \frac{kr_d m}{\left(k_{v_{\max}}-k_{v_{\min}}\right)^2}\left[\frac{r_d\mu_A\left(k_{v_{\max}}\frac{m\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)-\frac{r_c}{r_d}\right)r_d\mu_A\left(-k_{v_{\min}}\frac{m\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\frac{r_c}{r_d}\right)}{\left(r_d m\nu_L\left(1-\frac{1}{N}\right)\right)^2}\right] \\ &= \frac{kr_d\mu_A^2}{m\nu_L^2\left(1-\frac{1}{N}\right)^2\left(k_{v_{\max}}-k_{v_{\min}}\right)^2}\left[\left(\alpha\left(1-\frac{1}{N}\right)k_{v_{\max}}-\frac{r_c}{r_d}\right)\left(-\alpha\left(1-\frac{1}{N}\right)k_{v_{\min}}+\frac{r_c}{r_d}\right)\right] \end{aligned}$$

  其中 $\frac{m\nu_L}{\mu_A}=\alpha$.

- J_{33}:

$$\begin{aligned} J_{33} &= k\left(-r_c+r_d mA_v\right)(1-2w) \\ &= k\left(-r_c+r_d m\frac{r_c}{r_d m}\right)(1-2w)=0. \end{aligned}$$

因此，在

$$(L_v,\ \mathrm{A}_v, w)=\left(\frac{\mu_A r_c}{r_d m\nu_L}, \frac{r_c}{r_d m}, \frac{K_{v_{\max}}-\frac{\mu_A r_c}{r_d m\nu_L\left(1-\frac{1}{N}\right)}}{\left(K_{v_{\max}}-K_{v_{\min}}\right)}\right)$$

其中 $N>1$和 $\frac{r_c}{r_d}\in\left[\alpha K_{v_{\min}}\left(1-\frac{1}{N}\right), \alpha K_{v_{\max}}\left(1-\frac{1}{N}\right)\right]$, $\alpha=\frac{m\nu_L}{\mu_A}$为

$$J = \begin{bmatrix} \frac{-rb\nu_L\left(1-\frac{1}{N}\right)}{\mu_A} - (v_L + \mu_L) & \frac{rb}{N} & \frac{-rb\nu_L\left(1-\frac{1}{N}\right)^2\left(K_{v_{\max}} - K_{v_{\min}}\right)}{\mu_A} \\ \nu_L & -\mu_A & 0 \\ 0 & J_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

其中,

$$J_{32} = \frac{kr_d\mu_A^2\left[\left(\alpha\left(1-\frac{1}{N}\right)k_{v_{\max}} - \frac{r_c}{r_d}\right)\left(-\alpha\left(1-\frac{1}{N}\right)k_{v_{\min}} + \frac{r_c}{r_d}\right)\right]}{m\nu_L^2\left(1-\frac{1}{N}\right)^2\left(k_{v_{\max}} - k_{v_{\min}}\right)^2}.$$

特征方程为 $\det(J - \lambda I) = 0$, 即:

$$J - \lambda I = \begin{bmatrix} \frac{-rb\nu_L\left(1-\frac{1}{N}\right)}{\mu_A} - (\nu_L + \mu_L) - \lambda & \frac{rb}{N} & \frac{-rb\nu_L\left(1-\frac{1}{N}\right)^2\left(K_{v_{\max}} - K_{v_{\min}}\right)}{\mu_A} \\ \nu_L & -\mu_A - \lambda & 0 \\ 0 & J_{32} & -\lambda \end{bmatrix}$$

该矩阵的行列式可通过沿第三行展开来计算:

$$\det(J - \lambda I) = -J_{32}\det\left(\begin{bmatrix} -\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right) + \nu_L + \mu_L\right) - \lambda & \frac{-rb\nu_L\left(1-\frac{1}{N}\right)^2\left(K_{v_{\max}} - K_{v_{\min}}\right)}{\mu_A} \\ \nu_L & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$-\lambda\det\left(\begin{bmatrix} -\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right) + \nu_L + \mu_L\right) - \lambda & \frac{rb}{N} \\ \nu_L & -\mu_A - \lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= -\lambda\left[\left(\frac{rb\nu_L\left(1-\frac{1}{N}\right)}{\mu_A} + (\nu_L + \mu_L) + \lambda\right)(\mu_A + \lambda) - \frac{rb\nu_L}{N}\right] - J_{32}\left[\frac{rb\nu_L^2\left(1-\frac{1}{N}\right)^2\left(k_{v_{\max}} - k_{v_{\min}}\right)}{\mu_A}\right]$$

$$= -\lambda\left[\lambda^2 + \left(\frac{rb\nu_L\left(1-\frac{1}{N}\right)}{\mu_A} + (\nu_L + \mu_L + \mu_A)\right)\lambda + \left(rb\nu_L\left(1-\frac{2}{N}\right) + (\nu_L + \mu_L)\mu_A\right)\right]$$

$$-\frac{kr_d\mu_A^2}{m\nu_L^2\left(1-\frac{1}{N}\right)^2\left(k_{v_{\max}} - k_{v_{\min}}\right)^2}\frac{rb\nu_L^2\left(1-\frac{1}{N}\right)^2\left(k_{v_{\max}} - k_{v_{\min}}\right)}{\mu_A}$$
$$\left[\left(\alpha\left(1-\frac{1}{N}\right)k_{v_{\max}} - \frac{r_c}{r_d}\right)\left(-\alpha\left(1-\frac{1}{N}\right)k_{v_{\min}} + \frac{r_c}{r_d}\right)\right]$$

$$= -\lambda\left[\lambda^2 + \left(\frac{rb\nu_L\left(1-\frac{1}{N}\right)}{\mu_A} + (\nu_L + \mu_L + \mu_A)\right)\lambda + rb\nu_L\left(\left(1-\frac{2}{N}\right) + \frac{(\nu_L + \mu_L)\mu_A}{rb\nu_L}\right)\right]$$

$$-\frac{krbr_d\mu_A}{m\left(k_{v_{\max}} - k_{v_{\min}}\right)}\left[\left(\alpha\left(1-\frac{1}{N}\right)k_{v_{\max}} - \frac{r_c}{r_d}\right)\left(-\alpha\left(1-\frac{1}{N}\right)k_{v_{\min}} + \frac{r_c}{r_d}\right)\right]$$

$$= -\lambda^3 - \left(\frac{rb\nu_L \left(1 - \frac{1}{N}\right)}{\mu_A} + (\nu_L + \mu_L + \mu_A) \right) \lambda^2 - \left(rb\nu_L \left(1 - \frac{2}{N}\right) + \frac{1}{N} \right) \lambda$$
$$- P \left[\left(\alpha \left(1 - \frac{1}{N}\right) k_{v_{\max}} - \frac{r_c}{r_d} \right) \left(-\alpha \left(1 - \frac{1}{N}\right) k_{v_{\min}} + \frac{r_c}{r_d} \right) \right]$$

$$= -\lambda^3 - \left(\frac{rb\nu_L \left(1 - \frac{1}{N}\right)}{\mu_A} + (\nu_L + \mu_L + \mu_A) \right) \lambda^2 - \left(rb\nu_L \left(1 - \frac{1}{N}\right) \right) \lambda$$
$$- P \left[\left(\alpha \left(1 - \frac{1}{N}\right) k_{v_{\max}} - \frac{r_c}{r_d} \right) \left(-\alpha \left(1 - \frac{1}{N}\right) k_{v_{\min}} + \frac{r_c}{r_d} \right) \right].$$

特征方程为 $\det(J - \lambda I) = 0$，即，

$$\lambda^3 + \left(\frac{rb\nu_L \left(1 - \frac{1}{N}\right)}{\mu_A} + (\nu_L + \mu_L + \mu_A) \right) \lambda^2 + \left(rb\nu_L \left(1 - \frac{1}{N}\right) \right) \lambda$$
$$+ P \left[\left(\alpha \left(1 - \frac{1}{N}\right) k_{v_{\max}} - \frac{r_c}{r_d} \right) \left(-\alpha \left(1 - \frac{1}{N}\right) k_{v_{\min}} + \frac{r_c}{r_d} \right) \right] = 0$$

$$\text{where, } P = \frac{krbr_d\mu_A}{m\left(k_{v_{\max}} - k_{v_{\min}}\right)} > 0, \quad \alpha = \frac{m\nu_L}{\mu_A} > 0, \quad N = \frac{rb\nu_L}{\left(\nu_L + \mu_L\right)\mu_A} > 1.$$

因此，我们得到三次特征方程：

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

其中，系数 a_2，a_1 和 a_0 由下式给出

- $a_2 = \frac{rb\nu_L\left(1 - \frac{1}{N}\right)}{\mu_A} + (\nu_L + \mu_L + \mu_A)$
- $a_1 = rb\nu_L \left(1 - \frac{1}{N}\right)$
- $a_0 = P \left[\left(\alpha \left(1 - \frac{1}{N}\right) K_{v_{\max}} - \frac{r_c}{r_d} \right) \left(-\alpha \left(1 - \frac{1}{N}\right) K_{v_{\min}} + \frac{r_c}{r_d} \right) \right]$ with $P = \frac{krbr_d\mu_A}{m\left(K_{v_{\max}} - K_{v_{\min}}\right)} > 0.$

对于该特征方程，稳定性的必要且充分条件（Routh-Hurwitz 稳定性判据 [28]）为

$$a_2 > 0,\ a_1 > 0,\ a_0 > 0 \quad \text{and} \quad a_2a_1 > a_0.$$

这些条件确保所有特征值都具有负实部。我们已在正文中证明前三个条件均成立。现在我们分析最后一个条件如下：

条件：($a_2a_1 > a_0$)

$$
\begin{aligned}
& a_2 a_1 > a_0 \\
& \Rightarrow \left(\frac{rb\nu_L \left(1-\frac{1}{N}\right)}{\mu_A} + \nu_L + \mu_L + \mu_A \right) \left(rb\nu_L \left(1-\frac{1}{N}\right) \right) \\
& \quad > P \left[\alpha \left(1-\frac{1}{N}\right) K_{v_{\max}} - \frac{r_c}{r_d} \right] \left[-\alpha \left(1-\frac{1}{N}\right) K_{v_{\min}} + \frac{r_c}{r_d} \right] \\
& \Rightarrow \frac{rb\nu_L}{\mu_A} \left[\left(1-\frac{1}{N}\right) + \frac{(\nu_L+\mu_L)\mu_A}{rb\nu_L} + \frac{\mu_A^2}{rb\nu_L} \right] \left(rb\nu_L \left(1-\frac{1}{N}\right) \right) \\
& \quad > P \left[\alpha \left(1-\frac{1}{N}\right) K_{v_{\max}} - \frac{r_c}{r_d} \right] \left[-\alpha \left(1-\frac{1}{N}\right) K_{v_{\min}} + \frac{r_c}{r_d} \right] \\
& \Rightarrow \frac{r^2 b^2 \nu_L^2}{\mu_A} \left(1 + \frac{\mu_A^2}{rb\nu_L} \right) \left(1-\frac{1}{N}\right) \\
& \quad > P \left[\alpha \left(1-\frac{1}{N}\right) K_{v_{\max}} - \frac{r_c}{r_d} \right] \left[-\alpha \left(1-\frac{1}{N}\right) K_{v_{\min}} + \frac{r_c}{r_d} \right] \\
& \Rightarrow \frac{rb\nu_L \left(rb\nu_L + \mu_A^2\right) \left(1-\frac{1}{N}\right)}{\mu_A} \\
& \quad > \frac{krbr_d\mu_A}{m\left(K_{v_{\max}} - K_{v_{\min}}\right)} \left[\alpha \left(1-\frac{1}{N}\right) K_{v_{\max}} - \frac{r_c}{r_d} \right] \left[-\alpha \left(1-\frac{1}{N}\right) K_{v_{\min}} + \frac{r_c}{r_d} \right] \\
& \Rightarrow \frac{m\nu_L \left(K_{v_{\max}} - K_{v_{\min}}\right) \left(rb\nu_L + \mu_A^2\right) \left(1-\frac{1}{N}\right)}{k\mu_A^2 r_d} \\
& \quad > \left[\alpha \left(1-\frac{1}{N}\right) K_{v_{\max}} - \frac{r_c}{r_d} \right] \left[-\alpha \left(1-\frac{1}{N}\right) K_{v_{\min}} + \frac{r_c}{r_d} \right] \\
& \Rightarrow Q\alpha \left(K_{v_{\max}} - K_{v_{\min}}\right) \left(1-\frac{1}{N}\right) \\
& \quad > \left[\alpha \left(1-\frac{1}{N}\right) K_{v_{\max}} - \frac{r_c}{r_d} \right] \left[-\alpha \left(1-\frac{1}{N}\right) K_{v_{\min}} + \frac{r_c}{r_d} \right], \\
& \text{where } Q = \frac{\mu_A^2 + rb\nu_L}{k\mu_A r_d}, \quad P = \frac{krbr_d\mu_A}{m\left(K_{v_{\max}} - K_{v_{\min}}\right)} > 0.
\end{aligned}
$$

现在我们假设 $x = r_c/r_d$，因此上述不等式变为：

$$
Q\alpha \left(K_{v_{\max}} - K_{v_{\min}}\right) \left(1-\frac{1}{N}\right) > \left[\alpha \left(1-\frac{1}{N}\right) K_{v_{\max}} - x \right] \left[-\alpha \left(1-\frac{1}{N}\right) K_{v_{\min}} + x \right]
$$

这意味着：

$$
Q\alpha \left(K_{v_{\max}} - K_{v_{\min}}\right) \left(1-\frac{1}{N}\right) > \left[-\alpha^2 \left(1-\frac{1}{N}\right)^2 K_{v_{\max}} K_{v_{\min}} + \alpha \left(1-\frac{1}{N}\right) \left(K_{v_{\max}} + K_{v_{\min}}\right) x - x^2 \right]
$$

重新整理该不等式，可得：

$$
x^2 - \alpha \left(1-\frac{1}{N}\right) \left(K_{v_{\max}} + K_{v_{\min}}\right) x + \alpha^2 \left(1-\frac{1}{N}\right)^2 K_{v_{\max}} K_{v_{\min}} + Q\alpha \left(K_{v_{\max}} - K_{v_{\min}}\right) \left(1-\frac{1}{N}\right) > 0
$$

这是关于 x（其中 $x = r_c/r_d$）的二次不等式，我们可以将其写为：$f(x) = x^2 - Bx + C > 0$.

Here

$$B = \alpha\left(1-\frac{1}{N}\right)(K_{v_{\max}}+K_{v_{\min}}),$$

$$C = \alpha^2\left(1-\frac{1}{N}\right)^2 K_{v_{\max}}K_{v_{\min}} + Q\alpha\left(K_{v_{\max}}-K_{v_{\min}}\right)\left(1-\frac{1}{N}\right).$$

二次方程的根为

$$x_{1,2} = \frac{B \pm \sqrt{B^2-4C}}{2}$$

即,

$$x_1 = \frac{r_c}{r_d} = \alpha\frac{(K_{v_{\max}}+K_{v_{\min}})}{2}\left(1-\frac{1}{N}\right) - \frac{\sqrt{B^2-4C}}{2}$$

and

$$x_2 = \frac{r_c}{r_d} = \alpha\frac{(K_{v_{\max}}+K_{v_{\min}})}{2}\left(1-\frac{1}{N}\right) + \frac{\sqrt{B^2-4C}}{2}.$$

现在我们考虑以下两种情况:

情况 I:

若 $B^2-4C<0$，则根 x_1，x_2 为共轭复数，这意味着不存在实不稳定阈值。

在这种情况下，对于区间 $\alpha\left(1-\frac{1}{N}\right)K_{v_{\min}} < \frac{r_c}{r_d} < \alpha\left(1-\frac{1}{N}\right)K_{v_{\max}}$ 内的任意 x，我们得到

$$f(x) = x^2 - Bx + C > 0.$$

因此，共存稳态 E_{05} 在劳斯-赫尔维茨判据给出的整个集合内稳定，即
$\alpha\left(1-\frac{1}{N}\right)K_{v_{\min}} < \frac{r_c}{r_d} < \alpha\left(1-\frac{1}{N}\right)k_{v_{\max}}$，所需条件为

$$\begin{gathered}
B^2-4C<0 \\
\Rightarrow \alpha^2\left(1-\frac{1}{N}\right)^2(k_{v_{\max}}+k_{v_{\min}})^2 - 4\alpha^2\left(1-\frac{1}{N}\right)^2 k_{v_{\max}}k_{v_{\min}} \\
-4Q\alpha\left(k_{v_{\max}}-k_{v_{\min}}\right)\left(1-\frac{1}{N}\right)<0 \\
\Rightarrow \alpha^2\left(1-\frac{1}{N}\right)^2(k_{v_{\max}}-k_{v_{\min}})^2 - 4Q\alpha\left(k_{v_{\max}}-k_{v_{\min}}\right)\left(1-\frac{1}{N}\right)<0 \\
\Rightarrow \alpha\left(k_{v_{\max}}-k_{v_{\min}}\right)\left(1-\frac{1}{N}\right) < 4Q.
\end{gathered}$$

情形二:

如果满足条件 $B^2-4C>0$，即 $\Rightarrow \alpha\left(k_{v_{\max}}-k_{v_{\min}}\right)\left(1-\frac{1}{N}\right) > 4Q$，那么二次方程$f(x) = x^2-Bx+C=0$有以下两个根:

$$x_{1,2} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4C}}{2}$$

其中

$$B = \alpha \left(1 - \frac{1}{N}\right) \left(K_{v_{\max}} + K_{v_{\min}}\right),$$
$$C = \alpha^2 \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 K_{v_{\max}} K_{v_{\min}} + Q\alpha \left(K_{v_{\max}} - K_{v_{\min}}\right) \left(1 - \frac{1}{N}\right).$$

在下面的计算中，我们假设

$$\alpha \left(1 - \frac{1}{N}\right) K_{v_{\max}} = \chi_{\max} \quad \text{and} \quad \alpha \left(1 - \frac{1}{N}\right) K_{v_{\min}} = \chi_{\min}.$$

代入这些值，我们得到

$$x_{1,2} = \frac{\left(\chi_{\max} + \chi_{\min}\right) \pm \sqrt{\left(\chi_{\max} + \chi_{\min}\right)^2 - 4\left(\chi_{\max}\chi_{\min} + Q\left(\chi_{\max} - \chi_{\min}\right)\right)}}{2}$$
$$= \frac{\left(\chi_{\max} + \chi_{\min}\right) \pm \sqrt{\left(\chi_{\max} - \chi_{\min}\right)^2 - 4Q\left(\chi_{\max} - \chi_{\min}\right)}}{2}.$$

Now,

$$x_1 = \frac{\left(\chi_{\max} + \chi_{\min}\right) - \sqrt{\left(\chi_{\max} - \chi_{\min}\right)^2 - 4Q\left(\chi_{\max} - \chi_{\min}\right)}}{2} > \frac{\left(\chi_{\max} + \chi_{\min}\right) - \sqrt{\left(\chi_{\max} - \chi_{\min}\right)^2}}{2} = \chi_{\min}$$
$$\Rightarrow x_1 > \chi_{\min}$$

即，

$$x_1(N) = \frac{r_c}{r_d}(N) = \alpha \frac{\left(K_{v_{\max}} + K_{v_{\min}}\right)}{2} \left(1 - \frac{1}{N}\right) - \frac{\sqrt{B^2 - 4C}}{2} > \alpha \left(1 - \frac{1}{N}\right) K_{v_{\min}}.$$

接下来，

$$x_2 = \frac{\left(\chi_{\max} + \chi_{\min}\right) + \sqrt{\left(\chi_{\max} - \chi_{\min}\right)^2 - 4Q\left(\chi_{\max} - \chi_{\min}\right)}}{2} < \frac{\left(\chi_{\max} + \chi_{\min}\right) + \sqrt{\left(\chi_{\max} - \chi_{\min}\right)^2}}{2} = \chi_{\max}$$
$$\Rightarrow x_2 < \chi_{\max}$$

即，

$$x_2(N) = \frac{r_c}{r_d}(N) = \alpha \frac{\left(K_{v_{\max}} + K_{v_{\min}}\right)}{2} \left(1 - \frac{1}{N}\right) + \frac{\sqrt{B^2 - 4C}}{2} < \alpha \left(1 - \frac{1}{N}\right) K_{v_{\max}}.$$

因此， $f(x)$ 的两个不同实根 $x_1(N)$ 和 $x_2(N)$ 始终位于区间 $\left(\alpha\left(1 - \frac{1}{N}\right) K_{v_{\min}},\ \alpha\left(1 - \frac{1}{N}\right) K_{v_{\max}}\right)$内，若 $B^2 - 4C > 0$，即:

$$(x_1, x_2) \subset \left(\alpha \left(1 - \frac{1}{N}\right) K_{v_{\min}}, \alpha \left(1 - \frac{1}{N}\right) K_{v_{\max}}\right).$$

因此，在以下参数区域中， E_{05} 将保持稳定，具体为

$$\alpha\left(1-\frac{1}{N}\right)k_{v_{\min}}<\frac{r_c}{r_d}<x_1 \text{ and } x_2<\frac{r_c}{r_d}<\alpha\left(1-\frac{1}{N}\right)k_{v_{\max}}.$$

最后，结合 Routh-Hurwitz 稳定性判据，我们得到 E_{05} 局部稳定性的以下条件：

(i) 如果 $B^2-4C<0$，即 $\Rightarrow \alpha\left(k_{v_{\max}}-k_{v_{\min}}\right)\left(\underline{1-\frac{1}{N}}\right)<4Q$，则 E_{05} 将在区间：
$\underline{\alpha\left(1-\frac{1}{N}\right)K_{v_{\min}}}<\underline{\frac{r_c}{r_d}}<\underline{\alpha\left(1-\frac{1}{N}\right)k_{v_{\max}}}$内保持稳定。

(ii) 如果 $B^2-4C>0$，即 $\Rightarrow \alpha\left(k_{v_{\max}}-k_{v_{\min}}\right)\left(\underline{1-\frac{1}{N}}\right)>4Q$，则 E_{05} 将在以下区间内保持稳定

$$\left[\alpha\frac{(K_{v_{\max}}+K_{v_{\min}})}{2}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\frac{\sqrt{B^2-4C}}{2}\right]<\frac{r_c}{r_d}<\alpha K_{v_{\max}}\left(1-\frac{1}{N}\right)$$

and

$$\alpha K_{v_{\min}}\left(1-\frac{1}{N}\right)<\frac{r_c}{r_d}<\left[\alpha\frac{(K_{v_{\max}}+K_{v_{\min}})}{2}\left(1-\frac{1}{N}\right)-\frac{\sqrt{B^2-4C}}{2}\right]$$

其中

$$\alpha=\frac{m\nu_L}{\mu_A},\quad B=\alpha\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(K_{v_{\max}}+K_{v_{\min}}\right),$$

$$C=\alpha^2\left(1-\frac{1}{N}\right)^2K_{v_{\max}}K_{v_{\min}}+Q\alpha\left(K_{v_{\max}}-K_{v_{\min}}\right)\left(1-\frac{1}{N}\right),Q=\frac{\mu_A^2+rb\nu_L}{k\mu_A r_d},$$

$$x_1=\frac{r_c}{r_d}=\alpha\frac{(K_{v_{\max}}+K_{v_{\min}})}{2}\left(1-\frac{1}{N}\right)-\frac{\sqrt{B^2-4C}}{2}$$

and

$$x_2=\frac{r_c}{r_d}=\alpha\frac{(K_{v_{\max}}+K_{v_{\min}})}{2}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\frac{\sqrt{B^2-4C}}{2}.$$

□

7.2 具有恒定收益和公共卫生干预的模型

我们考察有说服力的公共卫生宣传活动和干预措施对模型（4）的影响。我们假设γ 为一项公共卫生（PH）行动参数，以探究PH主管部门持续施加影响时种群动态会如何变化。按照 [27], 中的方法，我们加入一个新项 γ $(1-w)$，如下所示：

$$\frac{dw}{dt} = kw(1-w)(-r_c + r_d) + \gamma(1-w) \tag{11}$$

其中， $\gamma > 0$ 是一个常数参数，表示持续性公共卫生行动影响家庭行为的有效性。该假设适用于公共卫生工作持续且稳定的情形，例如持续开展教育和宣传活动或不断进行资源分配。模型的其余结构，包括蚊子动态和承载能力 $K_v(w)$，仍与方程（4）中所述的相同。

稳态

为确定扩展系统中具有生物学合理性的（非负）稳态，我们求解（L_v， A_v， w），使得 L_v 和 A_v 的方程（见正文）以及方程（11）中的时间导数均为零。我们必须求解以下系统：

$$\begin{aligned} rbA_v\left(1 - \frac{L_v}{K_v(w)}\right) - (\nu_L + \mu_L)L_v = 0, \\ \nu_L L_v - \mu_A A_v = 0, \\ kw(1-w)(-r_c + r_d) + \gamma(1-w) = 0, \end{aligned}$$

其中

$$K_v(w) = K_{v_{\max}} - w(K_{v_{\max}} - K_{v_{\min}}).$$

我们求解该系统，并在以下命题中总结四个稳态。

命题3。 扩展系统的稳态(L_v^*, A_v^*, w^*) 及其解释如下：

$\underline{E_{01}}: (L_v^*, A_v^*, w^*) = \left(0, 0, \frac{\gamma}{k(r_c - r_d)}\right)$ 其中 $0 \leq \frac{\gamma}{k(r_c - r_d)} \leq 1$：无蚊，部分孳生地控制

$\underline{E_{02}}: (L_v^*, A_v^*, w^*) = (0,0,1)$：无蚊，全面孳生地控制。

$\tilde{E}_{03}: (L_v^*, A_v^*, w^*) = \left(K_v{}^*\left(1 - \frac{1}{N}\right), \frac{\nu_L}{\mu_A} K_v{}^*\left(1 - \frac{1}{N}\right), \frac{\gamma}{k(r_c - r_d)}\right)$ 其中 $0 \leq \frac{\gamma}{k(r_c - r_d)} \leq 1$ 和

$\overline{K_v^*} = K_v\left(\frac{\gamma}{k(r_e - r_d)}\right) = K_{v_{max}} - \frac{\gamma}{k(r_e - r_d)}(K_{v_{max}} - K_{v_{min}})$ 当且仅当 $N > 1$：有蚊、部分孳生地控制。

$E_{04}: (L_v^*, A_v^*, w^*) = \left(K_{v_{min}}\left(1 - \frac{1}{N}\right), \frac{\nu_L}{\mu_A} K_{v_{min}}\left(1 - \frac{1}{N}\right), 1\right)$ 当且仅当 $N > 1$：有蚊，完全控制繁殖场所。

证明。令时间导数为零，由方程（11）可得

$$kw(1-w)(-r_c+r_d)+\gamma(1-w)=0$$
$$\Rightarrow \quad (1-w)[wk(r_d-r_c)+\gamma]=0.$$

该方程有 两个解，分别为 $w=1$ 或 $w=\frac{\gamma}{k(r_c-r_d)}$，其中 $0\leq \frac{\gamma}{k(r_c-r_d)}\leq 1$。现在由方程 on

$$\nu_L L_v-\mu_A A_v=0,$$

我们有

$$A_v=\frac{\nu_L}{\mu_A}L_v.$$

将 $A_v=\frac{\nu_L}{\mu_A}L_v$ 和 $K_v(w)=K_{v_{\max}}-w(K_{v_{\max}}-K_{v_{\min}})$ 代入下列方程，可得

$$rb\left(\frac{\nu_L}{\mu_A}L_v\right)\left(1-\frac{L_v}{K_v(w)}\right)-(\nu_L+\mu_L)L_v=0.$$

这给出两个解，分别为 $L_v=0$ 或

$$\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\right)\left(1-\frac{L_v}{K_v(w)}\right)=\nu_L+\mu_L$$

这意味着

$$L_v=K_v(w)\left(1-\frac{\mu_A(\nu_L+\mu_L)}{rb\nu_L}\right)\Rightarrow L_v=K_v(w)\left(1-\frac{1}{N}\right) \text{ if and only if } N>1.$$

因此，$A_v=\frac{\nu_L}{\mu_A}L_v=\frac{\nu_L}{\mu_A}K_v(w)\left(1-\frac{1}{N}\right)$ 并且满足以下条件:

- When $w=\frac{\gamma}{k(r_c-r_d)}, L_v=0$ then we get $A_v=0$.
- When $w=1, L_v=0$ then we get $A_v=0$.
- When $w=\frac{\gamma}{k(r_c-r_d)}$ where $0\leq\frac{\gamma}{k(r_c-r_d)}\leq 1$, we get $L_v=K_v\left(\frac{\gamma}{k(r_c-r_d)}\right)\left(1-\frac{1}{N}\right)=K_v^*\left(1-\frac{1}{N}\right)$ and $A_v=\frac{\nu_L}{\mu_A}K_v\left(\frac{\gamma}{k(r_c-r_d)}\right)\left(1-\frac{1}{N}\right)=\frac{\nu_L}{\mu_A}K_v^*\left(1-\frac{1}{N}\right)$ where, $K_v^*=K_v\left(\frac{\gamma}{k(r_c-r_d)}\right)=K_{v_{\max}}-\frac{\gamma}{k(r_c-r_d)}\left(K_{v_{\max}}-K_{v_{\min}}\right)$.
- When $w=1$, we get $L_v=K_v(1)\left(1-\frac{1}{N}\right)=K_{v_{\min}}\left(1-\frac{1}{N}\right)$ and $A_v=\frac{\nu_L}{\mu_A}K_v(1)\left(1-\frac{1}{N}\right)=\frac{\nu_L}{\mu_A}K_{v_{\min}}\left(1-\frac{1}{N}\right)$.

因此，我们得到了以下稳态:

1. $\tilde{E}_{01}$: $(L_v^*, A_v^*, w^*)=\left(0,0,\frac{\gamma}{k(r_c-r_d)}\right)$ 其中 $0\leq\frac{\gamma}{k(r_c-r_d)}\leq 1$,
2. E_{02}: $(L_v^*, A_v^*, w^*)=(0,0,1)$,
3. $\tilde{E}_{03}$: $(L_v^*, A_v^*, w^*)=\left(K_v{}^*\left(1-\frac{1}{N}\right), \frac{\nu_L}{\mu_A}K_v{}^*\left(1-\frac{1}{N}\right), \frac{\gamma}{k(r_c-r_d)}\right)$ where $0\leq\frac{\gamma}{k(r_c-r_d)}\leq 1$ and $K_v^*=K_v\left(\frac{\gamma}{k(r_e-r_d)}\right)=K_{v_{\max}}-\frac{\gamma}{k(r_e-r_d)}\left(K_{v_{\max}}-K_{v_{\min}}\right)$ if and only if $N>1$,

4. E_{04}：$(L_v^*, A_v^*, w^*) = \left(K_{v_{\min}}\left(1-\frac{1}{N}\right), \frac{\nu_L}{\mu_A}K_{v_{\min}}\left(1-\frac{1}{N}\right), 1\right)$ 当且仅当 $N>1$。

□

我们对四个稳态进行局部稳定性分析，其稳定性取决于行为参数 r_c、r_d、γ 以及昆虫学参数 N。按照第3.1节采用的方法，我们运用雅可比矩阵和特征值分析来确定稳定性条件，具体内容如下定理所述：

定理5。具有公共卫生干预的系统的稳态局部稳定性如下所述：

1. 若 $r_c - r_d > \frac{\gamma}{k}$ 且 $N<1$，则 E_{01} 局部渐近稳定；E_{02} 不稳定。*2.* 若 $r_c - r_d < \frac{\gamma}{k}$ 且 $N<1$，则 E_{02} 局部渐近稳定。*3.* 若 $r_c - r_d > \frac{\gamma}{k}$ 且 $N>1$，则 E_{03} 局部渐近稳定；E_{01}、E_{02} 和 E_{04} 不稳定。*4.* 若 $r_c - r_d < \frac{\gamma}{k}$ 且 $N>1$，则 E_{04} 局部渐近稳定；E_{02} 不稳定。

证明。我们继续分别考察每个稳态，并验证条目 1–4 中提出的论断。

- E_{01}：我们在稳态 E_{01} 处计算雅可比矩阵并求出特征值。随后推导稳定性条件。在 E_{01} 处的雅可比矩阵为

$$J-\lambda I = \begin{bmatrix} -(\nu_L+\mu_L)-\lambda & rb & 0 \\ \nu_L & -\mu_A-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & (k(-r_c+r_d)+\gamma)-\lambda \end{bmatrix}.$$

沿第三行展开即可计算该矩阵的行列式，即

$$\det(J-\lambda I) = (k(-r_c+r_d)+\gamma)-\lambda)\det\begin{bmatrix} -(\nu_L+\mu_L)-\lambda & rb \\ \nu_L & -\mu_A-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (k(-r_c+r_d)+\gamma-\lambda))\left(\lambda^2+[(\nu_L+\mu_L)+\mu_A]\lambda+[(\nu_L+\mu_L)\mu_A-rb\nu_L]\right)$$

第一个特征值为 $\lambda_1 = k(-r_c+r_d)+\gamma$，另外两个特征值为

$$\lambda_{2,3} = \frac{-[(\nu_L+\mu_L)+\mu_A] \pm \sqrt{[(\nu_L+\mu_L)+\mu_A]^2 - 4[(\nu_L+\mu_L)\mu_A - rb\nu_L]}}{2}.$$

由于 $k>0$，特征值 λ_1 为负当且仅当 $k(-r_c+r_d)+\gamma<0 \Leftrightarrow r_c-r_d>\frac{\gamma}{k}$。此外，

由于 $(\nu_L+\mu_L)+\mu_A>0$，另外两个特征值 $\lambda_{2,\ 3}$ 具有负实部当且仅当

$$(\nu_L+\mu_L)\,\mu_A-rb\nu_L>0 \quad\Leftrightarrow\quad N<1.$$

~ _ ~由于 $r_c-r_d>\frac{\gamma}{k}$也是 E_{01}的存在条件，因此分析确认 E_{01} 局部渐近稳定，从而确立了条目 1 中所述的稳定性条件；当 $N>1$时则变得不稳定。

- $\underline{E_{02}}$：接下来，我们分析稳态 E_{02}的局部稳定性。特征方程为 $\det(J-\lambda I)=0$，其中

$$J-\lambda I=\begin{bmatrix}-(\nu_L+\mu_L)-\lambda & rb & 0\\ \nu_L & -\mu_A-\lambda & 0\\ 0 & 0 & (k(r_c-r_d)-\gamma)-\lambda\end{bmatrix}.$$

沿第三行展开即可计算该矩阵的行列式，即

$$\begin{aligned}\det(J-\lambda I)&=((k(r_c-r_d)-\gamma)-\lambda)\det\begin{bmatrix}-(\nu_L+\mu_L)-\lambda & rb\\ \nu_L & -\mu_A-\lambda\end{bmatrix}\\&=((k(r_c-r_d)-\gamma)-\lambda)\left(\lambda^2+[(\nu_L+\mu_L)+\mu_A]\,\lambda+[(\nu_L+\mu_L)\,\mu_A-rb\nu_L]\right).\end{aligned}$$

特征方程为 $((k(r_c-r_d)\ -\gamma)\ -\lambda)\ \left(\lambda^2+[(\nu_L+\mu_L)\ +\mu_A]\,\lambda+[(\nu_L+\mu_L)\,\mu_A-rb\nu_L]\right)=0$.因此，第一个特征值为 $\lambda_1=k(r_c-r_d)-\gamma$，另外两个特征值是二次多项式的根，即

$$\lambda_{2,3}=\frac{-[(\nu_L+\mu_L)+\mu_A]\pm\sqrt{[(\nu_L+\mu_L)+\mu_A]^2-4\,[(\nu_L+\mu_L)\mu_A-rb\nu_L]}}{2}.$$

当 $k\,(r_c-r_d)-\gamma<0\Leftrightarrow r_c-r_d<\frac{\gamma}{k}$时，特征值 λ_1 将为负，而另外两个特征值 $\lambda_{2,\ 3}$的实部将为负，如果

$$(\nu_L+\mu_L)\,\mu_A-rb\nu_L>0 \quad\Leftrightarrow\quad N<1.$$

因此， E_{02} 是局部渐近稳定的，证实了第 2 项中所述的稳定性条件。反之，如果 $r_c-r_d>\frac{\gamma}{k}$或 $N>1$，则 E_{02} 会变得不稳定，因为这些条件会导致至少出现一个正特征值。

- ~~E_{03}~~：~ E_{03} 处的雅可比矩阵为

$$J=\begin{bmatrix}-\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right) & \frac{rb}{N} & -rb\frac{\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)^2(K_{v_{\max}}-K_{v_{\min}})\\ \nu_L & -\mu_A & 0\\ 0 & 0 & k(-r_c+r_d)+\gamma\end{bmatrix}$$

特征方程为 $\det(J-\lambda I)=0$ 其中

$$J-\lambda I=\begin{bmatrix} -\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)-\lambda & \frac{rb}{N} & -rb\frac{\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)^2\left(K_{v_{\max}}-K_{v_{\min}}\right) \\ \nu_L & -\mu_A-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & (k(-r_c+r_d)+\gamma)-\lambda \end{bmatrix}.$$

沿第三行展开即可计算该矩阵的行列式，即:

$$\det(J-\lambda I)=[(k(-r_c+r_d)+\gamma)-\lambda]\det\begin{bmatrix} -\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)-\lambda & \frac{rb}{N} \\ \nu_L & -\mu_A-\lambda \end{bmatrix}$$

$$=[(k(-r_c+r_d)+\gamma)-\lambda]$$
$$\left[\lambda^2+\left(\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)+\mu_A\right)\lambda+\left(\left(\frac{rbv_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)\mu_A-\frac{rb\nu_L}{N}\right)\right].$$

第一个特征值 $\lambda_1=k(-r_c+r_d)+\gamma$，另外两个特征值为

$$\lambda_{2,3}=\frac{-\left(\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)+\mu_A\right)}{2}\pm \frac{\sqrt{\left(\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)+\mu_A\right)^2-4\left(\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)\mu_A-\frac{rb\nu_L}{N}\right)}}{2}.$$

由于 $k>0$，特征值 λ_1 为负当且仅当 $k(-r_c+r_d)+\gamma<0\Leftrightarrow r_c-r_d>\frac{\gamma}{k}$。 –

特征值 $\lambda_{2,\ 3}$ 的实部为负当且仅当

$$\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)\mu_A-\frac{rb\nu_L}{N}>0$$
$$\Leftrightarrow\quad \left(1-\frac{2}{N}\right)>-\frac{(\nu_L+\mu_L)\,\mu_A}{rb\nu_L}=\frac{1}{N}$$

˜ ˜，当 $N>1$时该条件成立。由于 $N>1$ 和 $r_c-r_d>\frac{\gamma}{k}$ 也是 E_{03}的存在条件，因此，E_{03} 是局部渐近稳定的，这证实了第 3 项中所述的稳定性条件。

- $\underline{E_{04}}$: E_{04} 处的雅可比矩阵为

$$J=\begin{bmatrix} -\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right) & \frac{rb}{N} & -rb\frac{\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)^2\left(K_{v_{\max}}-K_{v_{\min}}\right) \\ \nu_L & -\mu_A & 0 \\ 0 & 0 & k(r_c-r_d)-\gamma \end{bmatrix}$$

特征方程为 $\det(J-\lambda I)=0$ 其中

$$J-\lambda=\begin{bmatrix} -\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)-\lambda & \frac{rb}{N} & -rb\frac{\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)^2\left(K_{v_{\max}}-K_{v_{\min}}\right) \\ \nu_L & -\mu_A-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & ((k(r_c-r_d)-\gamma)-\lambda \end{bmatrix}.$$

该矩阵的行列式可沿第三行展开计算，即:

$$\det(J-\lambda I)=[(k(r_c-r_d)-\gamma)-\lambda]\det\begin{bmatrix} -\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)-\lambda & \frac{rb}{N} \\ \nu_L & -\mu_A-\lambda \end{bmatrix}$$

$$=[(k(r_c-r_d)-\gamma)-\lambda]$$
$$\left[\lambda^2+\left(\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)+\mu_A\right)\lambda+\left(\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)\mu_A-\frac{rb\nu_L}{N}\right)\right].$$

第一个特征值 $\lambda_1=k(r_c-r_d)-\gamma$，另外两个特征值为

$$\lambda_{2,3}=\frac{-\left(\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)+\mu_A\right)}{2}\pm \frac{\sqrt{\left(\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)+\mu_A\right)^2-4\left(\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)\mu_A-\frac{rb\nu_L}{N}\right)}}{2}$$

由于 $k>0$，特征值 λ_1 为负当且仅当 $k(r_c-r_d)-\gamma<0\Leftrightarrow r_c-r_d<\frac{\gamma}{k}$，另外两个特征值 $\lambda_{2,3}$ 的实部为负当

$$\left(\frac{rb\nu_L}{\mu_A}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\nu_L+\mu_L\right)\mu_A-\frac{rb\nu_L}{N}>0$$

这与针对 E_{03} 得出的条件相同。由于 $N>1$ 也是 E_{04} 的存在条件，分析证实 E_{04} 是局部渐近稳定的（LAS），如第4项所述。当 $r_c-r_d>\frac{\gamma}{k}$ 时， E_{04} 会变得不稳定。

□

公共卫生干预模型的局部稳定性分析结果汇总于表2。与假设恒定收益的模型（见正文）一样，我们进行了数值模拟，以说明这些分析结果，并得到了定性上相似的结果。图5展示了一幅色彩图以及水生蚊子种群和成蚊种群（L_v， A_v）的四条代表性轨迹，以及家庭控制行为 $w(t)$；这些轨迹均收敛于命题3推导出的稳态。

参数区域	$N < 1$	$N > 1$
$r_c - r_d > \frac{\gamma}{k}$	$\tilde{E}_{01}$ 为局部渐近稳定。 E_{02} 不稳定。 $\tilde{E}_{03}$ 和 E_{04} 不存在。	$\tilde{E}_{03}$ 为局部渐近稳定。 $\tilde{E}_{01}$，E_{02}，E_{04} 不稳定。
$r_c - r_d < \frac{\gamma}{k}$	E_{02} 为局部渐近稳定。 $\tilde{E}_{01}, \tilde{E}_{03}, E_{04}$ 不存在。	E_{04} 为局部渐近稳定。 E_{02} 不稳定。 $\tilde{E}_{01}$ 和 $\tilde{E}_{03}$ 不存在。

表2：在公共卫生影响 γ 下，基本繁殖数 N 和阈值调整后的行为收益差 $r_c - r_d$ 处于不同范围时，模型稳态的局部渐近稳定性（LAS）。

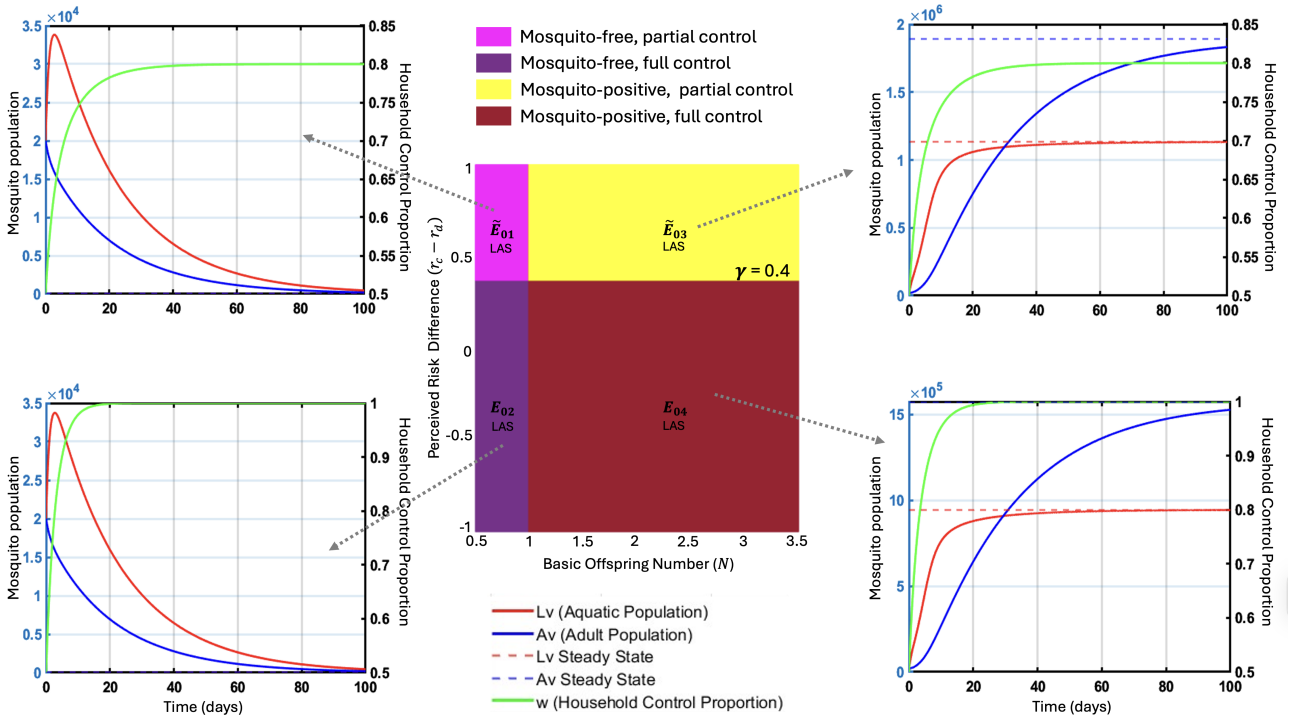


图5：采用恒定公共卫生干预（$\gamma > 0$）的简化模型的稳定性参数区域和示例轨迹。中央色彩图显示了稳态具有局部渐近稳定性（LAS）的四个区域。对于每个区域，图中展示了具有代表性的系统轨迹，说明其收敛至相应的稳态（虚线）。此处我们选择了 $\gamma = 0.4$。参数值取自 [21]： $r = 0.5$、 $\nu_L = 0.067$天$^{-1}$、 $\mu_L = 0.62$天$^{-1}$，以及 $\mu_A = 0.04$天$^{-1}$。其他参数设为合理值： $K_{v_{\max}} = 2 \times 10^6$、 $K_{v_{\min}} = 1 \times 10^6$、 $t_{\text{span}} = [0, 100]$天、 $k = 0.8$天$^{-1}$，以及取值范围为1至15的 b，以生成不同的 N 值。初始条件： $L_0 = 20000$、 $A_0 = 20000$和 $w_0 = 0.5$。