arXiv:2601.05228v1 [math.DG] 8 Jan 2026

积分的几何定义及其应用

Joshua Lackman

摘要

微分形式积分的标准定义基于局部坐标和单位分解。这一定义大多只是一种形式上的处理，在显式计算或近似方案中并不使用。我们提出一种改用三角剖分的积分定义。我们的定义是$\mathbb{R}^n$ 上黎曼积分标准定义的坐标无关版本，并且我们认为，在李代数丛、随机积分和量子场论等领域中，这是自然的定义；在这些领域，路径积分是通过格来定义的。特别是，我们的定义自然涵盖了不同的随机积分，这些积分涉及对 H¨older 连续路径的积分。此外，我们的定义非常适合从积分恒等式的组合对应物推导积分恒等式。我们的构造基于这样一个观察：在非常一般的情形下，被积对象由对群胚上的上链决定。从抽象角度看，我们的定义使用 van Est 映射将微分形式提升到对群胚上。我们的构造启发了微积分基本定理的一种推广，我们也证明了这一推广：奇异上同调与德拉姆上同调中的余循环和基本类的帽积相等。

目录

0 引言 **2**0.1 论文概要.4

1 示例 **4**

1.1 黎曼–斯蒂尔杰斯积分.4 1.2 布朗运动.5 1.2.1 伊藤积分与斯特拉托诺维奇积分.5 1.2.2 积分的定义.6 1.3 博雷尔测度.7 1.4 欧拉示性数.7 1.5 高斯-博内定理.8

2 上链 **8**

2.1 群胚的神经与上链.9 2.2 单纯映射与群胚微分.11 2.3 局部李群胚.11

3 van Est 映射 123.1 李代数丛微分.13

4 黎曼和 **13**

5 主定理：流形上的收敛与微积分基本定理 **16**

5.1 证明.17

6 格点上的泛函积分 19
6.1 费曼路径积分.19 6.2 一般泛函积分.20

附录 **20**

李群胚与李代数丛基础理论 20
A.1 李群胚与李代数丛.21 A.2 van Est 映射.22 A.3 广义黎曼–斯蒂尔杰斯积分.23 A.4 符号索引.23

参考文献 **24**

0 引言

本文提出了一种微分形式积分的简单几何定义；与标准定义相比，这种定义有时更适合显式计算和近似，也更适用于对不可微映射（例如随机积分）以及李代数丛态射进行积分。其最初动机源自量子场论中路径积分的格构造。具体而言，我们的积分表述是坐标无关且无需单位分解的，并且或多或少回答了这样一个问题：我们能够积分的最一般对象是什么？

思路如下：设 ω 是一个定向紧致 n 维流形 M 上的顶阶形式，并设 Δ_M 是一个三角剖分。积分应当可以作如下类黎曼定义：

$$\int_M \omega = \lim_{|\Delta_M|\to 0} \sum_{\Delta\in\Delta_M} \Omega(\Delta) \tag{0.0.1}$$

其中

$$\Omega(\Delta) \approx \int_\Delta \omega\,. \tag{0.0.2}$$

具体而言，这样的定义非常适合严谨地从组合对应物推导积分恒等式，例如斯托克斯定理和高斯–博内定理。

在 $M = [a,b]$ 和 $\omega = f\,dx,$ 这一初等情形中，三角剖分由一组点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ 确定，而近似值的标准选取方式为

$$\Omega(x_i, x_{i+1}) = f(x_i)(x_{i+1} - x_i)\,,\ \ f(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i)\,, \tag{0.0.3}$$

分别得到左黎曼和与右黎曼和。

为了将黎曼构造推广到流形，我们作如下观察：对于任意三角剖分，能够典范地赋予黎曼型和的对象，恰好是对群胚上的、在偶置换下不变的上链。因此，为了得到如 0.0.1 中所示的黎曼型和，我们需要通过 van Est 映射 VE。，将 ω 提升为局部对偶群胚上的上链。

更通俗地说：在偶置换的意义下，M 的一种定向决定了任意 n–单形[1] $\Delta \hookrightarrow M.$ 的 $(n+1)$ 个顶点的一种定向。因此，我们需要选取某个函数

$$\Omega : M^{n+1} \to \mathbb{R} \tag{0.0.4}$$

[1]一组点的定向，是一个在偶置换意义下确定的排序。

该函数在偶置换下不变，此时，黎曼型和可通过对 Δ_M. 中每个单形的有向顶点求 Ω 的值来得到。为了使这个黎曼型和收敛到正确的积分，要求对于每个 $x \in M$ ，.....的泰勒展开的首项

$$\Omega_x : M^n \to \mathbb{R}\,,\ \ \Omega_x(x_1,\ldots,x_n) = \Omega(x,x_1,\ldots,x_n) \tag{0.0.5}$$

在 $(x,\ x,\ \ldots\ldots,\ x)$ 处等于 ω_x. 对于随机积分，进行积分需要更高阶的信息。我们证明等式 (0.0.1) 成立，并证明微积分基本定理的以下推广：

定理 0.0.1. 设 $(\Omega_M, \Omega_{\partial M}) \in C^\infty(M^{n+1},\mathbb{R}) \times C^\infty(\partial M^n,\mathbb{R})$ 是局部闭的[2]且反对称的。那么

$$\sum_{\Delta\in\Delta_M} \Omega_M(\Delta) - \sum_{\Delta\in\Delta_{\partial M}} \Omega_{\partial M}(\Delta) = \int_M \mathrm{VE}(\Omega_M) - \int_{\partial M} \mathrm{VE}(\Omega_{\partial M})\,. \tag{0.0.6}$$

左侧恰好是基本类与诱导单纯余循环之间的配对。

若 $\Omega_{\partial M} = 0$ ，则此结果告诉我们

$$\sum_{\Delta\in\Delta_M} \Omega_M(\Delta) = \int_M \mathrm{VE}(\Omega_M)\,, \tag{0.0.7}$$

由此，选择$M = [a,b]$ 的平凡三角剖分并令[3]，即可得到微积分基本定理

$$\Omega_{[a,b]}(x,y) = f(y) - f(x)\,. \tag{0.0.8}$$

若转而考虑上同调平凡余循环 $(\Omega_M,\ \Omega_{\partial M})$，则组合论论证表明左侧为零，由此得到斯托克斯定理。

为了理解为何在路径积分和随机积分的语境下，这种积分构造是自然的，我们有定理 0.0.1 的以下推论。对于映射 $f\colon M \to N$

$$f_{\Delta_M} : \Delta_M \to N^{n+1} \tag{0.0.9}$$

是　　诱导映射，即 f_{Δ_M}将一个顶点为（$x_0,\ldots,x_n$）的单形映射到（$f(x_0)\ldots,f(x_n)$）　　.

推论 0.0.2. 若Ω 是 $\mathrm{Pair}\,N_{\mathrm{loc}}$上的一个 n-余循环，那么对于任意闭的 n维流形 M（或闭区间），以及任意映射 $f\colon M \to N$ 和三角剖分 Δ_M,[4]

$$\sum_{\Delta\in\Delta_M} f^*_{\Delta_M}\Omega(\Delta) = \int_M f^*\mathrm{VE}(\Omega)\,. \tag{0.0.10}$$

因此，给定一个定义在 N上的闭 n-形式 ω , , 为 ω 计算 VE-原函数，就能将对任意映射 f 上的 ω 进行积分的问题，归结为确定一个三角剖分并计算有限和。注意，左侧的表达式对于非可微的 f.也有意义

该推论可推广到将 $\mathrm{T}N$ 替换为李代数丛的情形。研究李群胚和李代数丛的学者都熟知余循环和 van Est 映射。

[2]我们还没有定义微分，但 $(\Omega_M,\ \Omega_{\partial M})$ 在 M.[3] 的局部对偶群胚上定义了一个相对余循环。也就是说，由 $x_0 = a$, $x_1 = b$.[4] 给出的三角剖分。三角剖分需要足够精细，使得 f_{Δ_M} 的像包含在 $\mathrm{Pair}\,N_{\mathrm{loc}}$. 中。

0.1 论文大纲

在引言之后，我们将介绍一系列自然出现的上链和余循环实例。特别是，我们将讨论随机积分如何纳入这一范式。随后，我们将进入正文，定义上链和 van Est 映射，并证明主要结果。最后，我们将讨论泛函积分的格构造应用。我们在 A.4 节加入了符号索引。

致谢

我谨感谢 David Pechersky 与我讨论布朗运动。

1 示例

最自然的积分对象是对群胚单位元处的余链芽，它们在偶置换下保持不变。换句话说，这些对象属于集合

$$\{\Omega : M^{n+1} \to \mathbb{R} : \Omega \text{ is invariant under even permutations}\}/\sim, \tag{1.0.1}$$

其中，$\sim$ 用于将两个这样的函数视为等价，只要它们在对角线的某个邻域内相等。[5] 特别是，以这种方式理解积分，就可以先将微分形式提升为上链，再对不可微映射进行积分。本节将介绍这样的例子。

读者读完更多内容后，或许会想回过头来阅读本节。

1.1 黎曼–斯蒂尔杰斯积分

黎曼–斯蒂尔杰斯积分

$$\int_0^1 f\,dg := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(g(x_{i+1}) - g(x_i)) \tag{1.1.1}$$

恰好 符合这一范式：虽然 dg 不一定能作为微分形式来理解 ，

$$(x, y) \mapsto f(x)(g(y) - g(x)) \tag{1.1.2}$$

是对群胚上的一个 1-余链。

这启发了以下高维推广：设 M 是一个定向的 n维流形，并设 Ω 是 Pair M 上的完全反对称（）上链， 即一个反对称映射 $M^n \to \mathbb{R}$. 那么我们可以定义

$$\int_M f d\Omega := \lim_{\Delta_M} \sum_{\Delta\in\Delta_M} f(\pi_1(\Delta))\delta^*\Omega(\Delta)\,. \tag{1.1.3}$$

这里， π_i： $M^{n+1} \to M^n$是一个投影，它忽略第 i 个因子，并且

$$\delta^*\Omega : M^{n+1} \to \mathbb{R}\,,\quad \delta^*\Omega = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \pi_i^*\Omega\,. \tag{1.1.4}$$

[5] 更一般地，给定李群胚单位元处一个不变上链的芽，我们可以将其沿一个定义域为切丛的李代数丛态射积分。

命题 1.1.1. 假设 f 连续，且 $\delta^*\Omega$ 具有有界变差。那么 *1.1.3* 存在。

我们将在 A.3 节证明这一点。更一般地，我们可以用局部对偶群胚上的余循环替换 $\delta^*\Omega$。

1.2 布朗运动

经典情况下，只有泰勒展开中的最低阶项会对积分产生贡献。然而，对于随机积分（以及一般的路径积分），更高阶项也会产生贡献。这就是 Itˆo 积分与斯特拉托诺维奇积分不同的原因（[5]）。换言之，我们可以沿维纳路径 γ 积分的对象 $[0,1] \to \mathbb{R}$ 不是一形式，而是如下形式的对象

$$f(x)\,dx + g(x)\,dx^2 \in \Gamma(\mathrm{T}^*\mathbb{R} \oplus \mathrm{T}^*\mathbb{R} \otimes \mathrm{T}^*\mathbb{R})\,. \tag{1.2.1}$$

这个截面空间上有一个自然作用，定义如下： S_2

$$f(x)\,dx + g(x)\,dx^2 \to -f(x)\,dx + (g(x) - f'(x))\,dx^2\,, \tag{1.2.2}$$

反对称截面定义如下:

$$f(x)\,dx + \frac{1}{2}f'(x)\,dx^2\,. \tag{1.2.3}$$

反对称截面满足微积分基本定理，并给出斯特拉托诺维奇积分。

1.2.1 伊藤积分与斯特拉托诺维奇积分

为理解前面的讨论，考虑一条连续路径

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R} \tag{1.2.4}$$

从原点出发。假设我们希望计算

$$\int_0^1 \gamma^*(f\,dx)\,. \tag{1.2.5}$$

下面的近似分别对应于 $[0,1]$ 上相应黎曼–斯蒂尔切斯积分的左和与右和:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\gamma(t_i))(\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i))\,,\quad \sum_{i=0}^{n-1} f(\gamma(t_{i+1}))(\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i))\,. \tag{1.2.6}$$

这些近似分别对应于 $\mathrm{Pair}\,\mathbb{R}$，上的 1–上链[6]，其形式为

$$\Omega_L(x,y) = f(x)(y-x)\,,\quad \Omega_R(x,y) = f(y)(y-x)\,, \tag{1.2.7}$$

而 1.2.6 中的各项是 $\mathrm{Pair}\,[0,1]$ 上的 1–上链，它们是通过诱导态射将 Ω_L，Ω_R 拉回而得到的

$$(\gamma,\gamma) : \mathrm{Pair}\,[0,1] \to \mathrm{Pair}\,\mathbb{R}\,. \tag{1.2.8}$$

如果 γ 光滑，那么 1.2.6 中的两个和都收敛到 1.2.5。然而，关于始于原点的路径上的维纳测度，1.2.6 中的和有不同的极限 L^2，这些

[6]在粗糙路径理论的背景下，[13]中研究了单纯形函数。

这些路径通常只有 H¨older 连续性。[7] 产生差异的原因是，对于固定的 x，在 $y = x$ 处对 1-上链作泰勒展开

$$(x, y) \mapsto f(x)(y - x)\,, \quad (x, y) \mapsto f(y)(y - x) \sim f(x)\,(y - x) + f'(x)\,(y - x)^2 + \cdots \tag{1.2.9}$$

在二阶处不同，我们可以富有启发性地将其写成

$$f(x)\,dx\,, \quad f(x)\,dx + f'(x)\,dx^2\,. \tag{1.2.10}$$

为了对维纳空间中的路径进行积分，我们只需选择一个 1–上链，使其二阶泰勒展开为 1.2.1，然后对相应的黎曼和取 L^2–极限。[8] 这类对象中特别重要的一类是反对称对象。

注 1.2.1。 在存在磁势*([6])*的情况下，反对称对象用于费曼路径积分；在某种意义上，正如我们即将描述的，作用量实际上由下式给出

$$S[\gamma] = \int_0^1 \frac{1}{2}\dot{\gamma}^2 + V(\gamma)\,dt + \gamma^*(A(x)\,dx + \frac{1}{2}A'(x)\,dx^2)\,, \tag{1.2.11}$$

其中 $\gamma\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}$. 注意多出的 dx^2 项，它在经典意义下并不重要。

1.2.2 积分的定义

我们将定义 $f(x)\ dx + g(x)\ dx^2$ 的积分作为随机变量，但首先我们需要以下 :

命题 1.2.2. 设 $\Omega_1, \Omega_2\colon\ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是光滑的，并且对于所有 $x \in \mathbb{R}$，以下函数的泰勒展开

$$y \mapsto \Omega_1(x, y)\,, \quad y \mapsto \Omega_2(x, y) \tag{1.2.12}$$

以 $y = x$ 为中心时，二阶展开相同。那么对于 $j = 1,2$，随机变量

$$\{\gamma \in C([0,1], \mathbb{R}) : \gamma(0) = 0\} \to \mathbb{R}\,, \quad \gamma \mapsto \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \Omega_j(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \tag{1.2.13}$$

相等。[9]

证明。 这由泰勒定理以及维纳过程具有有限二次变差这一事实得出。

□

根据这一结果，我们可以作出如下定义：

定义 1.2.3. 设 $f(x)\ g(x)$ 为光滑函数。我们定义随机变量

$$\gamma \mapsto \int_0^1 \gamma^*(f(x)\,dx + g(x)\,dx^2) \tag{1.2.14}$$

等于

$$\gamma \mapsto \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \Omega(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))\,, \tag{1.2.15}$$

其中 Ω: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为光滑函数，并且满足

$$\Omega(x, x) = 0\,,\ \partial_y \Omega(x, y)|_{y=x} = f(x)\,,\ \frac{1}{2}\partial_y^2 \Omega(x, y)|_{y=x} = g(x)\,, \tag{1.2.16}$$

即，对于一个 对于 x， $y \mapsto \Omega(x, y)$ 在 $y = x$ 处的二阶泰勒展开为 $f(x)\ dx + g(x)\ dx^2$.[10]

[7] ¨ $1/3 < \alpha < 1/2.$ $\alpha > 1/2$. 采用

[8] Hölder 指数时，当.....时，左侧和右侧的和确实收敛到相同的结果。费曼路径积分中也存在同样的现象，它由与维纳空间相同的路径组成。[9]这是在 L^2, 中相对于维纳测度的极限。[10]我们可以通过分裂射流丛的短正合列 $0 \to \mathrm{Sym}^n T^*M \to J^n(M) \to J^{n-1}(M) \to 0$ ([14])，利用度量来定义流形上的泰勒展开。

特别地，伊藤积分和斯特拉托诺维奇积分分别为:

$$\int_0^1 \gamma^*(f\,dx)\,,\quad \int_0^1 \gamma^*(f\,dx+\frac{1}{2}f'(x)\,dx^2)\,. \tag{1.2.17}$$

注 1.2.4。 我们可以用更具不变性的语言来描述这一点：令 Δ: $\mathbb{R}\hookrightarrow\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 为对角嵌入，并且

$$\mathcal{I}:=\text{sheaf of functions on }\mathbb{R}\times\mathbb{R}\text{ that vanish on }\Delta(\mathbb{R})\,. \tag{1.2.18}$$

那么 $\Delta^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$ 可与余切层对应，并且我们可以沿光滑路径对其截面进行积分。然而，对于维纳空间中的路径，我们只能对 $\Delta^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^3)$ 的截面进行积分。换言之，给定

$$[\Omega]\in H^0(\Delta^*\mathcal{I}/\mathcal{I}^3)\,, \tag{1.2.19}$$

我们可以将其提升到某个

$$\Omega\in H^0(\mathcal{I}) \tag{1.2.20}$$

并取类似黎曼和的 L^2–极限来对其进行积分。 S_2 的作用由 $(x,y)\ \to\ (y,x)$ 诱导。

1.3 博雷尔测度

设 M 为一个紧致的 n–维流形。我们可以从任意有限博雷尔测度 μ构造一个完全对称的 n–上链：选取一个 M 的三角剖分 Δ_M，并考虑集合

$$U\subset \mathrm{Pair}^{(n)}\,M=M^{n+1} \tag{1.3.1}$$

由 M 中包含于 Δ_M.[11] 的同一个单形内的 $(n+1)$ 元点组构成。我们可以定义

$$\Omega:U\to\mathbb{R}\,,\ \ \Omega(x_0,\dots,x_n)=\mu(\{\text{interior of the convex hull of }(x_0,\dots,x_n)\}\,. \tag{1.3.2}$$

我们可以将 Ω 延拓为零，从而得到一个包含 U. 的小开集

对于一般的测度，我们构造的上链并不连续；但如果该测度由密度确定，则它是连续的。

1.4 欧拉示性数

举一个并非标准意义下的积分、但在我们所采用的意义下可以视为积分的量为例，令 M 为一个 n 维紧流形（带边界），并考虑对称的 n–上链

$$\Omega:M^{n+1}\to\mathbb{R}\,,\ \ \Omega(x_0,\dots,x_n)=(-1)^{|\{x_0,\dots,x_n\}|+1}\,. \tag{1.4.1}$$

那么，对于 M 的任意三角剖分 Δ_M，

$$\sum_{\Delta\in\Delta_M}\Omega(\Delta)=\chi(M)\,.^{12} \tag{1.4.2}$$

因此，取极限后，可以合理地说

$$\int_M\Omega=\chi(M)\,. \tag{1.4.3}$$

[11]也就是说，如果存在一个单形包含所有的 $x_0,\dots,x_n$，那么 $(x_0,\dots,x_n)\in U$.

[12]Ω 在退化单形上不为零，因此求和也包括这些单形。

1.5 高斯-博内定理

高斯-博内定理的证明涉及寻找一个自然的余循环:

设 (M, g) 是一个定向黎曼曲面（带边界）。我们得到一个二次余循环 $(\Omega_M, \Omega_{\partial M})$，定义如下：设 $\Omega_M \in \Lambda^2 \mathrm{Pair}\, M_{\mathrm{loc}}$ 由下式给出

$$\Omega_M(x_0, x_1, x_2) = \pm(\text{对应测地三角形的内角和 } -\pi)\,,\ ^{13} \tag{1.5.1}$$

其中，符号取决于由 $(x_0, x_1), (x_0, x_2)$ 确定的向量是否定向。

至于 $\Omega_{\partial M} \in \Lambda^1 \mathrm{Pair}\, \partial M_{\mathrm{loc}}$, 它由下式给出

$$\Omega_{\partial M}(x_0, x_1) = \mp(\text{sum of internal angles of the corresponding semicircle})\,, \tag{1.5.2}$$

其中，半圆由边界上的弧以及连接 x_0, x_1, 的测地线确定；符号取决于由 (x_0, x_1) 确定的 ∂M 上的向量是否定向（若定向，则取负号）

标准的计数论证（例如，在每个内部顶点处，相邻角的和为 2π）表明，相对黎曼和等于

$$2\pi(\text{number of vertices} - \text{number of edges} + \text{number of faces}) \tag{1.5.3}$$

而定理 0.0.1 表明，这恰好等于

$$\int_M \mathrm{VE}(\Omega_M) - \int_{\partial M} \mathrm{VE}(\Omega_{\partial M})\,. \tag{1.5.4}$$

这就是高斯-博内定理。

2 上链

本节将定义群胚的神经，接着介绍群胚和代数丛上的完全对称／反对称上链，最后介绍局部群胚。我们对群胚神经的描述不同于传统描述，例如见 [4]。我们将在第 .0 节介绍李群胚的基本理论。

本文末尾附有符号索引，见 A.4。

注记 2.0.1. 我们对楔积采用的约定是， $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ 等于 $dx^1 \otimes \cdots \otimes dx^n$的反对称化，例如。

$$dx \wedge dy = \frac{1}{2}(dx \otimes dy - dy \otimes dx)\,. \tag{2.0.1}$$

我们这样做是因为，为了定义积分，我们将流形划分为单形而非平行六面体；按照这个定义，$dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ 在作用于$(\partial_{x^1}, \ldots, \partial_{x^n})$时给出标准 n-单形的体积，而非平行六面体的体积。

[13] Ω_M 是反对称的 对称的，并且在 M^3. 的对角线邻域内定义。这就是曲率的定义方式在单纯复形上Regge 演算中的 lex， [12]。

2.1 群胚的神经与上链

我们将给出一个与标准定义略有不同、但等价的群胚神经定义。我们的定义使李群胚与李代数丛之间的关系更加清晰，因此也让 vanEst 映射更容易定义。

定义 2.1.1. 李群胚 $G \rightrightarrows M$ 的神经，记作 $G^{(\bullet)}$，是一个单纯形流形[14]，其在次数 $n \geq 1$ 下由以下纤维积给出：

$$G^{(n)} = \underbrace{G \,{}_s\!\times_s G \,{}_s\!\times_s \cdots \,{}_s\!\times_s G}_{n \text{ times}} . \tag{2.1.1}$$

我们令 $G^{(0)} = M$.

在 n-上链（即将定义）的语境下，我们将经常把 $x \in M$ 视为 $(\mathrm{id}(x), \ldots, \mathrm{id}(x)) \in G^{(n)}$；我们称 M 在 $G^{(n)}$ 中的像为单位元。

传统的神经定义令

$$G^{(n)} = \underbrace{G \,{}_t\!\times_s G \,{}_t\!\times_s \cdots \,{}_t\!\times_s G}_{n \text{ times}}, \tag{2.1.2}$$

它是由 n 个可依次复合的箭头构成的空间。这两种定义是等价的，其同构由下式给出

$$G \,{}_t\!\times_s \cdots \,{}_t\!\times_s G \to G \,{}_s\!\times_s \cdots \,{}_s\!\times_s G\,, \quad (g_1, g_2, \ldots, g_n) \mapsto (g_1, g_1 g_2, \ldots, g_1 g_2 \cdots g_n)\,. \tag{2.1.3}$$

我们的 $G^{(\bullet)}$ 定义清楚地表明，对称群S_n[15] 通过置换作用于 $G^{(n)}$ 。不那么显而易见的是， S_{n+1} 作用于 $G^{(n)}$，这一点可以从以下事实看出： $G^{(n)}$ 自然地与从标准 n单形到 G. 的态射空间相识别。根据我们对神经的定义，可以明确写出这一作用：

定义 2.1.2. 对于 $\sigma \in S_{n+1}$ 以及$(g_1, \ldots, g_n) \in G^{(n)}$，我们令

$$\sigma \cdot (g_1, \ldots, g_n) := (g^{-1}_{\sigma^{-1}(0)} g_{\sigma(1)}, \ldots, g^{-1}_{\sigma^{-1}(0)} g_{\sigma(n)})\,, \tag{2.1.4}$$

其中 $g_0 := \mathrm{id}(s(g_1))$。结果是 $G^{(n)}$ 中的一个点，其公共源为 $t(g_{\sigma^{-1}(0)})$.

根据这个定义，如果 σ 固定 0，那么我们就得到 S_n.显而易见的置换作用

例 2.1.3. 考虑对群胚PairM $\rightrightarrows M$ （定义见 *A.1.4*）。我们有

$$M^{(n)} \cong M^{n+1} = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) : x_i \in M\}\,. \tag{2.1.5}$$

n 箭头为(x_0, x_1)、$(x_0, x_2) \ldots, (x_0, x_n)$； S_n 通过置换因子 x_1、…、 x_n 作用，而S_{n+1} 则通过置换所有因子作用。

以下定义是标准的，例如参见 [15]:

定义 2.1.4. n-上链是一个函数$\Omega : G^{(n)} \to \mathbb{R}$ ，定义在群胚 $G \rightrightarrows M$. 上。若在 g_i 是某个 $1 \leq i \leq n$. 的单位元时，$\Omega(g_1, \ldots, g_n) = 0$，则称其为归一化的。按照惯例，我们认为 0-上链无需满足任何额外条件便是归一化的。我们分别用 $C^n(G)$ C^n_0 和 n-上链的归一化版本 n-上链表示 $C^n(G)$ $C^n_0(G)$。

[14]我们将在下一节描述面映射和退化映射。[15]我们定义 S_n 为集合 $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.的置换

由于 S_{n+1} 对 $G^{(n)}$ 有作用，由对偶性可知， S_{n+1} 对 n-上链 Ω 也有作用，即:

$$(\sigma \cdot \Omega)(g_1, \ldots, g_n) = \Omega(\sigma^{-1} \cdot (g_1, \ldots, g_n)) . \tag{2.1.6}$$

定义 2.1.5. *A* n-上链 Ω 若关于 S_n.的作用是反对称（对称）的，则称其为反对称（对称）。

归一化反对称上链的行为与相应李代数丛（稍后将定义）上的 n-形式十分相似。然而，以下这类上链才是真正恰当的类比，因为它们相对于群胚微分的行为，以及它们与斯托克斯定理的联系。特别是，它们自动归一化:

定义 2.1.6. 若上链 Ω: $G^{(n)} \to \mathbb{R}$ 关于 S_{n+1}. 的作用是反对称的，则称其为完全反对称上链。我们用 $\Lambda(G)$表示完全反对称上链的集合。
反对称上链上存在自然的分次乘积。

完全反对称上链在 $G^{(n)}$，即某些 g_i 为单位元，或存在 g_i， g_j 使得 $i \neq j$ 但 $g_i = g_j$. 的退化点 (g_1，.....， g_n) 上取值为零。对于在 S_{n+1}，作用下对称（而非反对称）的归一化上链，情况也一样；但对于非归一化上链，我们还要加上一条额外条件:

定义 2.1.7。 如果上链 $\Omega : G^{(n)} \to \mathbb{R}$ 关于 S_{n+1} 的作用对称，且满足

$$\{s(g_1), g_1, \ldots, g_n\} = \{s(g_1'), g_1', \ldots, g_n'\} \implies \Omega(g_1, \ldots, g_n) = \Omega(g_1', \ldots, g_n') . \tag{2.1.7}$$

我们分别用 $S^n(G)$ $S_0^n(G)$表示完全对称和归一化的完全对称 n–上链。

一个 n–上链 若满足式 (2.1.7)，则对任意 $k \leq n$,都自然定义一个 S_{k+1}–不变的 k-上链 ie.

$$\Omega(g_1, \ldots, g_k) := \Omega(g_1, \ldots, g_k, s(g_1), \ldots, s(g_1)), \tag{2.1.8}$$

其中 $s(g_1)$重复了（$n-k$）次。这对于定义对称上链的积分很重要。

本文大部分内容将重点讨论以下上链，我们将其用作微分形式原函数的空间:

定义 2.1.8. 令 $\mathcal{A}_0^n G$ 表示在 A_{n+1}（偶置换）下不变的光滑归一化 n-上链。

引理 2.1.9. 我们有如下分解:

$$\mathcal{A}_0^n G = S_0^n G \oplus \Lambda^n G . \tag{2.1.9}$$

证明. 简单计算可知，任意 $\Omega \in \mathcal{A}_0^n G$ 都是其对称化与反对称化之和。

□

直和

$$\mathcal{A}^n G = S^n G \oplus \Lambda^n G \tag{2.1.10}$$

也起着重要作用。第一个直和项类似于有符号测度空间，对其积分不需要定向。第二个直和项类似于顶形式空间，对其积分则需要定向。

定义 2.1.10。 对于李代数丛 $\mathfrak{g}$，我们将逐点多重线性映射 $\mathfrak{g}^{\oplus n} \to \mathbb{R}$ 记作 C^n（$\mathfrak{g}$），并将反对称对象记作 Γ（$\Lambda^n \mathfrak{g}^*$）。

2.2 单纯映射与群胚微分

我们通过写出面映射和退化映射以及群胚微分来完成神经的构造。

$G \rightrightarrows M$ 是一个李群胚。存在 $n+2$ 面映射

$$\delta_0, \ldots, \delta_{n+1} : G^{(n+1)} \to G^{(n)},\ n \geq 0. \tag{2.2.1}$$

对于 $n=0$，我们有 $\delta_0 = t,\ \delta_1 = s$. 对于 $n \geq 1$，而对于 $k \geq 1$，我们有 δ_k 是丢弃第 k个箭头的投影，并且

$$\delta_0(g_1, \ldots, g_{n+1}) = (g_1^{-1}g_2, \ldots, g_1^{-1}g_{n+1})\,. \tag{2.2.2}$$

此外，还存在 $n+1$ 退化映射

$$\sigma_0, \ldots, \sigma_n : G^{(n)} \to G^{(n+1)},\ n \geq 0. \tag{2.2.3}$$

对于 $n=0$，我们有 $\sigma_0(x) = \mathrm{id}(x)$。对于 $n \geq 1$，我们有 $\sigma_0(g_1, \ldots, g_n) = (s(g_1)\ g_1, \ldots, g_n)$，

$$\sigma_k(g_1, \ldots, g_n) = (g_1, \ldots, g_{k-1}, s(g_1), g_k, \ldots, g_n)\ ,\ \ k \geq 1\ . \tag{2.2.4}$$

以下定义是标准的：

定义 2.2.1. 对于所有 $n \geq 0$，都有一个微分 $\delta^* : C^n(G) \to C^{n+1}(G)$，它由面映射拉回的交错和给出，即：

$$\delta^*\Omega = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \delta_i^* \Omega\ . \tag{2.2.5}$$

这个微分满足 $\delta^* \circ \delta^* = 0.$。由于它与上链的反对称化交换，因此它限制为一个微分 $\delta^*|_{\Lambda^n(G)} : \Lambda^n(G) \to \Lambda^{n+1}(G)$。

2.3 局部李群胚

我们将发现，使用局部李群胚（例如参见 [3]）很有帮助。局部李群胚是将群胚的箭头空间限制在恒等双截面邻域后得到的。因此，在群胚中可复合的箭头，并非都能在局部群胚中复合；但足够靠近恒等双截面的箭头可以。

定义 2.3.1. 设 $G \rightrightarrows M$ 为一个李群胚。设 U 为 $M \subset G^{(1)}$ 的一个在取逆下封闭的邻域。我们称其为局部李群胚，并记作 $G_{\mathrm{loc}} \rightrightarrows M$.

对于我们想要进行的构造而言，局部李群胚与群胚之间并没有太大区别。我们可以将局部李群胚的态射 $f : H_{\mathrm{loc}} \to G_{\mathrm{loc}}$ 理解为满足 $f(h_1 \cdot h_2) = f(h_1) \cdot f(h_2)$ 的态射，只要左侧的复合在 H_{loc}. 中有意义。更准确地说：

定义 2.3.2。我们有一个单纯形流形 $G^\bullet_{\mathrm{loc}}$，它是$G^\bullet$ 的最大子单纯形流形，并满足 $G^0_{\mathrm{loc}} = M,\ G^1_{\mathrm{loc}} = U.$

按照惯例，当我们谈到局部群胚时，将假设 $s : U \to M$ 的纤维是可缩的。

使用神经的这个定义，前面各节中定义的所有结构都可以自然地推广到局部群胚。此外，当我们谈论局部群胚时，将把 U 留作隐含内容，因此不会明确区分不同的局部李群胚（因为我们真正关心的只是恒等双截面附近的芽）。

例 2.3.3. M 的一个开覆盖 $\{V_i\}_i$ 确定了一个局部群胚 $\mathrm{PairM}_{\mathrm{loc}} \rightrightarrows M$，其中

$$\mathrm{Pair}^{(n)}\, M_{\mathrm{loc}} = \{(x_0, \ldots, x_n) \in M^{n+1} : \{x_0, \ldots, x_n\} \subset V_i \text{ for some } V_i\}\ . \tag{2.3.1}$$

3 van Est 映射

本节将定义 van Est 映射VE。我们的定义与标准定义不同，但等价（相差一个常数），并且有以下优点：van Est 映射将 G 上的一个n–上链 Ω 映射为 $\mathfrak{g}$上的一个 n–形式 VE(Ω)，而标准定义则定义

$$\mathrm{VE}(\Omega)(X_1,\ldots,X_n)\,,\quad X_1,\ldots X_n\in\mathfrak{g}_x \tag{3.0.1}$$

先将 $X_1,\ldots,X_n$ 延拓为 $\mathfrak{g}$. 的截面。由于我们对神经的定义，我们的定义不需要这些延拓。标准定义及其等价性的证明见 A.2 节。

回想一下，点 $x\in M$ 处的向量 $\xi\in\mathfrak{g}$ 是与 x.处的 G 的源纤维相切的向量。现在，给定一个 n-上链 Ω 和一个点 $x\in M$, 我们可以将其限制

$$\Omega:\underbrace{G\,{}_s\!\times_s\cdots{}_s\!\times_s G}_{n\text{ times}}\to\mathbb{R} \tag{3.0.2}$$

为一个映射

$$\Omega_x:\underbrace{s^{-1}(x)\times\cdots\times s^{-1}(x)}_{n\text{ times}}\to\mathbb{R}\,, \tag{3.0.3}$$

因此，分别对 Ω 的每个 n 分量求导是有意义的。

定义 3.0.1。 设 $G\rightrightarrows M$ 为一个李群胚， $\mathfrak{g}\to M$ 为其对应的李代数丛。对于每个 $n\geq 1$ ，我们定义一个（满射）映射

$$\mathrm{VE}:\mathcal{A}_0^n(G)\to\Gamma(\Lambda^n\mathfrak{g}^*)\,,\quad \Omega\mapsto\mathrm{VE}(\Omega) \tag{3.0.4}$$

如下：对于 X_1、...、 $X_n\in\mathfrak{g}$ *over* $x\in M$，我们令

$$\mathrm{VE}(\Omega)(X_1,\ldots,X_n)=X_n\cdots X_1\Omega_x\,, \tag{3.0.5}$$

其中 X_i 在其第 i 个分量中对 Ω_x 求导。如果 Ω 是一个 0-上链，我们定义 VE(Ω) =Ω。

注 3.0.2。 这一“定义”同样适用于 G_{loc} ，无需任何修改。

在 $G=\mathsf{Pair}\ M$和 $\mathfrak{g}=\mathsf{T}M$, $\mathcal{A}_0^n(G)$ 的情形下，它是定义在 M^{n+1} 上的函数 Ω 的集合，这些函数在偶置换下不变，并且当其任意两个参数相等时取零。在这种情况下，给定 X_1、...、 $X_n\in\mathsf{T}_xM$, VE(Ω)(X_1、...、 X_n) 的获得方式是：对所有 $1\leq i\leq n$., 同时对 Ω 关于第 i 个分量中的 X_i 求导

例 3.0.3。 考虑定义在 $\mathrm{Pair}\,\mathbb{R}^n$ 上的 n-上链

$$\Omega(x_0,x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{n!}\det\left[x_1-x_0,\ldots,x_n-x_0\right], \tag{3.0.6}$$

其中 $x_i=(x_i^1$、...、 $x_i^n)$。于是 VE(Ω) $=dx_0^1\wedge\cdots\wedge dx_0^n$（关于楔积的约定，参见注 *2.0.1*）。

在 $s^{-1}(x)$，的任意坐标系中，Ω_x 在单位元处的 n 阶泰勒展开由 VE(Ω)$_x\cdot$ 决定。换言之，VE(Ω)$_x$ 决定 $\Omega_x\cdot$ 的 n-阶喷射。特别地，我们需要以下引理来证明定理 5.0.1 中积分构造的合理性。首先，我们引入一些记号：

对于李群胚 $G\rightrightarrows M$，设 $y=(y^1,\ldots,y^n)$ 是 $s^{-1}(x)$ 在某个 $x\in s^{-1}(x)$ 邻域内的坐标，其坐标为 $x=(x^1,\ldots,x^n)$。这就在 n 重乘积 $s^{-1}(x)\times\cdots\times s^{-1}(x)$ 上确定了一个乘积坐标系，该坐标系定义在 x的邻域内，记作 $(y_1,\ldots,y_n)$，其中$y_i=(y_i^1,\ldots,y_i^n)$ $1\leq i\leq n$.

引理 3.0.4。假设 $G \rightrightarrows M$ 的源纤维是 n 维的，并且 $\Omega \in \mathcal{A}_0^n G$. 那么，在乘积坐标系（定义见上一段）中，我们可以在 $(y_1, \ldots, y_n)$ 处求出以 $x.$ 为中心的 Ω_x 的 n 阶泰勒展开。结果为

$$\mathrm{VE}(\Omega)_x(\partial_{y^1}, \ldots, \partial_{y^n}) \det [y_1 - x, \ldots, y_n - x] \,. \tag{3.0.7}$$

这里，∂_{y^j} 是点 $x.$处的坐标向量场

证明。 这是因为 Ω 已归一化，并且在偶置换下不变，因此泰勒展开中的所有低阶项都消失。

□

由此引理可知，Ω 作用于一个微小的线性单形（在任意坐标系中）时，其值近似等于 VE(Ω) 作用于相应单形时的值。

注 3.0.5。 前一个引理提示我们定义一个映射 $\mathcal{J}_n$ ，使得对于每个 $x \in M$ 和 $\Omega \in \mathrm{C}^n(G)$ $\mathcal{J}_n(\Omega)_x$ ，其等于 Ω_x 在 $x.$ 处的 n*–jet*。这对于充分理解费曼-维纳路径积分的构造是必要的。

3.1 李代数丛微分

为完整起见，我们定义李代数丛微分。对此有一个标准定义，但为了强调群胚而非李代数丛，我们保持以下思路：

定义 3.1.1. 设 $G \rightrightarrows M$ 是一个李群胚。存在一个微分

$$d : \Gamma(\Lambda^\bullet \mathfrak{g}^*) \to \Gamma(\Lambda^{\bullet+1} \mathfrak{g}^*) \tag{3.1.1}$$

它由以下性质唯一确定：在 $\Lambda^\bullet G$

$$\mathrm{VE}\, \delta^* = d\, \mathrm{VE} \,. \tag{3.1.2}$$

例 3.1.2. 如果 $\mathfrak{g} = TM$ ，那么 d 就是外微分。

现在我们将陈述 van Est 同构定理的一个简单版本，该定理由 Crainic [4] 证明。我们将在第 5 节陈述一个更一般的版本。

定理 3.1.3. （见 *[4]*）假设 $G \rightrightarrows M$ 的源纤维是 n-连通的。那么 VE 可下降为 G 的上同调与 $\mathfrak{g}$ 的上同调之间的同构，直到 n 次，并且在 $n+1.$ 次上是单射

如果李代数丛是 TM ，那么 VE 定义了 Pair M_{loc} 的上同调与 $M.$ 的德拉姆上同调之间的同构。见第 2.2 节。

4 黎曼和

我们希望构造的泛函积分，启发我们在流形上引入黎曼和的广义概念。[16] 回想一下，流形上的黎曼和只在局部定义，而非全局定义。我们将给出一种全局推广。在此之前，我们会先说明这个定义的动机，不过首先回顾一些代数拓扑的基本知识：

定义 4.0.1. 紧流形（带边界） M 的光滑三角剖分由一个单纯复形 Δ_M以及一个从其几何实现到M 的同胚 $|\Delta_M| \to M$构成，并且该映射在每个单形上的限制都是光滑嵌入。我们用 $\mathcal{T}_M$.[17]表示 M 的光滑三角剖分集合。

[16]文献中还有其他称为广义黎曼和和广义黎曼积分的概念，但它们与我们所定义的不同。[17]我们将略微滥用记号，把三角剖分与相应的单纯集视为同一对象。

对于我们进行的某些构造，实际映射 $|\Delta_M| \to M$ 除了在顶点处之外并不重要，因此我们常常省略这个映射不提，而将 Δ_M 称为三角剖分。每个三角剖分 Δ_M 都对应一个单纯集，它是通过对顶点选取一个全序得到的。如果 M 带有定向，我们应当选择与该定向相容的次序。我们不区分Δ_M 与这个单纯集。

注 4.0.2。 M 的一个定向由对所有 $x \in M$ 的$\mathrm{T}_x M$ 定向给出，它以如下方式确定任意最高维单形 $\Delta \hookrightarrow M$的顶点次序（相差一个偶置换）：选取顶点 $x \in \Delta$，即可得到$\mathrm{T}_x M$的一组基，这组基由 $\Delta.$ 的一维面在 x 处的切向量构成。由定向可知这组基的定向（相差一个偶置换）；又因为每个一维面都连接两个顶点，所以也就得到顶点的次序（相差一个偶置换）。

我们将假设关于紧流形（含边界）三角剖分的标准事实成立，例如，三角剖分总是存在，而且边界的三角剖分可以扩展到整个流形。详情见 [11]。

设 M 是一个流形，并考虑 $\mathrm{Pair}\, M.$ 上的一个 n-上链 Ω。假设我们将标准的 n-单形 $|\Delta^n|$ 嵌入 M 中，并希望为它赋予一个数值——我们可以通过选定顶点的一个次序（v_0，.....， v_n）并将 Ω(v_0，.....，v_n)。作为其值来实现。然而，要使这个量与顶点次序无关，就需要 Ω 完全对称。

假设 Ω 完全对称，我们可以通过构造黎曼型和，为给定的三角剖分 Δ_M 赋予一个值

$$\sum_{\Delta \in \Delta_M} \Omega(\Delta)\,. \tag{4.0.1}$$

这里，我们对所有单形求和，并确保退化单形只求和一次（如果 Ω 未归一化）。我们可以通过对三角剖分取直接极限来“积分”Ω。

确切地说，我们在网的意义下，针对一个三角剖分的等价类取极限。我们可以这样做，因为三角剖分的等价类构成有向集：

定义 4.0.3. 如果两个三角剖分有一个共同的线性细分（例如，给定三角剖分的重心细分），则称它们等价。同一等价类中的三角剖分构成一个有向集，其偏序由线性细分确定。

在相当一般的情形下，这些极限与所选的等价类无关，正如我们将在下一节看到的那样。

另一方面，如果 Ω 并非完全对称，而只是对 A_{n+1}，不变，那么要给一个 n-单形赋值，我们需要选择顶点的一个排序，并且该排序只确定到偶置换。 M 的一个定向会诱导出三角剖分中每个 n-单形顶点的这种排序，因此我们仍然可以使用 4.0.1。

定义 4.0.4. 设 $\Omega \in \mathcal{A}^n \mathrm{Pair}\, M_{\mathrm{loc}}$[20] 其中 M 是紧致的 n维（带边界，并在必要时赋予定向）。我们定义

$$\int_M \Omega = \lim_{\Delta_M \in \mathcal{T}_M} \sum_{\Delta \in \Delta_M} \Omega(\Delta) \tag{4.0.2}$$

[18]也就是说，单形的细分 $|\Delta| \hookrightarrow |\Delta_M|$ 由 $|\Delta|$.的线性细分诱导得到。[19]例如，可以选取一个顶点，并观察该顶点处与 1 维面对应的切向量的定向。[20]回忆等式 $\mathcal{A}^n G = S^n G \oplus \Lambda^n G.$

若 *4.0.1* 的极限在每个三角剖分的等价类上都存在，且与等价类无关。[21]

在 $M = [a, b]$ 和 $\omega = f\,dx$，这一初等情形下，分别令.....即可得到左黎曼和与右黎曼和

$$\Omega(x, y) = f(x)(y - x)\,,\ f(y)(y - x)\,. \tag{4.0.3}$$

在这两种情形下，VE(Ω) $= f\,dx$，因此我们可以用这些 Ω 来定义 $f\,dx$. 的积分。类似地，我们还可以使用另一个上链，如下所示:

例 4.0.5。令 $f\colon\ [a, b] \to \mathbb{R}.$。令 Ω 为 $\mathrm{Pair}\,[a, b]$ 上的 1-上链，定义为

$$\Omega(x, y) = f(y) - f(x)\,. \tag{4.0.4}$$

那么，对于任意三角剖分 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，我们有

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Omega(x_i, x_{i+1}) = f(b) - f(a)\,. \tag{4.0.5}$$

因此，从我们对微分形式积分的定义出发，微积分基本定理的证明显而易见，因为 VE(Ω) $= df$.

例 4.0.6。令 M 为一个 n 维流形，并令 $m \in M.$。我们有一个定义在$\mathrm{Pair}\ M$上的 n-上链 Ω，其定义为 $\Omega(m_0, \ldots, m_n) = 1$，若对于所有 $0 \le i \le n,\ \ m_i = m$ 成立；否则为 0。令 $f\colon\ M \to \mathbb{R}$, 并令 s 表示公共源映射 $\mathrm{Pair}^{(n)}\,M \to M.$。对于任意以点 m 为顶点的三角剖分 Δ_M，我们有

$$\sum_{\Delta \in \Delta_M} s^* f\,\Omega(\Delta) = f(m)\,. \tag{4.0.6}$$

因此，极限为 $f(m)$。于是，Ω 是一个表示集中于m.处的狄拉克测度的 n-上链

我们一直关注在偶置换下不变的上链，因为这是定义积分所需的最基本性质。然而，完全反对称的上链则有其特殊之处，原因如下:

引理 4.0.7。（斯托克斯定理）设 M 是一个带边界的紧致定向$(n + 1)$流形，且Ω 是一个完全反对称的 n-上链。设 Δ_M 是 M 的一个三角剖分，其在边界上的诱导三角剖分为 $\Delta_{\partial M}$。则

$$\sum_{\Delta \in \Delta_{\partial M}} \Omega(\Delta^n) = \sum_{\Delta \in \Delta_M} \delta^* \Omega(\Delta^{n+1})\,, \tag{4.0.7}$$

其中 δ^* 是作用于$\mathrm{Pair}\,M$.上的群胚微分

证明。 由于 Ω 完全反对称，这可由以下事实得出：内部的一个 n 维面恰好作为面出现两次，且定向相反。 □

结合下一节的结果，这就使微积分教材中关于斯托克斯定理的标准多变量微积分证明严谨化了。

[21]回顾一下，三角剖分的等价类构成有向集，极限按网的意义取值。由于重心细分，单形的尺寸趋于零。

5 主定理：收敛与 theFTCon 流形

设 ω 是一个定向 n流形 M（带边界）上的 n-形式。根据上一节的讨论，我们可以通过对 M 进行三角剖分，并为 ω 指定一个在偶置换下不变的归一化上链 Ω。从而为 ω 赋予一个黎曼和。Ω 的定义性质是 $\mathrm{VE}(\Omega) = \omega$。我们陈述微积分基本定理的一个推广；其中包含第 0 部分。证明如下。

定理 5.0.1. *(第 0 部分)* 设 M 是一个定向紧致的 n 维流形（带边界），设 ω 是 M 上的一个 n-形式，并且

$$\Omega \in \mathcal{A}_0^n \mathrm{Pair}\, M_{\mathrm{loc}} \tag{5.0.1}$$

满足 $\mathrm{VE}(\Omega) = \omega$. 那么

$$\lim_{\Delta_M \in \mathcal{T}_M} \sum_{\Delta \in \Delta_M} \Omega(\Delta) = \int_M \omega\ , \tag{5.0.2}$$

其中极限是按照 *4.0.4* 的意义取的。

定理 5.0.2. *(第 1 部分)* 若另外 $\partial M = \emptyset$，$\Omega \in \Lambda^n \mathrm{Pair}\, M$ 且 Ω 在 δ^* 下封闭，则对于任意三角剖分，类黎曼和近似都是精确的，即

$$\sum_{\Delta \in \Delta_M} \Omega(\Delta) = \int_M \omega\ . \tag{5.0.3}$$

更一般地，若 $(\Omega_M, \Omega_{\partial M}) \in \Lambda^n \mathrm{Pair}\,(M, \partial M)_{\mathrm{loc}}$ 是封闭的，则

$$\sum_{\Delta \in \Delta_M} \Omega_M(\Delta) \ - \sum_{\Delta \in \Delta_{\partial M}} \Omega_{\partial M}(\Delta) = \int_M \mathrm{VE}(\Omega_M) - \int_{\partial M} \mathrm{VE}(\Omega_{\partial M})\ . \tag{5.0.4}$$

注 5.0.3. 这里，$(\Omega_M, \Omega_{\partial M})$ 是一个相对群胚上循环，其定义与相对德拉姆上循环类似：一个 k-上链是一个 *Pair*

$$(\Omega_M, \Omega_{\partial M}) \in \Lambda^k \mathrm{Pair}\, M_{loc} \oplus \Lambda^{k-1} \mathrm{Pair}\, \partial M_{loc}\ , \tag{5.0.5}$$

微分定义为

$$(\Omega_M, \Omega_{\partial M}) \mapsto (\delta^* \Omega_M, i^* \Omega_M - \delta^* \Omega_{\partial M})\ , \tag{5.0.6}$$

其中 i: $\mathrm{Pair}^{(k)} \partial M_{loc} \to \mathrm{Pair}^{(k)} M_{loc}$ 是由包含映射 $\partial M \hookrightarrow M$.诱导的映射

第 2 部分最一般的表述针对李群胚 $G \rightrightarrows M$. 。这是关于G-模的 van Est 同构定理，定理的陈述和证明见 [8]。涉及双群胚的一个更强结论可见 [9]。我们在此陈述一个简单版本：

定理 5.0.4. （第 *2* 部分）设 G 是一个李群胚，且 V 是一个（实或复）向量空间。那么 VE 诱导一个同构

$$H^*(G_{\mathrm{loc}}, V) \cong H^*(\mathfrak{g}, V)\ . \tag{5.0.7}$$

下面给出一种计算李代数丛形式在一个态射上的积分的方法，这可能有助于计算某些泛函积分。注意，根据李第二定理，李代数丛态射 $\mathbf{x}$: $TM \to \mathfrak{g}$ 可积到唯一的态射 $\mathbf{X}$: Pair $M_{\mathrm{loc}} \to G_{\mathrm{loc}}$.

推论 5.0.5。 设 M 是闭流形或闭区间，且 $n =$ 维数 M. 设 ω 是 $\mathfrak{g}$ 上的闭 n–形式，并令 $\Omega \in \Lambda^n G$ 为闭的且满足 $\mathrm{VE}(\Omega) = \omega$. 那么对于任意 $\mathbf{x}$： $TM \to \mathfrak{g}$,

$$\sum_{\Delta \in \Delta_M} \mathbf{X}^* \Omega(\Delta) = \int_M \mathbf{x}^* \omega\ , \tag{5.0.8}$$

其中 $\mathbf{X} : \mathrm{Pair}\, M_{\mathrm{loc}} \to G_{\mathrm{loc}}$ 对 $\mathbf{x}$ 进行积分。

证明。 这由定理 5.0.2 以及 VE δ^* 关于态射诱导的拉回具有自然性这一事实得出。

□

备注 5.0.6. 关于 *5.0.2* 和 *5.0.5*，若Ω 是余循环且满足 $\partial M \neq \emptyset$，那么Ω 的黎曼型和不依赖于内部的三角剖分，只取决于边界的三角剖分。

例 5.0.7. 我们可以在 $\mathbb{R}^m$ 上恢复庞加莱引理：通过在第 *2* 部分的证明中平凡化余循环Ω，我们得到 ω 的一个原函数。具体来说，我们定义

$$\Omega_0 \in \Lambda^{n-1}\mathrm{Pair}\,\mathbb{R}^m\,, \quad \Omega_0(x_1,\dots,x_n) = \int_{C(0,x_1,\dots,x_n)} \omega\,, \tag{5.0.9}$$

其中 $C(0,x_1,\dots,x_n)$ 是 $0,x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}^m$. 的凸包。于是我们有

$$d\,\mathrm{VE}(\Omega_0) = \omega\,, \tag{5.0.10}$$

这可由以下事实推出： $d\mathrm{VE} = \mathrm{VE}\,\delta^*$.

注意，经过简单计算可知，对于任意 M 和任意 $m \in M$，映射

$$\mathcal{A}^n\mathrm{Pair}\,M \to \mathcal{A}^{n-1}\mathrm{Pair}\,M\,, \quad \Omega_m(m_1,\dots,m_n) = \Omega(m,m_1,\dots,m_n) \tag{5.0.11}$$

将任意余循环 Ω 平凡化。

5.1 证明

我们将证明部分 0、1、2。

证明。 **(部分 0)** 当且仅当该结论在局部成立时，它才成立，因此我们可以假设 $M = [0,1]^n$. 为便于说明，我们先证明一维情形：设 $f\,dx$ 为一个 1-形式，且 Ω 是 Pair $[0,1]$ 上的一个归一化上链，使得 VE(Ω) $= f\,dx$. 于是该上链

$$(x,y) \mapsto \Omega(x,y) - f(x)(y-x) \tag{5.1.1}$$

在 VE 下映射为 *0*。 对于一个三角剖分 $0 = x_0 < x_1, \dots < x_n = 1$ 我们可以写成

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Omega(x_i,x_{i+1}) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1}-x_i) + \sum_{i=0}^{n-1} \left[\Omega(x_i,x_{i+1}) - f(x_i)(x_{i+1}-x_i)\right]\,. \tag{5.1.2}$$

右侧的第一项收敛于 $\int_0^1 f\,dx$, 所以我们只需证明第二项收敛于 0。 根据泰勒定理以及 Ω(x, x) $= 0$, 可知，对于 $y > x$

$$\Omega(x,y) - f(x)(y-x) = (y-x)\,\frac{\partial}{\partial y'}\left[\Omega(x,y') - f(x)(y'-x)\right]|_{y'=\xi_{x,y}} \tag{5.1.3}$$

对于某个 $\xi_{x,\,y} \in (x,\ y)$。 VE 上的条件意味着

$$\frac{\partial}{\partial y'}\left[\Omega(x,y') - f(x)(y'-x)\right] \xrightarrow{y'\to 0} 0 \tag{5.1.4}$$

一致地成立，结论随即得出。

一般情形本质上也是相同的。考虑一个光滑函数 f: $[0,1]^n \to \mathbb{R}$，其中 $[0,1]^n$的坐标为 (x^1, ..., x^n) 。设 $\Delta_{[0,1]^n}$是 $[0,1]^n$. 的一个三角剖分。我们要为 n-形式 $f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$. 构造黎曼和。首先，对其求原函数，得到

Pair$[0,1]^n \rightrightarrows [0,1]^n$，与由下式给出的 n-上链配对

$$\Omega(x_0^1,\dots,x_0^n,\dots,x_n^1,\dots x_n^n) = f(x_0^1,\dots,x_0^n)\,\mathrm{Vol}_\Delta(x_0^1,\dots,x_0^n,\dots,x_n^1,\dots x_n^n)\,. \tag{5.1.5}$$

这个上链是归一化的，并且在偶置换下不变。对所有三角剖分取极限（使用这个上链），即可得到所需的积分。

任何其他归一化上链 Ω'，若在偶置换下不变，并且满足

$$VE(\Omega') = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \tag{5.1.6}$$

与 Ω 的差是某个归一化上链 Ω_0，该上链在偶置换下不变，并且满足 $VE(\Omega_0) = 0$. 设 Ω_0 为这样的上链。我们唯一需要验证的是

$$\lim_{\Delta_{[0,1]^n}} \sum_{\Delta\in\Delta_{[0,1]^n}} \Omega_0(\Delta^n) = 0\,, \tag{5.1.7}$$

这由引理 3.0.4 得出，与一维情形相同。 □

证明。**(第 1 部分)** 只需任取 M 的两个三角剖分，将 $(\Omega_M,\ \Omega_{\partial M})$ 拉回到

$$\mathrm{Pair}\, M_{\mathrm{loc}} \times \mathrm{Pair}\,[0,1] \tag{5.1.8}$$

通过投影到 Pair M_{loc}（$(\Omega_M,\Omega_{\partial M})$ 的拉回仍将是闭的），将 M 的两个三角剖分扩展为一个三角剖分

$$M \times [0,1], \tag{5.1.9}$$

应用引理 4.0.7，推得 5.0.4 左侧与三角剖分无关，最后应用定理 5.0.1。

□

证明。 **(第 2 部分)** [22] 我们推广微积分基本定理中反导数的构造。首先，我们选择一个从

$$\begin{array}{ccc} G_{\mathrm{loc}} & & \mathfrak{g} \\ \downarrow & \longrightarrow & \downarrow \\ M & & M \end{array} \tag{5.1.10}$$

它是 M 上的恒等映射，并且其导数在 $\mathfrak{g}\subset TG$.上的限制为恒等映射 [23]

设 ω 是 $\mathfrak{g}$. 上的闭 n-形式。对于源为 $x\in M$ 的 $g_1,\ \dots,\ g_n \in G_{\mathrm{loc}}$，令 $C_{(g_1,\dots,g_n)}$ 为由 $x,\ g_1,\ \dots g_n$ 按照 5.1.10 定义的凸包。[24] 如果向量 $(g_1-x,\dots,g_n-x)$ 线性无关，则该空间由这些向量自然定向。以下是一个完全反对称的n-余循环，在 VE 下映射为 ω：

$$\Omega(g_1,\dots,g_n) = \int_{C_{(g_1,\dots,g_n)}} \omega\,. \tag{5.1.11}$$

这里，我们将 ω 与其向左平移至 G_{loc}.后的像视为同一对象 □

[22]这种构造与 [3]中的构造并没有太大不同。[23]我们利用了 V 与向量空间原点处切空间之间的自然同一化。 V. 在这里， V 是 $\mathfrak{g}$. 的一个纤维。这在 [3]中称为管状结构。[24]也就是说，向量空间中的凸包是有意义的。

6 格点上的泛函积分

我们将首先用单纯集的上链和态射来阐释费曼构造路径积分的方法，然后将其推广。

6.1 费曼的路径积分

为了进一步了解路径积分的相关内容，给定一个拉格朗日量

$$\mathcal{L}(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)\ , \tag{6.1.1}$$

粒子最初在时刻 t_i 位于位置 x_i，在时刻 t_f 测得其位于位置 x_f 的量子力学振幅为

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i\rangle := \int_{\{x:[t_i,t_f]\to\mathbb{R}:\, x(t_i)=x_i, x(t_f)=x_f\}} \mathcal{D}x\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}\mathcal{L}\,dt}\ . \tag{6.1.2}$$

给定时刻 0 的初始波函数 $\psi_i = \psi_i(x)$，我们可以利用这个振幅确定时刻 t 的波函数为

$$\psi(x,t) = \int_{\{x:[0,t]\to\mathbb{R}:\, x(0)=x\}} \mathcal{D}x\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t \mathcal{L}\,dt'}\psi_i(x(t'))\ . \tag{6.1.3}$$

费曼通过对区间进行三角剖分，构造路径积分的近似，并令间距趋于零，从而构造了式 (6.1.3)。这些近似涉及的和在形式上与黎曼和相似。结果为（令 $t=1$）[25]:

$$\psi(x,1) = \lim_{N\to\infty} C_N \int_{-\infty}^{\infty}\prod_{n=1}^{N} dx_n\, \exp\left[\frac{1}{N}\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N}\frac{m}{2}N^2(x_n - x_{n-1})^2 - V(x_n)\right]\psi_i(x_N)\ , \tag{6.1.4}$$

其中 $x_0 = x$ 以及所有积分变量都在 $(-\infty,\ \infty)$上积分。令，即可构造布朗运动 ([1],[5])。这个和仅在形式上类似于黎曼和。不过，可以通过 Pair $\mathbb{R}$，Pair $[0,1]$, 上的 1–上链构造和中的各项，并要求它们具有正确的泰勒展开 z（或喷流）。具体而言，项 $(x_n - x_{n-1})^2$ 由 Pair $\mathbb{R}$ 上的 1–上链 $\Omega(x,\ y) = (y-x)^2$. 确定。对角线处沿源纤维的 3–喷流与 dx^2 一致（见脚注 10），而事实证明，这正是 Ω 唯一重要的性质。

我们将作出以下重要观察，并在下一小节中用到：存在一个自然的同一化

$$\{(x_0, x_1, \ldots, x_N) : x_0, x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}\} \cong \mathrm{Hom}(\Delta_{[0,1]}, \mathrm{Pair}\,\mathbb{R})\ . \tag{6.1.5}$$

左侧是 6.1.4 中的积分域，右侧则是我们的 $[0,1]$ 三角剖分与 $\mathbb{R}$. 的对群胚之间的态射集合。也就是说，我们用单纯集合的态射来逼近路径积分的积分域。从直观上看，

$$C([0,1],\mathbb{R}) = \lim_{|\Delta|\to 0}\mathrm{Hom}(\Delta_{[0,1]}, \mathrm{Pair}\,\mathbb{R})\,. \tag{6.1.6}$$

[25] C_N 是趋于 ∞ （当 $N\to\infty$. 时）的常数

6.2 一般泛函积分

我们所发展的框架可用于将任意取值于切丛或李代数丛的经典场论所产生的泛函积分置于格点上 $\mathfrak{g}$ —— 这包括积分域为流形之间映射空间的任何泛函积分。也就是说，我们考虑积分域具有 Hom(TM， $\mathfrak{g}$) ,[26] 形式、且作用泛函由积分给出的泛函积分。要将这样的泛函积分置于格点上，我们可以:

1. 对定义域进行三角剖分： $M \to \Delta_M$
2. 将 $\mathfrak{g}$ （例如切丛）积分到 G （例如局部对偶群胚）： $\mathfrak{g} \to G$
3. 近似积分域：Hom(TM， $\mathfrak{g}$) $\to$Hom(Δ_M， G)。
4. 将上链数据积分到群胚中（例如，将微分形式积分为余循环），
5. 形成黎曼型和,
6. 利用现有数据（例如黎曼度量、辛形式、哈尔测度），在 Hom(Δ_M， G) 上定义测度。

这一构造在各自的语境中导出了费曼路径积分和布朗运动；它还可用于在格点上构造泊松σ模型，至少在映射空间可以替换为李代数丛态射空间的情况下（[2]）。在这种情况下，所需数据与构造泊松流形的几何量子化所需数据有所重叠（[7],[15]）；两者都需要辛群胚上的一个余循环。

对于维纳路径积分，只要处理得当，三角剖分上的格点近似之极限就不依赖于所选的余链积分——这与第 1.2 节中的讨论有关。可以推广 van Est 映射，使其通过喷流记录高阶信息，见第 6.1 节、注 3.0.5、脚注 10。

注记 6.2.1. 有两种退化情形需要考虑：一种是 $\mathfrak{g}$ 是点 $*$上的零向量丛，另一种是 $M = *$ 和 $\mathfrak{g}$ 是切丛。我们对微分形式积分的构造是前一种情形的特例，因为

$$\int_M \omega = \int_{\mathrm{Hom}(TM,T*)} \int_M \omega \tag{6.2.1}$$

在这种情形下，步骤 *1–6* 可简化为步骤 1、4、5。测度的积分是后一种情形的特例，因为 $\mathrm{Hom}(T*, TM) = M$，因此

$$\int_M d\mu = \int_{\mathrm{Hom}(T*,TM)} d\mu\,. \tag{6.2.2}$$

在这种情形下，步骤 *1–6* 可简化为步骤 2、3、6。

附录

李群胚与李代数丛基础理论

本节将首先介绍李群胚和李代数丛，并给出一些重要的例子。教科书式的介绍请参见 [10]。

[26] Hom(TM,TN) 可自然地识别为映射空间 $M \to N$.

A.1 李群胚与李代数丛

定义 A.1.1. 群胚是一个范畴 $G \rightrightarrows M$，其中对象 M 和箭头 G 都是集合，并且每个态射都可逆。用符号表示，我们有两个集合 M、G，其结构映射形式如下：

$$
\begin{aligned}
&s, t : G \to M, \\
&\mathrm{id} : M \to G, \\
&\cdot : G \,{}_t\!\times_s G \to G, \\
&{}^{-1} : G \to G.
\end{aligned}
$$

这里，s、t 是源映射和目标映射，id 是恒等双截面（即，M 可以看作是 G中单位箭头的集合），$\cdot$是乘法，记作$(g_1$、$g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$，而 $^{-1}$ 是求逆映射。我们经常将点 $x \in M$ 与它在id 下于 G 中的像等同起来，并记作 $x \in G$.

李群胚是满足以下条件的群胚 $G \rightrightarrows M$：G、M 是光滑流形，所有结构映射都是光滑的，并且源映射和目标映射都是浸没。

为简洁起见，我们有时仅用箭头空间 G.来表示一个（李）群胚 $G \rightrightarrows M$

定义 A.1.2. 群胚的一个态射 $G \to H$ 是它们之间的一个函子，即一个与乘法相容的函数。李群胚的态射是一个光滑函子。

示例 A.1.3。 任何李群 G 都是一个李群胚 $G \rightrightarrows \{e\}$，其底流形仅包含单位元 $e \in G$.

下面的示例与布朗运动最为相关：

示例 A.1.4。 设 M 为一个流形。对群胚记作

$$\mathrm{Pair}(M) \rightrightarrows M,$$

它是一个李群胚，其对象是 M 中的点，箭头是 $M \times M$. 中的点。一个箭头 (x, y) 的源和靶分别为 x、y。复合定义为 $(x, y) \cdot (y, z) = (x, z)$，恒等双截面为 $\mathrm{id}(x) = (x, x)$，取逆为 $(x, y)^{-1} = (y, x)$。

李群胚的无穷小对应物是李代数丛。

定义 A.1.5。 李代数丛是一个三元组 $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot], \alpha)$，由以下部分组成

1. 一个向量丛 $\pi : \mathfrak{g} \to M$,
2. 一个向量丛映射（称为锚映射） $\alpha : \mathfrak{g} \to TM$,
3. 在 $\pi : \mathfrak{g} \to M$ 的截面空间 $\Gamma(\mathfrak{g})$ 上定义的李括号 $[\cdot, \cdot]$,

使得对所有光滑函数 f 以及所有 $\xi_1, \xi_2 \in \Gamma(\mathfrak{g})$，以下莱布尼茨法则成立：$[\xi_1, f\xi_2] = (\alpha(\xi_1)f)\xi_2 + f[\xi_1, \xi_2]$.

例 A.1.6. 任意李代数 $\mathfrak{g}$ 都是底流形仅含 $0 \in \mathfrak{g}$. 的李代数丛 $\mathfrak{g} \to \{0\}$

下面的例子与本文最为相关。

例 A.1.7。 设 M 是一个流形。切丛 $TM \to M$ 是一个李代数丛，其中锚映射 α 是单位映射。 $\Gamma(TM)$ 中的截面就是向量场，而李括号是向量场的李括号。

A.2 vanEst映射

现在我们陈述 van Est 映射的标准定义，该定义由 Weinstein–Mu 在 [16] 中给出。他们使用的神经的描述如下:

$$G^{(n)} = \underbrace{G \,{}_t\!\times_s G \,{}_t\!\times_s \cdots \,{}_t\!\times_s G}_{n \text{ times}} \,. \tag{A.2.1}$$

设 $G \rightrightarrows M$ 是一个李群胚。给定 $X \in \Gamma(\mathfrak{g})$，我们可以对它进行左平移，从而得到 L_X 上的一个向量场 $G^{(1)}$。现在假设我们有一个 n 上链 Ω $n \geq 1$。通过定义，我们得到一个 $(n-1)$ 上链 $L_X\Omega$

$$L_X\Omega(g_1, \ldots, g_{n-1}) = L_X\Omega(g_1, \ldots, g_{n-1}, \cdot)|_{t(g_{n-1})} \,, \tag{A.2.2}$$

即，对最后一个分量求导，并在单位元 $t(g_{n-1})$ 处取值 .

下面的定义使用了 $\mathfrak{g} \to M$ 的截面，因此需要验证它是良定义的:

定义 A.2.1。设 Ω 是一个归一化的 n-上链，并设 $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{g}_x$。我们定义

$$VE(\Omega)(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) L_{\tilde{X}_{\sigma(1)}} \cdots L_{\tilde{X}_{\sigma(n)}} \Omega \,, \tag{A.2.3}$$

其中 $\tilde{X}_i \in \Gamma(\mathfrak{g})$ 是 X_i, $1 \leq i \leq n$. 的一个延拓

下面说明，对于在偶置换下不变的归一化上链，我们在正文中给出的 van Est 映射定义与标准定义一致，但相差一个常数。

命题 A.2.2。设

$$\begin{aligned} f : \underbrace{G \,{}_t\!\times_s G \,{}_t\!\times_s \cdots \,{}_t\!\times_s G}_{n \text{ times}} &\to \underbrace{G \,{}_s\!\times_s G \,{}_s\!\times_s \cdots \,{}_s\!\times_s G}_{n \text{ times}}, \\ f(g_1, g_2, \ldots, g_n) &= (g_1, g_1 g_2, \ldots, g_1 \cdots g_n) \,. \end{aligned} \tag{A.2.4}$$

那么对于一个归一化上链

$$\Omega : \underbrace{G \,{}_s\!\times_s G \,{}_s\!\times_s \cdots \,{}_s\!\times_s G}_{n \text{ times}} \to \mathbb{R} \,, \tag{A.2.5}$$

我们有

$$VE(f^*\Omega)(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) X_{\sigma(1)} \cdots X_{\sigma(n)} \Omega \,. \tag{A.2.6}$$

证明。 我们只需将这些向量延拓为相应轨道内的局部截面，因此可以假设该群胚是传递的。由于计算是局部的，我们可以假设该群胚具有 Pair$(X) \times H \rightrightarrows X$，的形式，其中 H 是一个李群。[27] (x, y, h) 的源和靶分别由 x, y 给出，而复合定义为

$$(x, y, h) \cdot (y, z, h') = (x, z, hh') \,. \tag{A.2.7}$$

然后，通过在局部坐标中进行计算、应用链式法则，并利用 Ω 已归一化这一事实，即可迅速得到该结果。 □

[27]传递群胚（即所有对象都同构的群胚）是主丛的 Atiyah 群胚，而主丛的局部平凡性意味着传递群胚在局部上具有上述形式。例如参见 [10]。

A.3 广义黎曼–斯蒂尔切斯积分

这里我们证明命题 1.1.1。

定义 A.3.1. 设 $\Omega \in \mathcal{A}^n\mathrm{Pair}\, M_{\mathrm{loc}}$，其中 M 是 n 维的（必要时赋予定向）。我们将其全变差定义为[28]

$$\limsup_{\Delta_M \in \mathcal{T}_M} \sum_{\Delta \in \Delta_M} |\Omega| \,. \tag{A.3.1}$$

命题 A.3.2. 假设 f 连续，且 $\delta^*\Omega$ 有界变差。那么 *1.1.3* 存在（对于全变差中所用三角剖分的给定等价类）。

证明. 证明是对区间情形标准证明的改写。结论成立当且仅当它在几何三角剖分的每个最高维面上成立，因此我们假设$M = |\Delta^n|$. 首先，我们需要证明，如果 $|\Delta_M| \le |\Delta'_M|$, 那么

$$\sum_{\Delta \in \Delta_M} |\delta^*\Omega| \le \sum_{\Delta \in \Delta'_M} |\delta^*\Omega| \,. \tag{A.3.2}$$

这由引理 4.0.7（三角剖分斯托克斯定理）和三角不等式得出。接下来，对于 $(x_0, \dots, x_n) \in \mathrm{Pair}^{(n)} M$, 定义 $V_{(x_0,\dots,x_n)}(\delta^*\Omega)$ 为 $\delta^*\Omega$ 在 x_0 的凸包上线性细分下的全变差。于是我们得到一个完全对称的 n-上链 $V_\bullet(\delta^*\Omega)$，其定义为

$$V_\bullet(\delta^*\Omega)(x_0, \dots, x_n) = V_{(x_0,\dots,x_n)}(\delta^*\Omega) \,. \tag{A.3.3}$$

由 A.3.2 可知， $V_\bullet(\delta^*\Omega)$ 是可加的，也就是说，若 M 被顶维面 Δ_1、.....、 Δ_k 细分，则

$$V_\bullet(\delta^*\Omega)(M) = \sum_{i=1}^{k} V_\bullet(\delta^*\Omega)(\Delta_i) \,. \tag{A.3.4}$$

$V_\bullet(\delta^*\Omega) - \delta^* f$. 也同样成立。我们可以将 1.1.3 右边写成

$$\lim_{\Delta_M} \sum_{\Delta \in \Delta_M} (s^* f) V_\Delta(\delta^*\Omega) \; - \sum_{\Delta \in \Delta_M} (s^* f)(V_\Delta(\delta^*\Omega) - \delta^*\Omega(\Delta)) \,. \tag{A.3.5}$$

因此，要证明收敛，只需证明这两项都收敛。注意到，当我们对三角剖分取极限时，以下各项趋于 0:

$$\sum_{\Delta \in \Delta_M} (\sup_{|\Delta|} f - \inf_{|\Delta|} f) V_\Delta(\delta^*\Omega) \,, \tag{A.3.6}$$

$$\sum_{\Delta \in \Delta_M} (\sup_{|\Delta|} f - \inf_{|\Delta|} f)(V_\Delta(\delta^*\Omega) - \delta^*\Omega(\Delta)) \,, \tag{A.3.7}$$

其中，下确界和上确界是在 $|\Delta|$. 中所有点上取的 □

A.4 符号索引

1. $C^n(G)$ $C_0^n(G)$ 是 G 上（归一化）光滑 n-上链的子空间，2.1.4
2. $\Lambda^n G$ 是完全反对称 n-余链的子空间，2.1.6
3. $S_0^n G$ 是归一化的完全反对称 n-余链的子空间，2.1.7

[28]根据上链的不同，可能需要固定一个三角剖分的等价类，才能讨论其全变差。

4. $\mathcal{A}_0^n G = S_0^n G \oplus \Lambda^n G$ 是对偶置换下不变的归一化 n-上链子空间，2.1.8 5. G_{loc} 是一个局部李群胚，2.3 6. Pair M_{loc} 是局部对偶群胚，2.3.3，A.1.4 7. δ^*, d 分别是李群胚微分和李代数丛微分，2.2.1，3.1.1 8. $\mathcal{T}_M$ 是 M 的所有光滑三角剖分的集合，而 Δ_M 是一个三角剖分，4.0.1。

无利益冲突需要声明。不存在相关数据。

参考文献

[1] Lars-Erik Andersson 和 Bruce K. Driver。维纳测度的有限维近似与流形上的路径积分公式。Journal of Functional Analysis 165 (1998): 430-498。[2] F. Bonechi、A. S. Cattaneo 和 M. Zabzine，几何量子化与非微扰泊松σ模型。Adv. Theor. Math. Phys. 10 (2006) 683 [arxiv:math/0507223]。[3] Alejandro Cabrera、Ioan M˘arcut,和 Mar´ıa Amelia Salazar。关于李括号的局部积分。Journal f¨ur die reine und angewandte Mathematik（Crelles Journal），第 2020 卷，第 760 期，2020 年，第 267-293 页。https://doi.org/10.1515/crelle-2018-0011[4] Marius Crainic。可微上同调与代数丛上同调、*van Est* 同构及特征类。Commentarii Mathematici Helvetici，第 78 卷，（2003 年），第 681-721 页。[5] Rick Durrett。概率论：理论与例子。（2019 年）。[6] B. Gaveau、E. Mih´okov´a、M. Roncadelli 和 L. S. Schulman。使用 *Trotter* 乘积公式计算磁场中的路径积分。Am. J. Phys. 72, 385–388 (2004)。https://doi.org/10.1119/1.1630334[7] Eli Hawkins。群胚量子化方法。J. Symplectic Geom. 6 (2008)，第 1 期，61-125。[8] Joshua Lackman。李群胚模上同调与广义 *van Est* 映射。International Mathematics Research Notices，rnab027，（2021 年），https://doi.org/10.1093/imrn/rnab027[9] Joshua Lackman。几何叠上的 *van Est* 映射。arxiv:2205.02109（2022 年）。[10] Mackenzie, K.（2005）。传递理论。载于《李群胚与李代数丛的一般理论》（London Mathematical Society Lecture Note Series，第 179-180 页）。剑桥：剑桥大学出版社。[11] J. R. Munkres。初等微分拓扑学。麻省理工学院课程讲义，1961 年秋。修订版，Annals of Mathematics Studies。第 54 卷。普林斯顿，新泽西州：普林斯顿大学出版社。MI，112 页。（1966 年）。ZBL0161.20201。[12] Tullio Regge。无坐标的广义相对论。Il Nuovo Cimento MIM，558-571，1961 年。[13] E. Stepanov 和 D. Trevisan。迈向粗糙微分形式的几何积分。J Geom Anal 31, 2766–2828 (2021)。https://doi.org/10.1007/s12220-020-00375-5 [14] Ravi Vakil。从代数几何视角出发的射流丛初学者指南。（1998 年）。

[15] Alan Weinstein。辛群胚、几何量子化与非理性旋转代数。载于：Dazord, P.、Weinstein, A.（编），《辛几何、群胚与可积系统》。数学科学研究所出版物，第 20 卷，（1991 年）。Springer，纽约，纽约州。

[16] 艾伦·温斯坦和徐平。辛群胚的扩张与量子化。Journal f¨ur die reine und angewandteMathematik。第417卷，（1991年）第159-190页。