基于模态降阶的机器学习辅助失配线性动力系统状态预测

Rohan Vittal Thorat[a]、Rajdip Nayek[a]

[a]印度理工学院德里分校应用力学系，新德里 *110016*，印度

arXiv:2601.05297v1 [stat.ML] 8 Jan 2026

摘要

在整个运行寿命期间，准确预测结构动力学对于保持数字孪生的保真度至关重要。具有固定名义参数的参数模型往往会因几何形状、材料行为、阻尼或边界条件方面的简化而遗漏关键物理效应，导致模型形式误差（*MFEs*），进而降低预测准确性。本文提出一个全面的框架，用于估计和校正高维有限元（*FE*）结构动力系统中的模型形式误差。高斯过程潜在力模型（*GPLFM*）在降阶模态域中以非参数方式表示差异，从而能够灵活地基于数据表征未建模动力学。线性贝叶斯滤波方法联合估计系统状态和差异，并纳入认知不确定性与偶然不确定性。为确保计算可行性，本文将有限元系统投影至降阶模态基，并使用网格不变神经网络将模态状态映射为差异估计，使模型能够在不同有限元离散方案间进行校正，而无需重新训练。本文针对五种模型形式误差场景开展验证，包括错误梁理论、阻尼设定错误、边界条件设定错误、未建模材料非线性和局部损伤。结果表明，在未见激励下，该代理模型显著降低了位移和转动预测误差。所提出的方法有望在固有建模不确定性存在的情况下维持数字孪生的准确性。

关键词：模型偏差、高斯过程、潜在力模型、贝叶斯滤波、模态降阶、数字 twin

1. 引言

结构动力系统的可靠仿真是工程分析、设计和决策的核心。在实践中，由于信息有限、计算约束，或对几何形状、边界条件、阻尼机制和材料本构定律所作的简化假设，高保真模型往往难以实际应用。这些理想化处理会导致模型形式误差（MFEs）——预测的系统响应与实际系统响应之间的系统性差异；如果不加以处理，可能会显著降低预测准确性。在数字孪生背景下，这一挑战尤为关键，因为模型预测会直接为监测和决策提供依据。

结构系统的数字孪生将计算模型与实时或历史测量数据相结合，以实现持续预测、监测和决策 [1, 2]。然而，要使数字孪生在整个运行寿命期间保持可靠，其底层仿真模型必须高保真地再现系统动力学。但在实践中，名义计算模型虽然通常配有相当准确的参数值，却不可避免地会因简化假设而忽略某些物理效应；有时这是有意为之，以降低计算成本，

*通讯作者

电子邮件地址 作者：rohan.thorat@am.iitd.ac.in (Rohan Vittal Thorat), rajdipn@am.iitd.ac.in (Rajdip Nayek)

有时则是由于缺乏专家知识而无意造成的。这些缺失项会引入模型形式误差，在超出校准范围进行外推时损害预测可靠性。

数字孪生更新中的一种常见策略是重新校准模型参数，使仿真输出与观测数据相匹配 [3–5]。这种参数调优可以改善短期内的一致性，但仍存在一个根本性缺口：由被忽略的物理效应或未建模耦合所引起的模型形式误差，无法通过所选模型形式中的参数来表征。试图通过模型参数校准来吸收这些影响，可能会使原本已充分表征的参数产生偏差，尤其是在可调参数的数量远少于模型维度时。因此，当不确定性主要来自参数时，模型参数校准仍然有用；但当控制方程本身存在设定错误时，它就无能为力了。因此，我们着重于直接估计并补偿这类缺失建模项，而不改变名义模型中已知的参数。这种策略在保持名义计算模型结构完整性的同时，能够利用数据修正其缺陷；此外，它还可将基于模型参数的误差纳入推断的差异项，从而确保即使模型参数误差与未建模物理效应并存，预测准确性也不会受到影响。

过去二十年来，高斯过程（GP）建模已成为一种强大的概率框架，可用于增强不完善的计算模型。基于 GP 的模型误差处理方法大致可分为三类。第一类是在测量方程中加入 GP差异项，例如 Kennedy–O’Hagan（KOH）框架 [6], ，在该框架中，模型输出通过统计方法与数据进行校准。这种方法适用于名义模拟器是黑箱且无法获取控制方程的情形；然而，它只能校正输出，无法弥补动力学层面的缺陷 [7–11]。

第二类将 GP 嵌入过程方程，从而直接作用于动力学，而非测量数据。一个典型例子是潜在力模型（LFM） [12], ，它们对常微分方程或偏微分方程组中的未观测强迫项施加 GP先验。通过校正控制方程本身，潜在力模型比 KOH 类校正方法具有更强的泛化能力，但需要深入访问控制方程。潜在力模型已应用于结构动力学，用于表示未知输入和/或差异 [13–18], ，但这些应用仅限于小规模系统，结构自由度（DOF）通常少于十个。将 LFM 推断扩展到高维有限元系统的计算难题（因为每个自由度通常都需要对应一个潜在力），使得如何将此类方法扩展至真实结构仍是一个悬而未决的挑战。此外，除推断之外，只有 Garg等人 [17] 尝试将推断得到的差异用于前向预测，即便如此，其应用范围也仅限于小规模多自由度系统。因此，将此类校正扩展至高维有限元模型仍鲜有研究。

第三条较新的研究路线是直接在解场上设置GP先验，并通过协方差结构或控制方程的弱形式来施加物理约束 [19–25]。尽管这种方法对于可以推导出闭式推断的线性问题颇具吸引力，但在非线性情形下，其计算成本会变得十分高昂。

在这些替代方法中，LFMs与我们推断模型偏差并纠正不完美动力学的目标尤为相关，因为它们直接作用于动力学层面（而不仅局限于测量层面）。然而，它们在高维结构动力学中的扩展仍未得到充分发展。

在本研究中，我们将用于推断模型偏差的潜在力模型框架 [15] 扩展至高维线性结构动力系统。我们的方法包含两个关键要素：(a) 通过模态分解对高维名义线性系统进行降阶，并将 GPLFM 应用于降阶模态方程，以推断潜在模态差异力，从而使潜在变量的数量随线性弹性模态的数量而非自由度的数量扩展；(b) 通过神经网络代理模型，将推断出的差异映射至相应的模态状态，提供一种离散网格不变校正，可嵌入名义计算模型，在未见激励下实现预测校正。

原则上，神经网络或神经常微分方程等黑箱机器学习模型也可用于学习差异，但在这种情况下，平稳高斯过程具有显著优势。它们只需少量超参数，便能灵活表示动力信号；更重要的是，它们存在等价的线性随机微分方程表示。这使其能够与降阶线性动力学平滑集成，并通过高效的卡尔曼滤波实现联合状态—差异推断。这些特性使 GPLFM 尤其适用于大规模线性结构动力学。该设计可对线性结构动力模型进行可扩展且网格不变的校正，将基于潜在力模型的误差推断从集总或低维系统扩展至真实的基于有限元的数字孪生。

本研究的主要贡献如下：

- 通过 GPLFM 在模态域中对模型形式误差进行非参数黑箱建模。
- 通过神经网络将降阶模态状态映射至模型形式误差，实现与网格无关的模型校正，并可迁移至采用不同离散化方式的有限元网格。
- 将学习得到的代理模型嵌入名义模型，实现物理增强仿真修正，显著提升了在未见载荷条件下的响应预测效果。
- 通过多种案例研究进行全面的数值验证，涵盖错误的控制方程、阻尼设定错误、边界条件设定错误、未建模的材料非线性以及局部损伤。

本文其余部分的组织如下：第2节对所关注的动力系统进行形式化描述，并以精确的方式阐述估计和预测目标。第3节构建降阶振型表示和基于高斯过程的差异模型，详细介绍增广状态空间框架和基于卡尔曼滤波的推断，并给出神经代理模型训练和网格不变校正策略。第4节报告数值研究和性能评估结果。第5节讨论相关问题，第6节总结全文并提出未来的研究方向。

2. 问题陈述

考虑一个由以下运动方程控制的高维结构动力系统，该运动方程由连续结构的有限元（FE）离散化得到：

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{u}}(t) + \mathbf{K}\bar{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{g}\left(\bar{\boldsymbol{u}}(t), \dot{\boldsymbol{u}}(t)\right) = \boldsymbol{f}(t), \quad 0 \le t \le T \tag{1}$$

其中，t 表示关注时间范围内的时间 $[0, T]$，$\bar{\boldsymbol{u}}(t) \in \mathbb{R}^N$ 是具有 N 个自由度（DOFs）的未知真实位移向量。假设系统受到约束，不存在刚体模态。向量 $\dot{\boldsymbol{u}}(t) = \frac{d\bar{\boldsymbol{u}}(t)}{dt}$ 和 $\ddot{\boldsymbol{u}}(t) = \frac{d^2\bar{\boldsymbol{u}}(t)}{dt^2}$ 分别表示速度和加速度。矩阵 $\mathbf{M}$、$\mathbf{C}$、$\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ 表示质量、阻尼和刚度算子，并假设它们已知、对称且正定。项 $\boldsymbol{f}(t) \in \mathbb{R}^N$ 表示外部激励向量。一般而言，可假设初始条件为零。

向量值函数 $\boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{u}}(t), \dot{\boldsymbol{u}}(t))$ 表示超出名义线性贡献的附加恢复力。该项用于表示丰富系统描述的物理效应，例如非线性材料本构行为、几何非线性、高阶理论效应（如铁木辛柯梁中的剪切变形或转动惯量）、非经典阻尼机制、未建模结构部件（如连接节点或弹簧）的贡献，以及与损伤相关的局部刚度变化。纳入该项后，$\boldsymbol{g}$ 可更真实地表征系统的真实动力学。然而，省略该项会导致名义响应与真实响应之间出现系统性差异，我们将其称为模型形式误差（MFEs）。

我们假设已知名义参数（$\mathbf{M}$,$\mathbf{C}$,$\mathbf{K}$）以及系统在 $t = 0$ 时的初始状态。在此设定下，目标有两个：

- **估计：** 对于给定激励 $\boldsymbol{f}(t)$，通过根据位移时间序列形式的系统响应测量数据重建缺失项 $\boldsymbol{g}\left(\bar{\boldsymbol{u}}(t), \dot{\boldsymbol{u}}(t)\right)$，估计真实系统方程（1）的系统响应轨迹 $\bar{\boldsymbol{u}}(t)$。这些测量数据记为数据集 $\mathcal{D} = \{(t_k, \boldsymbol{y}_k)\}_{k=1}^{N_t}$，其中 $\boldsymbol{y}_k \in \mathbb{R}^{N_y}$ 为时间 t_k 的含噪观测。

- **预测：** 将估计得到的差异和系统状态信息作为预测用途的修正机制，并将其嵌入名义模型，以改进系统响应在此前未见激励 $\boldsymbol{f}^*(t)$ 下的预测结果。此步骤将估计能力扩展至预测校正，这是数字孪生应用所需的。

3. 数学表述与方法

3.1. 高维名义计算模型

如第 2 节所述，真实的结构动力学包含一个额外的恢复力项 $\boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{u}}(t), \dot{\boldsymbol{u}}(t))$，用于考虑非线性、高阶理论效应、阻尼机制、缺失部件或损伤。尽管这一项对于忠实地表示系统至关重要，但建模者通常无法获取该项，或会有意忽略它，以构建简化的计算模型。

因此，得到的名义 计算模型表示为

$$\mathbf{M}\ddot{\tilde{\boldsymbol{u}}}(t) + \mathbf{C}\dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}(t) + \mathbf{K}\tilde{\boldsymbol{u}}(t) = \boldsymbol{f}(t), \tag{2}$$

其中， $\tilde{\boldsymbol{u}}(t) \in \mathbb{R}^N$是 N个物理自由度的位移向量，$\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{N\times N}$分别是已知的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵， $\boldsymbol{f}(t) \in \mathbb{R}^N$ 是外力向量。注意，式（1）中的真实响应 $\bar{\boldsymbol{u}}(t)$ 与式（2）中的名义响应 $\tilde{\boldsymbol{u}}(t)$ 之间的差异，完全源于遗漏了 $\boldsymbol{g}$。这种系统性差异构成了模型形式误差（MFE）。本研究的核心目标是根据现有测量数据估计 $\boldsymbol{g}$ 的影响——将其解释为作用于名义系统的潜在力（LF）——并将这一修正反馈至名义模拟器，以恢复预测保真度。因此，式（2）构成了我们方法的出发点。

3.2. 计算可行性的模态降阶

若直接尝试在完整有限元空间中估计差异项 $\boldsymbol{g}$ ，计算成本将高得难以承受，因为现实中的离散化会产生数千个自由度，并且需要处理数量庞大的潜在力，从而增加推断负担。因此，我们采用降阶表示——在本例中为模态降阶——以提供一个可处理的空间，从而能够以概率方式推断潜在模型形式误差。

我们采用模态降阶，将高维系统投影到由有限个主导振动模态张成的低维子空间中。具体做法是求解广义特征值问题

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Omega}^2, \tag{3}$$

其中， $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^{N\times m}$ 包含 m 保留的振型，$\boldsymbol{\Omega} = \mathrm{diag}\,(\omega_1, \ldots, \omega_m)$ 是由固有频率构成的对角矩阵。将位移近似为 $\tilde{\boldsymbol{u}}(t) \approx \boldsymbol{\Phi}\,\tilde{\boldsymbol{q}}(t)$ 后，可得到降阶（解耦）模态方程:

$$\ddot{\tilde{\boldsymbol{q}}}(t) + \boldsymbol{\Xi}\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}(t) + \boldsymbol{\Omega}^2\tilde{\boldsymbol{q}}(t) = \boldsymbol{p}(t), \tag{4}$$

其中， $\tilde{\boldsymbol{q}}(t) \in \mathbb{R}^m$ 为模态坐标， $\boldsymbol{\Xi}$ 为模态阻尼矩阵（在比例阻尼条件下为对角矩阵）， $\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(t)$ 为降阶激励向量。

选择 $m \ll N$ 可确保保留结构的基本动力学特性，同时将差异项的维度降低到可处理的规模。这种降阶使得能够在模态域中对潜在力施加非参数 GP先验，此时推断关于 m呈线性扩展。尽管本文采用了模态降阶，但该框架也可兼容其他模型降阶技术 [26–29]。

3.3. 模型形式误差的非参数概率表示

将名义线性计算模型投影到降阶模态域后，便可以用计算上可行的方式引入被省略的恢复力 $\boldsymbol{g}$ 的影响。具体而言，我们将

将模型形式误差显式表示为一个随时间变化的潜在力（LF） $\boldsymbol{\eta}(t) \in \mathbb{R}^m$ 作用于降阶系统，使得

$$\ddot{\boldsymbol{q}}(t) + \boldsymbol{\Xi}\dot{\boldsymbol{q}}(t) + \boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{q}(t) + \boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{p}(t), \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{q}(t)$ 表示潜在力增强系统的模态坐标， $\boldsymbol{p}(t)$ 表示降阶外部激励。

引入 $\boldsymbol{\eta}(t)$ 会使潜在力增强系统的响应 $\boldsymbol{q}(t)$（进而使物理域中的 $\boldsymbol{u}(t) \approx \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{q}(t)$）偏离纯名义模态响应 $\tilde{\boldsymbol{q}}(t)$（以及物理域中的 $\tilde{\boldsymbol{u}}(t)$）。如果潜在力模型能够精确捕捉模型形式误差，那么潜在力增强系统的响应 $\boldsymbol{u}(t)$ 将在物理域中完美模拟真实系统响应$\bar{\boldsymbol{u}}(t)$。因此， $\tilde{\boldsymbol{u}}(t)$ 与 $\bar{\boldsymbol{u}}(t)$ 之间的差异直接反映了名义方程中省略 $\boldsymbol{g}$ 所产生的模型形式误差。

与假设预定义函数形式的参数化误差模型不同，我们采用非参数概率表示。将 $\boldsymbol{\eta}(t)$的每个分量建模为零均值 GP先验，

$$\eta_i(t) \sim \mathcal{GP}\left(0,\, \kappa\left(t - t'; \boldsymbol{\theta}^{(i)}\right)\right), \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{6}$$

采用平稳协方差核 $\kappa\left(t - t';\ \boldsymbol{\theta}^{(i)}\right)$ 由超参数 $\boldsymbol{\theta}^{(i)}$参数化。核超参数的完整集合记为 $\boldsymbol{\theta} = \left\{\boldsymbol{\theta}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\theta}^{(m)}\right\}$。

这种非参数表述具有若干优点:

- 它避免了对差异结构施加限制性参数化假设，从而能够以灵活、数据驱动的方式学习模型形式误差。

- 由于在降阶模态空间中进行处理，GP之间的独立性假设不再那么严格，因为模态方程彼此解耦。同时，潜在力的维度较低（$m \ll N$），使高斯过程推断具有可扩展性。

- 平稳协方差核具有等效的状态空间表示 [30], ，便于将 GP 先验与模态动力学相结合，并以关于时间的线性复杂度进行高效推断；相比之下，经典高斯过程推断的复杂度呈立方增长。

因此，通过将模型形式误差表述为降阶模态域中的 GP 潜在力，我们得到了对未知差异的概率化且易于处理的表示，这构成了下文所述增广状态空间表述的基础。

3.4. 增广状态空间表述

为 GP先验使用平稳协方差核的一个关键优势在于，每个相互独立的高斯过程都可以等价地表示为一个线性随机微分方程（SDE）。这使得模态约化结构动力学方程（5）和高斯过程潜在力模型能够合并为一个单一的增广状态空间系统。

我们定义增广状态向量

$$\boldsymbol{z}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}(t) \\ \dot{\boldsymbol{q}}(t) \\ \boldsymbol{\eta}(t) \end{bmatrix}, \tag{7}$$

其中包括模态位移 $\boldsymbol{q}(t)$、速度 $\dot{\boldsymbol{q}}(t)$ 和高斯过程潜在状态 $\boldsymbol{\eta}(t)$。随后，增广线性随机微分方程的连续时间状态空间形式可写为

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t) = \mathbf{A}_c(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{z}(t) + \mathbf{B}_c\boldsymbol{p}(t) + \boldsymbol{w}(t;\boldsymbol{\theta}), \tag{8}$$

其中，$\boldsymbol{w}(t;\boldsymbol{\theta})$ 是一个零均值向量值维纳过程，其协方差为$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta})$。系统矩阵具有如下分块形式

$$\mathbf{A}_c(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m\times m} & \mathbf{I}_m & \mathbf{0}_{m\times m} \\ -\boldsymbol{\Omega}^2 & -\boldsymbol{\Xi} & -\mathbf{I}_m \\ \mathbf{0}_{m\times m} & \mathbf{0}_{m\times m} & \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m\times m} \\ \mathbf{I}_m \\ \mathbf{0}_{m\times m} \end{bmatrix}, \tag{9}$$

其中，$\boldsymbol{\Omega}^2 = \mathrm{diag}\left(\omega_1^2, \ldots, \omega_m^2\right)$, $\boldsymbol{\Xi} = \mathrm{diag}\left(\xi_1, \ldots, \xi_m\right)$（假设为比例阻尼），而$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta})$ 则表示高斯过程状态动力学。注意，$\mathbf{I}_n$ 是一个大小为 $n \times n$ 的单位矩阵，而$\mathbf{0}$ 是一个零矩阵。

对于 Matérn-$\frac{1}{2}$（指数）核,

$$\kappa\left(t - t'; \boldsymbol{\theta}^{(i)}\right) = \alpha_i^2 \exp\left(-\tfrac{|t-t'|}{\ell_i}\right), \tag{10}$$

潜在高斯过程动力学可简化为奥恩斯坦–乌伦贝克过程 [31]，其形式为

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}) = \mathrm{diag}\left\{-1/\ell_1, -1/\ell_2, \ldots, -1/\ell_m\right\},$$
$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \epsilon\,\mathbf{I}_{2m} & \mathbf{0}_{2m\times m} \\ \mathbf{0}_{m\times 2m} & \mathrm{diag}\left\{2\alpha_1^2/\ell_1,\, 2\alpha_2^2/\ell_2,\, \ldots,\, 2\alpha_m^2/\ell_m\right\} \end{bmatrix},$$

其中，$\epsilon > 0$ 是（$\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}$）块的较小过程噪声水平（例如 $\epsilon = 10^{-12}$）。

以采样间隔 Δt 对式（8）进行离散化（采用零阶保持），可得到离散时间过程模型

$$\boldsymbol{z}_{k+1} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{z}_k + \mathbf{B}\,\boldsymbol{p}_k + \boldsymbol{w}_k(\boldsymbol{\theta}), \tag{11}$$

其中，$\mathbf{A} = \mathrm{expm}\left(\mathbf{A}_c(\boldsymbol{\theta})\Delta t\right)$ 是状态转移矩阵，且 $\mathbf{B} = (\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{A}_c^{-1}\mathbf{B}_c$。注意，expm 表示矩阵指数。

离散时间过程噪声 $\boldsymbol{w}_k(\boldsymbol{\theta})$ 服从均值为零、协方差为$\mathbf{Q}_d(\boldsymbol{\theta})$的多元高斯分布，其形式为

$$\mathbf{Q}_d(\boldsymbol{\theta}) = \int_0^{\Delta t} \boldsymbol{\Psi}_a(\Delta t - \tau)\, \mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta})\, \boldsymbol{\Psi}_a^{\top}(\Delta t - \tau)\, d\tau, \tag{12}$$

其中 $\boldsymbol{\Psi}_a(\tau) = \mathrm{expm}\left(\mathbf{A}_c(\boldsymbol{\theta})\ \tau\right)$。该积分可通过矩阵分式分解高效求解；推导和实现细节请参见 [32] 第 6.3 节。

该增广状态空间表述提供了一种统一表示，使模态动力学与潜在高斯过程力共同演化。正如下一小节所述，它能够利用卡尔曼滤波高效地推断模型形式误差和系统状态。

3.5. 用于联合状态–差异估计的卡尔曼滤波

利用公式（11）–（12）中的离散时间增广状态空间模型，可以将结构状态和潜在模型误差项的估计问题表述为标准的状态估计问题。增广状态 $\boldsymbol{z}_k \in \mathbb{R}^{3m}$ 包含模态位移、速度和高斯过程潜在力分量，并在高斯过程噪声作用下进行线性演化。

可用数据由含噪测量 $\boldsymbol{y}_k \in \mathbb{R}^{N_y}$ 构成，其形式为部分自由度 $\boldsymbol{q}(t)$上的位移。这些测量数据通过线性测量方程与增广状态相关联：

$$\boldsymbol{y}_k = \mathbf{H}\boldsymbol{\Phi}\,\boldsymbol{z}_k + \boldsymbol{v}_k, \tag{13}$$

其中，$\mathbf{H}$ 是观测矩阵，用于提取 $\boldsymbol{\Phi}$ 中与测量自由度相对应的行。测量噪声 $\boldsymbol{v}_k$ 建模为均值为零的高斯向量，$\boldsymbol{v}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0},\ \mathbf{R})$，其协方差 $\mathbf{R}$由传感器精度决定。

给定式 (11) 至 (13) 中的线性高斯状态空间模型，可使用卡尔曼滤波器和 Rauch–Tung–Striebel (RTS) 平滑器，对模态状态 $\boldsymbol{q}_k$、速度 $\dot{\boldsymbol{q}}_k$ 和潜在高斯过程力 $\boldsymbol{\eta}_k$ 进行联合推断。这可实现：(a) 将测量噪声 $\boldsymbol{v}_k$ 与结构模型形式误差 $\boldsymbol{\eta}_k$分离；(b) 对结构状态和潜在差异力进行不确定性量化；以及 (b) 以关于时间步数的线性计算复杂度进行最优递归估计。

高斯过程核超参数 $\boldsymbol{\theta}$ 通过最大化后验概率（最大后验估计）获得：

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg\max_{\boldsymbol{\theta}}\ p(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{y}_{1:N_t}) \tag{14}$$

实际操作中，对候选 $\boldsymbol{\theta}$运行卡尔曼滤波器即可实现这一过程，详情见附录B。

因此，卡尔曼滤波器和RTS 平滑器提供了一种有理论依据的方法，用以实现问题陈述中的首要目标：在联合概率框架下，估计真实系统的位移轨迹，并推断潜在模型误差项 $\boldsymbol{\eta}(t)$。随后，这些推断出的状态和差异估计将用于构建可重复使用的修正模型，具体如下。

3.6. 从状态到差异的网格不变映射

GPLFM框架根据测量数据，提供每个时间步的潜在模型误差项 $\boldsymbol{\eta}(t)$ 的后验估计。虽然这些估计可用于训练阶段的修正，但无法直接用于新激励下的预测模拟。为了构建可重复使用的修正机制，我们学习一个函数映射，将模态状态的均值映射到模型形式误差的均值。

具体而言，我们训练一个神经网络模型 $\mathcal{N}_\psi$ 来近似这一关系

$$\boldsymbol{\eta}(t)\ \approx\ \mathcal{N}_{\boldsymbol{\psi}}\left(\boldsymbol{q}(t),\, \dot{\boldsymbol{q}}(t)\right), \tag{15}$$

将来自 GPLFM 推断阶段的 $\{(\boldsymbol{q}_k,\ \dot{\boldsymbol{q}}_k)\ \ \boldsymbol{\eta}_k\}_{k=1}^{N_t}$ 平滑均值估计值用作训练数据。

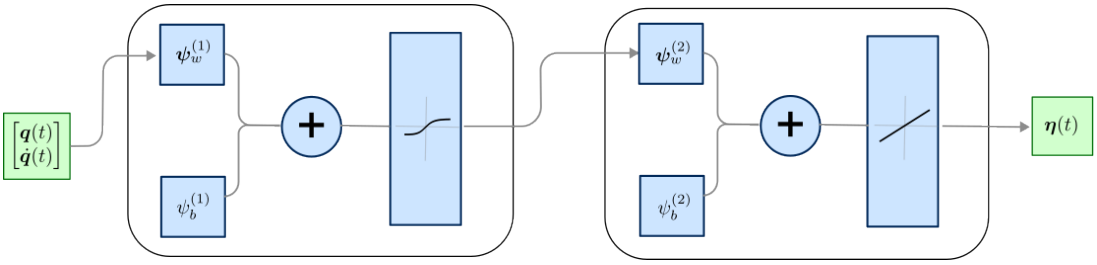


图1：双层神经网络将平均模态状态 $[\boldsymbol{q}(t)\ \ \dot{\boldsymbol{q}}(t)]$ 映射为降阶空间中的平均潜在差异力 $\boldsymbol{\eta}(t)$。隐藏单元使用 Sigmoid 激活函数，输出层为线性层。神经网络由 $\boldsymbol{\psi} = [\boldsymbol{\psi}_w^{(1)\top}, \psi_b^{(1)\top}, \boldsymbol{\psi}_w^{(2)\top}, \psi_b^{(2)\top}]$参数化。

该设计的一个关键特点是，网络完全在降阶模态空间中运行。由于模态坐标是结构的内在属性，且与有限元网格的离散密度无关，因此这种表示方式确保了网格不变性：无需重新训练，即可将训练后的代理模型 $\mathcal{N}_\psi$ 迁移到同一结构在不同网格分辨率下的仿真中。这一特性在数字孪生场景中尤为重要，因为在结构的运行寿命期间，有限元模型可能会根据需要进行自适应细化或粗化。

我们将 $\mathcal{N}_\psi$ 实例化为一个紧凑的双层神经网络（包含一个隐藏层），用于将模态状态映射为模态潜在力（见图1）。输入为拼接后的模态状态向量 $[\boldsymbol{q}^\top(t)\ \ \dot{\boldsymbol{q}}^\top(t)]^\top \in \mathbb{R}^{2m}$，输出为 $\boldsymbol{\eta}(t) \in \mathbb{R}^m$。隐藏单元使用 Sigmoid 激活函数，输出层为线性层。训练数据包括从 GPLFM 阶段获得的平滑均值 $\{(\hat{\boldsymbol{q}}_k,\ \hat{\dot{\boldsymbol{q}}}_k),\ \hat{\boldsymbol{\eta}}_k\}_{k=1}^{N_t}$。网络通过 ADAM 优化器 [33], 最小化均方误差进行训练，并对输入和输出均采用标准 z–分数归一化；基于留出的验证集进行提前停止，并加入轻度 ℓ_2 正则化项以减轻过拟合。第4节所示的所有示例均一致采用相同的架构和超参数。

这种网格不变映射提供了一种可移植、数据驱动的修正模型，可轻松嵌入名义降阶方程中，从而得到下一小节所述的校正后的模拟器。

3.7. 将修正嵌入名义计算模型

在降阶模态空间中训练的网格不变代理模型 $\mathcal{N}_\psi$提供了一种可重复使用的修正模型，可根据瞬时模态状态预测潜在模型误差项的 MFE 力。该代理模型可直接嵌入降阶标称方程，从而得到校正后的非线性模型：

$$\ddot{\boldsymbol{q}}(t) + \boldsymbol{\Xi}\dot{\boldsymbol{q}}(t) + \boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{q}(t) + \mathcal{N}_{\boldsymbol{\psi}}\left(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t)\right) = \boldsymbol{p}(t) \tag{16}$$

式（16）保留了名义降阶系统基于物理的结构，同时融入了从数据中推断出的黑箱校正项。该校正模型（见图 1）可作为独立模拟器运行；也就是说，训练完成后， $\mathcal{N}_\psi$ 可在时间积分过程中，根据 $[\boldsymbol{q}(t)\ \ \dot{\boldsymbol{q}}(t)]$查询并提供校正后的恢复力。

给定新的激励 $\boldsymbol{f}^*(t)$，将相应的模态力 $\boldsymbol{p}^*(t) = \boldsymbol{\Phi}^\top \boldsymbol{f}^*(t)$输入式（16），然后采用数值时间推进格式（例如四阶龙格-库塔格式）向前积分。重构得到的物理位移响应为

$$\boldsymbol{u}^*(t) \approx \boldsymbol{\Phi}\, \boldsymbol{q}^*(t). \tag{17}$$

这使得能够预测未见运行条件下的结构响应，从而实现问题陈述的第二个目标。

数字孪生视角。 从数字孪生的角度来看，校正模型充当混合孪生体：骨干动力学由基于线性物理的有限元降阶控制，而差异则由数据驱动的网格不变代理模型提供。这样既确保模拟器具有一定的可解释性，又具备良好的预测能力，同时无需反复重新训练，便可在不同的离散化和激励场景下保持高保真度。

算法1 基于GPLFM的模型形式误差与状态联合估计

要求： 有限元模型矩阵（$\mathbf{M}$、$\mathbf{C}$、$\mathbf{K}$）、力历史 $\boldsymbol{f}(t)$、位移测量 $\mathcal{D} = \{(t_k,\ \boldsymbol{y}_k)\}_{k=1}^{N_t}$、采样间隔 Δt

确保： 联合估计值 $\left\{\hat{\boldsymbol{q}}_k,\ \hat{\dot{\boldsymbol{q}}}_k,\ \hat{\boldsymbol{\eta}}_k\right\}_{k=1}^{N_t}$，学习得到的核超参数 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$、网格不变代理模型 $\mathcal{N}_\psi$ 和校正后的模拟器

（A）模态降阶与名义模型（第3.2节）

求解 $\mathbf{K}\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Omega}^2$；选取 $m \ll N$ 个主导模态以构成 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^{N\times m}$ 和 $\boldsymbol{\Omega} = \mathrm{diag}\,(\omega_1, \ldots, \omega_m)$

计算降阶力 $\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{\Phi}^\top \boldsymbol{f}(t)$ 和阻尼矩阵 $\boldsymbol{\Xi} \in \mathbb{R}^{m\times m}$

获得降阶名义动力学：$\ddot{\boldsymbol{q}}(t) + \boldsymbol{\Xi}\dot{\boldsymbol{q}}(t) + \boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{p}(t)$

（B）模态空间中的高斯过程潜在力先验（第 3.3 节）

为每个模态自由度分别设置独立的高斯过程先验：$\eta_i(t) \sim \mathcal{GP}\left(0, \kappa(t-t'; \boldsymbol{\theta}^{(i)})\right),\ i = 1{:}m$

选择平稳核（例如，Matérn-$\frac{1}{2}$），并收集超参数 $\boldsymbol{\theta} = \left\{\boldsymbol{\theta}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\theta}^{(m)}\right\}$

（C）增广连续时间状态空间模型（第 3.4 节）

构造增广状态 $\boldsymbol{z} = \left[\boldsymbol{q}^\top,\ \dot{\boldsymbol{q}}^\top,\ \boldsymbol{\eta}^\top\right] \in \mathbb{R}^{3m}$

构建模块：

$$\mathbf{A}_c(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{\Omega}^2 & -\boldsymbol{\Xi} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \epsilon\mathbf{I}_{2m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathrm{diag}\left(2\alpha_1^2/\ell_1, \ldots, 2\alpha_m^2/\ell_m\right) \end{bmatrix}$$

使用零阶保持对系统进行离散化，令 Δt：$\mathbf{A} = \mathrm{expm}\,(\mathbf{A}_c\Delta t)$，$\mathbf{B} = (\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{A}_c^{-1}\mathbf{B}_c$

计算 $\mathbf{Q}_d(\boldsymbol{\theta}) = \int_0^{\Delta t} \boldsymbol{\Psi}_a(\Delta t - \tau)\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\Psi}_a^\top(\Delta t - \tau)\, d\tau$，其中 $\boldsymbol{\Psi}_a(\tau) = \mathrm{expm}\,(\mathbf{A}_c\tau)$（矩阵分式分解；参见 [32, 34]）

（D）测量模型（式（13））

根据传感器位置 $\Rightarrow$ 设置$\mathbf{H}$：$\boldsymbol{\Phi}$ 选取与测得的自由度相对应的行

设置 $\boldsymbol{y}_k = \mathbf{H}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{z}_k + \boldsymbol{v}_k$，其中 $\boldsymbol{v}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R})$

（E）超参数学习（公式（14）和 B 节）

初始化 $\boldsymbol{\theta}$和先验 $\mathcal{N}\left(\boldsymbol{z}_0;\ \tilde{\boldsymbol{z}}_0,\ \mathbf{P}_{0|0}\right)$

重复

Run Kalman filter on $\{\boldsymbol{y}_k\}_{k=1}^{N_t}$ with current $\boldsymbol{\theta}$ to obtain predictive terms

Accumulate $\log p\left(\boldsymbol{y}_{1:N_t} \mid \boldsymbol{\theta}\right) = \sum_{k=1}^{N_t} \log p\left(\boldsymbol{y}_k \mid \boldsymbol{y}_{1:k-1}, \boldsymbol{\theta}\right)$

Update $\boldsymbol{\theta} \leftarrow \boldsymbol{\theta} - \gamma\nabla_{\boldsymbol{\theta}}\left(-\log p(\boldsymbol{y}_{1:N_t} \mid \boldsymbol{\theta}) - \log p(\boldsymbol{\theta})\right)$

直到收敛至 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$

（F）状态和 MFE 推断

使用 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$，运行卡尔曼滤波器和 RTS 平滑器以获得 $\left\{\hat{\boldsymbol{z}}_{k|N_t},\ \mathbf{P}_{k|N_t}\right\}_{k=1}^{N_t}$从 $\hat{\boldsymbol{z}}_{k|N_t}$ 中提取 $\hat{\boldsymbol{q}}_k$，$\hat{\dot{\boldsymbol{q}}}_k$，$\hat{\boldsymbol{\eta}}_k$

算法 2 基于神经网络的修正

要求： 模态状态均值 $(\hat{\boldsymbol{q}}_k, \hat{\dot{\boldsymbol{q}}}_k)$ 和模型形式误差 $\hat{\boldsymbol{\eta}}_k$（通过算法1获得），有限元模型矩阵 $(\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$ ），未见过的力历史 $\boldsymbol{f}^*(t)$，采样间隔 Δt**确保：** 网格不变代理模型 $\mathcal{N}_\psi$，以及校正后的模拟器（**A**）**模态降阶与名义模型（第 3.2 节）**求解 $\mathbf{K}\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Omega}^2$；选择 $m \ll N$ 个主导模态，构成 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^{N\times m}$ 和 $\boldsymbol{\Omega} = \mathrm{diag}\,(\omega_1, \ldots, \omega_m)$ 计算阻尼矩阵 $\boldsymbol{\Xi} \in \mathbb{R}^{m\times m}$（**B**）**网格不变修正模型**使用（ 的均值构造训练样本对 $(\hat{\boldsymbol{q}}_k, \hat{\dot{\boldsymbol{q}}}_k), \hat{\boldsymbol{\eta}}_k$)训练神经网络 $\mathcal{N}_\psi : \left(\hat{\boldsymbol{q}}_k, \hat{\dot{\boldsymbol{q}}}_k\right) \mapsto \hat{\boldsymbol{\eta}}_k$ f（**C**）**校正后的仿真（第二目标）**

将代理模型嵌入降阶动力学：

$$\ddot{\boldsymbol{q}}(t) + \boldsymbol{\Xi}\dot{\boldsymbol{q}}(t) + \boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{q}(t) + \mathcal{N}_\psi(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t)) = \boldsymbol{p}^*(t)$$

对于新的载荷 $\boldsymbol{f}^*(t)$，设置 $\boldsymbol{p}^*(t) = \boldsymbol{\Phi}^\top \boldsymbol{f}^*(t)$，并模拟校正后的系统以获得预测 $\{\boldsymbol{u}^*(t_k)\}$，其中 $\boldsymbol{u}^* \approx \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{q}^*$

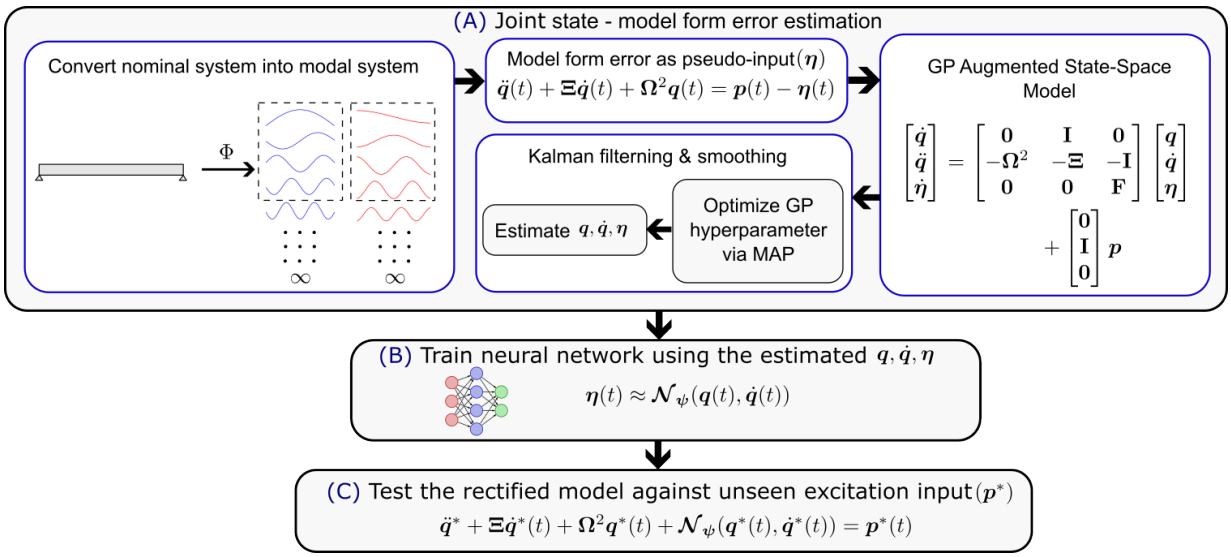


图 2：模型偏差的校正主要分为以下三个阶段：(A) 估计状态 $\boldsymbol{q}(t)$ $\dot{\boldsymbol{q}}(t)$ 和模型形式误差 $\boldsymbol{\eta}(t)$；(B) 使用估计得到的 $\boldsymbol{q}(t)$ $\dot{\boldsymbol{q}}(t)$ $\boldsymbol{\eta}(t)$ 训练神经网络；(C) 使用未见过的外部激励函数 $(\boldsymbol{p}^*(t) = \Phi^\top \boldsymbol{f}^*(t))$ 测试校正模型

4. 示例

为评估所提出的 MFE 推断与预测修正框架，本文考虑了五个数值案例研究，每个案例分别代表一种不同的建模偏差来源：(i) 梁

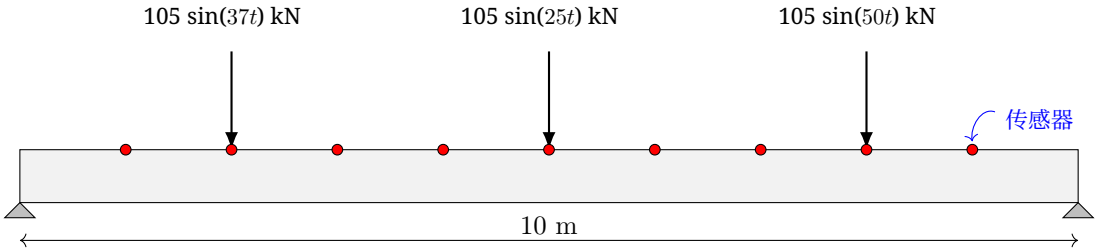
理论失配，(ii) 阻尼设定错误，(iii) 边界条件设定错误，(iv) 非线性本构定律，以及 (v) 局部结构损伤。这些案例共同展示了该框架在无噪声和含噪测量条件下估计潜在偏差、训练网格不变代理模型并提高预测准确性的能力。

4.1 数值实验设计

案例研究分为两组：前四个案例研究的是离散为 200 个自由度的等截面简支梁，第五个案例则聚焦于具有 120 个自由度的 ASCE 基准建筑模型。在所有案例中，均测试该框架在面对训练激励和未见过的测试输入时，估计差异并修正预测的能力。

梁模型（示例 *1–4*）

均质梁（见图 3）长 $L = 10$ m，横截面为矩形（$b = 0.4$ m，h =0.5 m），其线弹性材料属性为：杨氏模量 $E = 200$ GPa、泊松比 $\nu = 0.3$，质量密度为 $\rho = 7800$ kg/m^3。九个位移传感器沿跨度从 1 m 到 9 m 等间距布置。动态点载荷施加于 2 m、5 m 和 8 m 处。训练期间，载荷为正弦载荷，振幅为 105 kN，频率分别为 37、25 和 50 rad/s；测试期间，振幅降至 90 kN，频率则调整为 30、20 和 60 rad/s。在示例4（超弹性材料）中，载荷振幅提高了一个数量级（训练时为 1050 kN，测试时为 900 kN），以激发非线性响应。



$$E = 200 \times 10^9\ \text{N/m}^2,\quad \rho = 7800\ \text{kg/m}^3,\quad \nu = 0.3,\quad b = 0.4\ \text{m},\quad h = 0.5\ \text{m}, L = 10\ \text{m}$$

图 3：实验装置：简支梁，在距梁左侧 2 m、5 m 和 8 m 处施加点输入力。传感器沿梁从 1 m 到 9 m 等距布置，并以红点表示

将标称梁模型投影到前四个振动模态上，以构建降阶基。此选择基于标称线性系统响应的频率成分。图 4 展示了在传感器位置记录的位移和转角信号的平均对数幅值快速傅里叶变换。图中可见，施加载荷强烈激发了第一模态，而第二和第三模态仅受到微弱激发，但仍清晰可辨。第四模态的能量贡献很小，但其存在不可忽略。第四模态之后，没有观察到对应结构固有频率的明显峰值

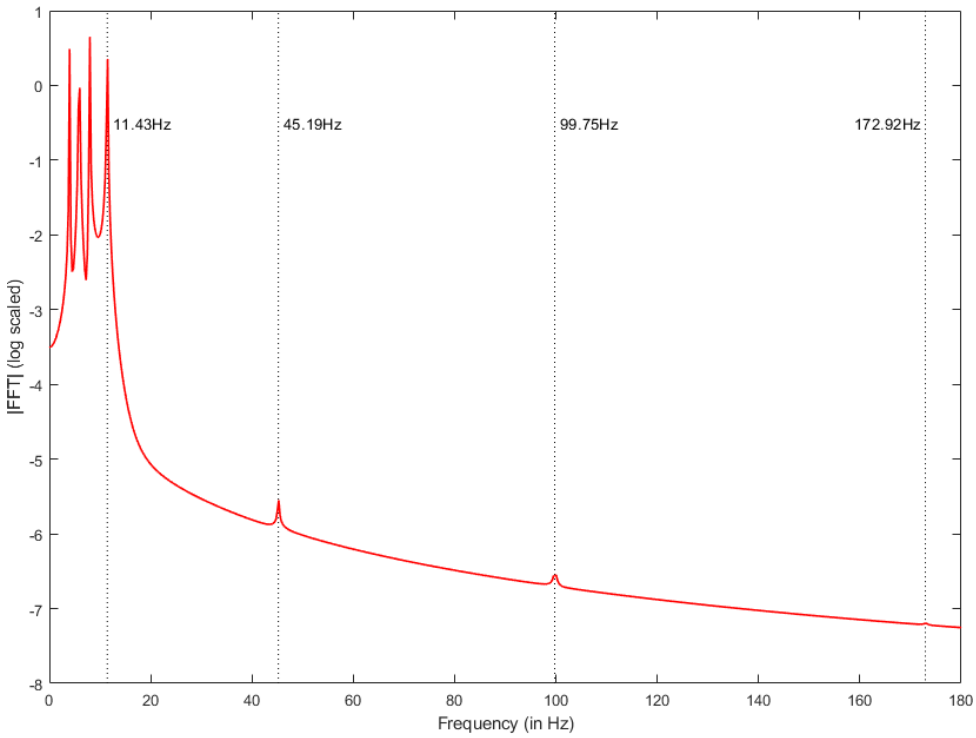


图4：名义线性梁在九个传感器位置处的位移（及转动）平均对数幅值快速傅里叶变换。前四阶结构固有频率处的峰值以竖直虚线标出；第4阶模态较弱但仍可辨认，而在第4阶模态之后未观察到明显峰值。

，这表明其动力贡献可以忽略不计。基于此，保留前四个模态足以捕捉系统的基本动力学特性，同时避免增加不必要的计算负担。

*120*自由度剪切楼模型（示例*5*）

最后一个案例采用一个受窄带高斯激励的120自由度剪切楼。训练和测试输入由窄带高斯激励的不同实现组成。与梁的情况相同，我们进行模态降阶，并保留从测量输出的平均对数幅值快速傅里叶变换中识别出的前 m 个横向模态；在我们的实现中， $m = 9$可捕捉平均响应谱中可见的峰值。此示例不再采用梁族，而是评估该框架能否推断局部刚度损失（损伤），并将网格不变校正迁移到不同激励输入下的预测模拟中。

测量类型与噪声

所有示例均使用位移测量进行推断和校正。位移具有更好的条件性，并且能够在不同示例之间对该框架进行一致比较。

通过向真实位移信号添加白高斯噪声来评估稳健性。噪声采样自

独立同分布的高斯分布 $\mathcal{N}(0,\ \sigma_n^2)$，其标准差为

$$\sigma_n = \frac{p}{100} \times \frac{1}{N_m} \sum_{i=1}^{N_m} \sqrt{\frac{1}{N_t} \sum_{k=1}^{N_t} \bar{u}_i^2(t_k)}, \tag{18}$$

其中，p为噪声百分比，N_m 为传感器数量，N_t 为时间步数。考虑了两种噪声情景：1% 和 5%。

神经网络配置

对于所有示例，均值模态状态到均值模态潜在力的映射通过具有两个隐藏层的全连接前馈神经网络实现（见图 1）。隐藏层中的神经元数量通过交叉验证进行选择，以最小化验证均方误差，通常在 20 至 100 个神经元之间。

验证策略

通过使用真实响应驱动名义模型并将其投影到模态子空间中，计算真实差异，即名义模型的残差：

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{\Phi}^\top \left[\boldsymbol{f}(t) - \mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{u}}(t) - \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{u}}(t) - \mathbf{K}\bar{\boldsymbol{u}}(t) \right] \tag{19}$$

这确保了在降阶模态域中，对估计的潜在力与真实差异进行一致的比较。

从三个方面验证所提出方法的性能：(i) 所有物理自由度上位移和转角的状态估计准确性；(ii) 模态空间中差异恢复的保真度；以及 (iii) 校正模型在未见激励下的预测准确性。定量评估采用归一化均方误差（NMSE），以百分比表示：

$$e\left(\boldsymbol{p}, \hat{\boldsymbol{p}}\right) = \left[\frac{1}{n} \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{{\sigma_{p_i}}^2} \sum_{k=1}^{N_t} \left(p_i(t_k) - \hat{p}_i(t_k)\right)^2 \right] \times 100\% \tag{20}$$

在上述定义中，n表示向量 $\boldsymbol{p}$（t）的维数，N_t 表示信号样本总数，p_i（t_k）和 $\hat{}p_i$（t_k）分别对应真实向量信号和估计向量信号的第 i个分量。此外，$\sigma_{p_i}^2$ 表示分量信号 p_i（t）的方差。

4.2. 示例*1*：梁理论失配

第一个示例研究了使用低阶梁理论替代高保真描述时产生的模型形式误差。真实的 结构响应由考虑剪切变形和转动惯量效应的铁木辛柯梁理论控制，而名义 模型采用欧拉–伯努利（E-B）梁理论。

*T*真实模型。 具有黏性阻尼的线弹性铁木辛柯梁由下式描述：

$$\rho A\ddot{\bar{w}}(x,t) + c_w\dot{\bar{w}}(x,t) - kGA\left(\frac{\partial \bar{w}(x,t)}{\partial x} - \beta(x,t)\right) = p(x,t), \quad 0 \le x \le L,\ 0 \le t \le T, \tag{21a}$$

$$\rho I\ddot{\beta}(x,t) + c_\beta\dot{\beta}(x,t) - EI\frac{\partial^2 \beta(x,t)}{\partial x^2} - kGA\left(\frac{\partial \bar{w}(x,t)}{\partial x} - \beta(x,t)\right) = 0, \quad 0 \le x \le L,\ 0 \le t \le T \tag{21b}$$

其中， $\bar{w}(x,\ t)$为横向位移， $\beta(x,\ t)$为截面转角， $G = {}_2{}^{E}{}_{(1+\nu)}$ 为剪切模量， A 为截面积， I 为截面二次矩， k 为剪切修正系数， c_w 和c_β 为单位长度的黏性阻尼系数。系统采用零初始条件（ICs）和简支边界条件（BCs）：

$$\begin{aligned} \bar{w}(x,0) = 0, \quad \dot{\bar{w}}(x,0) = 0, \\ \bar{w}(0,t) = 0,\ \bar{w}(L,t) = 0, \quad \tfrac{\partial \beta}{\partial x}(0,t) = 0,\ \tfrac{\partial \beta}{\partial x}(L,t) = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

*N*名义模型。 E-B梁模型仅保留横向位移 $\tilde{w}(x,\ t)$：

$$\rho A\ddot{\tilde{w}}(x,t) + c_w\dot{\tilde{w}}(x,t) + EI\tfrac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^4} = p(x,t), \quad 0 \le x \le L,\ 0 \le t \le T, \tag{23}$$

采用初始条件（ICs）和边界条件（BCs）

$$\begin{aligned} \tilde{w}(x,0) = 0, \quad \dot{\tilde{w}}(x,0) = 0, \\ \tilde{w}(0,t) = 0,\ \tilde{w}(L,t) = 0, \quad \tfrac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2}(0,t) = 0,\ \tfrac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2}(L,t) = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

通过忽略剪切变形和转动惯量，名义模型假定截面始终与中性轴正交。这一简化降低了计算成本，但只要剪切效应不可忽略，就会在位移和转动中引入系统性偏差。

差异建模。 在所提出的GPLFM框架中，被省略的剪切贡献被表示为降阶模态域中的潜在力（四个模态；参见第4.1节）。这使名义E-B梁动力学在训练过程中能够与铁木辛柯梁响应相协调，并提升系统对未见测试激励的预测能力。

结果。 图 5（第一行）比较了在一个具有代表性的时间窗口（3.5–3.6 s）内，铁木辛柯真实模型响应、标称 E-B模型预测以及噪声水平为 0% 和 5% 时 GP增强名义模型估计得到的梁跨范围时空位移场。无噪声情况下，增广模型几乎完全重现了真实时空位移场；噪声水平为 5% 时虽出现轻微波动，但仍能很好地捕捉主要位移模式。

位移和转动推断的定量误差见表1（第一行）。在所有噪声水平下，与标称E-B基线相比，GP增强名义模型使估计的归一化均方误差降低了 99% 以上。

图7至图9对比了推断的模态潜在力与真实剪切诱导偏差（蓝色 = 真实值，红色虚线 = 推断值）。在噪声为0%时，四个模态均得到忠实重构。随着噪声增加，高阶模态偏差（尤其是模态2、3和4）相对于噪声底逐渐减弱，而占主导地位的第一模态偏差仍能被稳健地捕捉。

图6（第一行）展示了在未见测试载荷下的预测（具体说明见第4.1节）。校正模型的表现始终优于标称E-B模型。随着测量噪声增加，准确性会下降——这是预期之中的，因为潜在力推断变得不那么精确；尽管如此，表1显示，相较于标称模型的归一化均方误差，归一化均方误差仍大幅降低。

表1：示例 1–4 中推断（估计）和校正预测的归一化均方误差（NMSE，%）。第 2 列和第 6 列显示基线名义 NMSE。括号中的数值表示相对于基线的百分比降幅。

Ex	$e(\bar{\boldsymbol{u}},\ \tilde{\boldsymbol{u}})$	推断归一化均方误差 $e(\bar{\boldsymbol{u}},\ \boldsymbol{u})$			$e(\bar{\boldsymbol{u}}^*,\ \tilde{\boldsymbol{u}}^*)$	校正预测 $e(\bar{\boldsymbol{u}}^*,\ \boldsymbol{u}^*)$		
		无噪声	1%	5%		无噪声	1%	5%
1	9.6	0.0034 (100.0)	0.0067 (99.9)	0.021 (99.8)	10	0.16 (98.4)	0.32 (97.0)	0.98 (90.7)
2	6.6	0 (100.0)	0.0031 (99.9)	0.02 (99.7)	83	0.13 (99.8)	0.23 (99.7)	0.31 (99.6)
3	140	0.063 (99.9)	0.071 (99.9)	0.33 (99.8)	240	6.6 (97.3)	11 (95.4)	24 (90.2)
4	99	3.9 (96.1)	3.8 (96.1)	3.8 (96.1)	100	4.4 (95.7)	9.4 (90.9)	61（41.3）

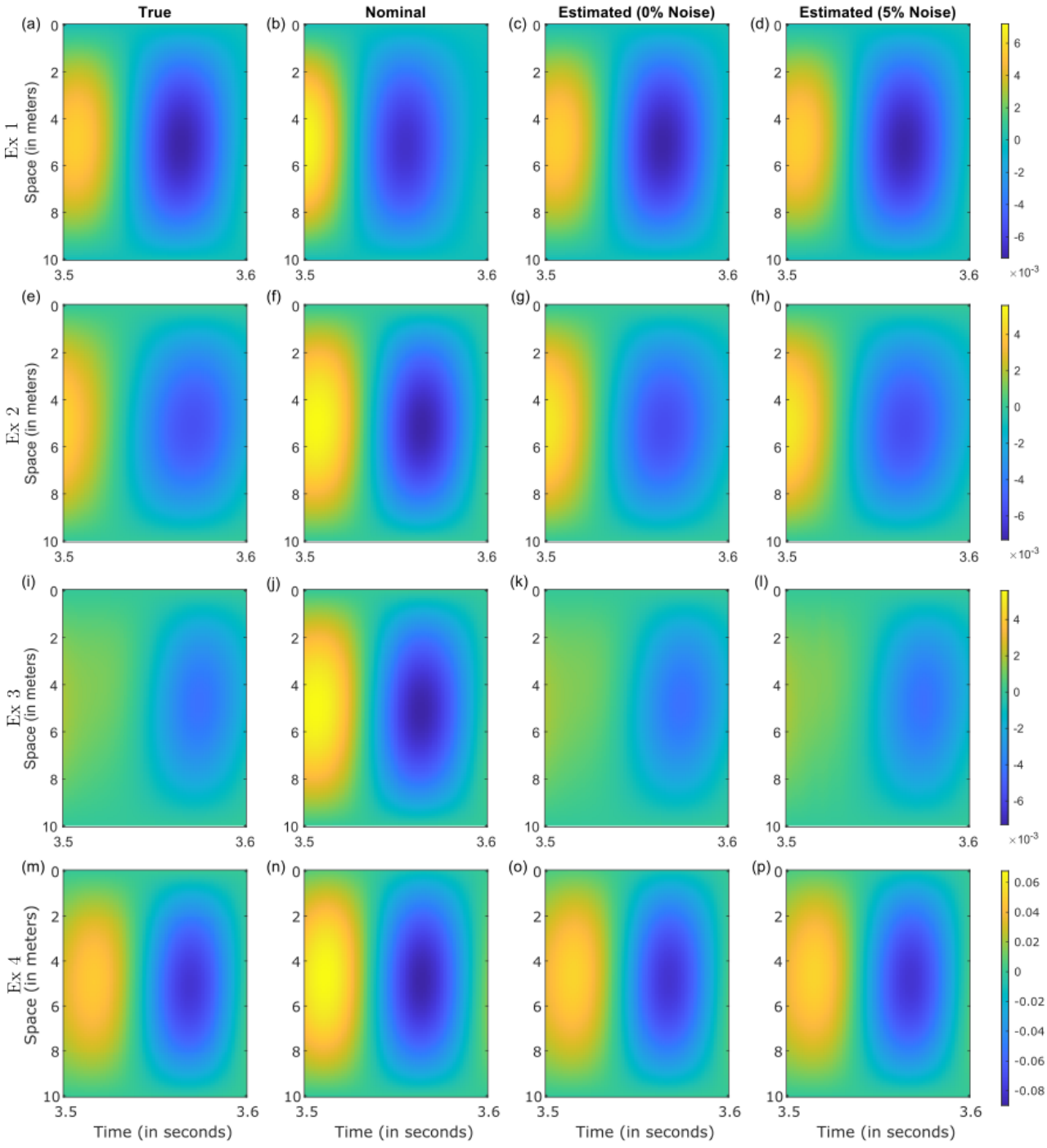


图 5：代表性时间窗口（3.5–3.6 s）内整根梁的时空位移估计。面板网格：各列依次显示 (i) 真实位移（铁木辛柯），(ii) 名义位移（模型按各示例中的设定），(iii) GPLFM 估计（0% 噪声），(iv) GPLFM 估计（5% 噪声）。各行对应示例 1–4：(1) 梁理论失配，(2) 阻尼设定错误，(3) 边界条件设定错误，(4) 非线性本构定律。各行使用一致的颜色标度。

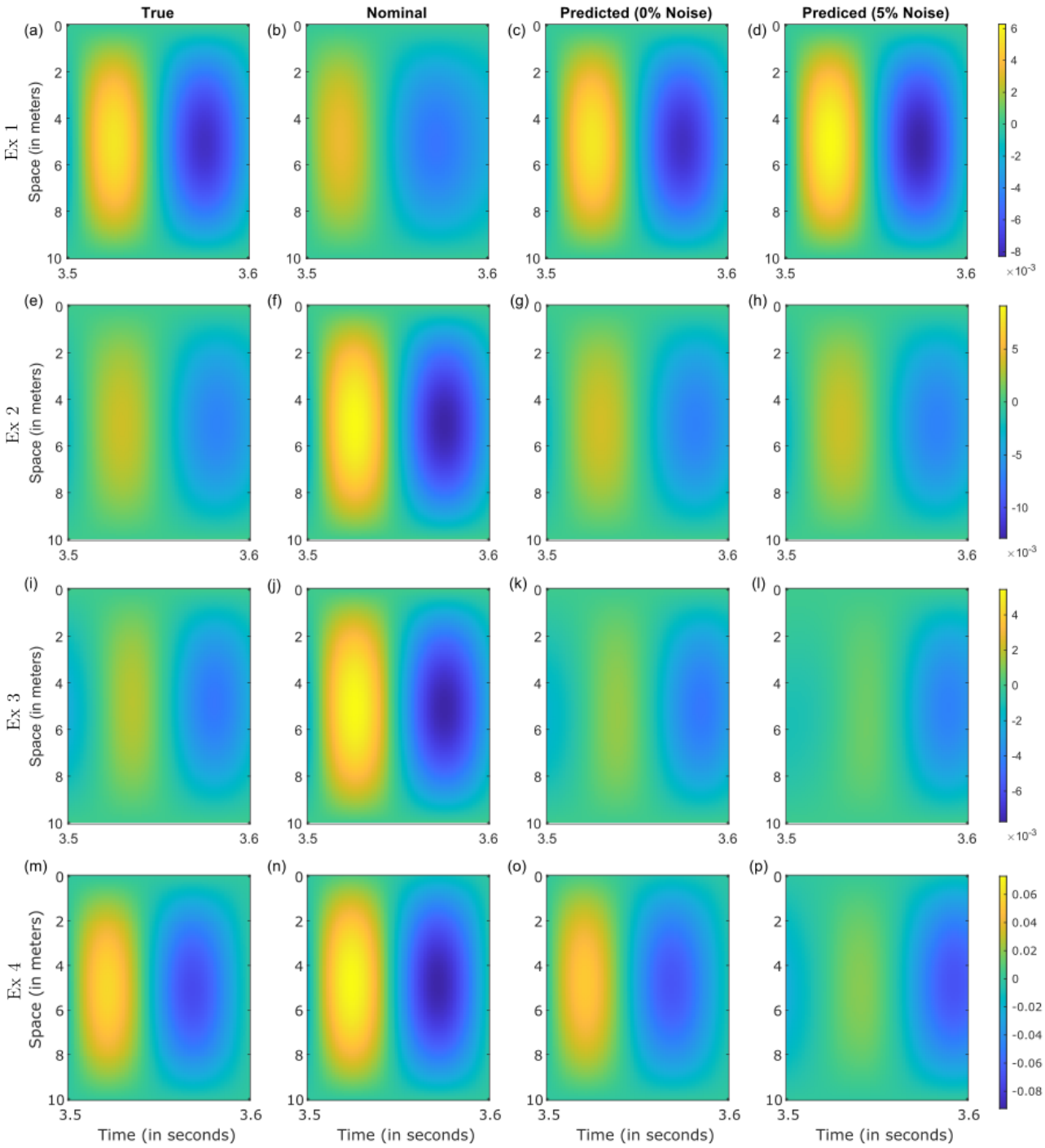


图 6：未见过的正弦输入下的时空位移预测 。各列依次表示 (i) 真实位移、(ii) 名义位移、(iii) 经 0% 噪声训练校正的预测，以及 (iv) 经 5% 噪声训练校正的预测。各行对应于图 5 中的示例 1–4。

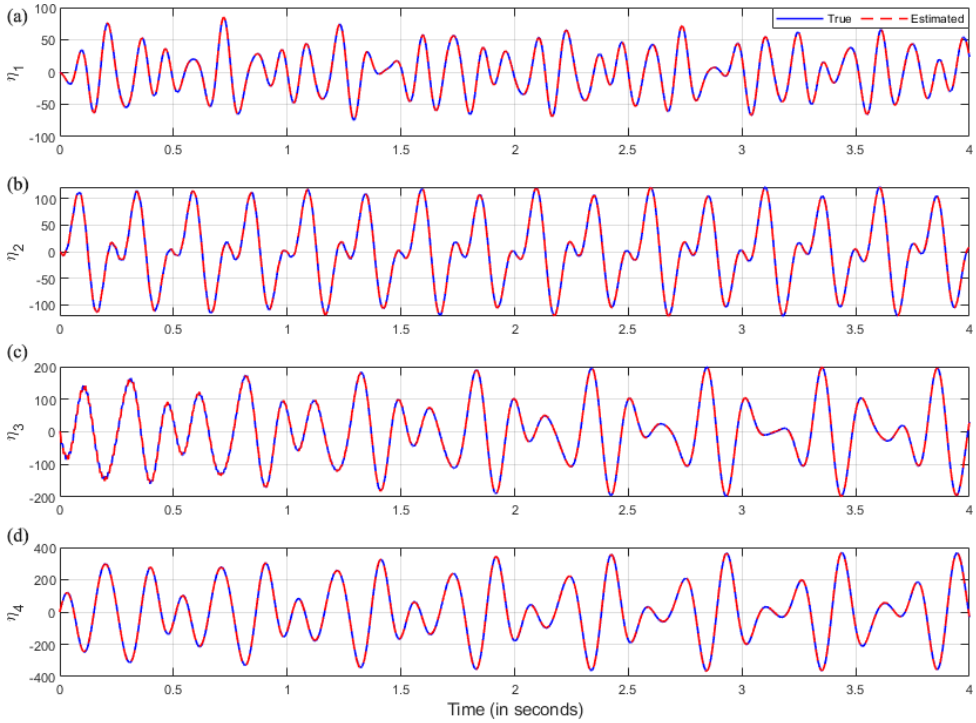


图7：示例1（梁理论失配）：在噪声为0%的情况下，比较四个保留模态的推断模态潜在力（红色虚线）与真实模态偏差（蓝色实线）。GPLFM准确恢复了与未建模剪切变形效应相对应的潜在力，使名义Euler–Bernoulli模型与真实的铁木辛柯梁响应相一致。

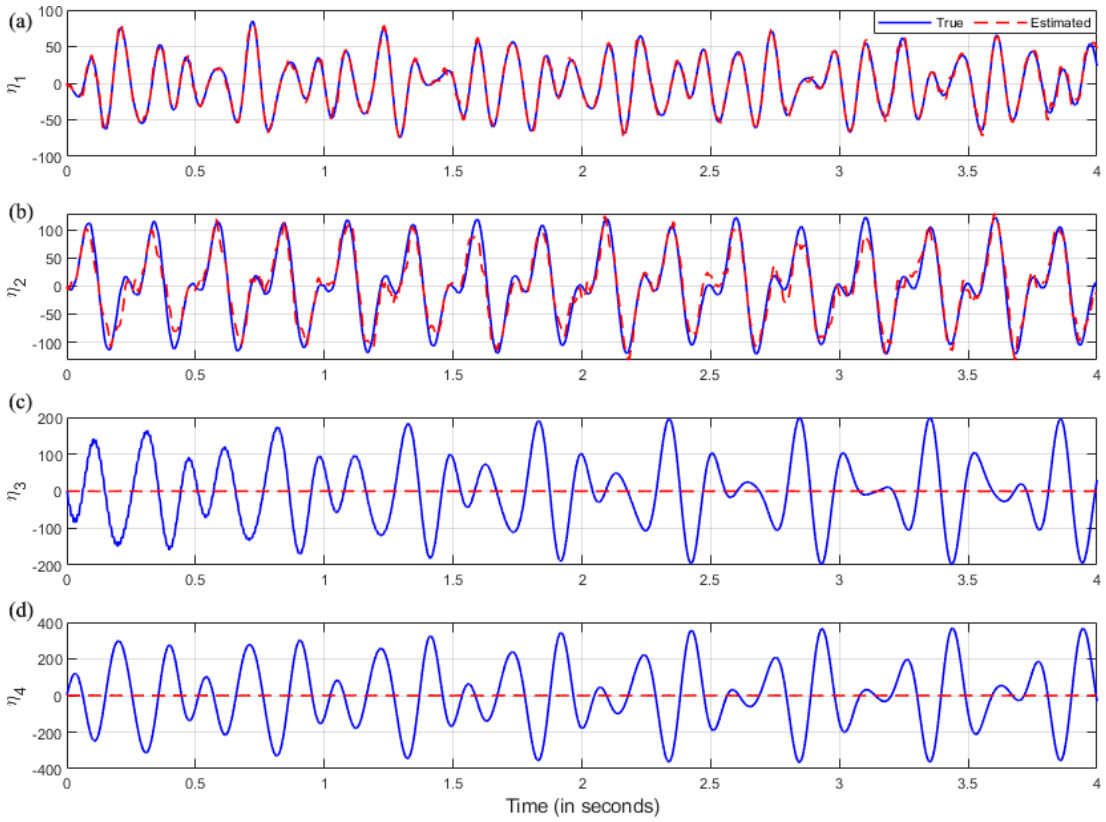


图8：示例1（梁理论失配）：1% 测量噪声下，推断的模态潜在力（红色虚线）与真实差异（蓝色实线）的对比。占主导地位的第一模态潜在力仍能准确重建，第二模态潜在力存在轻微偏差，而高阶模态（3 和 4）的潜在力则接近于零，因为它们对响应的贡献低于噪声底。

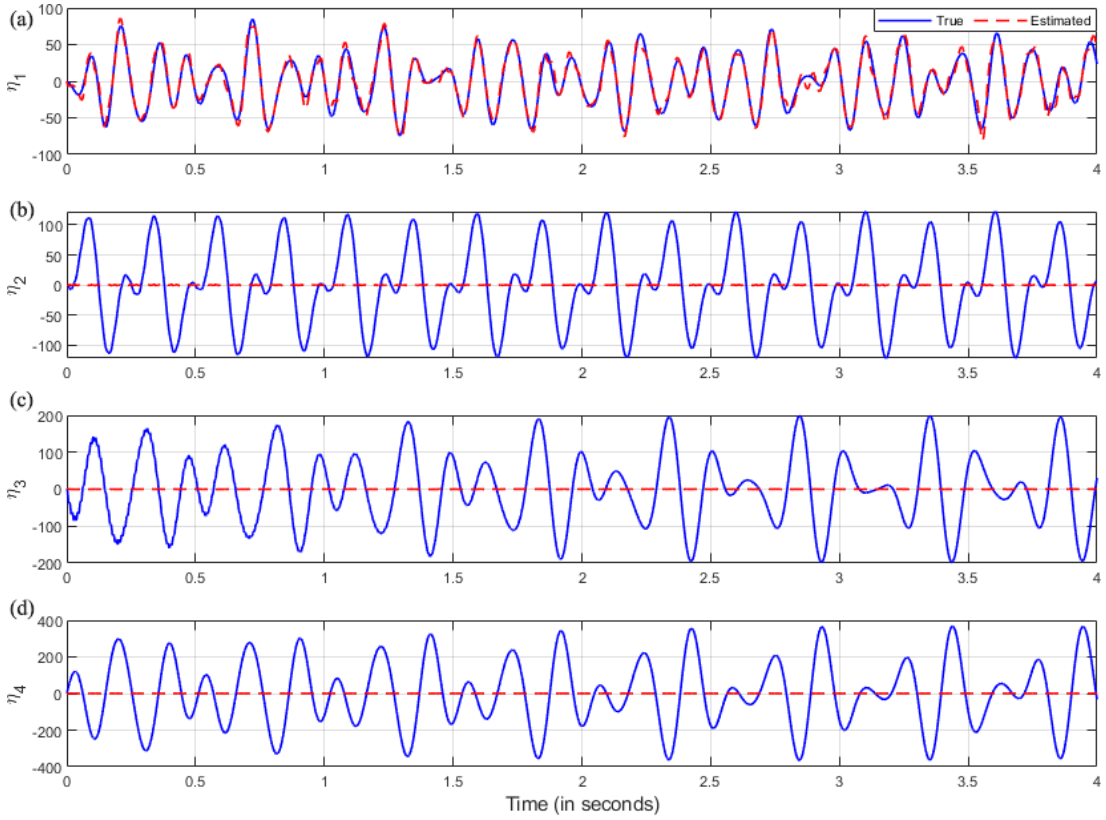


图 9：示例1（梁理论失配）：测量噪声为 5% 时，推断的模态潜在力（红色虚线）与真实差异（蓝色实线）的对比。GPLFM 仍能捕捉与剪切变形相关的第一模态潜在力，而高阶模态（2–4）由于能量含量较低，且在含噪测量下不可辨识，其结果衰减至零。

4.3. 示例 *2*：阻尼设定错误

本示例研究由阻尼表示错误引起的模型形式误差。真实结构动力学由采用 Rayleigh 阻尼的铁木辛柯梁理论描述，而名义模型假定采用相同的结构形式，但使用模态阻尼。Rayleigh 阻尼形式与模态阻尼形式之间的不匹配会引入系统性的相位和振幅误差，所提出的 GPLFM 旨在通过潜在力捕捉这些误差。

真实模型。Rayleigh 阻尼模型将黏性阻尼矩阵表示为质量矩阵和刚度矩阵的线性组合：

$$\bar{\mathbf{C}} = \alpha\bar{\mathbf{M}} + \beta\bar{\mathbf{K}} \tag{25}$$

其中，α 和 β 分别为质量比例阻尼系数和刚度比例阻尼系数。这些系数通过匹配两个选定模态（通常为第一模态和第二模态）的目标阻尼比 ζ_i 和 ζ_j 来确定

使用以下关系式:

$$\begin{aligned}\zeta_i &= \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\omega_i} + \beta\omega_i\right)\\ \zeta_j &= \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\omega_j} + \beta\omega_j\right)\end{aligned} \tag{26}$$

其中， ω_i 表示第 i^{th} 模态的固有频率（rad/s）。按照构造，瑞利模型能够精确再现这两个模态的目标阻尼比，但其余模态的阻尼比仅为近似值，且随频率变化。

名义模型。 名义系统采用模态阻尼表示，为每个保留的振动˜模态分别指定一个独立的阻尼比 ζ_i。因此，模态坐标下的阻尼矩阵为对角矩阵:

$$\tilde{\boldsymbol{\Xi}} = \operatorname{diag}\left\{2\tilde{\zeta}_1\omega_1,\ 2\tilde{\zeta}_2\omega_2, \ldots,\ 2\tilde{\zeta}_m\omega_m\right\}, \tag{27}$$

其中， $m = 4$ 对应于保留振动模态的数量。尽管这种方法简化了系统表示，但无法捕捉瑞利公式中隐含的频率耦合阻尼效应，因此在瞬态响应和稳态响应中都会产生模型形式误差。

差异建模。 在所提出的GPLFM框架中，将阻尼设定错误所导致的模型形式误差视为作用于降阶模态域中的潜在力。每个潜在力 η_i（t）用于补偿第 i^{th} 模态下瑞利阻尼与模态阻尼之间的不匹配。这种灵活的表示方式在训练期间使名义模态动力学与真实的瑞利阻尼系统相匹配，并提升了系统在未见激励下的预测性能。

结果。 图 5（第二行）比较了代表性时间窗口（3.5–3.6 s）内真实瑞利阻尼系统、名义模态阻尼模型和高斯过程增强的名义估计所对应的时空位移场。在无噪声条件下，增广模型几乎完美地重现了真实位移场。即使测量噪声达到 5%，主要的空间和时间模式仍得到了良好保留。

定量性能指标汇总于表1（第二行）。在所有噪声水平下，与名义基线相比，GP增强名义模型使位移和转动的归一化均方误差降低了 99% 以上，展现出稳健的状态推断能力。

图10至图12比较了推断的模态潜在力与真实阻尼差异。在0%噪声下，四个模态潜在力均与真实差异高度一致。然而，随着测量噪声增加，与高阶模态（模态3和4）对应的估计潜在力逐渐恶化，并且常常趋近于零。这是因为高阶模态响应对整体结构动力学的贡献仅为边际贡献，其在输出快速傅里叶变换中的振幅较弱便证明了这一点（图4）。随着噪声增加，这些小振幅模态响应会低于噪声底，导致其信噪比急剧下降。因此，GPLFM无法为这些模态恢复有意义的潜在力，从而导致高阶潜在分量的估计较差或为零。

最后，图6（第二行）展示了在未见过的正弦激励下的校正预测。尽管由于潜在力推断性能下降，预测精度会随着噪声增大而略有降低，但增广模型仍以较大幅度优于名义模型，表1中的NMSE降幅也证实了这一点。

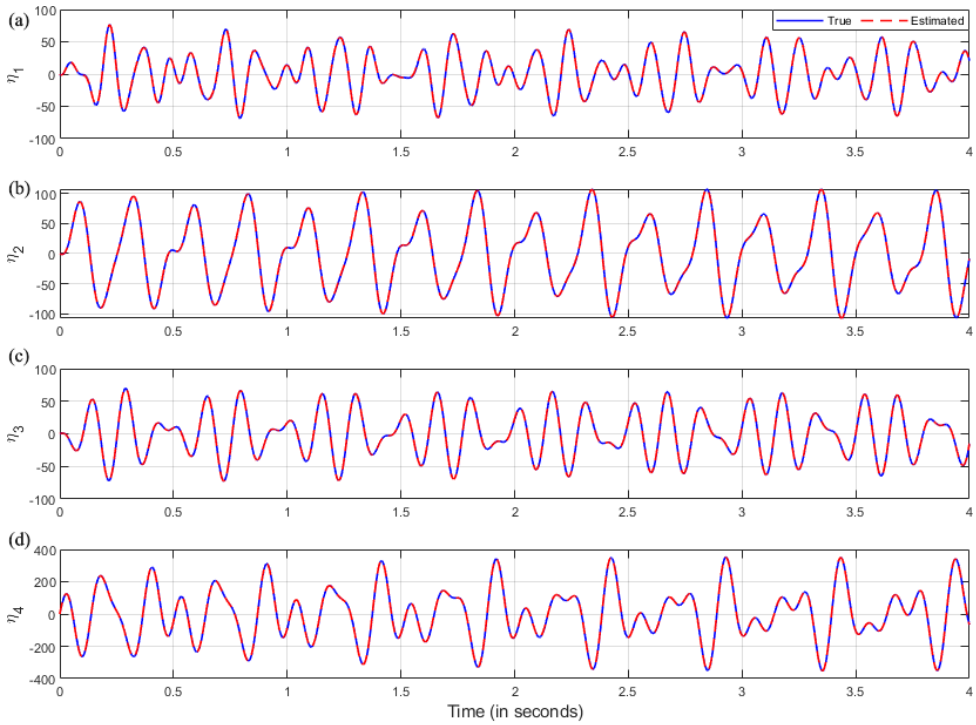


图 10：示例 2（阻尼设定错误）：在 0% 噪声下，比较四个保留模态的推断模态潜在力（红色虚线）与真实阻尼差异（蓝色实线）。GPLFM 成功再现了所有模态潜在力，有效补偿了瑞利阻尼与模态阻尼不匹配所引入的相位和振幅误差。

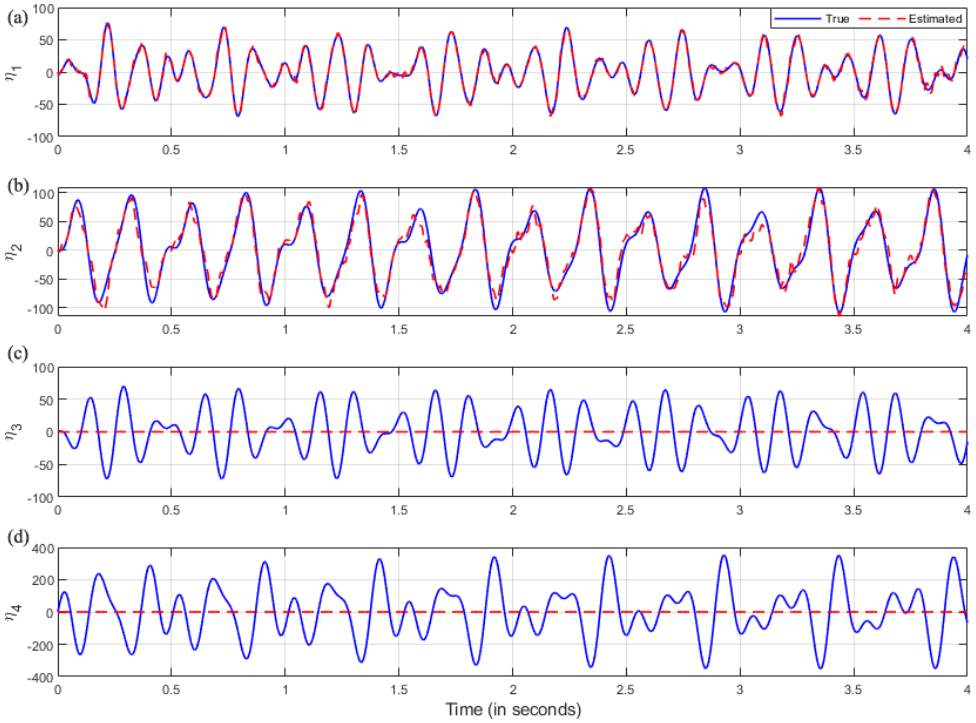


图11：示例 2（阻尼设定错误）：测量噪声为 1% 时，推断的模态潜在力（红色虚线）与真实阻尼差异（蓝色实线）的对比。占主导地位的第一模态潜在力仍能被准确重构，而第二模态存在轻微差异；高阶模态（3 和 4）则因低于噪声底而无法观测。

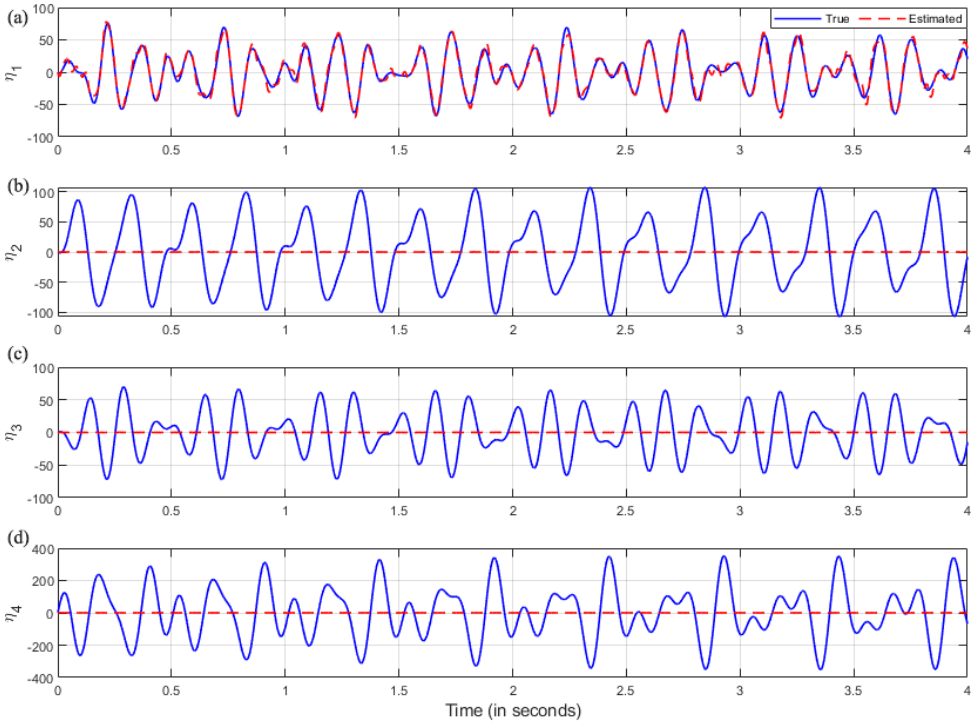


图12：示例 2（阻尼设定错误）：测量噪声为 5% 时，推断的模态潜在力（红色虚线）与真实阻尼差异（蓝色实线）的对比。第一模态潜在力仍能捕捉阻尼失配的主要特征，而高阶模态（2、3 和 4）则因低于噪声阈值而失去可辨识性，逐渐衰减至零。

4.4. 示例*3*：边界条件设定错误

本示例考察由边界条件设定不正确引起的模型形式误差，这是结构动力学中模型偏差的常见来源。真实系统对应于一根简支梁，其右端受到有限的转动约束；而名义系统则假设为理想简支梁，两端均可自由转动。在实际情形中，这类差异十分常见，因为物理支座往往无法做到完全没有转动刚度。由此产生的模型形式误差在空间上局部集中于边界附近；然而，如下文所示，即使使用基于名义系统构建、无法显式捕捉这种局部刚度的全局模态基，所提出的 GPLFM 仍能准确推断其影响。

真实模型。真实梁采用铁木辛柯梁理论建模，并在右端连接一个刚度为 $k_\theta = 2 \times 10^8$N m/rad 的线性旋转弹簧。控制边界条件（BC）为

$$\bar{w}(0,t) = 0, \quad \bar{w}(L,t) = 0, \qquad \frac{\partial \beta}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial \beta}{\partial x}(L,t) = \frac{-k_\theta \beta}{EI} \tag{28}$$

其中，$\bar{w}(x,\ t)$ 和 $\beta(x,\ t)$ 分别表示横向位移场和转动场。该配置在 $x = L$ 处引入了额外的转动刚度，因此相对于名义简支情形，振型和固有频率都会发生偏移。

名义模型。 名义梁同样采用铁木辛柯梁理论进行建模，忽略局部旋转刚度，并假设经典简支条件：

$$\bar{w}(0,t) = 0, \quad \bar{w}(L,t) = 0, \qquad \frac{\partial \beta}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial \beta}{\partial x}(L,t) = 0 \tag{29}$$

因此，与真实响应相比，名义模型在边界附近表现出较低的弯曲刚度，从而导致振型、共振频率和相位关系出现虽小但具有系统性的偏差。

差异建模。 在所提出的GPLFM框架中，被忽略的旋转弹簧的影响被视为一种局部模型形式误差（MFE），并由降阶模态域中的潜在力表示（四个模态；参见第4.1节）。尽管这种差异在物理域中具有局部性，但采用全局名义振型进行投影，仍可使基于GP的潜在力模型在推断过程中有效协调这种不匹配，从而提供准确的位移估计和合理的预测校正。

结果。 图 5（第三行）比较了代表性时间窗口3.5–3.6 s内真实系统、名义系统与GPLFM估计场的时空位移场。在无噪声数据下，GP增强名义模型几乎完全恢复了真实位移场；即使在5%的测量噪声下，也保留了主要的变形模式。表1（第三行）所报告的定量误差表明，在估计阶段，相对于名义基线，归一化均方误差（NMSE）降低了超过99%。

图 13 至图 15 分别展示了在 0%、1% 和 5% 噪声下推断的模态潜在力与真实差异的对比。在无噪声条件下，潜在力推断准确捕捉到了全部四个

模态潜在力，从而解决了旋转刚度引入的局部边界效应。随着噪声增加，推断的高阶模态偏差（尤其是模态 3 和 4）逐渐衰减至零，因为它们的模态响应对整体变形的贡献可以忽略不计，并且低于噪声底。尽管如此，占主导地位的低阶模态——尤其是前两个模态——仍能得到稳健重构，从而可靠地恢复整体动力学。

图6（第三行）展示了在未见过的测试激励下的校正模型预测（见第4.1节）。校正模型始终优于名义基线，能够校正由边界转动刚度遗漏造成的相位和幅值失真。随着噪声水平增大，潜在力估计和神经网络拟合的效果下降，准确率自然也会降低；但表1证实，即使噪声水平达到5%，归一化均方误差仍显著降低，表明该框架能够稳健地处理空间局部化模型形式误差。

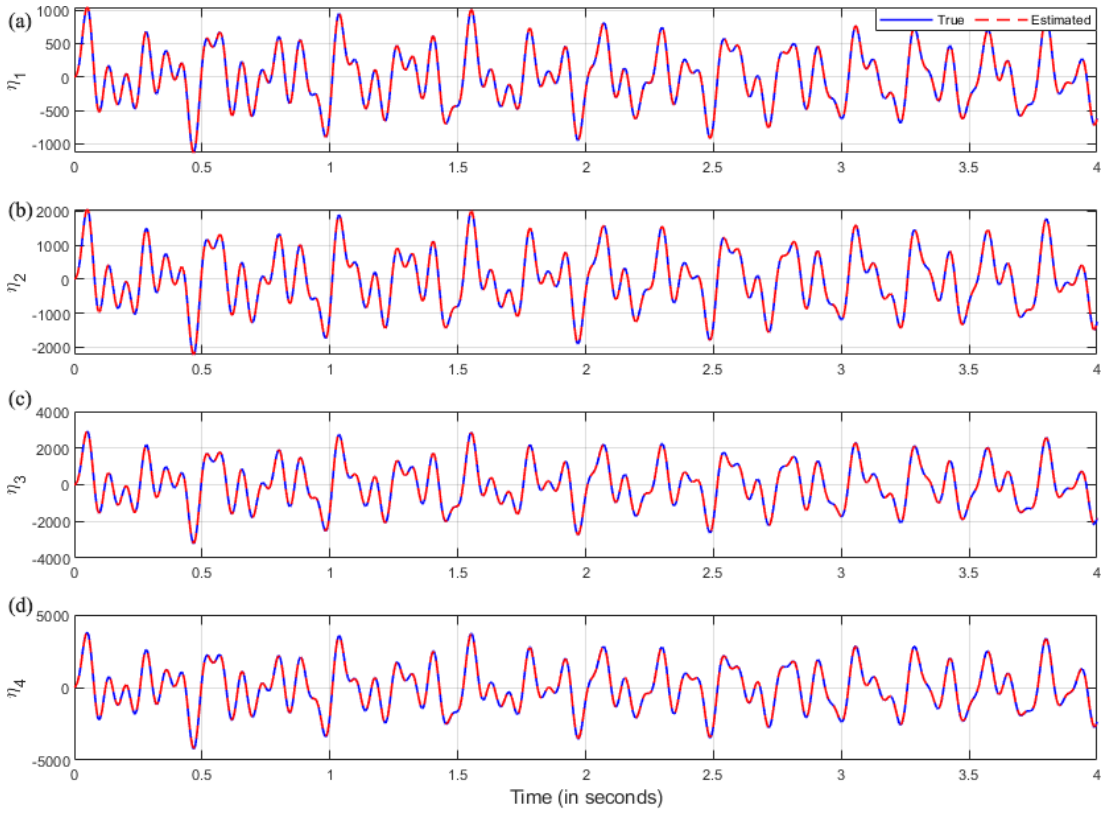


图13：示例3（边界条件设定错误）：噪声水平为0%时，四个保留模态的推断模态潜在力（红色虚线）与真实模态偏差（蓝色实线）的比较。尽管使用全局名义模态进行投影，GPLFM仍能准确恢复所有模态潜在力，有效捕捉梁端转动刚度引入的局部边界效应。

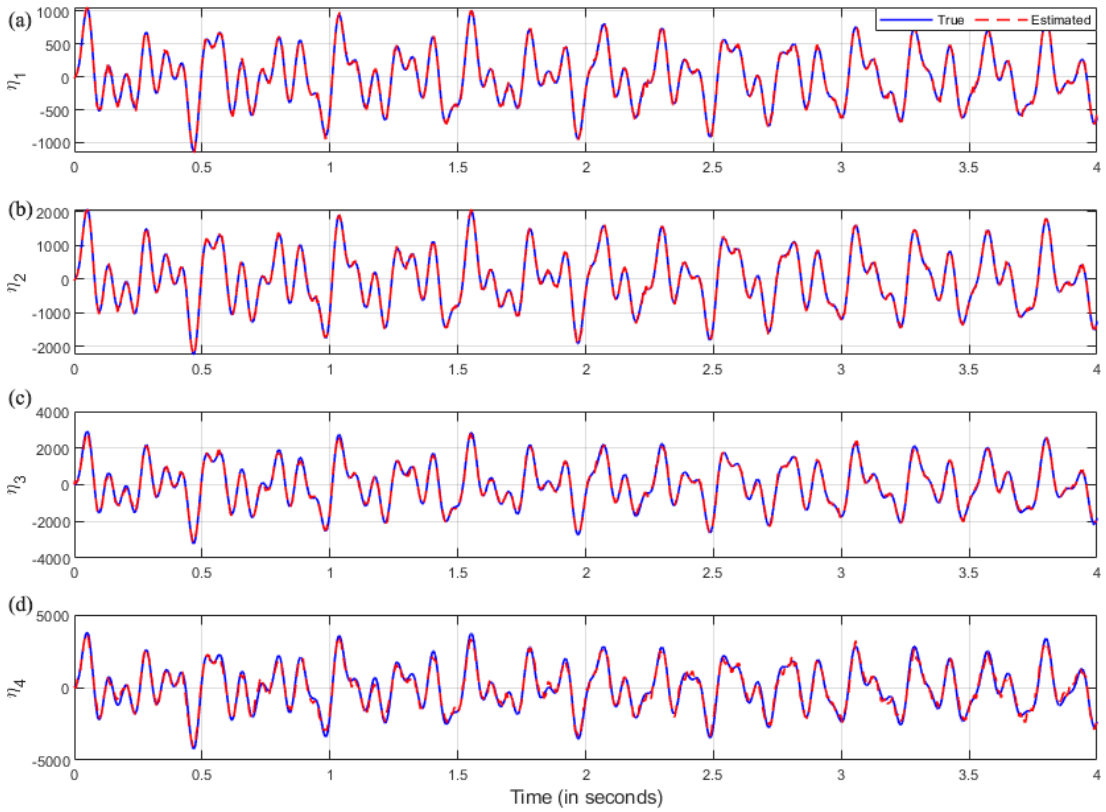


图14：示例3（边界条件设定错误）：在1%的测量噪声下，推断的模态潜在力（红色虚线）与真实模态偏差（蓝色实线）的对比。占主导地位的低阶模态（1和2）仍能得到良好捕捉，而高阶模态（3和4）的估计值接近于零，因为其较小的响应贡献低于噪声底。

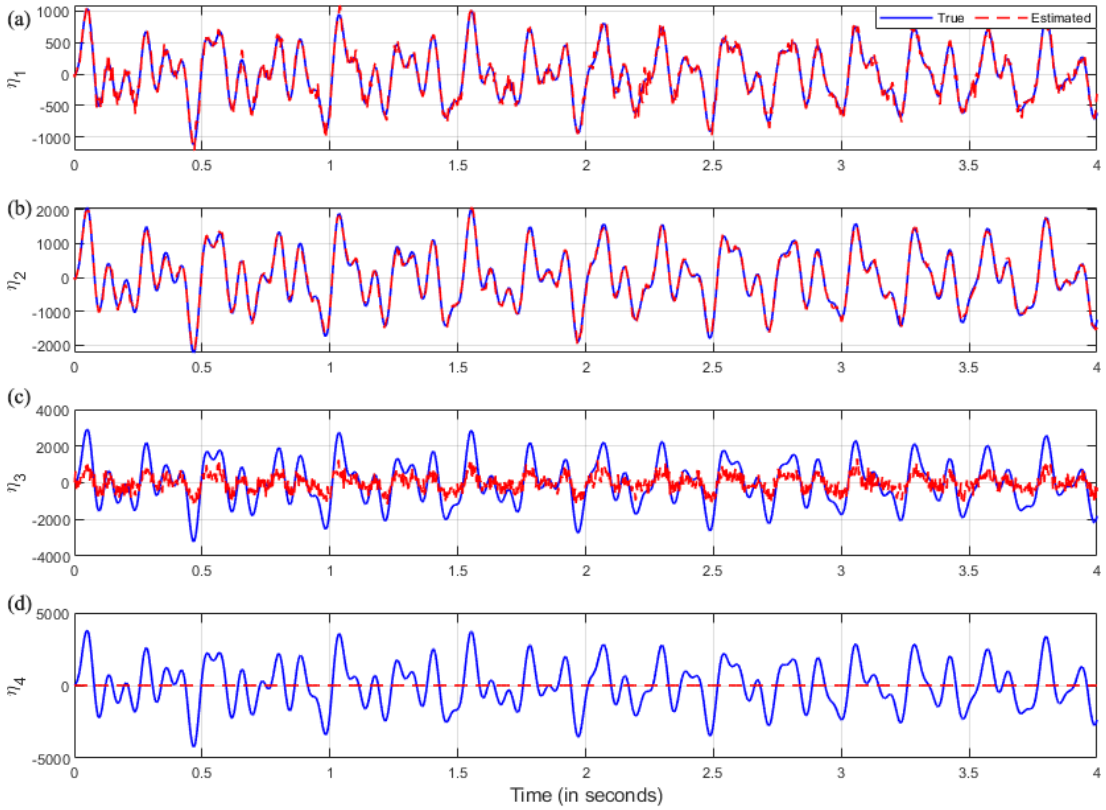


图15：示例3（边界条件设定错误）：测量噪声为5%时，推断的模态潜在力（红色虚线）与真实模态偏差（蓝色实线）的对比。GPLFM仍能捕捉到编码边界诱导刚度效应的第一阶模态潜在力，而由于高阶模态（模态2–4）的动力能量可忽略，且在噪声阈值以下不可辨识，其偏差会减小至接近零。

4.5. 示例*4*：错误设定的本构关系

本示例研究由假定的材料本构行为存在偏差而引起的模型形式误差。前述案例聚焦于运动学失配和边界条件失配，而本案例则考察所提出的 GPLFM 框架能否解决源于材料建模错误的问题——这是非线性结构数字孪生校准和降阶建模中的一项关键挑战。真实的梁遵循铁木辛柯动力学，并采用新胡克超弹性本构关系；而标称的梁则假设为线弹性。为激发材料非线性，激励幅值相较前述示例提高了一个数量级（见第4.1节），从而使真实梁进入非线性变形状态，并偏离标称线性模型。

真实模型。可压缩新胡克应变能函数描述了真实铁木辛柯梁的超弹性行为，

$$W(I_1, J) = \frac{E}{4(1+\nu)}(J^{-2/3}I_1 - 3) + \frac{E}{6(1-2\nu)}(J-1)^2, \tag{30}$$

其中， E 为杨氏模量， ν 为泊松比， I_1 =tr(**C**) 是右柯西-格林变形张量 $\mathbf{C} = \mathbf{F}^\top\mathbf{F}$的第一不变量， $J =$ det(**F**) 是变形雅可比。第一类皮奥拉-基尔霍夫应力

由.....获得

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}, \tag{31}$$

其中 $\mathbf{F}$ 表示变形梯度。真实动态响应通过 Abaqus 中的有限元模拟计算 2018 [35], , 从而确保纳入几何非线性和材料非线性。

名义模型。 名义梁采用线弹性各向同性本构定律，该定律在小应变条件下有效，其应变能密度为

$$W = \frac{1}{2}\lambda(\operatorname{tr}\boldsymbol{\epsilon})^2 + \mu\,\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\epsilon}, \tag{32}$$

其中， $\boldsymbol{\epsilon}$ 为无穷小应变张量， λ 和 μ 为拉梅参数，通过标准各向同性关系与（E， ν）相关。柯西应力满足 $\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}$ 。这种线性近似在计算上高效，但无法捕捉真实超弹性系统中存在的非线性应力–应变耦合。

差异建模。 在GPLFM框架内，错误设定的本构关系所产生的模型形式误差被建模为降阶模态域中的潜在力（四个模态；见第4.1节）。这些潜在力编码了超弹性本构行为所产生的未建模非线性应力贡献，使名义线性模型能够在训练期间与真实非线性响应相协调，并推广至未见激励。

结果。 图 5（第四行）比较了代表性时间窗口3.5–3.6 s内真实（超弹性）梁、名义线性模型以及高斯过程增强的名义估计的时空位移场。GPLFM校正模型在无噪声数据下几乎完全复现了非线性位移场，即使在含5%噪声的情况下，也能捕捉主要响应特征。表1（第四行）汇总的定量结果表明，尽管存在显著的材料非线性，增广模型相对于名义基线仍实现了超过96%的归一化均方误差降低。

图16至图18分别展示了在0%、1%和5%测量噪声下，推断的模态潜在力与真实模态差异的对比。在无噪声条件下，潜在力推断捕捉到了全部四个模态差异，有效表征了缺失的非线性材料响应。随着噪声增大，高阶模态（尤其是模态3和模态4）的贡献降至噪声底以下，导致其推断潜在力的振幅减小，而占主导地位的低阶模态仍能得到较为合理的重构。

图6（第四行）展示了模型在未见过的测试激励下的预测性能。即使名义公式完全未包含非线性材料行为，经推断的潜在力增强后的校正模型在0%噪声下，其振幅和相位预测均优于标称线性模型。对于5%噪声的情况，在3.5–3.6 s这一特定的短时间窗口内，预测性能较差；但在0–4 s的整个时间段内，表1证实GPLFM仍能实现相当可观的归一化均方误差降幅，表明其有助于补偿复杂的本构失配。

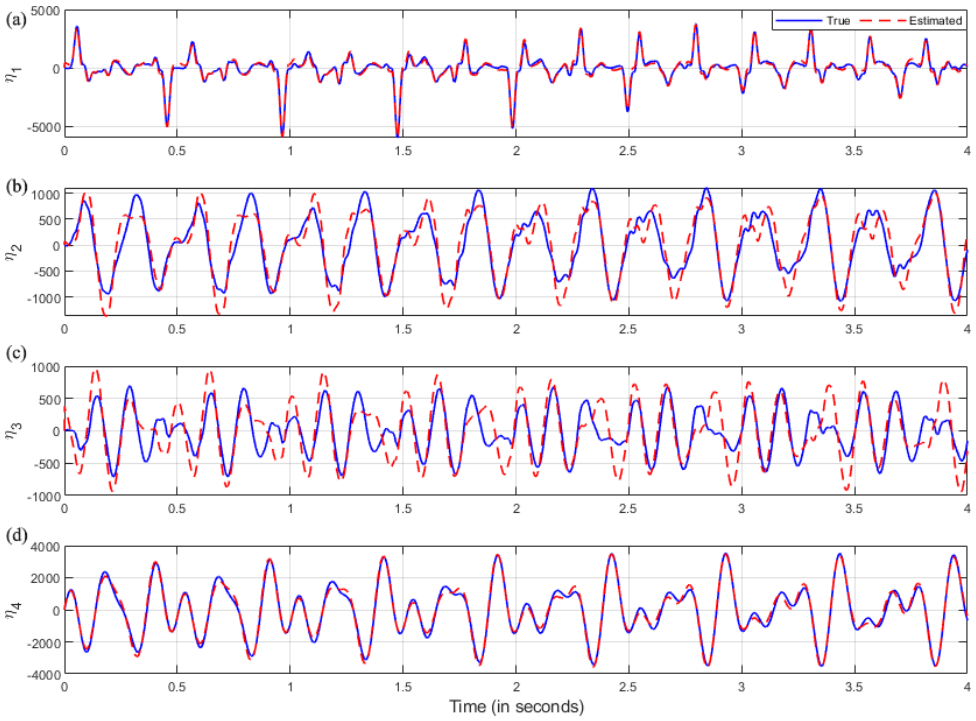


图16：示例4（错误设定的本构关系）：在0%噪声下，四个保留模态的推断模态潜在力（红色虚线）与真实非线性差异（蓝色实线）的对比。GPLFM准确重构了所有模态潜在力，捕捉到了真实新胡克材料引入的非线性应力–应变效应，而名义模型仍保持线弹性。

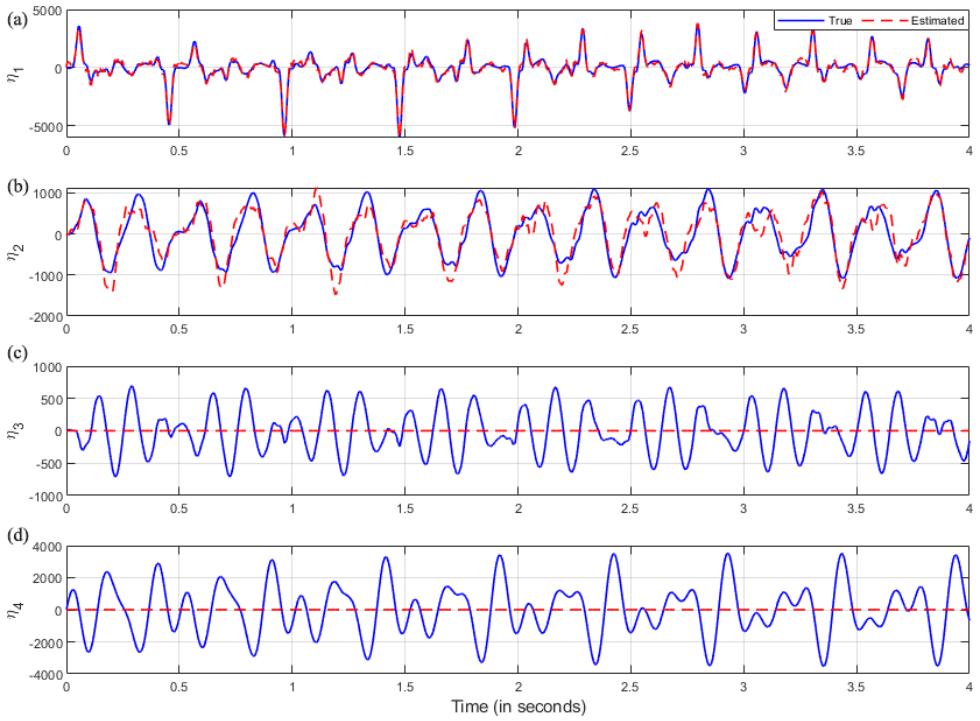


图17：示例4（错误设定的本构关系）：1% 测量噪声下推断的模态潜在力（红色虚线）与真实非线性偏差（蓝色实线）的对比。主导模态潜在力仍能得到准确识别，忠实再现主要的非线性材料效应；随着噪声出现，高阶分量则略有衰减。

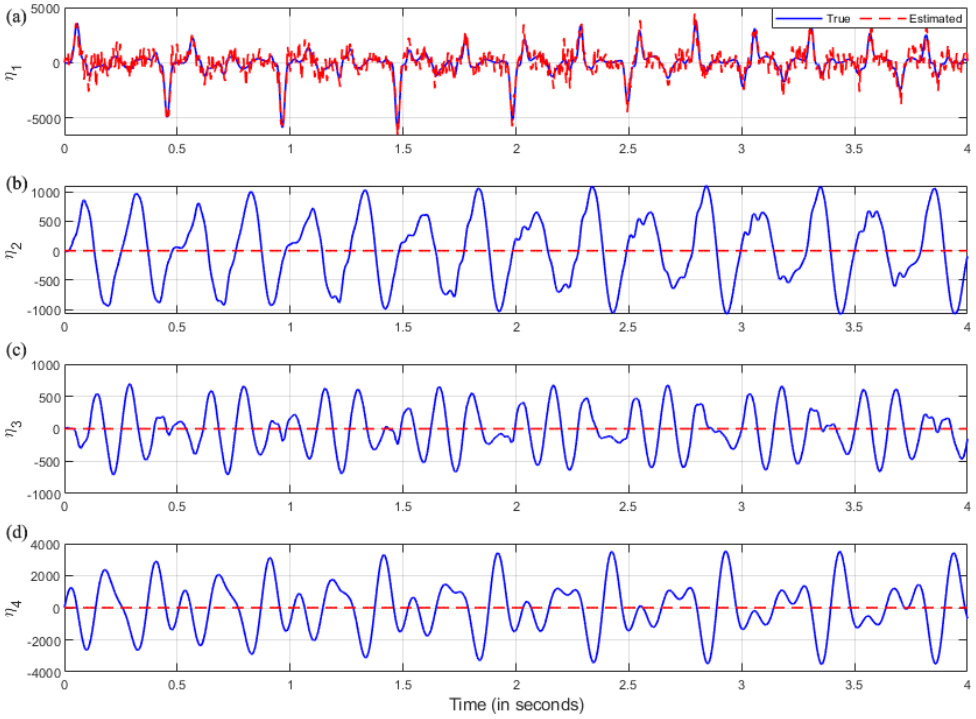


图18：示例4（错误设定的本构关系）：在5%的测量噪声下，推断的模态潜在力（红色虚线）与真实非线性偏差（蓝色实线）的对比。GPLFM仍能捕捉代表缺失非线性本构效应的主要低频潜在力，而随着其信号能量低于噪声阈值，高阶模态贡献（模态3–4）逐渐衰减至零。

4.6. 示例*5*：*120*自由度 *IASC–ASCE* 基准建筑中的局部刚度损失

本最后一个案例研究在知名的 IASC–ASCE 基准套件中的120自由度剪切建筑上评估所提出的框架 [36], ，该建筑代表一个真实的高维结构系统。如图19所示，该模型将每层理想化为刚性楼板，因此每层内所有点在两个正交方向上的水平平移和绕平面内转动均相同。其余三个自由度——竖向平移和两个平面外转动——在每层均不受约束。在所考虑的激励范围内，该结构呈线性行为，但引入了局部刚度损失以模拟损伤。

模型描述。 真实系统遵循 IASC–ASCE 基准结构的“模式1”损伤构型，即移除第一层的支撑构件，以模拟局部刚度损失。名义模型对应于同一建筑的未损伤构型。结构在所有四个楼层沿y方向受到激励，并分别使用不同的加载时程进行训练和测试。每个激励均为窄带高斯过程，通过将白高斯噪声输入四阶巴特沃斯低通滤波器进行滤波获得，其通带为 $[0, 30]$ 赫兹。对包含120个自由度的模型进行降阶表示，并保留从平均响应谱中识别出的前九阶振动模态；结果表明，该表示能够充分捕捉关键动力学行为，同时保持较高的计算效率。

表2列出了未损坏结构和受损结构在保留的前九阶模态下的固有频率。该表还标明了每个振型的主导运动方向（x、 y或 θ ，约为 z）。

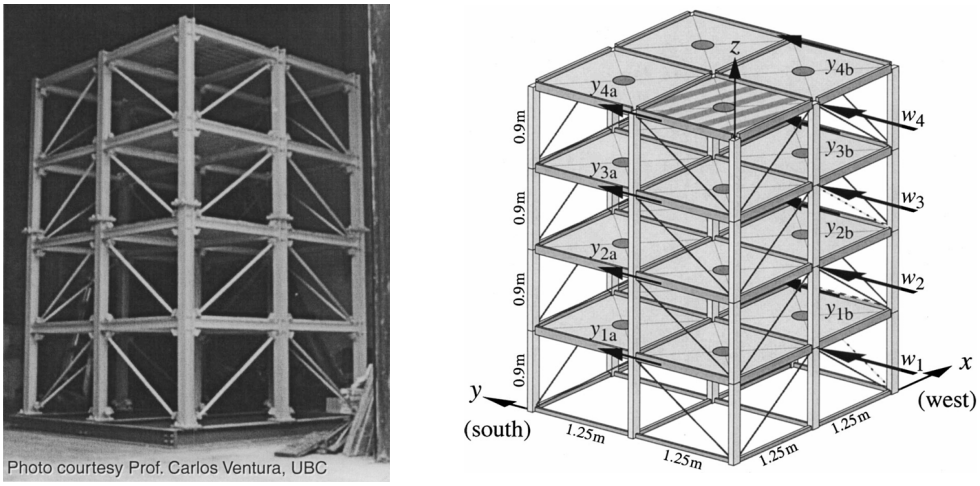
测量设置。 根据基准规范，16 个传感器均匀分布在四层楼中（每层四个，水平方向各两个），如图 19 所示。本文使用这些位置的位移测量数据进行 GPLFM 推断。初步分析表明，仅使用加速度测量时，模态潜在力的估计效果较差，尤其是在存在噪声的情况下，进而导致对未见激励的校正预测效果变差。相比之下，位移数据能够更准确地恢复模态状态和潜在力，因此本研究全程采用位移数据。

噪声水平。 测量噪声建模为 1% 的加性白高斯噪声，与前述示例一致。对于较高的噪声水平（例如 5%），潜在力估计——尤其是使用 Matérn-$\frac{1}{2}$ kernel 时——会变得嘈杂且不可靠，导致校正效果不佳；因此，本文仅展示 1%噪声的情况。

结果。 由于激励仅施加于 y 方向，这些以 y 为主的模态对测量响应贡献最大，并且如下文所示，可得到最准确的潜在力估计。基于 GPLFM 的推断能够准确重建已布设仪器和未布设仪器位置处的位移响应；图 21 展示了第三层 x 和 y 方向的代表性对比。为进行频谱验证，图 20 给出了频率响应函数（FRF）对数的均值 ，该均值通过对全部 120 个自由度的对数幅值频谱取平均得到，其中包括平动（x、 y、 z）和转动（θ）分量。在涵盖九个保留模态的 0–50 赫兹范围内，估计的 FRF 与真实受损系统的 FRF 高度吻合，且在表2中识别出的 y 方向模态所对应的频率处呈现明显峰值。

图22所示的推断的模态潜在力与这些主导 y-模态（1、4、6和9）以及与 y-运动强耦合的 θ-模态7中的真实差异高度一致。激励能量较弱的模态表现出相对较小的潜在力幅值，这与其对整体响应较低的模态参与程度相符。

最后，将训练好的神经网络代理模型嵌入名义模型中，即可得到校正后的预测模拟器。在未见激励（滤波白高斯噪声的不同实现）下，该模拟器的位移预测结果如图23所示。与名义基线相比，校正模型在第三层相同位置处的NMSE降幅约为85–86%，表明其能够较好地预测受损系统的真实动力学行为。



(a) (b)

图19：示例5（局部刚度损失）。(a) 实验性四层 IASC–ASCE 基准结构 [36] 和 (b) 其数值 120 自由度仿真模型（改编自 [36]）。在全部四层的 y方向施加激励 $w_i(t)$，并在每层四个传感器位置采集位移测量数据 $y_{ij}(t)$——两个位于每个水平方向。为清晰起见，示意图中省略了x方向的测量数据（y_{ic} 和 y_{id}）。

表2：未损坏和受损基准结构的前九阶固有频率（赫兹），每个振型均按其主导运动方向（x、 y或 θ）标注。

模型	振型 1	振型 2	振型 3	第4阶模态	振型 5	振型 6	振型 7	振型 8	模式 9
未损坏	8.59 y	9.18 x	14.58 θ	23.45 y	25.95 x	36.81 y	40.65 θ	42.21 x	46.98 y
受损	5.47 y	7.37 x	9.69 θ	19.31 y	22.77 x	34.18 y	35.18 θ	40.66 x	46.73 y

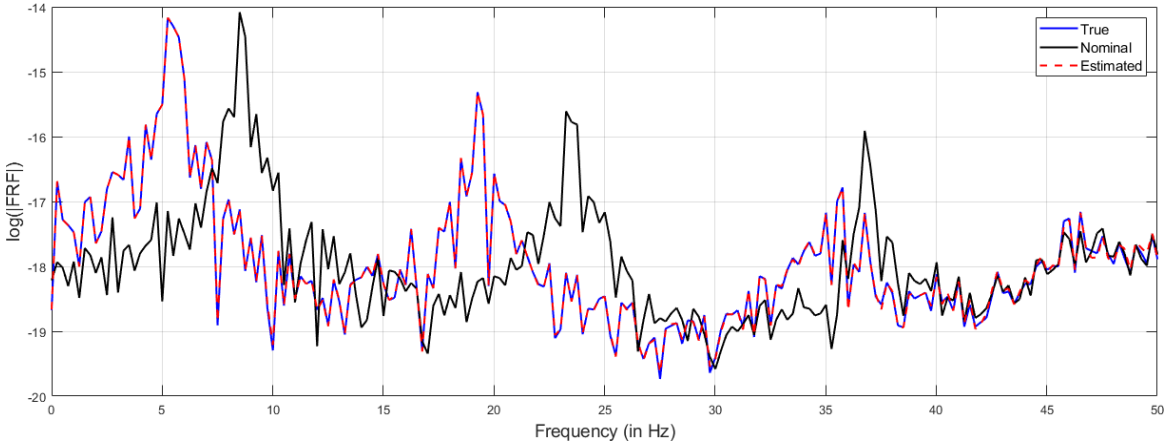


图20：示例5（局部刚度损失）频率响应函数（FRF）的均值对数，通过对全部120个自由度（包括平动（x、 y）和转动（θ）分量）的幅度谱取平均计算得到。估计的频率响应函数再现了真实受损结构的共振峰，其中与 y方向模态（1、4、6和9）对应的主要峰值已在表2中突出显示。

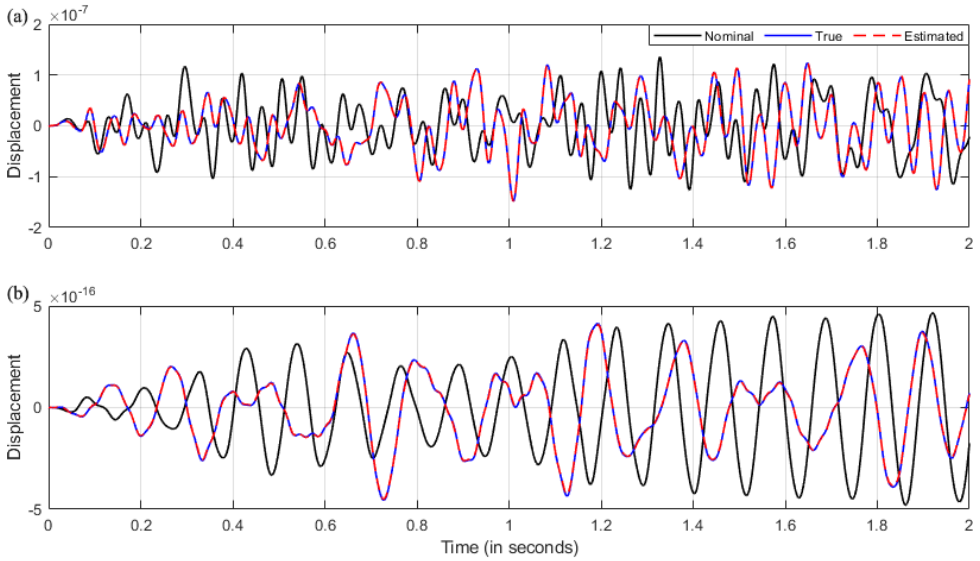


图21：示例5（局部刚度损失）在1%噪声下，对比两个具有代表性的三楼位置的估计位移响应与真实位移响应，一个位于 x方向，另一个位于 y方向。

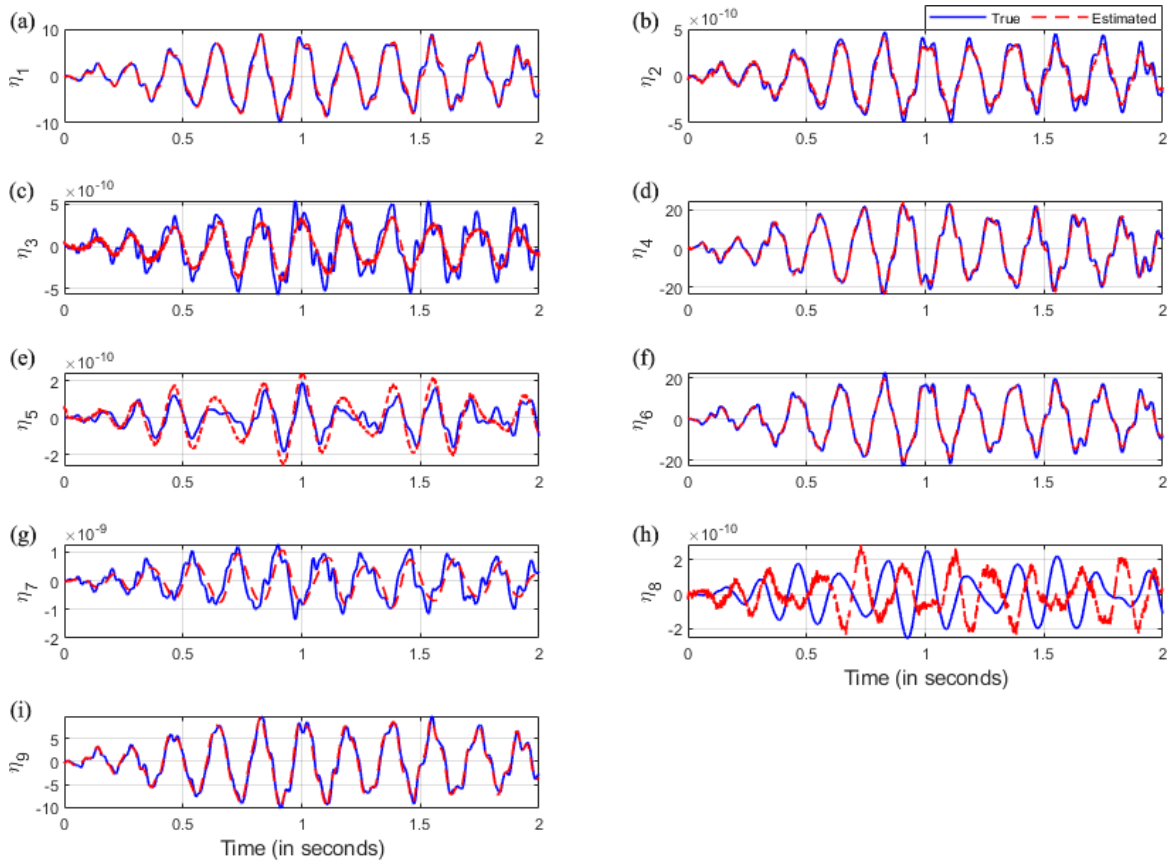


图22：示例5（局部刚度损失）在1%噪声下，保留的前九阶模态的推断模态潜在力（红色虚线）与真实差异（蓝色实线）的对比。对于受到强烈激励的 y方向模态（1、4、6和9）以及耦合旋转模态7，均实现了准确估计。

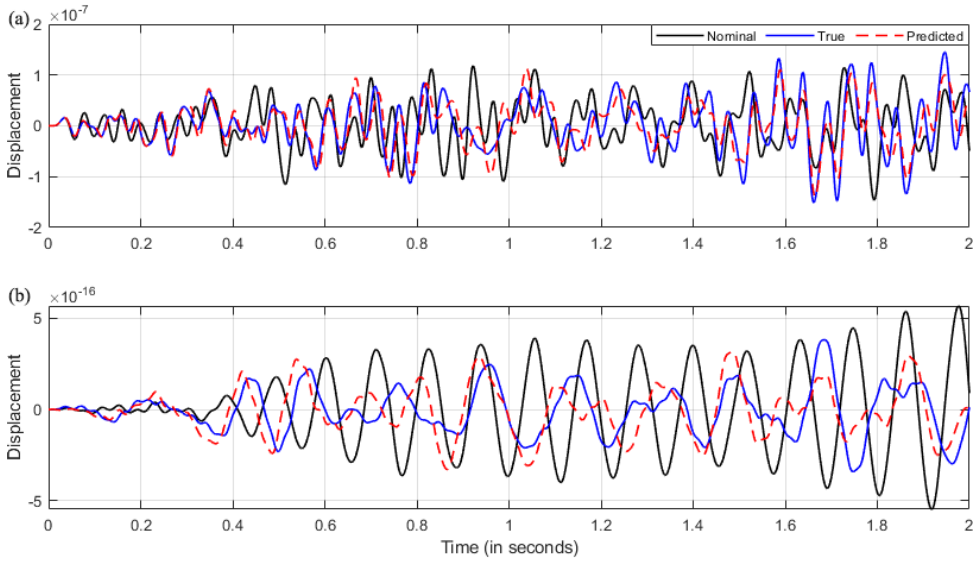


图23：示例5（局部刚度损失）未见激励下两个具有代表性的三楼位置处预测位移响应与真实位移响应的比较。

5. 讨论

所提出的框架为诊断和校正高维结构动力系统中的模型形式误差提供了一种方法。通过将 GPLFM 与神经映射代理模型相结合，该方法系统地捕捉潜在校正动力学，从而协调名义基于物理的模型与测得的系统响应。

所提出方法的一个关键特点是其模态空间表述，可在降阶设置下进行推断和预测。这种降阶带来三项主要优势：

- 降维：推断是在由少数主导模态控制的低维空间中进行，而非基于完整的有限元结构模型，从而显著降低计算成本。
- 快速校正预测：训练完成后，校正模型在相同的降阶模态域中运行，可针对未见激励快速进行预测。
- 网格不变性：由于训练和推断完全在模态空间中进行，该方法不受有限元网格分辨率的影响。这种网格不变性使训练后的代理模型能够适用于不同的离散化方式或空间细化方案；对于跨多个保真度层级演进的数字孪生而言，这是一项重要特性。

在所有数值案例研究中，该方法始终能够推断出有意义的模态潜在力，并在未见载荷条件下给出良好的校正预测，体现了其应用于高维结构的可扩展性。

值得注意的是，这里假设外部激励完全已知且不含噪声。若激励受到噪声污染或仅得到部分表征，推断出的潜在力——在本研究中仅

假设模型形式误差具有状态依赖性——将不可避免地吸收激励中的误差，从而导致校正不正确。未来的拓展可以结合随机激励模型或贝叶斯辨识方案，同时推断输入不确定性和模型偏差，正如近期研究 [37] 所探讨的那样。

本研究中的所有示例均采用位移测量数据，与仅加速度数据相比，这能更好地进行模态潜在力推断。我们发现，加速度测量会在模态潜在力中引入高频噪声，导致 GPLFM 性能下降，尤其会影响高阶振型对应的潜在力估计。位移（或应变类）测量数据更平滑，更有利于可靠地恢复潜在力。

GPLFM 的建模形式可通过核函数选择 [38]，灵活地描述模型形式误差随时间变化的特征。本研究中始终采用 Matérn-$\frac{1}{2}$ 核函数，因其简单且具有计算可行性，但这一选择并非在所有情况下都是最优的。Kashyap等人 [15] 表明，在噪声较大或时间动态更复杂时，高阶核函数（例如 Matérn–$_{32}$或 Matérn-$_{52}$）能够提供更准确的潜在力估计，但会使状态空间维数及相应的计算成本几乎翻倍。因此，Matérn-$\frac{1}{2}$ 核函数在准确性与效率之间实现了折中。不过，GPLFM框架具有通用性，可采用任何能够用随机微分方程表示的平稳核函数，从而根据模型偏差的时间结构进行定制。

还有一些方面值得讨论。首先，该框架的推断性能仍然容易受到测量噪声的影响，尤其是在潜在动力学较弱或激励不足时。其次，为了提高可处理性，当前实现采用了具有分块对角过程协方差的独立潜在力高斯过程；相关的高斯过程建模方式（捕捉每个模态潜在力与其对应模态状态之间的依赖关系）或许能够进一步提高不同模态之间的可辨识性，但会增加推断过程中的计算成本。

第三，该方法假设已知由确定性系统矩阵导出的名义模态基。在涉及参数不确定性或系统辨识的问题中，如果质量矩阵或刚度矩阵本身具有不确定性，单一模态基可能并不充分。将该方法扩展到处理由不确定参数实现导出的模态基族，是下一步的自然方向。

第四，目前模态状态与模态潜在力之间的映射是确定性的且瞬时的；模型形式误差的时间历史依赖性尚未得到建模。未来的扩展可以探索循环网络或卷积网络架构，以捕捉此类动态依赖关系。引入贝叶斯或变分建模方法，可以在潜在力估计和预测推断中实现显式的不确定性量化，从而提升该框架在数字孪生应用中进行决策的可靠性。

最后，虽然本文聚焦于名义线性模型，但该方法可以扩展到非线性动力学，在推断阶段使用非线性滤波器，例如无迹卡尔曼滤波器或集合卡尔曼滤波器。

6. 结论

本研究提出了一种框架，将高斯过程潜在力模型（GPLFM）与神经映射

代理模型相结合，以诊断和校正结构动力系统中的模型形式误差（MFE）。该框架在降阶模态域内对模态状态和潜在偏差进行联合概率推断，从而能够在未见激励下进行预测校正。

所提出的方法具有以下贡献。首先，该方法构建了混合物理一致性潜在力建模框架，其中，名义控制方程提供物理基础，而数据驱动高斯过程则推断模型校正所需的潜在动力学。其次，该框架完全在模态坐标中运算，实现了大幅降维，同时不依赖有限元（FE）网格，从而确保网格不变性，并有助于在具有不同空间离散方式或保真度层级的模型之间迁移。第三，通过一系列涵盖五种代表性情形的示例，展示了该框架的多功能性：建模简化（欧拉–伯努利梁与铁木辛柯梁）、阻尼设定错误、边界条件错误、非线性本构行为，以及 120自由度 IASC–ASCE 基准建筑中的局部刚度损失。在这些不同情形下，该方法始终能够推断潜在力，并在未见载荷条件下生成准确的校正预测，彰显了其可扩展性。

未来研究可着重于提升在含噪或不确定测量数据下的鲁棒性，引入相关高斯过程以捕捉状态与潜在力之间的依赖关系，并在预测中嵌入概率形式，以显式实现不确定性传播。通过无迹卡尔曼滤波器或集合卡尔曼滤波器等非线性滤波器，将此方法拓展至标称非线性系统，是实现可靠实时数字孪生应用的另一项有前景的方向。

附录

A. 将高斯过程转换为状态空间模型（SSM）

在本研究中，模型偏差被建模为具有平稳协方差函数的零均值高斯过程（GP）。为使其能够与名义系统的状态空间动力学相结合，我们利用某些类别的高斯过程核可采用此类形式这一事实，将高斯过程表示转换为等效的线性时不变（LTI）状态空间模型（SSM） [39]。

考虑标量高斯过程 $y(t) \sim \mathcal{GP}(0,\ C(\tau))$，其中 $C(\tau)$ 是由时间滞后τ参数化的协方差函数。对于对应于线性随机微分方程（SDE）脉冲响应的协方差函数，该高斯过程也可等价地表示为下列形式的随机微分方程的解：

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = w(t) \tag{A.1}$$

这里， $w(t)$ 表示功率谱密度恒定的高斯白噪声过程 q_c，而 a_i 是定义潜在过程动态特性的实数系数。

对式（A.1）进行傅里叶变换，可得传递函数形式：

$$F(i\omega) = \frac{G(i\omega)}{W(i\omega)} = \frac{1}{a_n(i\omega)^n + \cdots + a_0}$$

由此得到功率谱密度：

$$S(\omega) = |G(i\omega)|^2 q_c$$

根据维纳–辛钦定理，平稳高斯过程的协方差函数 $C(\tau)$ 可通过对 $S(\omega)$ 进行傅里叶逆变换得到：

$$C(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega$$

为说明这一过程，考虑 Matérn-$\frac{1}{2}$ （指数）核：

$$C(\tau) = \alpha^2 e^{-|\tau|/l}$$

该核的傅里叶变换为：

$$S(\omega) = \frac{2\alpha^2 l}{1 + (l\omega)^2}$$

该谱密度对应于一阶随机微分方程的解：

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\frac{1}{l} y(t) + w(t)$$

其表示 是一个稳定的奥恩斯坦–乌伦贝克过程。其等效的状态空间模型表述为 ：

$$\dot{\xi}(t) = -\frac{1}{l}\xi(t) + w(t) \tag{A.2}$$

$$\eta(t) = \xi(t) \tag{A.3}$$

其中， $\xi(t)$ 是差异过程的状态， $\eta(t)$ 是其输出，并被添加到物理系统模型的动力学中（如第 3.3 节所述）。这种方法保留了动态一致性，并确保潜在输入模型的渐近稳定性。

对于 Matérn 或平方指数（SE）函数等高阶核函数，只要其谱密度能够进行有理近似 [39]，就可以在高斯过程–状态空间模型对偶性的基础上进行类似推导。

B. 高斯过程超参数的最大后验优化

在此框架中，每个潜在力 η_i 都被描述为一个独立的高斯过程（GP），其行为由一组少量超参数 $\boldsymbol{\theta}_i = [\alpha_i, \ell_i]$表征。术语 α_i 通常表示缩放因子或振幅参数，而 ℓ_i 则表示控制过程平滑性和相关结构的特征长度尺度。当考虑 m 个模态时，为每个模态分配一个潜在力，自然会定义 m 个潜在高斯过程。因此，完整的参数向量可表示为$\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\theta}_1, \ldots, \boldsymbol{\theta}_n]$，总计包含 $2m$ 个自由参数。

从贝叶斯视角来看，参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 被视为一个随机变量，而非固定的未知常数。因此，推断任务需要根据观测值计算超参数的后验密度。利用贝叶斯定理，后验分布为

$$p\left(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y}_{1:N_t}\right) \propto p\left(\mathbf{y}_{1:N_t} \mid \boldsymbol{\theta}\right) p(\boldsymbol{\theta}),$$

其中，似然项 $p(\mathbf{y}_{1:N} \mid \boldsymbol{\theta})$ 描述参数对实验数据的解释程度，而先验 $p(\boldsymbol{\theta})$则通过融入对合理参数范围的先验知识来正则化推断。

在状态空间表述中，可用数据通常不仅包括观测输出或测量值 $\mathbf{y}_{1:N}$，还包括隐状态序列 $\mathbf{x}_{1:N}$。由于潜在状态无法直接观测，因此需将其积分消去，以推导超参数的边缘后验分布。这一步边缘化会带来显著的计算瓶颈，因为在大多数实际情况下，边缘似然 $p(\mathbf{y}_{1:N} \mid \boldsymbol{\theta})$ 在解析上不可解。

为解决这一问题，对超参数采用了适当的先验分布。具体而言，本文采用相互独立的 Student-t 分布。使用通用参数化形式 $\mathcal{T}(\mu,\ v,\ \nu)$，其中 μ 为均值， v 为方差， ν 为自由度，对数先验分布的形式为

$$\log p(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^{m} \Big(\log \mathcal{T}(\alpha_j; 10^4, 10^2, 1) + \log \mathcal{T}(\ell_j; 0.1, 10^{-2}, 1) \Big)$$

边缘　　在序列数据模型中，似然本身可递归分解，给定一个　　s

$$p\left(\mathbf{y}_{1:N_t} \mid \boldsymbol{\theta}\right) = \prod_{k=1}^{N_t} p\left(\boldsymbol{y}_k \mid \mathbf{y}_{1:k-1}, \boldsymbol{\theta}\right).$$

对于线性高斯状态空间模型，该量可通过卡尔曼滤波器的新息 $\boldsymbol{e}_k$ 及其协方差矩阵$\mathbf{S}_k$高效计算。具体而言，对数边际似然可表示为

$$\log p\left(\mathbf{y}_{1:N_t} \mid \boldsymbol{\theta}\right) = \sum_{k=1}^{N_t} \log p\left(\boldsymbol{y}_k \mid \boldsymbol{y}_{1:k-1}, \boldsymbol{\theta}\right) = -\sum_{k=1}^{N_t} \left(\log\det \mathbf{S}_k + \boldsymbol{e}_k^{\top} \mathbf{S}_k^{-1} \boldsymbol{e}_k\right).$$

这种由卡尔曼滤波器实现的递归计算，能够将似然评估高效地压缩为一系列新息项，从而无需显式地对高维潜在状态轨迹进行积分。

构建对数后验（将对数似然项与对数先验项结合）后，推断问题便归结为确定超参数的最大后验（MAP）配置：

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MAP}} &= \arg\max_{\boldsymbol{\theta}} \left(\log p\left(\mathbf{y}_{1:N_t} \mid \boldsymbol{\theta}\right) + \log p(\boldsymbol{\theta})\right) \\ &= \arg\min_{\boldsymbol{\theta}} \left(-\log p\left(\mathbf{y}_{1:N_t} \mid \boldsymbol{\theta}\right) - \log p(\boldsymbol{\theta})\right)\end{aligned}$$

通常在对数变换参数域中进行优化，这可确保估计得到的超参数满足振幅和长度尺度参数固有的正值约束。这种变换不仅能在整个迭代搜索过程中保证参数值具有物理意义，还能提高优化过程中的数值稳定性。

参考文献

[1] E. VanDerHorn, S. Mahadevan, 《数字孪生：泛化、表征与实现》, 《决策支持系统》145 (2021) 113524。[2] F. Tao, H. Zhang, A. Liu, A. Y. Nee, 《工业数字孪生：最新进展》, IEEE工业信息学汇刊 15 (4) (2018) 2405–2415。[3] C.-L. Sung, R. Tuo, 《计算机模型校准综述》, 《Wiley跨学科计算统计评论》16 (1) (2024) e1645。[4] R. K. Wong, C. B. Storlie, T. C. Lee, 《计算机模型校准的频率学派方法》, 英国皇家统计学会杂志B辑：统计方法学 79 (2) (2017) 635–648。[5] F. Xie, Y. Xu, 《计算机模型的贝叶斯投影校准》, 美国统计学会会刊 116 (536) (2021) 1965–1982。[6] M. Kennedy, A. O'Hagan, 《计算机模型的贝叶斯校准》, 《英国皇家统计学会杂志B辑：统计方法学》63 (3) (2001) 425–464。[7] K. A. Maupin, L. P. Swiler, 《跨实验设置的模型差异校准》, 《可靠性工程与系统安全》200 (2020) 106818。[8] D. Higdon, M. Kennedy, J. C. Cavendish, J. A. Cafeo, R. D. Ryne, 《结合现场数据与计算机仿真进行校准和预测》, SIAM科学计算杂志 26 (2) (2004) 448–466。[9] D. Higdon, J. Gattiker, B. Williams, M. Rightley, 《利用高维输出进行计算机模型校准》, 美国统计学会会刊 103 (482) (2008) 570–583。[10] J. Brynjarsdottir, A. O'Hagan, 《了解物理参数：模型差异的重要性》, 《反问题》30 (11) (2014) 114007。[11] P. D. Arendt, D. W. Apley, W. Chen, 《模型不确定性量化：校准、模型差异与可辨识性》, 机械设计杂志。[12] M. A. Alvarez, D. Luengo, N. D. Lawrence, 《利用高斯过程构建线性潜在力模型》, IEEE模式分析与机器智能汇刊 35 (11) (2013) 2693–2705。[13] R. Nayek, S. Chakraborty, S. Narasimhan, 《用于线性结构系统联合输入-状态估计的高斯过程潜在力模型》, 《机械系统与信号处理》128 (2019) 497–530。[14] T. J. Rogers, T. Friis, 《一种用于非线性系统辨识的潜在恢复力方法》, 《机械系统与信号处理》180 (2022) 109426。[15] S. Kashyap, T. J. Rogers, R. Nayek, 《多自由度系统中高斯过程辅助的模型形式误差估计》, 《机械系统与信号处理》216 (2024) 111474。

[16] P. Bisaillon、R. Sandhu、C. Pettit、M. Khalil、D. Poirel、C. Manohar、A. Sarkar，利用贝叶斯推断联合选择非线性气动弹性系统的动态模型与建模误差，《声学与振动杂志》522 (2022) 116418。[17] S. Garg、S. Chakraborty、B. Hazra，用于非线性动力系统模型形式误差识别的物理集成混合框架，《机械系统与信号处理》173 (2022) 109039。[18] E.-M. Lourens、Ø. W. Petersen，线性结构动力系统的偏差感知贝叶斯滤波，可于SSRN获取，5295147。[19] M. Raissi、P. Perdikaris、G. E. Karniadakis，物理信息神经网络：用于求解涉及非线性偏微分方程的正问题与逆问题的深度学习框架，《计算物理学杂志》378 (2019) 686–707。[20] M. Pförtner、I. Steinwart、P. Hennig、J. Wenger，物理信息高斯过程回归可推广线性偏微分方程求解器，arXiv预印本 arXiv:2212.12474。[21] P. Hennig、M. A. Osborne、M. Girolami，概率数值计算与计算不确定性，《英国皇家学会会刊A：数学、物理与工程科学》471 (2179) (2015) 20150142。[22] J. Cockayne、C. Oates、T. Sullivan、M. Girolami，偏微分方程与贝叶斯逆问题的概率数值方法，arXiv预印本 arXiv:1605.07811。[23] C. J. Oates、T. J. Sullivan，概率数值计算的现代回顾，《统计与计算》29 (6) (2019) 1335–1351。[24] F. Tronarp、H. Kersting、S. Särkkä、P. Hennig，作为非线性贝叶斯滤波的常微分方程概率解：一种新视角，《统计与计算》29 (6) (2019) 1297–1315。[25] D. Long、Z. Wang、A. Krishnapriyan、R. Kirby、S. Zhe、M. Mahoney，AutoIP：整合物理信息与高斯过程的统一框架，载于：国际机器学习会议，PMLR，2022，第14210–14222页。[26] R. Ohayon、C. Soize、R. Sampaio，通过耗散物理界面进行耦合结构动态子结构分析的基于变分的降阶模型：最新进展，《计算工程方法档案》21 (3) (2014) 321–329。[27] M. Y. Yang，《高级计算振动声学：降阶模型与不确定性量化》（2017）。[28] N. C. Nguyen、J. Peraire，一种针对非线性参数化偏微分方程的高效降阶建模方法，《国际工程数值方法杂志》76 (1) (2008) 27–55。[29] M. P. Mignolet、A. Przekop、S. A. Rizzi、S. M. Spottswood，非线性几何结构间接/非侵入式降阶建模综述，《声学与振动杂志》332 (10) (2013) 2437–2460。

[30] J. Hartikainen、S. Särkkä，时序高斯过程回归模型的卡尔曼滤波与平滑解，载于：IEEE信号处理机器学习国际研讨会，IEEE，2010，第379–384页。[31] J. Hartikainen、S. Särkkä，潜在力模型的序贯推断，载于：F. G. Cozman、A. Pfeffer（编），UAI 2011，《第二十七届人工智能不确定性会议论文集》，西班牙巴塞罗那，2011年7月14—17日，AUAI出版社，2011，第311–318页。[32] S. Särkkä、A. Solin，应用随机微分方程，第10卷，剑桥大学出版社，2019。[33] D. P. Kingma、J. Ba，一种随机优化方法，arXiv预印本 arXiv:1412.6980 1412 (6)。[34] S. Särkkä等，随机微分方程的递归贝叶斯推断，博士论文，赫尔辛基理工大学（2006）。[35] 达索系统SIMULIA公司，Abaqus 2018文档，普罗维登斯，罗得岛州，美国（2018）。[36] E. A. Johnson、H.-F. Lam、L. S. Katafygiotis、J. L. Beck，基于模拟数据的IASC-ASCE结构健康监测基准问题第一阶段，《工程力学杂志》130 (1) (2004) 3–15。[37] E. Lourens、Ø. Petersen，利用高斯过程潜在力模型进行偏差感知贝叶斯滤波，载于：土木工程结构实验振动分析国际会议，施普林格，2025，第322–331页。[38] S. Vettori、E. Di Lorenzo、B. Peeters、E. Chatzi，结构动力学中利用高斯过程潜在力模型进行联合输入—状态估计的替代协方差函数评估，arXiv预印本 arXiv:2306.16302。[39] Sarkka、A. Solin、J. Hartikainen，通过无限维贝叶斯滤波与平滑进行时空学习：从卡尔曼滤波视角审视高斯过程回归，《IEEE信号处理杂志》30 (4) (2013) 51–61。