arXiv:2601.05325v1 [math.RT] 8 Jan 2026

分次斜温和代数的霍赫希尔德上同调：Gerstenhaber 代数结构与几何解释

XIULI BIAN、SIBYLLE SCHROLL、ANDREA SOLOTAR、XIAO-CHUANG WANG、CAN WEN

Abstract. 本文计算了分次斜温和代数的霍赫希尔德上同调，以及其在杯积下作为分次交换代数的结构和由 Gerstenhaber 括号给出的李代数结构。本文的一个结果是，对于分次斜温和代数，以及由此得到的带停止点的轨形曲面的部分缠绕Fukaya范畴，其霍赫希尔德上同调由底层分次曲面编码。

Contents

1. 引言 1
2. 预备知识 3
2.1. 分次斜温和代数 3
2.2. 分次代数的霍赫希尔德上同调中的 Gerstenhaber 代数结构 4
2.3. 分次双侧 CS-投射分解 6
2.4. 比较态射 9
3. 分次斜温和代数的霍赫希尔德上同调 13
3.1. 分次温和代数的霍赫希尔德上同调空间 14
3.2. 温和代数与斜温和代数 17
3.3. 分次斜温和代数的霍赫希尔德上同调空间 20
3.4. 杯积 24
3.5. 霍赫希尔德上同调代数 28
3.6. Gerstenhaber 括号 30
4. 几何解释 35
4.1. 由分次斜温和代数得到的分次轨形曲面 36
4.2. 霍赫希尔德上同调的几何解释 39
4.3. 杯积的几何解释 43
4.4. Gerstenhaber 括号的几何解释 44
致谢 44
参考文献 44

1. Introduction

尽管霍赫希尔德上同调及其 Gerstenhaber 代数结构的显式计算颇具难度，但人们对这类计算的兴趣日益浓厚。特别是，适当的投射双模分解，例如 Bardzell 分解以及 [11] 中更一般的分解，使这类计算成为可能，并且近年来已有大量相关研究

2020 *Mathematics Subject Classification.* 18G10, 16E35, 16S37, 53D37,16S80,18G70.*Key words and phrases.* 分次温和代数，分次斜温和代数，霍赫希尔德上同调，Gerstenhaber代数，Fukaya 范畴。

，例如 [31], [32] 及其中的参考文献。然而，针对分次代数的计算则较为少见。本文对分次斜温和代数这一类进行此类计算。具体而言，我们计算了其霍赫希尔德上同调、在杯积下作为分次交换代数的结构，以及由 Gerstenhaber 括号给出的李代数结构。

计算分次斜温和代数的霍赫希尔德上同调还有第二个动机。具体而言，在 [20], 中，分次标记曲面 S 的（拓扑）部分包裹福柯范畴 $\mathcal{W}(S)$ 得到了明确刻画，并证明其导出范畴等价于某个分次温和代数的完美导出范畴。在 [4, 10, 5]中，这一结果被推广到带有阶 2 轨形点的分次标记曲面 S 的部分包裹福柯范畴 $\mathcal{W}(S)$。研究表明，此类福柯范畴的导出范畴等价于某个分次斜温和代数的完美导出范畴。此外，在 [6] 中证明，光滑曲面上带有停止点的部分包裹福柯范畴的任意A_∞-变形实际上都具有这种形式；也就是说，它变形为带有阶 2 轨形点的曲面的部分包裹福柯范畴。我们还指出，为了证明这一点，在 [6]中计算了分次温和代数的第二霍赫希尔德上同调，并将其与某些边界分支及其绕数联系起来。

回到霍赫希尔德上同调：对于缠绕 Fukaya 范畴， [15, 16]证明了曲面的辛上同调与缠绕 Fukaya 范畴的霍赫希尔德上同调之间存在同构。我们预期，部分缠绕的情形也有类似结果，也就是说，在存在停止数据的情况下——本文中，这对应于红色标记点。

因此，我们的第二个研究动机是确定分次斜温和代数的霍赫希尔德上同调能否以及如何从相关的曲面模型中“读出”。非分次温和代数的情形表明这是可行的： [8]证明了其霍赫希尔德上同调确实可以从曲面中读出。本文的结果之一是，分次斜温和代数也同样如此，因此轨形曲面的部分缠绕Fukaya范畴亦是如此；也就是说，它们的霍赫希尔德上同调由底层分次曲面编码。

更确切地说，在确定分次斜温和代数的霍赫希尔德上同调的一组基（定理 3.15）及其在杯积下的分次交换代数结构 $\smile$ （表 1）之后，我们通过生成元（定理 3.19）和关系（定理 3.21）明确地呈现了这一结构。我们还重新得到 [6], 中的一个结果，即明确展示了分次斜温和代数的霍赫希尔德上同调如何区别于作为其一个（结合）变形的分次温和代数的霍赫希尔德上同调（定理 3.9）。在第 4 节中，我们展示了分次斜温和代数的霍赫希尔德上同调的生成元（事实上包括所有基元素）如何从与该分次斜温和代数相关的、带有阶 2 轨形点的分次标记曲面上“读出”。我们在下面的定理中总结这一后续结果；关于这一对应关系的图示说明，另见表 3 。

定理 1.1 （定理4.4）。 设 A 是一个分次斜温和代数，且设 S 是与 A相关联的、带有阶 *2* 轨形点的分次标记曲面。记 η 为 S 的分次结构，它由 η 上的一个线场 S给出。那么，*gentle* 代数 （$\mathrm{HH}^*(A)$ $\smile$） 的 A *Hochschild* 上同调代数的生成元与以下集合构成双射：

（1） 恰有一个标记点的边界分支；（2） 曲面内部的红色和绿色标记点（对应于 [5]中的未截断边界分支和完全截断边界分支）；（3） 光滑曲面的基本群生成元，该光滑曲面由 S 通过将每个轨形点周围的小圆盘替换为光滑圆盘而得到。

特别地，我们证明，闭曲线相对于 η 绕曲面边界分支和内部点的绕数，决定了$\mathrm{HH}^*(A)$中对应生成元的总次数。

最后，我们计算分次斜温和代数的 Hochschild 上同调基元素的 Gerstenhaber 括号（定理 3.30），并给出一种可能的几何解释。

为便于阅读，我们简要概述本文的内容。在第 2 节中，我们回顾一些记号和基本事实。在第 3 节中，我们计算分次斜温和代数的霍赫希尔德上同调，并明确说明这些分次温和代数的变形与后者的霍赫希尔德上同调有何不同，见定理 3.9。我们还在定理 3.21（分次交换代数结构）和定理3.30 （Gerstenhaber 括号）中完整描述了 Gerstenhaber 代数结构。第4 节给出了该结构的几何解释，详见定理4.4，另见表 3。

在撰写本文期间，我们得知 Sebastian Opper 也一直在研究分次温和代数的霍赫希尔德上同调的 Gerstenhaber 代数结构。

约定：本文中，$\mathbb{K}$ 为一个域，其特征记为 char($\mathbb{K}$)。对于有界箭图代数 $\mathbb{K}Q/I$，记 $E=\mathbb{K}Q_0$ 为 Q的顶点集合所张成的半单 $\mathbb{K}$-代数。在微分分次（简称 dg）情形下，我们始终采用*Koszul* 符号规则，也就是说，每当交换两个次数分别为 $|x|$ 和 $|y|$的分次对象 x 和 y 的位置时，就添加符号$(-1)^{|x|\cdot|y|}$ 。路径按从右到左的顺序书写，即视为函数的复合。

2. Preliminaries

本节回顾全文所需的一些基本概念和事实。

2.1. 分次斜温和代数。

斜温和代数由 [17] 引入。这些代数可以用生成元与关系表示为路径代数对由二次单项式和二次交换关系生成的理想取商。因而，它们按路径长度分次。值得注意的是，它们是霍赫希尔德上同调 [6] 中通过 2-余循环得到的温和代数的变形。

现在，我们在回顾一些基本事实的同时固定若干记号。箭图 Q 是一个四元组 (Q_0,Q_1,s,t)，其中 Q_0 是顶点集，Q_1 是箭集，而 $s,t\colon Q_1\to Q_0$ 分别是箭的源点函数和终点函数。我们只考虑顶点数和箭数均有限的箭图。如果箭 $\alpha\in Q_1$ 满足 $s(\alpha)=t(\alpha)$，则称其为一个环。箭图 Q 中的一条长度为 l 的路径是一个箭的序列 $a_l\cdots a_2a_1$，其中箭为 a_i, $1\le i\le l$，且对于任意 $1\le i\le l-1$，都有 $t(a_i)=s(a_{i+1})$。我们用 $l(p)$ 表示路径 p 的长度。对于每个顶点 $i\in Q_0$，我们用 e_i 表示与之关联的长度为 0 的平凡路径。若路径 $C=c_l\cdots c_1$ 在 Q 中的长度 l为正，且其终点与起点相同，则称其为一个圈。Q 的关系集是路径 Q的线性组合构成的有限集合。我们用 $\mathbb{K}Q$ 表示 Q的路径代数。

一个分次箭图是带有分次的箭图 Q，即一个函数 $|\cdot|\colon Q_1\to\mathbb{Z}$。对于任意箭 $\alpha\in Q_1$，记 $|\alpha|$为其次数 α。对于长度为 $n\ge 1$ 的路径 $p=\alpha_n\cdots\alpha_1$，p的次数定义为 $|p|:=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|$；而对于平凡路径 e_i，$i\in Q_0$，e_i 的次数定义为 $|e_i|:=0$。分次箭图的路径代数自然是一个 $\mathbb{Z}$-分次代数。箭图总可以按路径的长度进行分次。

定义 2.1。一个 p air (Q,R)（其中 Q 为箭图，R 为关系集）被称为*gentle* 对，如果满足以下条件：d. (G1) R 中的任意元素都是长度为 2 的路径；(G2) 对于 Q_0中的每个顶点 i，以 i 为源点的箭至多有两个，且以 i为终点的箭至多有两个；(G3) 对于任意箭 α，至多存在一个箭 β（分别为 γ），使得 $\alpha\beta\in R$（分别为 $\gamma\alpha\in R$）；(G4) 对于任意箭 α，至多存在一个箭 β（分别为 γ），使得 $\alpha\beta\notin R$（分别为 $\gamma\alpha\notin R$）。

如果一个 gentle 对 (Q,R) 还满足 Q 是一个分次箭图，则称其为分次温和对。如果一个分次 $\mathbb{K}$-代数 A 与 $\mathbb{K}Q/\langle R\rangle$ Morita 等价，且 (Q,R) 是一个分次温和对，则称其为分次温和。

定义 2.2。 如果三元组 $(Q,\ R,\ \mathrm{Sp})$ 满足以下条件，则称其为分次斜温和三元组：

- Q 是一个分次箭图，
- Sp 是 Q 中环的一个子集（称为特殊环），并且
- $(Q,\ R\cup\{\varepsilon^2 \mid \varepsilon\in \mathrm{Sp}\})$ 是一个分次温和对。

若分次 $\mathbb{K}$-代数 A Morita 等价于某个代数，则称其为分次斜绅代数

$$\mathbb{K}Q/\langle R\cup\{\varepsilon^2-\varepsilon \mid \varepsilon\in \mathrm{Sp}\}\rangle.$$

当 $\mathrm{Sp}=\emptyset$ 时，代数 A 是分次温和的。若存在一个环 $\varepsilon_i\in \mathrm{Sp}$，使得$i=s(\varepsilon_i)$，则称顶点 $i\in Q_0$ 为特殊的。为简便起见，我们仍将特殊顶点的集合记为 Sp。

注 2.3。注　　斜温和代数 A 可分次，当且仅当特殊环的次数为 0。

现在 固定一个分次斜温和三元组 (Q,R,Sp)，并考虑分次斜温和代数　　ra

$$A=\mathbb{K}Q/\langle R\cup\{\varepsilon^2-\varepsilon \mid \varepsilon\in \mathrm{Sp}\}\rangle.$$

令 $\pi:\ \mathbb{K}Q\to A$ 为典范投影。用 $\mathcal{B}$ 表示 Q 中不含$S=R\cup\{\varepsilon^2 \mid \varepsilon\in \mathrm{Sp}\}$中子路径的路径集合。显然，集合 $\mathcal{B}$ 是 A的一个 $\mathbb{K}$-基。

下文提及的分次斜温和代数 A ，始终由一个分次斜温和三元组 (Q,R,Sp) 定义；也就是说， $A=\mathbb{K}Q/I$，其中 I 表示由 $R\cup\{\varepsilon^2-\varepsilon \mid \varepsilon\in \mathrm{Sp}\}$生成的 $\mathbb{K}Q$ 的双边理想。

2.2. G　分次代数的 Hochschild 上同调中的 Gerstenhaber 代数结构　　s.

在本节中，我们回顾分次 $\mathbb{K}$-代数的 Hochschild 上同调的 Gerstenhaber结构。即使 $E=\mathbb{K}Q_0$ 在我们所考虑的代数上的作用并非对称的，我们仍将它们称为 E-代数，如[21]中所述。本节的主要参考文献是 [21, 第 3]章。不过，我们注意到，我们所使用的符号有时不同于 [21]中的符号。

结合代数 A 上以 A-双模 M 为系数的 Hochschild（上）同调最初由 [22] 引入，其 Gerstenhaber结构则定义于 [19]。这一定义已扩展到微分分次（dg） $\mathbb{K}$-代数 [14, 1] 以及 dg E-代数 [21]。

我们始终将分次代数 A 视为微分为零且次数为 1 的微分分次代数（即， $d_A=0$ 和$|d_A|=+1$）。记 s 为 A 的悬移，其中 $|s|=-1$ 和 $s^{-1}\circ s=\mathrm{id}$。令 $A=E\oplus\overline{A}$ 和 $\otimes:=\otimes_E$。

双边 bar 分解。在 [21], dg E-环的 Hochschild (上)同调中，最初是使用双边 bar 分解进行定义的。这里我们回顾分次代数情形下的这一定义。

双边 *bar* 分解 [9, 27, 21] 由 $B(A,\ A,\ A):=A\otimes_E T^c(s\overline{A})\otimes_E A$ 构成，并配备微分$\delta=\delta_0+\delta_1$，其中 $T^c(s\overline{A})$ 是 $s\overline{A}$ 在 E上的张量微分分次余代数，即

$$T^c(s\overline{A})=\bigoplus_{n=0}^{\infty}(s\overline{A})^{\otimes n}=E\oplus s\overline{A}\oplus(s\overline{A})^{\otimes 2}\oplus\cdots,$$

以及 δ_0 是内微分，定义为

$$\begin{aligned}\delta_0(a\otimes sa_n\otimes\cdots sa_1\otimes b)=&d_A(a)\otimes sa_n\otimes\cdots\otimes sa_1\otimes b\\&+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{|a|+\epsilon_{i+1,n}-1}a\otimes sa_n\otimes\cdots\otimes sa_{i+1}\otimes sd_A(a_i)\otimes sa_{i-1}\otimes\cdots\otimes sa_1\otimes b\\&+(-1)^{|a|+\epsilon_{1,n}}a\otimes sa_n\otimes\cdots sa_1\otimes d_A(b)\end{aligned}$$

$_n$其中 $\epsilon_{i,\ n} = \sum(|a_j| - 1)$ 对于 $1 \leq i \leq n$，约定 $\epsilon_{n+1,\ n} = 0$。映射 δ_1 表示外$_{j=i}$微分，定义为

$$\begin{aligned}\delta_1(1 \otimes sa_n \otimes \cdots sa_1 \otimes 1) =& a_n \otimes sa_{n-1} \otimes \cdots \otimes sa_1 \otimes 1 \\ &+ \sum_{i=2}^{n} (-1)^{\epsilon_{i,n}} 1 \otimes sa_n \otimes \cdots \otimes sa_{i+1} \otimes s(a_i a_{i-1}) \otimes sa_{i-2} \otimes \cdots \otimes sa_1 \otimes 1 \\ &+ (-1)^{\epsilon_{2,n}-1} 1 \otimes sa_n \otimes \cdots \otimes sa_2 \otimes a_1.\end{aligned}$$

其中，a，b 和 $a_i (1 \leq i \leq n)$ 是 A 的齐次元素，而 δ_1 是一个 A-双模态射。注意，对于分次代数 A，由 $d_A = 0$ 诱导的内微分 δ_0 为零，因此微分 $\delta = \delta_1$ 由外微分给出。

霍赫希尔德上链复形。霍赫希尔德上链复形的 A是

$$C^*(A) := \mathrm{Hom}_{A^e}(B(A, A, A), A) \cong \mathrm{Hom}_{E^e}(T^c(s\overline{A}), A),$$

其中，A^{op} 是这样一个代数：其底层分次向量空间为 A，乘法采用 A的反向乘法，即 $a \cdot^{op} b = (-1)^{|a|\cdot|b|} b \cdot a$；$A^e := A \otimes A^{op}$（分别为 E^e）表示 A（分别为 E）的包络代数。其上同调称为 A的霍赫希尔德上同调，记作 $\mathrm{HH}^*(A)$。更确切地说，给定一个齐次上链 $f \in \mathrm{Hom}_{E^e}((sA)^{\otimes n}, A)$，若对所有 i都有 f的次数为 p，记作 $|f| = p$，当且仅当 $f\left(\overline{\left((sA)^{\otimes n}\right)^i}\right) \subseteq \overline{\left((sA)^{\otimes n}\right)^{i+p}}$。此后，$\mathrm{Hom}_{E^e}((sA)^{\otimes n}, A)^p$ 表示 $\overline{\mathrm{Hom}_{E^e}((sA)^{\otimes n}, A)}$ 中次数为 p的映射所构成的子空间，并且

$$(C^*(A))^p = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{E^e}((s\overline{A})^{\otimes n}, A)^p$$

其微分由 $\partial = \partial_0 + \partial_1$ 给出；对于每个 $f \in \mathrm{Hom}_{E^e}((sA)^{\otimes n},\ A)^p$，$\overline{\ }$内微分 ∂_0 将 f映射到

$$\begin{aligned}\partial_0(f)(sa_n \otimes \cdots \otimes sa_1) :=& d_A f(sa_n \otimes \cdots \otimes sa_1) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{|f|+\epsilon_{i+1,n}} f(sa_n \otimes \cdots \otimes sa_{i+1} \otimes sd_A(a_i) \otimes sa_{i-1} \otimes \cdots \otimes sa_1),\end{aligned}$$

当 $d_A = 0$ 时其值为零，而外微分 ∂_1 将 f 映射到

$$\begin{aligned}\partial_1(f)(sa_{n+1} \otimes \cdots \otimes sa_1) :=& -(-1)^{(|a_{n+1}|-1)|f|} a_{n+1} f(sa_n \otimes \cdots \otimes sa_1) \\ &+ \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^{|f|+\epsilon_{i,n+1}-1} f(sa_{n+1} \otimes \cdots \otimes sa_{i+1} \otimes s(a_i a_{i-1}) \otimes sa_{i-2} \otimes \cdots \otimes sa_1) \\ &+ (-1)^{|f|+\epsilon_{2,n+1}} f(sa_{n+1} \otimes \cdots \otimes sa_2) a_1.\end{aligned}$$

杯积与 Gerstenhaber 括号。对于 $f \in \mathrm{Hom}_{E^e}((sA)^{\otimes m},\ A)$ 和 $\overline{\ }g \in \mathrm{Hom}_{E^e}((sA)^{\otimes n},\ A)$，杯积 $f \smile g \in \mathrm{Hom}_{E^e}((sA)^{\otimes m+n},\ A)$ 定义为 $\overline{\ }$

$$(f \smile g)(sa_{m+n} \otimes \cdots \otimes sa_1) := (-1)^{|g|\epsilon_{n+1,m+n}} f(sa_{m+n} \otimes \cdots sa_{n+1}) g(sa_n \otimes \cdots sa_1),$$

$_{m+n}$其中 $\epsilon_{n+1,\ m+n} :=\ \sum(|a_j| - 1)$,
与之前相同。$_{j=n+1}$

Gerstenhaber 括号 $[f, g] \in \mathrm{Hom}_{E^e}((sA)^{\otimes m+n-1}, A)$ 定义为

$$[f, g] := f \circ g - (-1)^{(|f|-1)(|g|-1)} g \circ f,$$

$_m$其中 $f\circ g=\sum f\circ_i g$
满足$_{i=1}$

$$(f\circ_i g)(sa_{m+n-1}\otimes\cdots\otimes sa_1):=(-1)^{\epsilon_{i+n,m+n-1}(|g|+1)}f(sa_{m+n-1}\otimes\cdots\otimes sg(sa_{i+n-1}\otimes\cdots\otimes sa_i)\otimes\cdots\otimes sa_1).$$

特别地，如果 $n=0$，那么

$$(f\circ_i g)(sa_{m-1}\otimes\cdots\otimes sa_1):=(-1)^{\epsilon_{i,m-1}(|g|+1)}f(sa_{m-1}\otimes\cdots sa_i\otimes sg\otimes sa_{i-1}\otimes\cdots\otimes sa_1).$$

杯积满足以下性质。

引理 2.4。对所有 $f\in\mathrm{Hom}_{E^e}((sA)^{\otimes m},A)$、$g\in\mathrm{Hom}_{E^e}((sA)^{\otimes n},A)$以及 $h\in\mathrm{Hom}_{E^e}((sA)^{\otimes r},A)$:
(1) $\partial_1(f\smile g)=\partial_1(f)\smile g+(-1)^{|f|}f\smile\partial_1(g)$，(2) $(f\smile g)\smile h=f\smile(g\smile h)$，(3) $f\smile g-(-1)^{|f|\cdot|g|}g\smile f=(-1)^{|f|}\partial_1(f)\circ g+(-1)^{|f|+1}\partial_1(f\circ g)-f\circ\partial_1(g)$。

根据引理 2.4 (1)，$C^*(A)$ 上的杯积在 $\mathrm{HH}^*(A)$ 上诱导出杯积。由引理 2.4 (2) 和 (3) 可知，$(\mathrm{HH}^*(A)\smile)$ 是一个分次交换结合代数。

Gerstenhaber 括号 $[-,-]$ 满足以下性质。

引理 2.5. 对于所有 $f\in\mathrm{Hom}_{E^e}((s\overline{A})^{\otimes m},A)$、$g\in\mathrm{Hom}_{E^e}((s\overline{A})^{\otimes n},A)$ 以及 $h\in\mathrm{Hom}_{E^e}((s\overline{A})^{\otimes r},A)$，有
(1) $\partial_1[f,g]=[\partial_1(f)\ g]+(-1)^{|f|+1}[f,\partial_1(g)]$,
(2) $[f,g]=-(-1)^{(|f|+1)(|g|+1)}[g,f]$,(3) 分次
Jacobi 恒等式:

$$(-1)^{(|f|+1)(|h|+1)}[[f,g],h]+(-1)^{(|g|+1)(|f|+1)}[[g,h],f]+(-1)^{(|h|+1)(|g|+1)}[[h,f],g]=0.$$

根据引理 2.5 (1)，$C^*(A$上的 Gerstenhaber 括号在 $\mathrm{HH}^*(A)$上诱导出 Gerstenhaber 括号。由引理 2.5 (2) 和 (3) 可知，$(s\mathrm{HH}^*(A)\ [-,-])$ 是一个分次李代数。

杯积和 Gerstenhaber 括号之间满足以下莱布尼茨法则。

引理 2.6。对于所有 $f\in\mathrm{Hom}_{E^e}((s\overline{A})^{\otimes m},A)$、$g\in\mathrm{Hom}_{E^e}((s\overline{A})^{\otimes n},A)$、$h\in\mathrm{Hom}_{E^e}((sA)^{\otimes r},A)$，有

$$[f,g\smile h]=[f,g]\smile h+(-1)^{(|f|+1)|g|}g\smile[f,h].$$

Gerstenhaber 代数。一个*Gerstenhaber*代数 $H^\bullet=(H^\bullet,\cdot,[-,-])$既是分次交换代数（$H^\bullet,\cdot$），也是分次李代数（$sH^\bullet,[-,-]$），并且满足分次 Leibniz 规则。

定理 2.7。设 A 是一个增广 *dg* E-代数。则 $(\mathrm{HH}^*(A)\smile,[-,-])$ 是一个 *Gerstenhaber*代数。

2.3. **分次双侧 CS-投射分解**。

回顾一下，我们固定一个分次斜温和三元组 (Q,R,Sp)，并令 $A=\mathbb{K}Q/I$ 为相应的分次斜温和代数，其中 I 表示由 $\mathbb{K}Q$ 生成的 $R\cup\{\varepsilon^2-\varepsilon\mid\varepsilon\in\mathrm{Sp}\}$ 的双边理想。我们给出 S. Chouhy 与第三作者在 [11] 中引入的斜温和代数投射分解的分次版本。CS-分解可以看作是单项式代数的 Bardzell 分解的一种变形，并适用于分次斜温和代数。

如第 2.2 节所述，分次斜温和代数的 Hochschild（上）同调可通过由双边 bar 分解诱导的 Hochschild（上）链复形计算，其中的运算和代数结构都是自然定义的。然而，这种分解通常过于庞大，不适合进行具体计算。为解决这一问题，我们改用 A 的分次 CS-投射分解，它规模小得多，更适合具体计算。

令 $\Gamma=\cup_{n\in\mathbb{N}}\Gamma_n$，其中 Γ_n 是由 n 中长度为 Q 的路径组成的集合，且这些路径的所有长度为 2 的子路径都属于 $S=R\cup\{\varepsilon^2\mid\varepsilon\in\mathrm{Sp}\}$。因此，我们有 $\Gamma_0=Q_0$ 和 $\Gamma_1=Q_1$。为简便起见，我们将 $\{\varepsilon^n\mid\varepsilon\in\mathrm{Sp}\}$ 记作 Sp^n。注意，对于 Sp^n，它是 Γ_n 的子集。对于 $n\geq 1$，若 $\mathrm{Sp}=\emptyset$，则有 A 是分次温和代数，且 Γ_n 的定义与 Γ_n 中的定义一致 [8]。

命题 2.8。设(Q,R,Sp)为一个（分次）*skew-gentle* 三元组，且 $A=\mathbb{K}Q/\langle R\cup\{\varepsilon^2-\varepsilon\mid\varepsilon\in\mathrm{Sp}\}\rangle$ 为相应的（分次）斜温和代数。对每个 $n\geq 0$，按上一段中的定义定义 Γ_n。作为分次 A-双模的 A 的分次 *CS*-投射分解 $\mathbb{P}$ 如下：

$$\cdots\to A\otimes\mathbb{K}\Gamma_n\otimes A\xrightarrow{d_n}A\otimes\mathbb{K}\Gamma_{n-1}\otimes A\to\cdots\to A\otimes\mathbb{K}\Gamma_1\otimes A\xrightarrow{d_1}A\otimes\mathbb{K}\Gamma_0\otimes A\xrightarrow{d_0}A\to 0,$$

其中，微分 d_n 是由下式给出的 A-双模态射：

$$d_n(1\otimes q\otimes 1)=\begin{cases}a_n\otimes a_{n-1}\cdots a_1\otimes 1+(-1)^n1\otimes a_n\cdots a_2\otimes a_1 & \text{if } q=a_n\cdots a_1\in\Gamma_n\setminus\mathrm{Sp}^n,\\ \varepsilon\otimes\varepsilon^{n-1}\otimes 1-1\otimes\varepsilon^{n-1}\otimes\varepsilon & \text{if } q=\varepsilon^n\in\mathrm{Sp}^n \text{ and } n \text{ is odd},\\ \varepsilon\otimes\varepsilon^{n-1}\otimes 1+1\otimes\varepsilon^{n-1}\otimes\varepsilon-1\otimes\varepsilon^{n-1}\otimes 1 & \text{if } q=\varepsilon^n\in\mathrm{Sp}^n \text{ and } n \text{ is even}.\end{cases}$$

特别地，对于所有 $e\in\Gamma_0$，$d_0(1\otimes e\otimes 1)=e$。

证明 根据 [11, 定理 4.1]，我们知道，对于任意 $q\in\Gamma_n$，$d_n(1\otimes q\otimes 1)$由两部分组成：一部分由 Bardzell 分解诱导，另一部分则源于约化。由于我们所考虑的代数是斜温和代数，这种约化的形式特别简单，下面将对此进行说明。

设 r 是一个基本约化，若 $q=a_n\cdots a_1\in\Gamma_n\setminus\mathrm{Sp}^n$，则 $r(q)=0$，因此 $d_n(1\otimes q\otimes 1)$ 的非零项仅来自 Bardzell 分解，即 $d_n(1\otimes q\otimes 1)=a_n\otimes a_{n-1}\cdots a_1\otimes 1+(-1)^n1\otimes a_n\cdots a_2\otimes a_1$。否则 $q\in\mathrm{Sp}^n$，设 $q=\varepsilon^n$ 对于 $\varepsilon\in\mathrm{Sp}$，因此 $r(q)=\varepsilon^{n-1}$。根据 [11, 定理 4.1], ，我们可以假设 $d_n(1\otimes\varepsilon^n\otimes 1)$ $=\varepsilon\otimes\varepsilon^{n-1}\otimes 1+(-1)^n1\otimes\varepsilon^{n-1}\otimes\varepsilon+\lambda_n1\otimes\varepsilon^{n-1}\otimes 1$，其中 $\lambda_n\in\mathbb{K}$。

由等式 $d_{n-1}\circ d_n=0$ 到 $1\otimes\varepsilon^n\otimes 1$，容易得到

$$\lambda_n=\begin{cases}-1 & \text{if } n \text{ is even},\\ 0 & \text{otherwise}.\end{cases}$$

□

A对 $\mathbb{P}$ 应用 $\mathrm{Hom}_{A^e}(-,A)$ 后，我们得到以下上链复形 $\mathrm{Hom}_{A^e}(\mathbb{P},A)$，

$$0\to\mathrm{Hom}_{A^e}(A\otimes\mathbb{K}\Gamma_0\otimes A,A)\xrightarrow{d^0}\cdots\to\mathrm{Hom}_{A^e}(A\otimes\mathbb{K}\Gamma_n\otimes A,A)\xrightarrow{d^n}\mathrm{Hom}_{A^e}(A\otimes\mathbb{K}\Gamma_{n+1}\otimes A,A)\to\cdots,$$

其微分由 $d^n(f)=f\circ d_{n+1}$ 给出。由于 d_* 保持分次，d^* 也具有相同性质。因此，该复形可以分解为

$$\mathrm{Hom}_{A^e}(\mathbb{P},A)=\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}_{A^e}(\mathbb{P},A)^j.$$

在计算霍赫希尔德上同调后，这一分解给出了每个 n 次霍赫希尔德上同调空间 $\mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_{A^e}(\mathbb{P},A))\cong\mathrm{Ker}(d^n)/\mathrm{Im}(d^{n-1})$ 的分解。更确切地说，A 的分次霍赫希尔德上同调由下式给出

$$\mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_{A^e}(\mathbb{P},A))=\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}\mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_{A^e}(\mathbb{P},A)^j)=:\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}\mathrm{HH}^{n,j}(A),$$

其中 $\mathrm{HH}^{n,j}(A)$ 表示 $\mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_{A^e}(\mathbb{P},A)^j)$。此外，对于每个元素 $f\in\mathrm{Hom}_{A^e}(\mathbb{P}_n,A)^j$，我们称 f 的内度为 j，记作 $|f|=j$，并称 f 的外部度为 n。

借助 C. Cibils 引入的平行路径，复形 $\mathrm{Hom}_{A^e}(\mathbb{P},A)$ 更易理解。若两条路径p 和 q 具有相同的源点和终点，则称它们平行，记作 $p\|q$。设 X 和 Y 为 Q中的路径集合，定义 $X\|Y:=\{(p,q)\in X\times Y\mid p\|q\}$ 和 $\mathbb{K}(X\|Y)$ 为以 $X\|Y$为基的 $\mathbb{K}$-向量空间。

引理 2.9. [13] 对于每个 $n \geq 0$，存在一个 $\mathbb{K}$-向量空间同构：

$$\mathrm{Hom}_{A^e}(\mathbb{P}_n, A) = \mathrm{Hom}_{A^e}(A \otimes \mathbb{K}\Gamma_n \otimes A, A) \cong \mathbb{K}(\Gamma_n \| \mathcal{B}),$$

其中，对于 $(\gamma, b) \in \Gamma_n \| \mathcal{B}$，相应的映射 $f_{(\gamma,b)}: \mathbb{P}_n = A \otimes \mathbb{K}\Gamma_n \otimes A \to A$ 将 $p \otimes \gamma' \otimes q \in \mathbb{P}_n$ 映射到 $(-1)^{|p|(|b|-|\gamma|)} \delta_{\gamma,\gamma'} \cdot \pi(pbq)$，其中 p、$q \in \mathcal{B}$ 和 $\gamma' \in \Gamma_n$。

在此引理之后，我们给出复形 $\mathrm{Hom}_{A^e}(\mathbb{P}, A)$ 的一种新描述。

命题 2.10。 设 (Q, R, Sp) 为一个分次斜温和三元组，并设 $A = \mathbb{K}Q/\langle R \cup \{\varepsilon^2 - \varepsilon \mid \varepsilon \in \mathrm{Sp}\}\rangle$ 为相应的分次斜温和代数。对每个 $n \geq 0$，定义 Γ_n 如上。A 的分次霍赫希尔德上同调是下列复形的上同调

$$\mathbb{K}(\Gamma \| \mathcal{B}): \ 0 \to \mathbb{K}(\Gamma_0 \| \mathcal{B}) \xrightarrow{d^0} \mathbb{K}(\Gamma_1 \| \mathcal{B}) \to \cdots \to \mathbb{K}(\Gamma_n \| \mathcal{B}) \xrightarrow{d^n} \mathbb{K}(\Gamma_{n+1} \| \mathcal{B}) \to \cdots$$

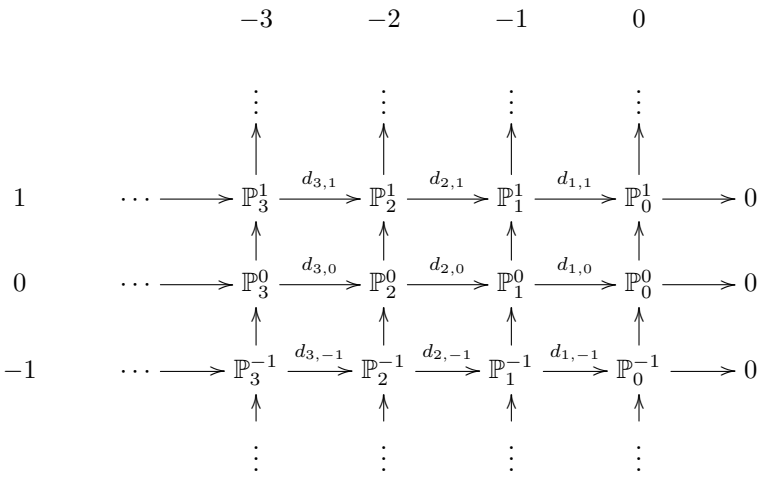
微分 d^n 定义为

$$d^n(q,\alpha) = \begin{cases} \sum\limits_{\substack{b \in Q_1 \\ bq \in \Gamma_{n+1}}} (-1)^{|b|(|\alpha|-|q|)}(bq, \pi(b\alpha)) - (-1)^n \sum\limits_{\substack{a \in Q_1 \\ qa \in \Gamma_{n+1}}} (qa, \pi(\alpha a)) & \text{if } q \in \Gamma_n \setminus \mathrm{Sp}^n, \\ (\varepsilon^{n+1}, \pi(\varepsilon\alpha)) - (\varepsilon^{n+1}, \pi(\alpha\varepsilon)) & \text{if } q = \varepsilon^n \in \mathrm{Sp}^n \text{ and } n \text{ is even}, \\ (\varepsilon^{n+1}, \pi(\varepsilon\alpha)) + (\varepsilon^{n+1}, \pi(\alpha\varepsilon)) - (\varepsilon^{n+1}, \pi(\alpha)) & \text{if } q = \varepsilon^n \in \mathrm{Sp}^n \text{ and } n \text{ is odd}, \end{cases}$$

对所有 $(q, \alpha) \in \Gamma_n \| \mathcal{B}$。

因此，$\mathrm{HH}^{n,\bullet}(A) \cong (\mathrm{Ker}(d^n)/\mathrm{Im}(d^{n-1}))^{\bullet}$。然而，如果我们将 A 视为微分为零的微分分次代数，那么也可以像第 2.2 节中那样定义其霍赫希尔德上同调 $\mathrm{HH}^*(A)$。A 我们将探讨 $\mathrm{HH}^{\bullet,\bullet}(A)$ 与 $\mathrm{HH}^*(A)$ 之间的关系。

定义 2.11。 考虑以下双复形



其中，$\mathbb{P}_n^j$ 中的上标 j 表示元素的次数，水平微分由 d_n 在 $j \in \mathbb{Z}$ 上的限制 $d_{n,j} := d_n|_{\mathbb{P}_n^j}$ 给出，竖直微分恒为 0。我们将与该双复形相关联的全复形记为（T_*, t_*），称为双边 *CS*-投射分解，即

$$T_N = \bigoplus_{\substack{N=j-n \\ n \geq 0, j \in \mathbb{Z}}} \mathbb{P}_n^j, \text{ and } t_N = \sum_{\substack{N=j-n \\ n \geq 0, j \in \mathbb{Z}}} d_{n,j}.$$

特别地，对于 t　对于非分次箭图代数，复形 T_* 与 CS-射影分解相一致　on.

复形（$\mathcal{H}om_{A^e}(T_*,\ A)\ \varkappa$）定义如下：对于任意 $N\in\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}om^N_{A^e}(T_*,A)&=\prod_{M\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}_{A^e}(T_M,A^{M+N})\\&=\prod_{\substack{N=n+j\\ n\geq 0,\,j\in\mathbb{Z}}}\mathrm{Hom}_{A^e}(\mathbb{P}_n,A)^j,\end{aligned}$$

且微分 $\varkappa$ 定义为

$$\varkappa(f)=(-1)^{n+j-1}f\circ d_{n+1},$$

对于 $f\in\mathrm{Hom}_{A^e}(\mathbb{P}_n,\ A)^j$。

在下一节中，我们将构造双边 bar 分解与双边 CS-投射分解之间的比较映射，从而将定义在前者上的杯积和 Gerstenhaber 括号等代数结构转移到后者上。根据定义2.11，我们有

$$\mathrm{HH}^N(A)=\mathrm{H}^N(\mathcal{H}om_{A^e}(T_*,A))\cong\prod_{\substack{N=n+j\\ n\geq 0,\,j\in\mathbb{Z}}}\mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_{A^e}(\mathbb{P}_n,A)^j)=\prod_{\substack{N=n+j\\ n\geq 0,\,j\in\mathbb{Z}}}\mathrm{HH}^{n,j}(A),$$

其中 $\mathrm{HH}^{n,\ j}(A)\ \cong$核$(\quad d^{n,\ j})/$像$(d^{n-1,\ j})\ \cong$(核$(d^n)/$像$(d^{n-1}))^j$ 其中 $d^{n,\ j}:=\mathrm{Hom}_{A^e}(d_{n,\ j},\quad A)\cong d^n|_{(\mathbb{K}(\Gamma_n\|\mathcal{B}))^j}$.

对于元素 $f\in\mathrm{Hom}_{A^e}(\mathbb{P}_n,\ A)^j$，我们将 f的总次数称为 $N=n+j$，记作 $\deg(f)$，即 $|f|=j$的内度与 n 的外部度之和。

然而，我们注意到微分的符号不同，也就是说，我们有

$$\varkappa(f)=(-1)^{\deg(f)+1}f\circ d_{n+1}=(-1)^{\deg(f)+1}d^n(f),$$

这一差异不会影响作为向量空间的霍赫希尔德上同调生成元的计算，只会影响其代数结构。因此，我们将使用复形 $(\mathrm{Hom}_{A^e}(\mathbb{P},\ A)\ d^*)$ 来计算 $\mathrm{HH}^*(A)$ 作为分次向量空间的生成元，并在考虑代数结构时使用复形 $(\mathcal{H}om_{A^e}(T_*,\ A)\ \varkappa)$。

2.4. **比较态射**。

本节中，令 $A=\mathbb{K}Q/\langle R\cup\{\varepsilon^2-\varepsilon\mid\varepsilon\in\mathrm{Sp}\}\rangle$ 为一个分次斜温和代数，我们将构造双边 bar 分解 $B(A,\ A,\ A)$ 与 A 的双边 CS-投射分解 T_* 之间的比较态射。

分次代数 A的两个投射分解之间的比较态射，是一个链复形态射，它将 A 上的恒等映射提升。将 $\mathrm{Hom}_{A^e}(-,\ A)$ 作用于该比较态射，可得到一个拟同构。对于分次代数，比较态射保持分次。

我们将定义映射 $F\colon\ T_*\to B(A,\ A,\ A)$ 和 $G\colon\ B(A,\ A,\ A)\to T_*$，然后证明它们实际上是比较态射。

对于任意 $N\in\mathbb{Z}$，令

$$F_N=(F^n_N)_{n\geq 0}\colon\ T_N=\bigoplus_{\substack{N=r-n\\ n\geq 0,r\in\mathbb{Z}}}\mathbb{P}^r_n\to B(A,A,A)_N=\bigoplus_{n\geq 0}(A\otimes(s\overline{A})^{\otimes n}\otimes A)^N$$

使得 $F^n_N\colon\ \mathbb{P}^{N+n}_n=(A\otimes\mathbb{K}\Gamma_n\otimes A)^{N+n}\to(A\otimes(sA)^{\otimes n}\otimes\overline{A})^N$ 是映射的分次 A-双模扩张（即，对于 $a\otimes q\otimes b\in(A\otimes\mathbb{K}\Gamma_n\otimes A)^{N+n},\quad F^n_N(a\otimes q\otimes b)=(-1)^{n|a|}aF^n_{|q|-n}(1\otimes q\otimes 1)b)$，该映射定义如下。

令 $F^0_N=\mathrm{id}_{(A\otimes A)^N}$，并且对于 $n\geq 1$，令 $1\otimes q\otimes 1$为 $1\otimes\Gamma_n\otimes 1$的一个元素。令 $q=a_n\cdots a_1\in\Gamma_n$和 $_n\sigma(a)=\sum(|a_i|+\cdots+|a_n|)$，定义$_{i=2}$

$$F^n_{|q|-n}(1\otimes q\otimes 1):=(-1)^{\sigma(a)}\ 1\otimes sa_n\otimes\cdots\otimes sa_1\otimes 1.$$

命题 2.12. 映射 $F\colon\ T_*\to B(A,A,A)$ 是一个比较态射。

证明 为了证明 F 是一个比较态射，需要验证该图 m

$$\begin{array}{ccc}(A\otimes_E \mathbb{K}\Gamma_n\otimes_E A)^{N+n} & \xrightarrow{\quad d_n\quad} & (A\otimes_E \mathbb{K}\Gamma_{n-1}\otimes_E A)^{N+n}\\ \Big\downarrow{\scriptstyle F_N^n} & & \Big\downarrow{\scriptstyle F_{N+1}^{n-1}}\\ (A\otimes_E (s\overline{A})^n\otimes_E A)^N & \xrightarrow{\quad \delta_1\quad} & (A\otimes_E (s\overline{A})^{n-1}\otimes_E A)^{N+1}\end{array}$$

对 $n\geq 1$ 可交换。对于 $\Gamma_n\backslash \mathsf{Sp}^n$ 中的元素，这并不困难。

设 $\varepsilon^n\in \mathsf{Sp}^n$，我们需要考虑两种情况： n 为奇数和 n 为偶数。我们只给出 n 为奇数时的证明，因为另一种情况（n 为偶数）可以用类似的方法推得。

假设 n 为奇数。我们有

$$F^n_{-n}(1\otimes\varepsilon^n\otimes 1)=1\otimes\underbrace{s\varepsilon\otimes\cdots\otimes s\varepsilon}_{n}\otimes 1$$

and

$$\begin{aligned}\delta_1(F^n_{-n}(1\otimes\varepsilon^n\otimes 1)) &= \varepsilon\otimes\underbrace{s\varepsilon\otimes\cdots\otimes s\varepsilon}_{n-1}\otimes 1+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\ 1\otimes\underbrace{s\varepsilon\otimes\cdots\otimes s\varepsilon}_{n-1}\otimes 1\\ &\quad -1\otimes\underbrace{s\varepsilon\otimes\cdots\otimes s\varepsilon}_{n-1}\otimes\varepsilon\\ &= \varepsilon\otimes\underbrace{s\varepsilon\otimes\cdots\otimes s\varepsilon}_{n-1}\otimes 1-1\otimes\underbrace{s\varepsilon\otimes\cdots\otimes s\varepsilon}_{n-1}\otimes\varepsilon.\end{aligned}$$

另一方面， n 为奇数意味着

$$d_n(1\otimes\varepsilon^n\otimes 1)=\varepsilon\otimes\varepsilon^{n-1}\otimes 1-1\otimes\varepsilon^{n-1}\otimes\varepsilon$$

and

$$F^{n-1}_{-n+1}(d_n(1\otimes\varepsilon^n\otimes 1))=\varepsilon\otimes\underbrace{s\varepsilon\otimes\cdots\otimes s\varepsilon}_{n-1}\otimes 1-1\otimes\underbrace{s\varepsilon\otimes\cdots\otimes s\varepsilon}_{n-1}\otimes\varepsilon.$$

因此， $F^{n-1}_{-n+1}(d_n(1\otimes\varepsilon^n\otimes 1))=\delta_1(F^n_{-n}(1\otimes\varepsilon^n\otimes 1))$。这就完成了证明。

□

接下来，我们定义映射 $G\colon B(A,\ A,\ A)\to T_*$，并证明它是一个比较映射。首先，我们引入以下 $\mathbb{K}$-基，它属于 $A\otimes(sA)^{\otimes n}\otimes A$:

$$\mathcal{B}_{\mathbb{B}_n}=\left\{\alpha_{n+1}\otimes s\alpha_n\otimes\ldots\otimes s\alpha_1\otimes\alpha_0\ \middle|\ \begin{array}{ll}\text{(i)} & \alpha_j\in\mathcal{B},\ \text{for all } j;\ l(\alpha_j)\geq 1,\ \text{for } j=1,\ldots,n;\\ \text{(ii)} & t(\alpha_j)=s(\alpha_{j+1}),\ \text{for } j=0,\ldots,n\end{array}\right\}.$$

其次，令

$$\mathcal{B}'_{\mathbb{B}_n}=\left\{1\otimes s\alpha_n\otimes\ldots\otimes s\alpha_1\otimes 1\ \middle|\ \begin{array}{ll}\text{(i)} & \alpha_j\in\mathcal{B}\text{ and } l(\alpha_j)\geq 1,\ \text{for } j=1,\ldots,n;\\ \text{(ii)} & t(\alpha_j)=s(\alpha_{j+1}),\ \text{for } j=1,\ldots,n-1\end{array}\right\}.$$

显然， $\mathcal{B}'_{\mathbb{B}_n}\subset\mathcal{B}_{\mathbb{B}_n}$ 和 $\mathcal{B}'_{\mathbb{B}_n}$ 生成 $A\otimes(sA)^{\otimes n}\otimes\overline{A}$，使其成为一个分次 A-双模。

对于任意 $N\in\mathbb{Z}$，令

$$G_N=(G^n_N)_{n\geq 0}:\ B(A,A,A)_N=\bigoplus_{n\geq 0}(A\otimes(s\overline{A})^{\otimes n}\otimes A)^N\to T_N=\bigoplus_{\substack{N=r-n\\ n\geq 0,r\in\mathbb{Z}}}\mathbb{P}^r_n$$

其中 $G_N^n:(A\otimes(sA)^{\otimes n}\otimes A)^N\to\mathbb{P}_n^{N+n}=(A\otimes\mathbb{K}\Gamma_n\otimes A)^{N+n}$ 是下述映射的分次 A-双模扩张。

对于 $n=0$，定义 $G_N^0=\mathrm{id}^{(A\otimes A)^N}$，并且对于 $n=1$ 和 $1\otimes s\alpha\otimes 1\in\mathcal{B}'_{\mathbb{B}_1}$，若 $\alpha=a_l\cdots a_1$ 和 $a_i\in Q_1$，则令

$$G^1_{|\alpha|-1}(1\otimes s\alpha\otimes 1):=\sum_{i=1}^{l}a_l\cdots a_{i+1}\otimes a_i\otimes a_{i-1}\cdots a_1.$$

$_n$对于 $n>1$ 和 $q=1\otimes s\alpha_n\otimes\ldots\otimes s\alpha_1\otimes 1\in\mathcal{B}'_{\mathbb{B}_n}$，若 $|q|=\sum_{i=1}(|\alpha_i|-1)$，则假设 $\alpha_i=a^i_{l(\alpha_i)}\cdots a^i_1$，且每个$a^i_j\in Q_1$均满足；若 $a^n_1\alpha_{n-1}\ldots\alpha_2a^1_{l(\alpha_1)}\in\Gamma_n$，则令

$$G^n_{|q|}(q):=(-1)^{\sigma(\alpha)}a^n_{l(\alpha_n)}\cdots a^n_2\otimes a^n_1\alpha_{n-1}\ldots\alpha_2a^1_{l(\alpha_1)}\otimes a^1_{l(\alpha_1)-1}\cdots a^1_1,$$

$_n$其中 $\sigma(\alpha)=\sum_{i=2}(|\alpha_i|+\cdots+|\alpha_n|)$，特别地，若 $a^n_1\alpha_{n-1}\ldots\alpha_2a^1_{l(\alpha_1)}=\varepsilon^n\in\mathsf{Sp}^n$，根据定义，我们知道

$$G^n_{|\alpha_1|+|\alpha_n|}(q):=(-1)^{(n-1)|\alpha_n|}a^n_{l(\alpha_n)}\cdots a^n_2\otimes\varepsilon^n\otimes a^1_{l(\alpha_1)-1}\cdots a^1_1,$$

对于所有其他情况，$G^n_{|q|}(q):=0$。

命题 2.13. $G:\ B(A,A,A)\to T_*$ 是一个比较态射。此外，$GF=$恒等态射 且 FG 同伦于 恒等态射。

证明 第一个图表的交换性

$$\begin{array}{ccccc}(A\otimes_E s\overline{A}\otimes_E A)^N & \xrightarrow{\delta_1} & (A\otimes A)^{N+1} & \longrightarrow & A\\ \downarrow{\scriptstyle G^1_N} & & \| & & \\ (A\otimes_E\mathbb{K}\Gamma_1\otimes_E A)^{N+1} & \xrightarrow{d_1} & (A\otimes A)^{N+1} & \longrightarrow & A\end{array}$$

通过计算 $d_1\circ G^1_N$ 可立即得出。我们还需要证明下图的交换性:

$$\begin{array}{ccc}(A\otimes_E(s\overline{A})^n\otimes_E A)^N & \xrightarrow{\delta_1} & (A\otimes_E(s\overline{A})^{n-1}\otimes_E A)^{N+1}\\ \downarrow{\scriptstyle G^n_N} & & \downarrow{\scriptstyle G^{n-1}_{N+1}}\\ (A\otimes_E\mathbb{K}\Gamma_n\otimes_E A)^{N+n} & \xrightarrow{d_n} & (A\otimes_E\mathbb{K}\Gamma_{n-1}\otimes_E A)^{N+n}\end{array}$$

设 $q=1\otimes s\alpha_n\otimes\cdots\otimes s\alpha_1\otimes 1\in\mathcal{B}'_{\mathbb{B}_n}$，其中 $\alpha_i=a^i_{l(\alpha_i)}\cdots a^i_1$ 对每个 $a^i_j\in Q_1$,

(1) 若 $a^n_1\alpha_{n-1}\ldots\alpha_2a^1_{l(\alpha_1)}\in\Gamma_n\setminus\mathsf{Sp}^n$，则

$$\begin{aligned}d_n(G^n_{|q|}(q))=&d_n((-1)^{\sigma(\alpha)}a^n_{l(\alpha_n)}\cdots a^n_2\otimes a^n_1\alpha_{n-1}\ldots\alpha_2a^1_{l(\alpha_1)}\otimes a^1_{l(\alpha_1)-1}\cdots a^1_1)\\ =&(-1)^{\sigma(\alpha)}\alpha_n\otimes\alpha_{n-1}\cdots\alpha_2a^1_{l(\alpha_1)}\otimes a^1_{l(\alpha_1)-1}\cdots a^1_1\\ &+(-1)^{\sigma(\alpha)-n}a^n_{l(\alpha_n)}\cdots a^n_2\otimes a^n_1\alpha_{n-1}\cdots\alpha_2\otimes\alpha_1\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}G^{n-1}_{|q|+1}(\delta_1(q)) =&G^{n-1}_{|q|+1}(\alpha_n\otimes s\alpha_{n-1}\otimes\cdots\otimes s\alpha_1\otimes 1+(-1)^{\sum\limits_{i=2}^{n}|\alpha_i|-n}1\otimes s\alpha_n\otimes\cdots\otimes s\alpha_2\otimes\alpha_1)\\ =&(-1)^{(n-1)|\alpha_n|}\alpha_n G^{n-1}_{|q|-|\alpha_n|+1}(1\otimes s\alpha_{n-1}\otimes\cdots\otimes s\alpha_1\otimes 1)\\ &+(-1)^{\sum\limits_{i=2}^{n}|\alpha_i|-n}G^{n-1}_{|q|-|\alpha_1|+1}(1\otimes s\alpha_n\otimes\cdots\otimes s\alpha_2\otimes 1)\alpha_1\\ =&(-1)^{\sigma(\alpha)}\alpha_n\otimes\alpha_{n-1}\cdots\alpha_2 a^1_{l(\alpha_1)}\otimes a^1_{l(\alpha_1)-1}\cdots a^1_1\\ &+(-1)^{\sigma(\alpha)-n}a^n_{l(\alpha_n)}\cdots a^n_2\otimes a^n_1\alpha_{n-1}\cdots\alpha_2\otimes\alpha_1\\ =&d_n(G^n_{|q|}(q));\end{aligned}$$

(2) 若 $a^n_1\alpha_{n-1}\ldots\alpha_2 a^1_{l(\alpha_1)}=\varepsilon^n\in \mathsf{Sp}^n$, 则

$$\begin{aligned}d_n(G^n_{|q|}(q)) =&d_n((-1)^{(n-1)|\alpha_n|}a^n_{l(\alpha_n)}\cdots a^n_2\otimes\varepsilon^n\otimes a^1_{l(\alpha_1)-1}\cdots a^1_1)\\ =&(-1)^{(n-1)|\alpha_n|}a^n_{l(\alpha_n)}\cdots a^n_2(\varepsilon\otimes\varepsilon^{n-1}\otimes 1+(-1)^n 1\otimes\varepsilon^{n-1}\otimes\varepsilon+\lambda_n\, 1\otimes\varepsilon^{n-1}\otimes 1)a^1_{l(\alpha_1)-1}\cdots a^1_1\\ =&(-1)^{(n-1)|\alpha_n|}\alpha_n\otimes\varepsilon^{n-1}\otimes a^1_{l(\alpha_1)-1}\cdots a^1_1\\ &+(-1)^{(n-1)|\alpha_n|+n}a^n_{l(\alpha_n)}\cdots a^n_2\otimes\varepsilon^{n-1}\otimes\alpha_n\\ &+(-1)^{(n-1)|\alpha_n|}\lambda_n a^n_{l(\alpha_n)}\cdots a^n_2\otimes\varepsilon^{n-1}\otimes a^1_{l(\alpha_1)-1}\cdots a^1_1,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}G^{n-1}_{|q|+1}(\delta_1(q)) =&G^{n-1}_{|q|+1}(\alpha_n\otimes\underbrace{s\varepsilon\otimes\cdots\otimes s\varepsilon}_{n-2}\otimes s\alpha_1\otimes 1+(-1)^{|\alpha_n|-n}1\otimes s\alpha_n\otimes\underbrace{s\varepsilon\otimes\cdots\otimes s\varepsilon}_{n-2}\otimes\alpha_1\\ &+(-1)^{|\alpha_n|}\lambda_n\, 1\otimes s\alpha_n\otimes\underbrace{s\varepsilon\otimes\cdots\otimes s\varepsilon}_{n-3}\otimes s\alpha_1\otimes 1)\\ =&(-1)^{(n-1)|\alpha_n|}\alpha_n G^{n-1}_{|q|-|\alpha_n|+1}(1\otimes\underbrace{s\varepsilon\otimes\cdots\otimes s\varepsilon}_{n-2}\otimes s\alpha_1\otimes 1)\\ &+(-1)^{|\alpha_n|+n}G^{n-1}_{|q|-|\alpha_1|+1}(1\otimes s\alpha_n\otimes\underbrace{s\varepsilon\otimes\cdots\otimes s\varepsilon}_{n-2}\otimes 1)\alpha_1\\ &+(-1)^{|\alpha_n|}\lambda_n G^{n-1}_{|q|+1}(1\otimes s\alpha_n\otimes\underbrace{s\varepsilon\otimes\cdots\otimes s\varepsilon}_{n-3}\otimes s\alpha_1\otimes 1)\\ =&(-1)^{(n-1)|\alpha_n|}\alpha_n\otimes\varepsilon^{n-1}\otimes a^1_{l(\alpha_1)-1}\cdots a^1_1\\ &+(-1)^{(n-1)|\alpha_n|+n}a^n_{l(\alpha_n)}\cdots a^n_2\otimes\varepsilon^{n-1}\otimes\alpha_n\\ &+(-1)^{(n-1)|\alpha_n|}\lambda_n a^n_{l(\alpha_n)}\cdots a^n_2\otimes\varepsilon^{n-1}\otimes a^1_{l(\alpha_1)-1}\cdots a^1_1\\ =&d_n(G^n_{|q|}(q))\end{aligned}$$

其中

$$\lambda_n=\begin{cases}-1 & \text{if } n \text{ is even},\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

(3) 若 $a^n_1\alpha_{n-1}\ldots\alpha_2 a^1_{l(\alpha_1)}\notin\Gamma_n$, 根据 G 的定义,

$$G^n_{|q|}(q)=0,\ \text{then } d_n(G^n_{|q|}(q))=0,$$

只需证明 $G^{n-1}_{|q|+1}(\delta_1(q)) = 0$。事实上，

$$\begin{aligned}\delta_1(q) =&\alpha_n \otimes s\alpha_{n-1} \otimes \cdots \otimes s\alpha_1 \otimes 1 + (-1)^{|\alpha_n|-1} 1 \otimes s(\alpha_n\alpha_{n-1}) \otimes s\alpha_{n-2} \otimes \cdots \otimes s\alpha_1 \otimes 1\\ &+ \sum_{i=3}^{n-1} (-1)^{\epsilon_{i,n}} 1 \otimes s\alpha_n \otimes \cdots \otimes s\alpha_{i+1} \otimes s(\alpha_i\alpha_{i-1}) \otimes s\alpha_{i-2} \otimes \cdots \otimes s\alpha_1 \otimes 1\\ &+ (-1)^{\epsilon_{2,n}} 1 \otimes s\alpha_n \otimes \cdots \otimes s\alpha_3 \otimes s(\alpha_2\alpha_1) \otimes 1 + (-1)^{\epsilon_{2,n}-1} 1 \otimes s\alpha_n \otimes \cdots \otimes s\alpha_2 \otimes \alpha_1,\end{aligned}$$

对于 $2 \le i \le n-2$, $G^{n-1}_{|q|+1}(1 \otimes s\alpha_n \otimes \cdots \otimes s\alpha_{i+1} \otimes s(\alpha_i\alpha_{i-1}) \otimes s\alpha_{i-2} \otimes \cdots \otimes s\alpha_1 \otimes 1) = 0$，根据 G 和 $a_1^n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_2 a^1_{l(\alpha_1)} \notin \Gamma_n$ 的定义。

现在我们将证明 $G^{n-1}_{|q|+1}(\alpha_n \otimes s\alpha_{n-1} \otimes \cdots \otimes s\alpha_1 \otimes 1) = (-1)^{|\alpha_n|} G^{n-1}_{|q|+1}(1 \otimes s(\alpha_n\alpha_{n-1}) \otimes s\alpha_{n-2} \otimes \cdots \otimes s\alpha_1 \otimes 1)$。分两种情况讨论。

若 $a_1^{n-1}\alpha_{n-2}\cdots\alpha_2 a^1_{l(\alpha_1)} \notin \Gamma_{n-1}$，则

$$G^{n-1}_{|q|+1}(\alpha_n \otimes s\alpha_{n-1} \otimes \cdots \otimes s\alpha_1 \otimes 1) = 0 = (-1)^{|\alpha_n|} G^{n-1}_{|q|+1}(1 \otimes s(\alpha_n\alpha_{n-1}) \otimes s\alpha_{n-2} \otimes \cdots \otimes s\alpha_1 \otimes 1),$$

而若 $a_1^{n-1}\alpha_{n-2}\cdots\alpha_2 a^1_{l(\alpha_1)} \in \Gamma_{n-1}$，则

$$\begin{aligned}G^{n-1}_{|q|+1}(\alpha_n \otimes s\alpha_{n-1} \otimes \cdots \otimes s\alpha_1 \otimes 1) =&(-1)^{(n-1)|\alpha_n|}\alpha_n G^{n-1}_{|q|+1-|\alpha_n|}(1 \otimes s\alpha_{n-1} \otimes \cdots \otimes s\alpha_1 \otimes 1)\\ =&(-1)^{\sigma(\alpha)}\alpha_n a^{n-1}_{l(\alpha_{n-1})} \cdots a_2^{n-1} \otimes a_1^{n-1}\alpha_{n-1}\cdots\alpha_2 a^1_{l(\alpha_1)} \otimes a^1_{l(\alpha_1)-1}\cdots a_1^1\\ =&(-1)^{|\alpha_n|} G^{n-1}_{|q|+1}(1 \otimes s(\alpha_n\alpha_{n-1}) \otimes s\alpha_{n-2} \otimes \cdots \otimes s\alpha_1 \otimes 1).\end{aligned}$$

类似地，我们可以证明

$$G^{n-1}_{|q|+1}(1 \otimes s\alpha_n \otimes \cdots \otimes s\alpha_3 \otimes s(\alpha_2\alpha_1) \otimes 1) = G^{n-1}_{|q|+1}(1 \otimes s\alpha_n \otimes \cdots \otimes s\alpha_2 \otimes \alpha_1).$$

$GF = \mathrm{id}$ 的其余恒等式可直接由 F 和 G的定义推出，因此略去。

□

3. Hochschild cohomology of graded skew-gentle algebras

在本节中，一如既往，我们固定一个分次斜温和三元组 $(Q,\ R,\ \mathrm{Sp})$，其中 Q 是一个连通箭图，并记 $A = \mathbb{K}Q/I$ 为相应的分次斜温和代数，其中 I 表示由 $\mathbb{K}Q$ 生成的 $R \cup \{\varepsilon^2 - \varepsilon \mid \varepsilon \in \mathrm{Sp}\}$双边理想。全文沿用记号 $\otimes := \otimes_E$ 其中 $E := \mathbb{K}Q_0$ 如第 2.2 小节所述。我们也沿用第 Γ_n 2.3 节中已定义的记号 2.3。

为陈述我们的主要结果，我们需要将 [11, 章 3] 中的一些记号推广到分次斜绅代数的情形。在表示（$Q,\ R,\ \mathrm{Sp}$）中，若圈 $C = c_m \ldots c_1$ 不等于另一个圈的真幂，则称其为本原的。令

$$\mathrm{rot}(C) := c_{m-1}\cdots c_1 c_m,$$

由 C 向左旋转一步所得的圈。若 $C = D^k$，其中 D 是本原循环，且k 是正整数，二者均由 C唯一确定，则圈 D 的长度称为圈 C的周期。

我们称 Q 中的两个圈共轭，如果其中一个可以通过反复旋转由另一个得到。这显然是箭图中所有圈上的一个等价关系，我们将其等价类称为 Q 的回路，并用 $\mathscr{C}$ 表示 Q 中所有回路的集合。回路的长度 （分别为次数）是其所包含的任意一个圈的长度（分别为次数）；如果一个回路所包含的圈全都是本原的，或者等价地，其中任意一个圈是本原的，则称该回路为本原的 。

若路径 α 属于 $\mathcal{B}$ （分别为 Γ），且不是 $\mathcal{B}$ （分别为 Γ）中其他元素的真子路径，则称其为 $\mathcal{B}$-极大的（分别为 Γ-极大的）。若圈 α 满足 $\alpha^2 \in \mathcal{B}$ （分别为 $C^2 \in \Gamma$），则称其为余完备（分别为 C 完备）。若一个回路所包含的圈均为余完备（分别为完备），则称该回路余完备（分别为完备）。我们用

- $\mathscr{C}(\mathcal{B})$ 满足以下条件的所有余完备回路 α 的集合：次数 $|\alpha|$为 α 偶数，或 $\mathrm{char}(\mathbb{K})$ 的 $\mathbb{K}$ 特征为 2；
- $\mathscr{C}(\Gamma)$ Γ 中的所有完全回路 C 的集合，满足： $l(C) - |C|$ 为偶数，或 $\mathrm{char}(\mathbb{K})$ 为 2。

此外，令 $\mathscr{C}(\mathcal{B})\overline{\ }$（分别地，$\overline{\mathscr{C}}(\Gamma)$）为属于 $\mathscr{C}(\mathcal{B})$（分别地，$\mathscr{C}(\Gamma)$）的回路的代表元集合，并选择它们使得

若 α和 β是 $\mathscr{C}(\mathcal{B})$ （分别地，$\mathscr{C}(\Gamma)\overline{\ }$的元素，且 $\alpha\beta$是 (Q, I)中的余完备（分别地，完全）圈，则$\alpha\beta$也属于 $\mathscr{C}(\mathcal{B})$ （分别地，$\mathscr{C}(\Gamma)\overline{\ }$。

此外，对于每个正整数 m，我们令 $\mathscr{C}_m(\Gamma)$（分别地，$\mathscr{C}_m\overline{\ }(\Gamma)$）为 $\mathscr{C}(\Gamma)$（分别地，$\mathscr{C}(\Gamma)$）中长度为 m 的回路所组成的子集。

箭图的生成树 Q 是一个连通无环子箭图的箭的集合，该子箭图包含 Q 的所有顶点。

3.1. 分次温和代数的Hochschild 上同调空间。

非分次温和代数的霍赫希尔德上同调空间 $\mathrm{HH}^m(A)$（$m \geq 0$）已在 A 中计算。 [8]现在我们将这些结果推广到分次温和情形。

在本节中，设 (Q, R) 是一个分次温和对， $A = \mathbb{K}Q/I$ 是相应的分次温和代数，其中 I 是由 R生成的 $\mathbb{K}Q$ 的理想。我们将 A 视为具有 $\mathrm{Sp} = \emptyset$的分次斜温和代数。注意，在这种情况下， Γ_n 是 Q 中长度为 n的路径集合，其中对于每个$n \geq 0$，其所有长度为 2 的子路径都属于 R ； 而 $\mathcal{B}$ 表示 Q 中不含 R中子路径的路径集合。

我们的目标是确定复形 $(\mathbb{K}(\Gamma\|\mathcal{B}), d)$ 的上同调。如前所述，箭图 Q 的分次在该复形中诱导出一个分次，并且微分是齐次的，因此，该复形的上同调按每个上同调次数分解为直和，其分量相对于温和代数的分次而言是齐次的。我们利用 [8, 第 3], 章中给出的关于温和代数霍赫希尔德上同调的结果；我们考虑忘记分次 $|\cdot|$ 后得到的复形，并将其记为 $(\mathbb{K}(\Gamma\|\mathcal{B}), d_f)$，也就是说，对于任意 $(q, \alpha) \in \Gamma_n\|\mathcal{B}$，有

$$(d^n - d_f^n)(q, \alpha) = \sum_{\substack{b \in Q_1 \\ bq \in \Gamma_{n+1}}} ((-1)^{|b|(|\alpha|-|q|)} - 1)(bq, \pi(b\alpha)).$$

元素 (q, α) 的权重 为 $l(\alpha) - l(q)$。非零元素 $u = \sum_{i=1}^m x_i(q_i, \alpha_i) \in \mathbb{K}(\Gamma_m\|\mathcal{B})$ 的秩 为该和的支撑的基数。

命题 3.1. （参见 [8, 命题3。3]）分次向量空间 $\mathrm{HH}^{0,\bullet}(A)$ 由以下 $\mathbb{K}(\Gamma_0\|\mathcal{B})$ 中的元素自由生成：

- 单位元
$$\mathbb{1} := \sum_{i \in Q_0} (e_i, e_i) \in \mathrm{HH}^{0,0}(A),$$
- 数对 $(s(\alpha)\ \alpha) \in \mathrm{HH}^{0,|\alpha|}(A)$，其中 α 是 $\mathcal{B}$-极大路径属于 (Q, R)，以及
- 这些和
$$\langle\!\langle \alpha \rangle\!\rangle := \sum_{i=0}^{r-1} (s(\mathrm{rot}^i(\alpha)), \mathrm{rot}^i(\alpha)) \in \mathrm{HH}^{0,|\alpha|}(A),$$

以及 $\alpha \in \overline{\mathscr{C}}(\mathcal{B})$ 和 r 它的周期。

证明 直接计算可知，命题陈述中列出的元素属于微分 d^0的核，且显然它们线性无关。因此，只需证明 $\mathrm{Ker}(d^0)$ 的每个不可约元素都是所列三个元素之一的标量倍。

假设 u 是不可约的 0-余循环，那么它是某个权重 l 的齐次且权齐次元素。若 $l=0$，则 $|u|=0$ 和 $d_f^0(u)=d^0(u)=0$，因此 $u=\mathbb{1}$。

接下来，假设 $l\geq 1$。我们可以写成

$$u=\sum_{i=1}^{r} x_i(e_i,\alpha_i),\quad r\geq 1$$

其中 $(e_i,\alpha_i)\in\Gamma_0\|\mathcal{B}$，且对所有 $1\leq i\leq r$ 都有 $0\neq x_i\in\mathbb{K}$。若存在一个指标 $i\in\{1,\dots,r\}$，使得 α_i 是 $\mathcal{B}$-极大的，则 $d_f^0(e_i,\alpha_i)=d^0(e_i,\alpha_i)=0$，这意味着 $u=(e_1,\alpha_1)$。

现在假设出现在 u 中的 α_1、……、α_r 均不是 $\mathcal{B}$-极大的，那么由命题 3.3]$_{r-1}$ 的证明可知，存在一个周期为 r 的余完全圈 $\alpha=(a_r\cdots a_1)^m$，使得 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_r\}=\{\alpha,\mathrm{rot}(\alpha)\dots,\mathrm{rot}^{r-1}(\alpha)\}$。我们可以重新标记指标，并写成 $u=\sum x_i(s(\mathrm{rot}^i(\alpha)),\mathrm{rot}^i(\alpha))$。由于 $d^0(u)=0$，它必定满足$_{i=0}$

$$x_i=(-1)^{|a_{r-i+1}|\cdot|\alpha|}x_{i-1},\qquad 1\leq i\leq r-1.$$

因此，$d^0(u)=(-1)^{|a_1|\cdot|\alpha|}(1-(-1)^{|\alpha|})x_0(a_1,\ a_1\alpha)$，当且仅当 $\mathrm{char}(\mathbb{K})=2$ 或 $|\alpha|$ 为偶数时，该式为零。这就完成了证明。

□

命题 3.2。*(参见 [8, 命题 3.5])* 设 T 是分次箭图 Q的一棵生成树。分次向量空间 $\mathrm{HH}^{1,\bullet}(A)$ 由以下 $\mathbb{K}(\Gamma\|\mathcal{B})$中的元素自由生成：

- 满足 $c\in Q_1\setminus T$的数对 $(c,c)\in\mathrm{HH}^{1,0}(A)$
- 满足以下条件的数对 $(c,\alpha)\in\mathrm{HH}^{1,\,|\alpha|-|c|}(A)$：$c$ 是一个 Γ-极大箭头，且 α 是一个既不以c开头也不以其结尾的路径
- 满足 $\alpha\in\mathscr{C}(\mathcal{B})$ 且 c是 α的首个箭头的数对 $(c,c\alpha)\in\mathrm{HH}^{1,\,|\alpha|}(A)$
- 数对 $(b,s(b))\in\mathrm{HH}^{1,-|b|}(A)$ 满足：Q 中存在一个环，使得 $b^2\in R$，$|b|$ 为奇数，或者 $\mathrm{char}(\mathbb{K})=2$。

证明 假设 u 是复形 $\mathbb{K}(\Gamma\|\mathcal{B})$ 中一个不可约的 1-余循环，且不是余边界。根据 [8,命题 3.5], 的证明，u 的秩为 1，令 $u=(c,\alpha)\in\Gamma_1\|\mathcal{B}$。由于 $d^1(u)=0$，以下三种情况之一成立：

(A) 要么在 Q 中存在箭 a和箭 b，使得

$$(bc,b\alpha)=(ca,\alpha a)\in\Gamma_2\|\mathcal{B}\quad\text{and}\quad(-1)^{(|\alpha|-|c|)|b|}+1=0,$$

(B) 要么不存在满足 $(bc,b\alpha)\in\Gamma_2\|\mathcal{B}$ 的箭 b，并且不存在满足 $(ca,\alpha a)\in\Gamma_2\|\mathcal{B}$的箭 a。

若 (A) 成立，则 $b=c=a$，b 是一个环，$b^2\in R$，$\alpha=s(b)$ 和 $(-1)^{|b|}+1=0$，也就是说，以下条件成立：

(1) 存在一个环 b，位于 Q 中，使得 $b^2\in R$ 和 $u=(b,\ s(b))$，且 $|b|$ 为奇数或 $\mathrm{char}(\mathbb{K})=2$。

设 (B) 成立。由 [8, 引理 3.4], 的证明可知，以下条件之一成立：

(2) 存在一支箭 c，使得 $u=(c,\ c)$；(3) 存在一支 Γ-极大箭 c 和一条路径 $\alpha\in\mathcal{B}$，它既不以 c 开头也不以其结尾，使得 $u=(c,\ \alpha)$；(4) 存在一个以箭 c 开头的余完全圈 δ，使得 $u=(c,\ c\delta)$。

满足条件 (1)、(2)、(3) 和 (4) 的元素在线性空间 $\mathbb{K}(\Gamma\|\mathcal{B})$ 中线性无关。记 Z为它们张成的空间。设 z 是 Z 中一个非零的权齐次余边界。显然，满足条件 (1) 或 (3) 的元素不是余边界。再次根据 [8, 命题 3.5]，有以下两种情况：

- z 是以下类型元素的线性组合

$$d^0(s(\epsilon),\epsilon)=(-1)^{|b||\epsilon|}(b,b\epsilon)-(a,a\mathrm{rot}(\epsilon))$$

  含有 ϵ 一个余完全循环， b 它的首个箭头与 a $\mathrm{rot}(\epsilon)$ 的首个箭头（即 ϵ的最后一个箭头）。在这种情况下，由命题 3.1 可知，$(b,b\epsilon)\in \mathrm{Im}(d^0)$ 当且仅当 $\mathrm{char}(\mathbb{K})\neq 2$ 且 $|\epsilon|$ 为奇数；
- z 是以下类型元素的线性组合

$$d^0(e_i,e_i)=\sum_{\substack{b\in Q_1\\ s(b)=i}}(b,b)-\sum_{\substack{a\in Q_1\\ t(a)=i}}(a,a)$$

  含有 $i\in Q_0$。由 [7, 定理 3.4] 的证明可知， z 与唯一的数对 (c,c) 的线性组合上同调等价，其中 $c\in Q_1\setminus T$。

这就完成了该命题的证明。

□

设 $C=(c_r\cdots c_1)^m_r$是 (Q,R) 中一个长度为 m、周期为 r 的完全循环。令

$$\langle\!\langle C\rangle\!\rangle_{gr}:=\sum_{i=0}^{r-1}(-1)^{im+(|c_r|+\cdots+|c_{r-i+1}|)|C|}(\mathrm{rot}^i(C),s(\mathrm{rot}^i(C))).$$

命题 3.3。（参见 [8, 命题 3.5]）设 $m\geq 2$。分次向量空间 $\mathrm{HH}^{m,\bullet}(A)$ 由以下元素组成的集合自由张成：

- $\langle\!\langle C\rangle\!\rangle_{gr}\in \mathrm{HH}^{m,-|C|}(A)$ 在 $C\in\overline{\mathscr{C}_m}(\Gamma)$，
- $(bC,b)\in \mathrm{HH}^{m,-|C|}(A)$ 在 $C\in\overline{\mathscr{C}_{m-1}}(\Gamma)$ 且 b C 的首个箭头，
- $(\gamma,\alpha)\in \mathrm{HH}^{m,|\alpha|-|\gamma|}(A)$ 其中 γ Γ-极大元素属于 Γ_m 和 γ，且 α 既不以相同的箭头开头，也不以相同的箭头结尾。

证明 设 u 是一个不可约的 m-余循环，且不是余边界。若 $r=\mathrm{秩}(u)>1$，则可写为 $u=\sum_{i=1}^{r}x_i(\gamma_i,\alpha_i)$，其中 $(\gamma_1,\alpha_1)\ldots,(\gamma_r,\alpha_r)$ 均属于 $\Gamma_m\|\mathcal{B}$，且两两不同；标量 $x_1,\ldots,x_r\in\mathbb{K}$ 均非零。正如 [8, 命题 3.9]中所证明的， u 满足以下三个条件：

- 对于所有 $i\in\{1,\ldots,r\}$，路径 γ_i都不是环的幂，
- 所有路径 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$的长度均为 0，
- 对于每个 $i\in\{1,\ldots,r\}$，路径 γ_i都是一个完全循环。

更确切地说，存在一个周期为 r 的完全循环 $C=(c_r\cdots c_1)^m_r$，使得

$$\{\gamma_1,\ldots,\gamma_r\}=\{C,\mathrm{rot}^1(C),\ldots,\mathrm{rot}^{r-1}(C)\}.$$

我们再次假设 $u=\sum_{i=0}^{r-1}x_i(\mathrm{rot}^i(C),s(\mathrm{rot}^i(C)))$；为了使 u 成为余循环，它必须满足

$$x_i=(-1)^{|c_{r-i+1}|\cdot|C|+m}x_{i-1},\qquad 1\leq i\leq r-1.$$

在此要求下，我们有 $d^m(\langle\!\langle C\rangle\!\rangle_{gr})=(-1)^{|c_1||C|}(1-(-1)^{m-|C|})\,x_0(c_1C,c_1)$。因此，当且仅当 $m-|C|$ 为偶数或 $\mathrm{char}(\mathbb{K})=2$ 时， u 才是余循环。也就是说，满足以下条件：

（a）存在一个周期为 $r\geq 2$ 的完备圈 C，使得 $m-|C|$ 为偶数或 $\mathrm{char}(\mathbb{K})=2$，且 $u=\langle\!\langle C\rangle\!\rangle_{gr}$。

若 $\mathrm{rank}(u)=1$，令 $u=(\gamma,\alpha)\in\Gamma_m\|\mathcal{B}$。根据 d^m 的定义，这告诉我们

（A）在 Q 中存在箭 a 和 b，使得

$$(b\gamma,b\alpha)=(\gamma a,\alpha a)\in\Gamma_{m+1}\|\mathcal{B}\quad\text{and}\quad(-1)^{(|\alpha|-|\gamma|)|b|}-(-1)^m=0,$$

(B) 或者不存在满足 $(b\gamma,b\alpha)\in\Gamma_{m+1}\|\mathcal{B}$ 的箭 b，并且不存在满足 $(\gamma a,\alpha a)\in\Gamma_{m+1}\|\mathcal{B}$ 的箭 a。

如 [8, 命题 310]，的证明中所述，(A) 中的第一个条件蕴含 b 是一个环，且$\gamma = b^m$ 和 $\alpha = s(b)$，而第二个条件表明 $m - |\gamma|$ 是偶数，或者 char($\mathbb{K}$) $= 2$。也就是说，以下条件成立：

(a') 存在一个环 b，使得 $m - m|b|$ 为偶数或 char($\mathbb{K}$) $= 2$，且 $u = (b^m,\ s(b))$。

假设我们处于情形 (B)。由命题 3.10] 的证明可知， u 是以下元素之一：

(b) (bC, b)，其中 C 是 Γ 中的一个完全循环$_{m-1}$ 且 $m\ \ -|C|$ 为奇数或 char($\mathbb{K}$) $= 2$, 且 $b\ \ C$的首个箭头；

(c) $(\gamma,\ \alpha)$，其中 γ 是 Γ_m 和 γ 中的一个 Γ-极大元素，且 α 的起始箭头和终止箭头均不相同。

(a)、(b)和(c)中的元素在 $\mathbb{K}(\Gamma\|\mathcal{B})$中线性无关。记它们张成的子空间为 Z 。根据 [8, 命题 3.11]及前述分析，Z 中的余边界子空间由以下元素张成：

- $(bC,\ b)$，其中 C 是 Γ_{m-1}中的一个完全回路， $m - |C|$ 为偶数，char($\mathbb{K}$) $\neq 2$，且 b 是 C的首个箭头；以及
- $(-1)^{|b|\cdot|C|}(bC,\ b)\ - (-1)^{m-1}(a\mathrm{rot}(C)\ a)$，其中 C 是 Γ_{m-1}中的一个完全回路， $m - |C|$ 为偶数，char($\mathbb{K}$) $\neq 2$，且 b 和 a 分别是 C 和 rot(C) 的首个箭头。

这就证明了该命题。

□

结合前面的三个命题，我们得到以下定理。

定理 3.4. 设 $A = \mathbb{K}Q/I$ 是一个分次温和代数， T 是分次箭图Q的一棵生成树。 A 的霍赫希尔德上同调 $\mathrm{HH}^*(A) = \bigoplus \mathrm{HH}^{\bullet,\blacklozenge}(A)$ 是由以下元素自由生成的分次向量空间

$*$=•+♦复形 $\mathbb{K}(\Gamma\|\mathcal{B})$的以下齐次上循环的上同调类：

$(\mathrm{G_I})$ 元素

$$\mathbb{1} := \sum_{i\in Q_0}(e_i, e_i) \in \mathrm{HH}^{0,0}(A),$$

$(\mathrm{G_{II}})$ 数对 $(s(\alpha)\ \alpha)\ \in \mathrm{HH}^{0,|\alpha|}(A)$，其中 α 是(Q, I)中的一条 $\mathcal{B}$-极大路径，$(\mathrm{G_{III}})$ 总和

$$\langle\!\langle\alpha\rangle\!\rangle := \sum_{i=0}^{r-1}(s(\mathrm{rot}^i(\alpha)), \mathrm{rot}^i(\alpha)) \in \mathrm{HH}^{0,|\alpha|}(A),$$

及其周期 $\overline{\alpha} \in \mathscr{C}(\mathcal{B})$ *and* r

$(\mathrm{G_{IV}})$ 数对 $(\alpha, \alpha)\ \in \mathrm{HH}^{1,0}(A)$，其中 α 有一个箭属于生成树的补集 T 的首个箭，

$(\mathrm{G_{V}})$ 数对 $(c, \mathrm{rot}^{-1}(c))\ \in \mathrm{HH}^{1,|\alpha|}(A)$，其中 $\overline{\alpha} \in \mathscr{C}(\mathcal{B})$ 以及 c 是 α 的首个箭，

$(\mathrm{G_{VI}})$ 数对 $(\gamma, \alpha)\ \in \mathrm{HH}^{l(\gamma),|\alpha|-|\gamma|}(A)$，其中 γ 一个 Γ-极大元素 Γ 以及 γ 和 α 既不以相同的箭开头也不以其结尾，

$(\mathrm{G_{VII}})$ 这些和

$$\langle\!\langle C\rangle\!\rangle_{gr} := \sum_{i=0}^{r-1}(-1)^{im+(|c_r|+\cdots+|c_{r-i+1}|)|C|}(\mathrm{rot}^i(C), s(\mathrm{rot}^i(C))) \in \mathrm{HH}^{m,-|C|}(A),$$

其中 $C \in \overline{\mathscr{C}}_m(\Gamma)$ 周期为 r，且 $C = (c_r \cdots c_1)^{\frac{m}{r}}$，

$(\mathrm{G_{VIII}})$ 数对 $(bC, b)\ \in \mathrm{HH}^{m,-|C|}(A)$，其中 $C \in \overline{\mathscr{C}}_{m-1}(\Gamma)$ 以及 $b\ \ C$的首个箭头。

3.2. **Gentle 与斜绅代数。**

可以按如下方式为每个分次斜温和代数 $A := \mathbb{K}Q/\langle R \cup \{\varepsilon^2 - \varepsilon\ \ |\ \varepsilon \in \mathrm{Sp}\}\rangle$ 关联一个分次温和代数 $A' := \mathbb{K}Q/\langle R \cup \{\varepsilon^2|\ \varepsilon \in \mathrm{Sp}\}\rangle$：

$$A := \mathbb{K}Q/\langle R \cup \{\varepsilon^2 - \varepsilon \mid \varepsilon \in \mathrm{Sp}\}\rangle \xrightarrow{\text{replace } \varepsilon^2 = \varepsilon \text{ by } \varepsilon^2 = 0} A' := \mathbb{K}Q/\langle R \cup \{\varepsilon^2 \mid \varepsilon \in \mathrm{Sp}\}\rangle.$$

事实上， A' 是 A 意义下的退化： [18], 另见 [12], ；我们还可以将 A 视为A'的变形，详见 [6] 。此外，它们的霍赫希尔德上同调也彼此相关。

一旦我们将 A' 视为一个没有特殊环的分次斜温和代数，就可以将命题 2.10 应用于 A'。注意，在这种情况下，与 A分别相关联的集合 Γ 和 $\mathcal{B}$ 分别与和A'相关联的集合 Γ' 和 $\mathcal{B}'$ 相同。我们将命题 2.10 中分别对应于 A 和 A'的复形记为 $(\mathbb{K}\langle\Gamma\|\mathcal{B}\rangle\ d)$ 和 $(\mathbb{K}\langle\Gamma\|\mathcal{B}\rangle\ \delta)$。回忆一下，对每个 $n\geq 1$，Sp^n 表示集合 $\{\varepsilon^n \mid \varepsilon\in \mathsf{Sp}\}$ 。定义 $d^n_{sp}:=d^n|_{\mathbb{K}\langle \mathsf{Sp}^n\|\mathcal{B}\rangle}$ 和 $d^n_{or}:=d^n|_{\mathbb{K}\langle(\Gamma_n\setminus \mathsf{Sp}^n)\|\mathcal{B}\rangle}$为 d^n 在 $n\geq 1$上的限制；对 δ^n也类似。

引理 3.5。 设 $(\mathbb{K}\langle\Gamma\|\mathcal{B}\rangle\ d)$ 和 $(\mathbb{K}\langle\Gamma\|\mathcal{B}\rangle\ \delta)$ 分别是命题 *2.10* 中对应于 A 和 A' 的复形。对每个 $n\geq 1$，我们有

- $d^n=d^n_{sp}\oplus d^n_{or}$ 和 $\delta^n=\delta^n_{sp}\oplus\delta^n_{or}$。特别是，
$$\begin{cases}\mathrm{Ker}(d^n)=\mathrm{Ker}(d^n_{sp})\oplus\mathrm{Ker}(d^n_{or})\\ \mathrm{Im}(d^n)=\mathrm{Im}(d^n_{sp})\oplus\mathrm{Im}(d^n_{or})\end{cases}\quad and\quad \begin{cases}\mathrm{Ker}(\delta^n)=\mathrm{Ker}(\delta^n_{sp})\oplus\mathrm{Ker}(\delta^n_{or})\\ \mathrm{Im}(\delta^n)=\mathrm{Im}(\delta^n_{sp})\oplus\mathrm{Im}(\delta^n_{or})\end{cases}.$$
- $d^n_{or}=\delta^n_{or}$。因此，核(d^n_{or}) $=$核(δ^n_{or}) 且 像$(d^n_{or})=$像(δ^n_{or})。

证明 我们将证明 $d^n=d^n_{sp}\oplus d^n_{or}$，由此即可推出关于 d^n 的第一个陈述。事实上，只需证明，像(d^n_{sp})中元素的各项不能被像(d^n_{or})中元素的各项抵消。

由命题 2.10中微分的公式，对于 $(\varepsilon^n,\alpha)\in\Gamma_n\|\mathcal{B}$ 和 $(q,\alpha')\in(\Gamma_n\setminus \mathrm{Sp}^n)\|\mathcal{B}$,

$$\begin{aligned}d^n_{sp}(\varepsilon^n,\alpha)&=(\varepsilon^{n+1},\pi_A(\varepsilon\alpha))+(-1)^{n+1}(\varepsilon^{n+1},\pi_A(\alpha\varepsilon))-\delta_{(-1)^{n+1},1}\cdot(\varepsilon^{n+1},\alpha),\\ d^n_{or}(q,\alpha')&=\sum_{\substack{b\in Q_1\\ bq\in\Gamma_{n+1}}}(-1)^{|b|(|\alpha'|-|q|)}(bq,\pi_A(b\alpha'))+(-1)^{n+1}\sum_{\substack{a\in Q_1\\ qa\in\Gamma_{n+1}}}(qa,\pi_A(\alpha' a)),\end{aligned}$$

其中 $\delta_{i,j}$表示克罗内克符号。若存在某个 $a,b\in Q_1$ 使得 $bq,qa\in\Gamma_{n+1}$，则这样的 bq和qa 对于 $\varepsilon\in\mathsf{Sp}$ 而言不能是 ε^{n+1}，因为 $q\in\Gamma_n\setminus\mathsf{Sp}^n$。因此， $d^n_{sp}(\varepsilon^n,\alpha)$ 的各项不能被 $d^n_{or}(q,\alpha')$ 的各项抵消。

通过将 π_A 替换为 $\pi_{A'}$，并在 $d^n_{or}(q,\alpha')$ 中得到 $\delta^n_{or}(q,\alpha')$，即可得到关于 δ^n 的类似证明。另请注意， $\delta^n_{sp}(\varepsilon^n,\alpha)=(\varepsilon^{n+1},\pi_{A'}(\varepsilon\alpha))+(-1)^{n+1}(\varepsilon^{n+1},\pi_{A'}(\alpha\varepsilon))$。因此，第一个结论得证。对于 $q\in\Gamma_n\setminus\mathsf{Sp}^n$，若存在某个 $a,b\in Q_1$ 使得 $bq,qa\in\Gamma_{n+1}$，则 $b,a\notin\mathsf{Sp}$。因此， $\pi_A(b\alpha')=\pi_{A'}(b\alpha')$ 且 $\pi_A(\alpha' a)=\pi_{A'}(\alpha' a)$。由此可知，对于任意 $(q,\alpha')\in(\Gamma_n\setminus\mathsf{Sp}^n)\|\mathcal{B}$，均有 $d^n_{or}(q,\alpha')=\delta^n_{or}(q,\alpha')$。

□

对于任意长度为正的路径 α in Q，分别用 α'_{lt} 和 α'_{rt} 表示 α 的末箭头和首个箭头。设 $\alpha=a_l\cdots a_1\in Q_l$ 的长度为 $l\geq 1$，则 $\alpha'_{\mathsf{lt}}=a_l$ 和 $\alpha'_{\mathsf{rt}}=a_1$。此外，还存在两条相关路径 α_{lt} 和α_{rt}，其长度可能为零，使得

$$\alpha=\alpha'_{\mathsf{lt}}\alpha_{\mathsf{lt}}=\alpha_{\mathsf{rt}}\alpha'_{\mathsf{rt}}.$$

注 3.6. 映射 $\delta^n_{sp},d^n_{sp}\colon\mathbb{K}\langle\mathsf{Sp}^n\|\mathcal{B}\rangle\to\mathbb{K}\langle\mathsf{Sp}^{n+1}\|\mathcal{B}\rangle$ 之间的关系如下。给定 $(\varepsilon^n,\alpha)\in\mathbb{K}\langle\mathsf{Sp}^n\|\mathcal{B}\rangle$，其中 $n\geq 1$,

- if $\alpha'_{\mathsf{rt}}=\varepsilon$ but $\alpha'_{\mathsf{lt}}\neq\varepsilon$, then $d^n_{sp}(\varepsilon^n,\alpha)=\begin{cases}\delta^n_{sp}(\varepsilon^n,\alpha) & \text{if } n \text{ is odd},\\ \delta^n_{sp}(\varepsilon^n,\alpha)-(\varepsilon^{n+1},\alpha) & \text{if } n \text{ is even},\end{cases}$
- if $\alpha'_{\mathsf{rt}}\neq\varepsilon$ but $\alpha'_{\mathsf{lt}}=\varepsilon$, then $d^n_{sp}(\varepsilon^n,\alpha)=\begin{cases}\delta^n_{sp}(\varepsilon^n,\alpha) & \text{if } n \text{ is odd},\\ -\delta^n_{sp}(\varepsilon^n,\alpha)+(\varepsilon^{n+1},\alpha) & \text{if } n \text{ is even},\end{cases}$
- if $\alpha'_{\mathsf{rt}}=\varepsilon$ and $\alpha'_{\mathsf{lt}}=\varepsilon$, then $\delta^n_{sp}(\varepsilon^n,\alpha)=0$ and $d^n_{sp}(\varepsilon^n,\alpha)=\begin{cases}(\varepsilon^{n+1},\alpha) & \text{if } n \text{ is odd},\\ 0 & \text{if } n \text{ is even},\end{cases}$

- in all other cases, we have $d^n_{sp}(\varepsilon^n,\alpha)=\begin{cases}\delta^n_{sp}(\varepsilon^n,\alpha)-(\varepsilon^{n+1},\alpha) & \text{if } n \text{ is odd},\\ \delta^n_{sp}(\varepsilon^n,\alpha) & \text{if } n \text{ is even}.\end{cases}$

记 $V^1_{sp}:=\begin{cases}\langle(\varepsilon,s(\varepsilon)),(\varepsilon,\varepsilon)\mid\varepsilon\in \mathrm{Sp}\rangle \text{ if } \mathrm{char}(\mathbb{K})=2,\langle\varepsilon\ \varepsilon\mid\varepsilon\in\ \rangle & \mathbb{K}\neq 2\ (,)\ \mathrm{Sp} \text{ if } \mathrm{char}(\ ),\end{cases}$ 并对 $n\geq 2$ 定义 $V^n_{sp}:=\mathrm{Ker}(\delta^n_{sp})/\mathrm{Im}(\delta^{n-1}_{sp})$。

A di
rect calculation shows that for all $n\geq 1$,

$$V^n_{sp}\cong\begin{cases}\langle(\varepsilon^n,s(\varepsilon)),(\varepsilon^n,\varepsilon)\mid\varepsilon\in\mathrm{Sp}\rangle & \text{if } \mathrm{char}(\mathbb{K})=2,\\ \langle(\varepsilon^n,s(\varepsilon))\mid\varepsilon\in\mathrm{Sp}\rangle & \text{if } \mathrm{char}(\mathbb{K})\neq 2 \text{ and } n \text{ is even},\\ \langle(\varepsilon^n,\varepsilon)\mid\varepsilon\in\mathrm{Sp}\rangle & \text{if } \mathrm{char}(\mathbb{K})\neq 2 \text{ and } n \text{ is odd}.\end{cases}$$

根据注记 3.6，下一条引理的证明显而易见。

引理 3.7。 存在 $\mathbb{K}$-线性同构：

- *for* $n\geq 2$, $\mathrm{Ker}(d^n_{sp})/\mathrm{Im}(d^{n-1}_{sp})\cong 0$,
- *for* $n\geq 1$, $\mathrm{Ker}(\delta^n_{sp})\cong\begin{cases}\mathrm{Ker}(d^n_{sp}) & \textit{if } n \textit{ is even},\\ \mathrm{Ker}(d^n_{sp})\oplus V^n_{sp} & \textit{if } n \textit{ is odd},\end{cases}$
- *for* $n\geq 1$, $\mathrm{Im}(d^n_{sp})\cong\begin{cases}\mathrm{Im}(\delta^n_{sp}) & \textit{if } n \textit{ is even},\\ \mathrm{Im}(\delta^n_{sp})\oplus V^{n+1}_{sp} & \textit{if } n \textit{ is odd}.\end{cases}$

在下一条引理中，我们处理 $n=0$ 的情形。

引理 3.8。 像(δ^0) $\cong$ 像(d^0) 且 核(δ^0) $\cong$ 核(d^0)。

证明 根据 δ^0 和 d^0 的定义，像(δ^0)与像(d^0)之间存在一个双射，由下式给出

$$\theta:\mathrm{Im}(\delta^0)\to\mathrm{Im}(d^0)$$

$$\delta^0(e,p)\mapsto d^0(e,p)=\begin{cases}\delta^0(e,p)-(\varepsilon,p) & \text{if } (e,p)\in\mathrm{Sp}\|\mathcal{B}_{\geq 2} \text{ with } p'_{\mathsf{rt}}=\varepsilon \text{ but } p'_{\mathsf{lt}}\neq\varepsilon,\\ \delta^0(e,p)+(\varepsilon,p) & \text{if } (e,p)\in\mathrm{Sp}\|\mathcal{B}_{\geq 2} \text{ with } p'_{\mathsf{rt}}\neq\varepsilon \text{ but } p'_{\mathsf{lt}}=\varepsilon,\\ \delta^0(e,p) & \text{otherwise}.\end{cases}$$

因此，我们得到像(δ^0) $\cong$ 像(d^0)，它们是 $\mathbb{K}$-向量空间。另请注意， $\mathbb{K}(Q_0\|\mathcal{B})$/像($\delta^0$) $\cong$ 核(δ^0)，且$\mathbb{K}(Q_0\|\mathcal{B})$/像($d^0$) $\cong$ 核(d^0)，因此核(δ^0) $\cong$ 核(d^0)。

□

现在我们可以陈述主定理，它将 gentle 代数的分次霍赫希尔德上同调与其斜温和变形的分次霍赫希尔德上同调联系起来。根据 [18], ，我们已经知道，在非分次情形下，变形的 Hochschild 上同调空间的维数小于或等于原代数相应 Hochschild 上同调空间的维数。在下一个定理中，我们将证明，对于分次温和代数及其分次斜温和变形，不仅同样的结论成立，而且还可以明确地得到这些空间的生成元，从而说明维数上的差异：由斜温和代数中的特殊环完全确定的 $\mathbb{K}$-向量空间 V^n_{sp}。

定理 3.9. 令 A' 为与分次斜温和代数 A相关联的分次温和代数。我们有以下 $\mathbb{K}$-向量空间同构：

- $\mathrm{HH}^{n,j}(A')\cong\begin{cases}\mathrm{HH}^{n,j}(A)\bigoplus V^n_{sp} & \textit{if } n\geq 1 \textit{ and } j=0,\\ \mathrm{HH}^{n,j}(A) & \textit{if } n=0 \textit{ or } j\neq 0.\end{cases}$

- $\mathrm{HH}^N(A') \cong \begin{cases} \mathrm{HH}^N(A) & if\ N \le 0, \\ \mathrm{HH}^N(A) \bigoplus V_{sp}^N & if\ N > 0. \end{cases}$
- $\mathrm{HH}^*(A') \cong \mathrm{HH}^*(A) \bigoplus (\bigoplus\limits_{N>0} V_{sp}^N)$.

证明 注意，第一个陈述蕴含第二个陈述，而第二个陈述又蕴含第三个陈述。事实上，

$$\mathrm{HH}^0(A') = \bigoplus_{\substack{n+j=0 \\ n\ge 0, j\in\mathbb{Z}}} \mathrm{HH}^{n,j}(A') = \bigoplus_{n\ge 0} \mathrm{HH}^{n,-n}(A') = \mathrm{HH}^{0,0}(A') \bigoplus \big(\bigoplus_{n\ge 1} \mathrm{HH}^{n,-n}(A')\big) \cong$$

$$\mathrm{HH}^{0,0}(A) \bigoplus \big(\bigoplus_{n\ge 1} \mathrm{HH}^{n,-n}(A)\big) = \bigoplus_{\substack{n+j=0 \\ n\ge 0, j\in\mathbb{Z}}} \mathrm{HH}^{n,j}(A) = \mathrm{HH}^0(A).$$

如果 $N \neq 0$，则

$$\mathrm{HH}^N(A') = \bigoplus_{\substack{n+j=N \\ n\ge 0, j\in\mathbb{Z}}} \mathrm{HH}^{n,j}(A') = \bigoplus_{n\ge 0} \mathrm{HH}^{n,N-n}(A') = \mathrm{HH}^{0,N}(A') \bigoplus \big(\bigoplus_{n\ge 1} \mathrm{HH}^{n,N-n}(A')\big)$$

$$= \mathrm{HH}^{0,N}(A') \bigoplus \begin{cases} \mathrm{HH}^{N,0}(A') \bigoplus \big(\bigoplus\limits_{\substack{N\neq n \\ n\ge 1}} \mathrm{HH}^{n,N-n}(A')\big) & \text{if } N > 0, \\ \bigoplus\limits_{\substack{N\neq n \\ n\ge 1}} \mathrm{HH}^{n,N-n}(A') & \text{if } N < 0. \end{cases}$$

$$\cong \mathrm{HH}^{0,N}(A) \bigoplus \begin{cases} \bigoplus\limits_{n\ge 1} \mathrm{HH}^{n,N-n}(A) \bigoplus V_{sp}^N & \text{if } N > 0, \\ \bigoplus\limits_{n\ge 1} \mathrm{HH}^{n,N-n}(A) & \text{if } N < 0. \end{cases} = \begin{cases} \mathrm{HH}^N(A) \bigoplus V_{sp}^N & \text{if } N > 0, \\ \mathrm{HH}^N(A) & \text{if } N < 0. \end{cases}$$

现在我们证明第一个陈述。显然，为了比较 $\mathrm{HH}^{n,\ j}(A')$ 与 $\mathrm{HH}^{n,\ j}(A)$，只需比较 $\mathrm{Ker}(\delta^n)$ 与 $\mathrm{Ker}(d^n)$，以及 $\mathrm{Im}(\delta^n)$ 与 $\mathrm{Im}(d^n)$。根据引理 3.5 和引理 3.7，我们有

$$\frac{\mathrm{Ker}(d^n)}{\mathrm{Im}(d^{n-1})} \cong \frac{\mathrm{Ker}(d_{sp}^n)}{\mathrm{Im}(d_{sp}^{n-1})} \oplus \frac{\mathrm{Ker}(d_{or}^n)}{\mathrm{Im}(d_{or}^{n-1})} \cong \frac{\mathrm{Ker}(d_{or}^n)}{\mathrm{Im}(d_{or}^{n-1})} \cong \frac{\mathrm{Ker}(\delta_{or}^n)}{\mathrm{Im}(\delta_{or}^{n-1})} \quad \text{and}$$

$$\frac{\mathrm{Ker}(\delta^n)}{\mathrm{Im}(\delta^{n-1})} \cong \frac{\mathrm{Ker}(\delta_{sp}^n)}{\mathrm{Im}(\delta_{sp}^{n-1})} \oplus \frac{\mathrm{Ker}(\delta_{or}^n)}{\mathrm{Im}(\delta_{or}^{n-1})} \cong V_{sp}^n \oplus \frac{\mathrm{Ker}(\delta_{or}^n)}{\mathrm{Im}(\delta_{or}^{n-1})} \quad \text{for each } n \ge 2,$$

$$\frac{\mathrm{Ker}(\delta^1)}{\mathrm{Im}(\delta^0)} \cong \frac{\mathrm{Ker}(d_{or}^1) \oplus (\mathrm{Ker}(d_{sp}^1) \oplus V_{sp}^1)}{\mathrm{Im}(\delta^0)} \cong \frac{\mathrm{Ker}(d^1) \oplus V_{sp}^1}{\mathrm{Im}(d^0)} \cong \frac{\mathrm{Ker}(d^1)}{\mathrm{Im}(d^0)} \oplus V_{sp}^1.$$

注意，对于所有 $n \ge 1$ 和 $j \in \mathbb{Z}$，$\mathrm{HH}^{n,j}(A') := (\mathrm{Ker}(\delta^n)/\mathrm{Im}(\delta^{n-1}))^j$，以及 $\mathrm{HH}^{n,j}(A) := (\mathrm{Ker}(d^n)/\mathrm{Im}(d^{n-1}))^j$。因此，对于 $n \ge 1$，有 $\mathrm{HH}^{n,j}(A') \cong \mathrm{HH}^{n,j}(A) \oplus V^{n,\ j}_{sp}$，其中 $V^{n,\ j}_{sp}$ 是由内度为 j 的元素组成的 V_{sp}^n 的子空间。但 V_{sp}^n 中的所有元素的内度均为 0，因此对于 $n \ge 1$ 和 $j \neq 0$，$\mathrm{HH}^{n,0}(A') \cong \mathrm{HH}^{n,0}(A) \oplus V_{sp}^n$，并且 $\mathrm{HH}^{n,j}(A') \cong \mathrm{HH}^{n,j}(A)$。同构 $\mathrm{HH}^{0,j}(A') \cong \mathrm{HH}^{0,j}(A)$ 是引理 3.8 的推论。证毕。

□

3.3. 分次斜温和代数的Hochschild 上同调空间。

与前几节一样，我们设分次斜温和三元组 (Q, R, Sp)，并令 $A = \mathbb{K}Q/I$ 为相应的分次斜温和代数，其中 I 表示由 $\mathbb{K}Q$ 生成的 $R \cup \{\varepsilon^2 - \varepsilon \mid \varepsilon \in \mathrm{Sp}\}$双边理想。令$T$ 为 Q的一棵生成树。在下文中，我们沿用小节 3.2 中的记号，并将分次温和代数 $A' := \mathbb{K}Q/\langle R \cup \{\varepsilon^2 \mid \varepsilon \in \mathrm{Sp}\}\rangle$ 与 A相关联。

现在，我们将 A' 视为不含特殊环的分次斜温和代数。换言之，对于 A，Sp 中的特殊环在 A'中变为普通环。我们沿用第 Γ 节中定义的记号 2.3。注意，在此情形下，A 与 A' 具有相同的箭图 $Q = (Q_0, Q_1)$，但关系集不同 $S := R \cup \{\varepsilon^2 - \varepsilon \mid \varepsilon \in \mathrm{Sp}\}$ 和

$S' := R \cup \{\varepsilon^2 \mid \varepsilon \in \mathrm{Sp}\}$，分别。因此，对于 A'，由 Q 中那些长度为 2 的子路径均属于 S' 的路径组成的集合 Γ'，恰好就是 A 的集合 Γ ；而 A' 的基 $\mathcal{B}'$ 也与 A 的基 $\mathcal{B}$ 相同。令 I' 为由 S' 生成的 $\mathbb{K}Q$ 的理想，并将 $\mathbb{K}Q \to A = \mathbb{K}Q/I : \pi_{A'} : \mathbb{K}Q \to A' = \mathbb{K}Q/I'$ 记作 A 和 A' 的典范投影，分别记为 $\pi = \pi_A$ 。

在陈述主要结果之前，我们还需要一个定义。对于任意圈 $\alpha = a_m \cdots a_1 \in Q_m$，我们将 α 的特殊旋转 记作 $\mathrm{srot}(\alpha)$，定义如下：

$$\mathrm{srot}(\alpha) := \begin{cases} a_{m-1} \cdots a_1 a_m = \mathrm{rot}(\alpha) & \text{if } a_m \notin \mathrm{Sp}, \\ a_{m-1} \cdots a_1 (\varepsilon - s(\varepsilon)) = \mathrm{rot}(\alpha) - a_{m-1} \cdots a_1 & \text{if } a_m = \varepsilon \in \mathrm{Sp}. \end{cases}$$

对于 $i \in \mathbb{Z}_+$，归纳定义 $\mathrm{srot}^i(\alpha) := \mathrm{srot}(\mathrm{srot}^{i-1}(\alpha))$，并约定 $\mathrm{srot}^0(\alpha) = \alpha$。我们还可以通过线性性将此定义扩展到 A 的基 $\mathcal{B}$ 中的元素。

注3.10。设 A 是一个（分次）斜绅代数，且 α 是基 $\mathcal{B}$ 中的一个余完全循环。以下事实可由归纳法轻易得到：

$$\mathrm{srot}^i(\alpha) = \mathrm{srot}(\mathrm{rot}^{i-1}(\alpha)), \quad \mathrm{srot}^i(\alpha^j) = (\mathrm{srot}^i(\alpha))^j, \text{ for any } i, j \geq 1.$$

给定一个周期为 r 的余完全循环 $\alpha \in \mathscr{C}(\mathcal{B})$，对每个 $0 \leq i \leq r-1$，记

$$\mathrm{rot}^i(\alpha) = (\mathrm{rot}^i(\alpha))_{\mathsf{rt}} (\mathrm{rot}^i(\alpha))'_{\mathsf{rt}} = (\mathrm{rot}^i(\alpha))'_{\mathsf{lt}} (\mathrm{rot}^i(\alpha))_{\mathsf{lt}}.$$

回忆一下，$\langle\!\langle \alpha \rangle\!\rangle := \sum_{i=0}^{r-1} (s(\mathrm{rot}^i(\alpha)), \mathrm{rot}^i(\alpha))$。类似地，记作

$$\langle\!\langle \alpha \rangle\!\rangle_s := \sum_{i=1}^{r} (s(\mathrm{srot}^i(\alpha)), \mathrm{srot}^i(\alpha)).$$

注意，如果 α 是一个从特殊环出发的余完全循环，即 $\alpha'_{\mathsf{rt}} \in \mathrm{Sp}$，那么 $\sum_{i=1}^{r} (s(\mathrm{srot}^i(\alpha)), \mathrm{srot}^i(\alpha)) \neq \sum_{i=1}^{r-1} (s(\mathrm{srot}^i(\alpha)), \mathrm{srot}^i(\alpha))$。事实上，我们有

$$\langle\!\langle \alpha \rangle\!\rangle_s = \sum_{i=1}^{r} (s(\mathrm{srot}^i(\alpha)), \mathrm{srot}^i(\alpha)) = \sum_{i=0}^{r-1} (s(\mathrm{srot}^i(\alpha)), \mathrm{srot}^i(\alpha)) - (s(\alpha), \alpha_{\mathsf{rt}}).$$

下面的引理有助于陈述本小节的主要结果。

Le引理 3.11。设 A 是一个（分次）斜绅代数，且 $\alpha \in \mathscr{C}(\mathcal{B})$ 的周期为 r。则

(1) $\langle\!\langle \alpha \rangle\!\rangle - \langle\!\langle \alpha \rangle\!\rangle_s = \sum_{\substack{i=1 \\ (\mathrm{rot}^i(\alpha))'_{\mathsf{rt}} \in \mathrm{Sp}}}^{r} \Big(s\big(\mathrm{rot}^i(\alpha)\big), \big(\mathrm{rot}^i(\alpha)\big)_{\mathsf{rt}}\Big) = \sum_{\substack{i=1 \\ (\mathrm{rot}^i(\alpha))'_{\mathsf{lt}} \in \mathrm{Sp}}}^{r} \Big(s\big(\mathrm{rot}^i(\alpha)\big), \big(\mathrm{rot}^i(\alpha)\big)_{\mathsf{lt}}\Big)$,

(2) $d^0(\langle\!\langle \alpha \rangle\!\rangle) = -\delta^0(\langle\!\langle \alpha \rangle\!\rangle_s)$,

(3) $d^0(\langle\!\langle \alpha \rangle\!\rangle_s) = 0$.

证明 第一个等式显然成立，第二个等式由以下事实得出：对于每个 $1 \leq i \leq r$，$(\mathrm{rot}^i(\alpha))'_{\mathsf{lt}} = (\mathrm{rot}^{i+1}(\alpha))'_{\mathsf{rt}}$ 且 $(\mathrm{rot}^i(\alpha))_{\mathsf{lt}} = (\mathrm{rot}^{i+1}(\alpha))_{\mathsf{rt}}$。第二项可由证明中的公式推导得出

引理 3.8的证明以及命题 3.1的第三个陈述。更确切地说，

$$\begin{aligned}
d^0(\langle\!\langle\alpha\rangle\!\rangle) &= \sum_{i=1}^{r} d^0\big(s(\mathrm{rot}^i(\alpha)), \mathrm{rot}^i(\alpha)\big) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \begin{cases} \delta^0\big(s(\mathrm{rot}^i(\alpha)), \mathrm{rot}^i(\alpha)\big) + ((\mathrm{rot}^i(\alpha))'_{\mathsf{lt}}, \mathrm{rot}^i(\alpha)) & \text{if } (\mathrm{rot}^i(\alpha))'_{\mathsf{lt}} \in \mathrm{Sp}, \\ \delta^0\big(s(\mathrm{rot}^i(\alpha)), \mathrm{rot}^i(\alpha)\big) - ((\mathrm{rot}^i(\alpha))'_{\mathsf{rt}}, \mathrm{rot}^i(\alpha)) & \text{if } (\mathrm{rot}^i(\alpha))'_{\mathsf{rt}} \in \mathrm{Sp}, \\ \delta^0\big(s(\mathrm{rot}^i(\alpha)), \mathrm{rot}^i(\alpha)\big) & \text{otherwise.} \end{cases} \\
&= \delta^0(\langle\!\langle\alpha\rangle\!\rangle) + \sum_{\substack{i=1 \\ (\mathrm{rot}^i(\alpha))'_{\mathsf{lt}} \in \mathrm{Sp}}}^{r} ((\mathrm{rot}^i(\alpha))'_{\mathsf{lt}}, \mathrm{rot}^i(\alpha)) - \sum_{\substack{i=1 \\ (\mathrm{rot}^i(\alpha))'_{\mathsf{rt}} \in \mathrm{Sp}}}^{r} ((\mathrm{rot}^i(\alpha))'_{\mathsf{rt}}, \mathrm{rot}^i(\alpha)) \\
&= \sum_{\substack{i=1 \\ (\mathrm{rot}^i(\alpha))'_{\mathsf{lt}} \in \mathrm{Sp}}}^{r} ((\mathrm{rot}^i(\alpha))'_{\mathsf{lt}}, \mathrm{rot}^i(\alpha)) - \sum_{\substack{i=1 \\ (\mathrm{rot}^i(\alpha))'_{\mathsf{rt}} \in \mathrm{Sp}}}^{r} ((\mathrm{rot}^i(\alpha))'_{\mathsf{rt}}, \mathrm{rot}^i(\alpha)).
\end{aligned}$$

另一方面，将第一条陈述与 $\delta^0(\langle\!\langle\alpha\rangle\!\rangle) = 0$ 结合起来，我们得到

$$-\delta^0(\langle\!\langle\alpha\rangle\!\rangle_s) = \delta^0(\langle\!\langle\alpha\rangle\!\rangle - \langle\!\langle\alpha\rangle\!\rangle_s) = \sum_{\substack{i=1 \\ (\mathrm{rot}^i(\alpha))'_{\mathsf{lt}} \in \mathrm{Sp}}}^{r} \delta^0\Big(s\big(\mathrm{rot}^i(\alpha)\big), \big(\mathrm{rot}^i(\alpha)\big)_{\mathsf{lt}}\Big).$$

若存在某个 i，满足 $1 \le i \le r$，使得 $(\mathrm{rot}^i(\alpha))'\,\mathsf{lt} \in \mathrm{Sp}$，那么 $\mathrm{rot}^i(\alpha) \in \mathscr{C}(\mathcal{B})$ 表明，$(\mathrm{rot}^i(\alpha))_{\mathsf{lt}}$ 既不以特殊环开头，也不以特殊环结尾。事实上，$(\mathrm{rot}^i(\alpha))_{\mathsf{lt}}$ 从 $(\mathrm{rot}^{i-1}(\alpha))'\,\mathsf{lt}$ 出发，并以 $(\mathrm{rot}^{i+1}(\alpha))'\,\mathsf{lt}$ 结束，其中 $(\mathrm{rot}^{i-1}(\alpha))'\,\mathsf{lt} \cdot (\mathrm{rot}^{i+1}(\alpha))'\,\mathsf{lt} \in R$。因此，根据 δ^0 的定义可知，$\delta^0\Big(s\big(\mathrm{rot}^i(\alpha)\big), \big(\mathrm{rot}^i(\alpha)\big)_{\mathsf{lt}}\Big) = (\mathrm{rot}^i(\alpha))'\,\mathsf{lt} \cdot \mathrm{rot}^i(\alpha)) - ((\mathrm{rot}^{i+1}(\alpha))'\,\mathsf{rt} \cdot \mathrm{rot}^{i+1}(\alpha))$。因此，我们得到 $d^0(\langle\!\langle\alpha\rangle\!\rangle) = -\delta^0(\langle\!\langle\alpha\rangle\!\rangle_s)$，这进一步意味着 $d^0(\langle\!\langle\alpha\rangle\!\rangle_s) = 0$，因为 $d^0(\langle\!\langle\alpha\rangle\!\rangle) = -\delta^0(\langle\!\langle\alpha\rangle\!\rangle_s) = \delta^0(\langle\!\langle\alpha\rangle\!\rangle - \langle\!\langle\alpha\rangle\!\rangle_s) = d^0(\langle\!\langle\alpha\rangle\!\rangle - \langle\!\langle\alpha\rangle\!\rangle_s)$。

□

粗略来说，结合定理 3.4 和定理 3.9，我们可以通过消去由 A 的特殊环给出的 V_{sp}^n 中的元素，从 $\mathrm{HH}^*(A')$ 恢复 $\mathrm{HH}^*(A)$ 的生成元。然而，我们想要的是得到 $\mathrm{HH}^*(A)$ 的具体生成元。为实现这一目标，我们需要确切了解 $\mathrm{HH}^*(A')$ 的生成元如何转化为 $\mathrm{HH}^*(A)$ 的生成元。事实上，考虑到等式 $\mathrm{HH}^{\bullet,\blacklozenge}(A) = (\mathrm{Ker}(d^\bullet)\,\mathrm{Im}(d^{\bullet-1}))^\blacklozenge$ 和 $\mathrm{HH}^{\bullet,\blacklozenge}(A') = (\mathrm{Ker}(\delta^\bullet)\,\mathrm{Im}(\delta^{\bullet-1}))^\blacklozenge$，我们可以进一步将这个问题归结为描述 $\mathrm{Ker}(d^\bullet)$ $\mathrm{Im}(d^{\bullet-1})$ 和 $\mathrm{Ker}(\delta^\bullet)$ $\mathrm{Im}(\delta^{\bullet-1})$，因为 $\mathrm{HH}^{\bullet,\blacklozenge}$ 中具体元素的内度是明确的。

我们先从低次数的霍赫希尔德上同调空间 $\mathrm{HH}^{\bullet,\blacklozenge}$ 开始。

命题 3.12。 分次向量空间 $\mathrm{HH}^{0,\blacklozenge}(A)$ 由以下 $\mathbb{K}(\Gamma_0 \| \mathcal{B})$ 中的元素集合自由生成：

- 元素
$$\mathbb{1} := \sum_{i \in Q_0} (e_i, e_i) \in \mathrm{HH}^{0,0}(A),$$
- 数对 $(s(\alpha)\ \alpha) \in \mathrm{HH}^{0,|\alpha|}(A)$，其中 α 是 (Q, I) 中的 $\mathcal{B}$-极大路径，以及
- 这些和
$$\langle\!\langle\alpha\rangle\!\rangle_s := \sum_{i=1}^{r} (s(\mathrm{srot}^i(\alpha)), \mathrm{srot}^i(\alpha)) \in \mathrm{HH}^{0,|\alpha|}(A)$$
其中 $\alpha \in \overline{\mathscr{C}}(\mathcal{B})$，且 r 其周期为。

证明 结合命题 3.1 与定理 3.9的第一个陈述，只需证明上面列出的元素属于 $\mathrm{HH}^{0,\blacklozenge}(A)$。给定 $\mathrm{HH}^{\bullet,\blacklozenge}(A)$中的一个元素，我们知道它的内度。因此，只需进一步证明这些元素属于 $\mathrm{HH}^{0,\blacklozenge}(A) = \mathrm{Ker}(d^0)$。

结合引理 3.8 的证明中 d^0 和 δ^0 的公式可知，对于所有 $i \in Q_0$，$d^0(e_i, e_i) = \delta^0(e_i, e_i)$。注意，当且仅当 α 在 (Q, I) 中是 $\mathcal{B}$- 极大的时候，路径 α 在 (Q, I') 中是 $\mathcal{B}'$- 极大的；若它是长度至少为 2 的圈，则 α 不能以某个 $\varepsilon \in \mathrm{Sp}$ 开始或结束。因此，我们也有 $d^0(s(\alpha)\ \alpha) = \delta^0(s(\alpha)\ \alpha) = 0$。因此，第一类和第二类元素恰好属于 $\mathrm{HH}^{0,\bullet}(A)$。对于任意 $\alpha \in \mathscr{C}(\mathcal{B})$，$\langle\!\langle \alpha \rangle\!\rangle_s \in \mathrm{Ker}(d^0)$，结论由引理 3.11 立即得到。

□

接下来，我们将关注首个霍赫希尔德上同调 $\mathrm{HH}^{1,\bullet}(A)$。

命题 3.13. 分次向量空间 $\mathrm{HH}^{1,\bullet}(A)$ 由以下元素自由生成：

- 数对 $(c, c) \in \mathrm{HH}^{1,0}(A)$，其中 $c \in Q_1 \setminus (T \cup \mathrm{Sp})$，
- 数对 $(c, \alpha) \in \mathrm{HH}^{1,|\alpha|-|c|}(A)$，其中 c 一个 Γ-极大箭和一条既不以 c 开始也不以其结束的路径，
- 数对 $(c, c\alpha) \in \mathrm{HH}^{1,|\alpha|}(A)$，其中 $\alpha \in \mathscr{C}(\mathcal{B})$，且 $c \notin \mathrm{Sp}$ 是 α 的首个箭头，
- 数对 $(b, s(b)) \in \mathrm{HH}^{1,-|b|}(A)$，其中 b 有一个环 Q，使得 $b^2 \in R$, $|b|$ 为奇数，或者 $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 2$。

证明 由定理 3.9 可知，$\mathrm{HH}^{1,\bullet}(A') \cong \mathrm{HH}^{1,\bullet}(A) \oplus V_{sp}^1$。注意到存在从 V_{sp}^1 到 $\mathrm{HH}^{1,\bullet}(A')$ 的典范嵌入。事实上，显然 $V_{sp}^1 \subseteq \mathrm{Ker}(\delta_{sp}^1) \subseteq \mathrm{Ker}(\delta^1)$。此外，$\mathrm{Im}(\delta^0) \subseteq \mathbb{K}(Q_1 \| \mathcal{B}_{\geq 1})$ 意味着，对任意 $\varepsilon \in \mathrm{Sp}$，$(\varepsilon, s(\varepsilon)) \notin \mathrm{Im}(\delta^0)$。另外，由于 ε 是 Q_1中的一个环，可推出 $(\varepsilon, \varepsilon) \notin \mathrm{Im}(\delta^0)$。那么，$\mathrm{HH}^{1,\bullet}(A')$ 中除去 V_{sp}^1 中的那些生成元，其余生成元将与 $\mathrm{HH}^{1,\bullet}(A)$ 中的生成元一一对应。

我们声称，只需证明上面列出的四类元素属于 $\mathrm{HH}^{1,\bullet}(A)$ =核(d^1)/像(d^0)。事实上，产生 V_{sp}^1 的那些元素只能出现在命题 3.2 中的第一类和第四类元素中。此外，对于任意以 c 为首个箭头的 $\alpha \in \mathscr{C}(\mathcal{B})$，若 $c \in \mathrm{Sp}$，则 $(c, c\alpha) \in \mathrm{HH}^{1,\bullet}(A')$，但它不再属于 $\mathrm{HH}^{1,\bullet}(\overline{A})$。这是因为在这种情况下，$(c, c\alpha) \in \mathrm{Sp} \| \mathcal{B}_{\geq 2}$，其中 $c\alpha$ 是一条路径，其起始箭头和终止箭头均等于同一个特殊环 $c \in$Sp。于是，注 3.6 的第三条说明 $d^1(c, c\alpha) = d_{sp}^1(c, c\alpha) = (c^2, c\alpha) \neq 0$。换言之，$(c, c\alpha)$ 不是 A的余循环。

设 (a, α) 属于上述四类元素中的任意一类，则 $a \in Q_1 \setminus \mathrm{Sp}$。显然，$(a, \alpha) \in \mathrm{Ker}(d^1)$，因为$d^1(a, \alpha) = d_{or}^1(a, \alpha) = \delta_{or}^1(a, \alpha) = 0$，由引理 3.5 和命题 3.2 可知。还需证明 (a, α) 不是 A 的余边界。事实上，对于第二类和第四类元素，根据 d^0 的定义，$\mathrm{Im}(d^0) \subseteq \langle (a, a), (a, a\alpha), (a, \alpha a) \mid a \in Q_1, \alpha \in \mathcal{B}_{\geq 1} \rangle$，因此结论成立。

为证明剩下两类元素满足 $(a, \alpha) \notin \mathrm{Im}(d^0)$，我们作如下论证。若对于任意 $c \in Q_1 \setminus (T \cup \mathrm{Sp})$，$(c, c) \in \mathrm{Im}(d^0)$，则 $(c, c) \in \mathrm{Im}(d^0|_{\mathbb{K}(Q_0 \| Q_0)}) = \mathrm{Im}(\delta^0|_{\mathbb{K}(Q_0 \| Q_0)})$，因为根据引理 3.8，对于任意 $e \in Q_0$，$d^0(e, e) = \delta^0(e, e)$。因此，$(c, c) \in \mathrm{Im}(\delta^0)$，这与命题 3.2 矛盾。对于第三类元素 $(c, c\alpha)$，其中 $\alpha \in \mathscr{C}(\mathcal{B})$，我们断言，$(c, c\alpha) \in \mathrm{Im}(d^0)$ 蕴含 $(c, c\alpha) \in \mathrm{Im}(\delta^0)$，这由命题 3.2 可知不可能。事实上，若 $(c, c\alpha) \in \mathrm{Im}(d^0)$，则 $(c, c\alpha) \in \mathrm{Im}(d^0|_{\mathbb{K}(Q_0 \| \mathcal{B}_{\geq 1})})$。假设 $(c, c\alpha) = \sum \lambda_\beta \cdot d^0(s(\beta)\ \beta)$，其中$\beta$ 只能是针对 $0 \leq i \leq r-1$ 的 $\mathrm{rot}^i(\alpha)$。注意，所有这样的 $\lambda_\beta \in \mathbb{K}$ 都应相等。换言之，我们可以写作 $(c, c\alpha) = \lambda \cdot \sum_{i=0}^{r-1} d^0\Big(s\big(\mathrm{rot}^i(\alpha)\big), \mathrm{rot}^i(\alpha)\Big) = \lambda \cdot d^0(\langle\!\langle \alpha \rangle\!\rangle)$，其中 $\lambda \in \mathbb{K}$。因此，根据引理 3.11，$(c, c\alpha) = -\lambda \cdot \delta^0(\langle\!\langle \alpha \rangle\!\rangle_s) \in \mathrm{Im}(\delta^0)$。所以，本命题中列出的所有 (a, α) 都不可能是余边界。

□

现在我们来描述高阶霍赫希尔德上同调空间。

命题 3.14. 令 $m \geq 2$。分次向量空间 $\mathrm{HH}^{m,\bullet}(A)$ 由以下元素自由张成：

- $\langle\!\langle C \rangle\!\rangle_{gr} \in \mathrm{HH}^{m,-|C|}(A)$ 其中 $C \in \overline{\mathscr{C}}_m(\Gamma) \setminus \mathrm{Sp}^m$，
- $(bC, b) \in \mathrm{HH}^{m,-|C|}(A)$ 其中 $C \in \overline{\mathscr{C}}_{m-1}(\Gamma) \setminus \mathrm{Sp}^{m-1}$ 和 b C 的首个箭头，

- $(\gamma,\alpha) \in \mathrm{HH}^{m,\,|\alpha|-|\gamma|}(A)$ 其中 γ 一个 Γ-极大元素，属于 Γ_m 和 γ，且 α 的起始箭头与终止箭头不同。

证明 设 $m \geq 2$。由定理 3.9 可知，$\mathrm{HH}^{m,\bullet,\blacklozenge}(A') \cong \mathrm{HH}^{m,\bullet,\blacklozenge}(A) \oplus V_{sp}^m$。事实上，将命题 3.3 应用于 $\mathrm{HH}^{m,\bullet,\blacklozenge}(A')$ 后，定义 $V_{sp}^m :=$ 核(δ_{sp}^n)/像(δ_{sp}^{n-1})表明，存在一个从 V_{sp}^m到 $\mathrm{HH}^{m,\bullet,\blacklozenge}(A')$ 的典范嵌入。显然，V_{sp}^m只能来自命题 3.3 中前两类元素。此外，注意到与 A' 对应的集合 Γ' 与 A的 Γ 相同，因此，$C \in \mathscr{C}(\Gamma')$ 当且仅当 $C \in \mathscr{C}(\Gamma)$，并且 γ 是 Γ'- 极大的，当且仅当 γ 是 Γ- 极大的。只需证明，上述元素恰好属于 $\overline{\mathrm{HH}}^{m,\bullet,\blacklozenge}(A) =$ 核 $(d^m)/$ 像 $(\overline{d}^{m-1})$。

令 x 为陈述中列出的三个元素之一。容易看出，$x \in \mathbb{K}((\Gamma_m \setminus \mathrm{Sp}^m)\|\mathcal{B})$。结合 d^m 的定义与引理 3.5，可得 $d^m(x) = d_{or}^m(x) = \delta_{or}^m(x) = \delta^m(x)$，根据命题 3.3，这等于零。因此，$x \in \mathrm{Ker}(d^m)$。注意，$\mathrm{Im}(d_{sp}^{m-1}) \subseteq \mathbb{K}(\mathrm{Sp}^m\|\mathcal{B})$，所以，如果 $x \in \mathrm{Im}(d^{m-1})$，那么 $x \in \mathrm{Im}(d_{or}^{m-1})$。此外，引理 3.5 表明 $x \in \mathrm{Im}(d_{or}^{m-1}) = \mathrm{Im}(\delta_{or}^{m-1}) \subseteq \mathrm{Im}(\delta^{m-1})$，这与命题 3.3 矛盾。因此，我们有 $x \notin \mathrm{Im}(d^{m-1})$。

□

现在我们可以证明本小节的主定理了。

定理 3.15. 令 A 为与分次斜温和三元组 (Q, R, Sp)对应的分次斜温和代数。A 的分次霍赫希尔德上同调 $\mathrm{HH}^*(A) = \bigoplus \mathrm{HH}^{\bullet,\blacklozenge}(A)$ 是由以下元素自由生成的分次向量空间 $*=\bullet+\blacklozenge$复形 $\mathbb{K}(\Gamma\|\mathcal{B})$ 中以下齐次上循环的上同调类：

（$\mathrm{H_I}$）元素，

$$\mathbb{1} := \sum_{i \in Q_0} (e_i, e_i) \in \mathrm{HH}^{0,0}(A),$$

（$\mathrm{H_{II}}$）数对 $(s(\alpha)\ \alpha) \in \mathrm{HH}^{0,\,|\alpha|}(A)$，其中 α 是 $(Q,\ I)$ 中的一条 $\mathcal{B}$-极大路径，

（$\mathrm{H_{III}}$）各和

$$\langle\!\langle \alpha \rangle\!\rangle_s := \sum_{i=1}^{r} (s(\mathrm{srot}^i(\alpha)), \mathrm{srot}^i(\alpha)) \in \mathrm{HH}^{0,|\alpha|}(A),$$

其中 $\alpha \in \overline{\mathscr{C}}(\mathcal{B})$ 及其周期，

（H_{IV}）数对 $(c,\ c) \in HH^{1,0}(A)$，其中 $c \in Q_1 \setminus (T \cup Sp)$，（$H_{\mathrm{V}}$）数对 $(c,\ c\alpha) \in HH^{1,\,|\alpha|}(A)$，其中 $\alpha \in \mathscr{C}(\mathcal{B})$ 以及 $c\ \alpha$和 $c \notin Sp$的首个箭头，（H_{VI}）数对 $(\gamma,\ \alpha) \in HH^{l(\gamma),\,|\alpha|-|\gamma|}(A)$，其中 γ 是 Γ 和 γ 的一个 Γ-极大元素，且 α 既不以相同箭头开头，也不以相同箭头结尾，

（$\mathrm{H_{VII}}$）这些和

$$\langle\!\langle C \rangle\!\rangle_{gr} := \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^{im+(|c_{r-i+1}|+\cdots+|c_r|)|C|} (\mathrm{rot}^i(C), s(\mathrm{rot}^i(C))) \in \mathrm{HH}^{m,-|C|}(A),$$

其中 $C \in \mathscr{C}_m(\Gamma) \setminus \mathrm{Sp}^m$ 的周期为 r，且 $C = (c_r \cdots c_1)^{\frac{m}{r}}$，

（$\mathrm{H_{VIII}}$）数对 $(bC, b) \in \mathrm{HH}^{m,-|C|}(A)$，其中 $C \in \overline{\mathscr{C}_{m-1}}(\Gamma) \setminus \mathrm{Sp}^{m-1}$，且 b C 的首个箭头。

证明 证明由命题 3.12、3.13 和3.14得出。

□

3.4. **杯积**。

设 (Q, R, Sp) 是一个分次斜温和三元组，并设 A 为与这些数据相关联的分次斜温和代数。

第 2.2 节中的杯积是根据复形 $C^*(A$定义的。利用比较态射F 和 G （参见第2.4节），我们可以描述复形 $\mathbb{K}(\Gamma\|\mathcal{B}$上的杯积。

引理 3.16. 设 A 是与分次斜温和三元组 (Q, R, Sp)相关联的分次斜温和代数。若$m, n \geq 0$，给定 $(\gamma, \alpha) \in \mathbb{K}(\Gamma_m \| \mathcal{B})$ 和 $(\gamma', \alpha') \in \mathbb{K}(\Gamma_n \| \mathcal{B})$，则

$$\smile : \mathbb{K}(\Gamma_m \| \mathcal{B}) \times \mathbb{K}(\Gamma_n \| \mathcal{B}) \longrightarrow \mathbb{K}(\Gamma_{m+n} \| \mathcal{B})$$

$$\big((\gamma, \alpha) , (\gamma', \alpha') \big) \longmapsto \begin{cases} (-1)^{(|\alpha'|-|\gamma'|)(m+|\gamma|)+mn} (\gamma\gamma', \pi(\alpha\alpha')) & \text{if } \gamma\gamma' \in \Gamma_{m+n}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明是直接的。

接下来我们回顾以下引理，出自 [8]。

引理 3.17. *(* [8, 引理 5.1]*)*。设 γ 是 Γ-完备路径，位于 Γ 中，而 α 是 $\mathcal{B}$-极大圈，位于 $\mathcal{B}$中，并假设 $s(\gamma) = s(\alpha)$。若 γ 或 α 的长度为1，则该箭图恰有一个顶点和一个环。

我们假设该箭图不是一个环，并逐项考察表 1。稍后我们会处理这一例外情形。

$\smile$	$(s(\alpha)\ \alpha)$	$\langle\!\langle \alpha \rangle\!\rangle_s$	$(c,\ c\alpha)$	$(c,\ c)$	$(\gamma,\ \alpha)$	$\langle\!\langle C \rangle\!\rangle_{gr}$	$(bC,\ b)$
$(s(\alpha)\ \alpha)$	$0_{\max}$	$0_{\max}$	$0_{\max}$	$0_{\max}$	0 (v)	0 (vi.a)	$0_{\max}$
$\langle\!\langle \alpha \rangle\!\rangle_s$		(iv.b)	(iv.b)	(iv.a)	$0_{\max}$	0 (vi.b)	0 (vi.b)
$(c,\ c\alpha)$			0_{glue}	0_{glue}	$0_{\max}$	0 (vi.c)	0_{glue}
$(c,\ c)$				0_{glue}	$0_{\max}$	(vi.d)	0_{glue}
$(\gamma,\ \alpha)$					$0_{\max}$	$0_{\max}$	$0_{\max}$
$\langle\!\langle C \rangle\!\rangle_{gr}$						(vi.e)	(vi.e)
$(bC,\ b)$							0_{glue}

TABLE 1. 我们的基中的元素在 $\mathrm{HH}^*(A)$ 上的杯积，其中 Q不是只有一个顶点和一个环的箭图。

杯积实质上与 gentle 情形一致，参见 [8, 表 1]。除 (vi.b) 的证明外，其余证明均沿用相同思路。为方便读者，我们在此陈述这些结果，但仅证明 (vi.b)。这里的编号从 (iv) 开始，这可能显得有些不寻常。这样安排是为了与 gentle 情形保持完备对应。

(iv.a) $\langle\!\langle \alpha \rangle\!\rangle_s \smile (c, c) = \begin{cases} (d, d\alpha) \text{ 若循环 } \alpha \text{ 经过箭 } c, \text{ 其中 } d \text{ 是 } \alpha\text{的首个箭头，否则为 } 0, \end{cases}$ (iv.b)

$\langle\!\langle \alpha \rangle\!\rangle_s \smile \langle\!\langle \delta \rangle\!\rangle_s = \begin{cases} \langle\!\langle \alpha\delta \rangle\!\rangle_s \text{ 若 } \alpha \text{ 和 } \delta \text{ 是同一本原循环的幂，否则，} \langle\!\langle \alpha \rangle\!\rangle_s \smile (c, c\delta) = \begin{cases} (c, c\alpha\delta) \text{ 若 } \alpha \text{ 和 } \delta \\ 0 \end{cases} \end{cases}$

是同一本原循环的幂，否则为 0，(vi.d) $(c, c) \smile \langle\!\langle C \rangle\!\rangle_{gr} = \begin{cases} (-1)^{|d|\cdot|C|}(dC, d) \text{ 若 } C \text{经过箭 } c, \text{ 其中 } d \text{ 是 } C \end{cases}$

的首个箭头，否则为 0,

(vi.e) $\langle\!\langle C\rangle\!\rangle_{gr} \smile \langle\!\langle D\rangle\!\rangle_{gr} = \begin{cases} (-1)^{l(C)\cdot l(D)}\langle\!\langle CD\rangle\!\rangle_{gr} & \text{if } C \text{ and } D \text{ are powers of same primitive cycle,} \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$

$(bC, b) \smile \langle\!\langle D\rangle\!\rangle_{gr} = \begin{cases} (-1)^{(|b|+l(C))\cdot l(D)}(bCD, b) & \text{if } C \text{ and } D \text{ are powers of same primitive cycle,} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$

我们首先注意到，对于 $\alpha \in \mathscr{C}(\mathcal{B})$，若 $\mathsf{rot}^i(\alpha)$ 的首个箭头不是特殊环，则 $\mathsf{srot}^i(\alpha) = \mathsf{rot}^i(\alpha)$。现在我们证明 (vi.b)。

(vi.b) 设 $C = (C_r \cdots C_1)^{\frac{m}{r}} \in \mathscr{C}(\Gamma) \setminus \mathsf{Sp}^m$，其长度为 m，周期为 r。设 $\alpha \in \mathscr{C}(\mathcal{B})$ 和 r' 是其周期。我们定义两个集合

$$I := \{s(\mathrm{rot}^i(C)) \mid i = 0, \ldots, r-1\}, \quad J := \{s(\mathrm{srot}^j(\alpha)) \mid j = 1, \ldots, r'\},$$

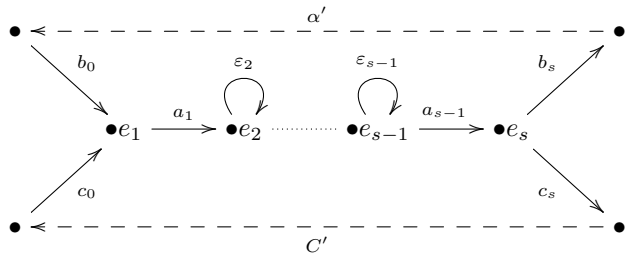
和 $K = I \cap J$。若 $K = \emptyset$，即对所有 i 和 j，都有 $s(\mathsf{rot}^i(C)) \neq s(\mathsf{srot}^j(\alpha))$，则显然有 $\langle\!\langle \alpha\rangle\!\rangle_s \smile \langle\!\langle C\rangle\!\rangle_{gr} = 0$。反过来，假设 $K \neq \emptyset$，那么对于任意 $e \in K$，存在整数$i_e \in \{0, \ldots, r-1\}$和 $j_e \in \{1, \ldots, r'\}$，使得 $s(\mathsf{rot}^i(C)) = s(\mathsf{srot}^j(\alpha)) = e$。令 I_e 和 J_e 分别为其元素是这样的 i_e 和 j_e 的集合。我们可以写成 $\langle\!\langle \alpha\rangle\!\rangle_s \smile \langle\!\langle C\rangle\!\rangle_{gr} = \sum_{e\in K} x_e$，其中

$$x_e := \sum_{i\in I_e, j\in J_e} (-1)^{im+(|C_{r-i+1}|+\cdots|C_r|)|C|}(\mathrm{rot}^i(C), \mathrm{srot}^j(\alpha)).$$

集合 K可写成连通分支 $K = K_1 \cup \cdots \cup K_n$的不交并。对于不含特殊点的任意连通分支 K_t，斜温和代数的定义意味着K_t 恰由两个点 $\{e_1, e_2\}$组成，而箭 $a\colon e_1 \to e_2$ 就是同一个箭 α，它必然包含于 C 中。于是

$$\sum_{e\in K_t} x_e = x_{e_1} + x_{e_2} = \pm\big((\mathrm{rot}^{i_{e_2}}(C), \mathrm{srot}^{j_{e_2}}(\alpha)) + (-1)^{m+|a|\cdot|C|}(\mathrm{rot}^{i_{e_2+1}}(C), \mathrm{srot}^{j_{e_2+1}}(\alpha))\big)$$

是一个余边界，因此 $\sum x_e \equiv 0$。若 K_t 含有特殊点，设 K_t 的基数为 s，即$_{e\in K_t} K_t = \{e_1, \ldots, e_s\}$。于是 $s \geq 3$，在这 s个点中， $s-2$是特殊点，其余两个不是，也就是说， Q 包含以下子箭图



其中 $c_s a_{s-1}$， $a_{s-1}a_{s-2}$，……， a_2a_1， $a_1c_0 \in R$和 ε_2，……， ε_{s-1}是特殊环。这里， a_1，……， a_{s-1} 表示 α 和 C 都经过的箭，而 α'、 C' 是长度大于或等于 0 的路径，使得

$$\mathrm{rot}^{i_{e_1}}(C) = c_0 C' c_s a_{s-1} \cdots a_2 a_1, \text{ and } \mathrm{srot}^{j_{e_1}}(\alpha) = b_0 \alpha' b_s a_{s-1} \varepsilon_{s-1} \cdots a_2 \varepsilon_2 a_1.$$

Then

$$\begin{aligned}\sum_{e\in K_t} x_e =& x_{e_1}+\cdots x_{e_s}\\ =&\sum_{i=2}^{s-1}\pm\big((a_i\cdots a_1c_0C'c_sa_{s-1}\cdots a_{i+1},a_i\varepsilon_i\cdots a_2\varepsilon_2a_1b_0\alpha'b_sa_{i+1}\varepsilon_{i+1})\\ &\qquad+(-1)^{m+|a_i|\cdot|C|}(a_{i-1}\cdots a_1c_0C'c_sa_{s-1}\cdots a_i,\varepsilon_i\cdots a_2\varepsilon_2a_1b_0\alpha'b_sa_{i+1}\varepsilon_{i+1}a_i)\big)\\ &\pm\big((a_1c_0C'c_sa_{s-1}\cdots a_2,a_1b_0\alpha'b_sa_{s-1}\varepsilon_{s-1}\cdots a_2\varepsilon_2)\\ &\qquad+(-1)^{m+|a_1|\cdot|C|}(c_0C'c_sa_{s-1}\cdots a_1,b_0\alpha'b_sa_{s-1}\varepsilon_{s-1}\cdots a_2\varepsilon_2a_1)\big)\\ &+\sum_{j=1}^{s-2}\pm(a_j\cdots a_1c_0C'c_sa_{s-1}\cdots a_{j+1},a_j\varepsilon_j\cdots a_2\varepsilon_2a_1b_0\alpha'a_{s-1}\varepsilon_{s-1}\cdots a_{j+1})\\ \equiv&0,\end{aligned}$$

从而类 $\langle\!\langle\alpha\rangle\!\rangle_s\smile\langle\!\langle C\rangle\!\rangle_{gr}$ 在上同调中为零。

现在我们用 b 中的首个箭头计算 $\langle\!\langle\alpha\rangle\!\rangle_s\smile(bC,b)$。若 $I_{t(b)}=\emptyset$，则有 $\langle\!\langle\alpha\rangle\!\rangle_s\smile(bC,b)=0$。我们假设 $I_{t(b)}\neq\emptyset$，于是

$$\langle\!\langle\alpha\rangle\!\rangle_s\smile(bC,b)=\sum_{j\in J_{t(b)}}(bC,\pi(\mathrm{srot}^j(\alpha)b))=\sum_{j\in J_{t(b)}}(\mathrm{rot}^{r-1}(C)b,\pi(\mathrm{srot}^j(\alpha)b)).$$

若 $t(b)$ 不是特殊顶点，则 $I_{t(b)}=\{j_{t(b)}\}$。若 $\mathrm{srot}^{j_{t(b)}}(\alpha)$ 的首个箭头与 $\mathrm{rot}^{r-1}(C)$ 的首个箭头重合，则 $\pi(\mathrm{srot}^j(\alpha)b)=0$，也就是说，

$$\langle\!\langle\alpha\rangle\!\rangle_s\smile(bC,b)=(\mathrm{rot}^{r-1}(C)b,\pi(\mathrm{srot}^j(\alpha)b))=0.$$

另一方面，若 $\mathrm{srot}^{j_{t(b)}}(\alpha)$ 的首个箭头不同于 $\mathrm{rot}^{r-1}(C)$ 的首个箭头，则 b 是 $\mathrm{srot}^{j_{t(b)}}(\alpha)$ 的最后一个箭头。在这种情况下，$(\mathrm{rot}^{r-1}(C)b,\mathrm{srot}^j(\alpha)b)$ 是一个余边界，因此 $\langle\!\langle\alpha\rangle\!\rangle_s\smile(bC,b)\equiv0$。

若 $t(b)$ 是特殊顶点，令 ε 表示 $t(b)$ 处的特殊环，则可设 $J_{t(b)}=\{j_{t(b)},j_{t(b)}+1\}$。假设 α' 是满足 $\mathrm{srot}^{j_{t(b)}}(\alpha)=\varepsilon\alpha'$ 的圈。在这种情况下，我们有 $\mathrm{srot}^{j_{t(b)}+1}(\alpha)=\alpha'\varepsilon-\alpha'$，并且 α' 的首个箭头与 $\mathrm{rot}^{r-1}(C)$ 的首个箭头重合，而 α' 的最后一个箭头是 b。因此，

$$\langle\!\langle\alpha\rangle\!\rangle_s\smile(bC,b)=(\mathrm{rot}^{r-1}(C)b,\pi(\varepsilon\alpha'b+\alpha'\varepsilon b-\alpha'b))=(\mathrm{rot}^{r-1}(C)b,\alpha'\varepsilon b),$$

这是一个余边界。

现在我们考虑此前排除的情形。

注 3.18. 假设箭图 Q恰好有一个顶点和一个环 a，因此生成树 T 为空。根据 $\mathrm{char}(\mathbb{K})$、次数 $|a|$ 以及关系，我们有五种情形：

- 若 $a\in\mathrm{Sp}$，则：

$$\mathrm{HH}^k(A)=\begin{cases}\langle\mathbb{1},(s(a),a)\rangle & \text{if } k=0,\\ 0 & \text{if } k\geq1.\end{cases}$$

此外，$(s(a)\ a)\smile(s(a)\ a)=(s(a)\ a)$。

现在，我们假设 $a\notin\mathrm{Sp}$，并考虑以下四种情形。

- 若 $a^2=0$，$\mathrm{char}(\mathbb{K})=2$ 或 $|a|$ 为奇数，则 $\mathscr{C}(\Gamma)=\{a^l\mid l\geq1\}$，上同调向量空间如下 s:

$$\mathrm{HH}^k(A)=\begin{cases}\langle\mathbb{1},(s(a),a)\rangle & \text{if } k=0,\\ \langle(a^k,s(a)),(a^k,a)\rangle & \text{if } k\geq1.\end{cases}$$

对所有 $m,n\geq 1$，我们有

$$\begin{aligned}&(s(a),a)\smile(s(a),a)=0, && (s(a),a)\smile(a^n,s(a))=(a^n,a)\\ &(s(a),a)\smile(a^n,a)=0, && (a^m,s(a))\smile(a^n,s(a))=(-1)^{mn}(a^{m+n},s(a))\\ &(a^m,s(a))\smile(a^n,a)=(-1)^{mn}(a^{m+n},a), && (a^m,a)\smile(a^n,a)=0.\end{aligned}$$

- 若 $a^2=0$，$\mathrm{char}(\mathbb{K})\neq 2$ 且 $|a|$ 为偶数，则得到：

$$\mathrm{HH}^k(A)=\begin{cases}\langle \mathbb{1},(s(a),a)\rangle & \text{if } k=0,\\ \langle (a^k,s(a))\rangle & \text{if } k\geq 1 \text{ is even},\\ \langle (a^k,a)\rangle & \text{if } k\geq 1 \text{ is odd}.\end{cases}$$

对于所有 $m,n\geq 1$，我们有

$$\begin{aligned}&(s(a),a)\smile(s(a),a)=0, && (s(a),a)\smile(a^{2n},s(a))=0\\ &(s(a),a)\smile(a^n,a)=0, && (a^{2m},s(a))\smile(a^{2n},s(a))=(a^{2(m+n)},s(a))\\ &(a^{2m},s(a))\smile(a^{2n-1},a)=(a^{2(m+n)-1},a), && (a^{2m-1},a)\smile(a^{2n-1},a)=0.\end{aligned}$$

- 若 $a^2\neq 0$，$\mathrm{char}(\mathbb{K})\neq 2$ 且 $|a|$ 为奇数，则：

$$\mathrm{HH}^k(A)=\begin{cases}\langle \mathbb{1},(s(a),a^{2m})\mid m\geq 1\rangle & \text{if } k=0,\\ \langle (a,s(a)),(a,a^{2m-1})\mid m\geq 1\rangle & \text{if } k=1,\\ 0 & \text{if } k>1.\end{cases}$$

显然，我们有

$$\begin{aligned}&(s(a),a^{2m})\smile(a,s(a))=0, && (s(a),a^{2m})\smile(s(a),a^{2n})=(s(a),a^{2(m+n)})\\ &(s(a),a^{2m})\smile(a,a^{2n-1})=(a,a^{2(m+n)-1}), && (a,s(a))\smile(a,s(a))=0\\ &(a,s(a))\smile(a,a^{2n-1})=0, && (a,a^{2m-1})\smile(a,a^{2n-1})=0,\end{aligned}$$

对所有 $m,n\geq 1$。

- 若 $a^2\neq 0$，$\mathrm{char}(\mathbb{K})=2$ 或 $|a|$ 为偶数，则上同调向量空间如下 s:

$$\mathrm{HH}^k(A)=\begin{cases}\langle (s(a),a^m)\mid \ m\geq 0\rangle & \text{if } k=0,\\ \langle (a,a^m)\mid m\geq 0\rangle & \text{if } k=1,\\ 0 & \text{if } k>1.\end{cases}$$

显然，

$$(s(a),a^m)\smile(s(a),a^n)=(s(a),a^{m+n}),\quad (s(a),a^m)\smile(a,a^n)=(a,a^{m+n}),$$

$$\text{and }\ (a,a^m)\smile(a,a^n)=0 \text{ for all } m,n\geq 0.$$

3.5. **Hochschild 上同调代数。**

本节给出分次代数 $\mathrm{HH}^*(A)$ 的一个表示。令 $\mathscr{C}^{\mathrm{basic}}(\Gamma)$ 为 $\mathscr{C}(\Gamma)$ 中那些不是其他 $\mathscr{C}(\Gamma)$ 元素的真幂的元素所构成的集合。当 $\mathrm{char}(\mathbb{K})=2$ 时，$\mathscr{C}^{\mathrm{basic}}(\Gamma)$ 中的元素是 $\mathscr{C}(\Gamma)$ 的本原元素。但当 $\mathrm{char}(\mathbb{K})\neq 2$ 时，$\mathscr{C}^{\mathrm{basic}}(\Gamma)$ 中的元素是满足 $l(C)+|C|$ 为偶数的 $C\in\mathscr{C}(\Gamma)$ 本原元素，以及满足 $l(D)+|D|$ 为奇数的 Γ-完全圈 D 的平方。令 $\mathsf{Sp}^{\mathrm{basic}}$ 为 $\mathscr{C}^{\mathrm{basic}}(\Gamma)$ 的子集，其中的元素对应于 Sp 中的特殊环。也就是说，若 $\mathrm{char}(\mathbb{K})=2$，则 $\mathsf{Sp}^{\mathrm{basic}}=\mathsf{Sp}$；否则，$\mathsf{Sp}^{\mathrm{basic}}=\mathsf{Sp}^2$。类似地，用 $\mathscr{C}^{\mathrm{basic}}(\mathcal{B})$ 表示 $\mathscr{C}(\mathcal{B})$ 中那些不是 $\mathscr{C}(\mathcal{B})$ 元素的真幂的元素所构成的集合。

作为 [8, 命题 55] 中针对 gentle 情形所得结果的推广，我们得到以下结论。

定理 3.19. 下列余循环的上同调类 $\mathscr{G}$ 构成分次代数 $\mathrm{HH}^*(A)$的生成集： $\mathbb{K}(\Gamma\|\mathcal{B})$

① 数对 $(s(\alpha)\ \alpha) \in HH^{0,|\alpha|}(A)$，其中 α 是 (Q, I) 中的 $\mathcal{B}$-极大路径；② 和式 $\langle\langle\alpha\rangle\rangle_s \in HH^{0,|\alpha|}(A)$，其中 $\alpha \in \mathscr{C}^{\text{basic}}(\mathcal{B})$；③ 数对 $(c, c) \in HH^{1,0}(A)$，其中 c 是生成树 T 与特殊环集合 Sp 的并集之外的一支箭；④ 数对 $(\gamma, \alpha) \in HH^{l(\gamma),|\alpha|-|\gamma|}(A)$，其中 γ 是 Γ 和 γ 的 Γ-极大元素，且 α 既不以同一支箭开头，也不以其结尾；⑤ 和式 $\langle\langle C\rangle\rangle_{gr} \in HH^{l(C),-|C|}(A)$，其中 $C \in \mathscr{C}^{\text{basic}}(\Gamma) \setminus Sp^{\text{basic}}$。

由杯积表（见表 1 ）可知，集合 $\mathscr{G}$ 生成 $\mathrm{HH}^*(A)$ 作为分次代数。从现在起，在枚举 $\mathscr{G}$的生成元时，对于所有 $1 \leq i \leq 5$，我们都将使用符号 i◯ 表示 i阶生成元的类。

注 3.20。（见 [8, 注 5.6]）。定理 3.19 中的集合 $\mathscr{G}$ 最小生成 $\mathrm{HH}^*(A)$，但以下情况除外：箭图 Q 由一个顶点和一个环 a 构成，且该环不是特殊环，并且 $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 2$，或“$a^2 \in R$ 和 $|a|$ 为奇数”，或“$a^2 \notin R$ 和 $|a|$ 为偶数”。在这三种情况下，该代数都是 Gentle 代数。此时有 $(s(a)\ a) \smile (a, s(a)) = (a, a)$，因此，定理 3.19 中列出的生成元 (a, a) 实际上并不需要。

现在，我们将描述一组用于刻画上同调代数的关系。为此，请注意， $\mathscr{G}$ 中的每个生成元都有一个总次数，等于其外次数与内次数之和。总次数对于确定以下表示中隐含的分次交换关系至关重要。

定理 3.21。 设 A 是与分次斜温和三元组 (Q, R, Sp)相关联的分次斜温和代数。假设箭图 Q不属于备注3.20的假设所排除的类型。此外，假设该箭图不是仅含一个顶点和一个特殊环的箭图。分次上同调代数 $\mathrm{HH}^*(A)$ 是由定理 $\mathscr{G}$ 3.19 中的集合生成的自由分次交换代数除以由集合 $\mathscr{R}$ 生成的理想所得的商代数，其中该集合由以下元素组成：

- $u \smile v$，对于 $\mathscr{G}$ 中除以下情况外的每种 u 和 v 的选择各取一个：– 对某个 $C \in \mathscr{C}$ basic$(\Gamma) \setminus Sp^{\text{basic}}$，$u = v = \langle\langle C\rangle\rangle_{gr}$；– 对某个 $\alpha \in \mathscr{C}$ basic$(\mathcal{B})$，$u = v = \langle\langle\alpha\rangle\rangle_s$；– u 和 v 依某种顺序分别为 $\langle\langle C\rangle\rangle_{gr}$ 和 (c, c)，其中 $C \in \mathscr{C}$ basic$(\Gamma) \setminus Sp^{\text{basic}}$，且 c 是 $Q_1 \setminus (T \cup Sp)$ 中一支 C 经过的箭；– u 和 v 依某种顺序分别为 $\langle\langle\alpha\rangle\rangle_s$ 和 (c, c)，其中 $\alpha \in \mathscr{C}$ basic$(\mathcal{B})$，且 c 是 $Q_1 \setminus (T \cup Sp)$ 中一支 α 经过的箭，

- $(c, c) \smile \langle\langle C\rangle\rangle_{gr} - (d, d) \smile \langle\langle C\rangle\rangle_{gr}$，对于 $Q_1 \setminus (T \cup \mathrm{Sp})$ 中的每一对不同的箭 c和 d，以及 $\mathscr{C}_{\text{basic}}(\Gamma) \setminus \mathrm{Sp}_{\text{basic}}$ 中同时经过 c和 $\overline{d}$的每个完全圈，各对应一个，
- $(c, c) \smile \langle\langle\alpha\rangle\rangle_s - (d, d) \smile \langle\langle\alpha\rangle\rangle_s$，对于 $Q_1 \setminus (T \cup \mathrm{Sp})$ 中的每一对不同的箭 c和 d，以及 $\mathscr{C}_{\text{basic}}(\mathcal{B})$ 中同时经过 c 和 d的每个余完全圈，各对应一个。

证明 事实上，根据注记 3.20 和注记 3.18的第一种情形，很容易验证，定理 3.21 表述中排除的情形并不满足定理 3.21。另一方面，当 $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ 时，箭图 Q 仅由一个顶点和一个环 $a \notin \mathrm{Sp}$ 组成，且 “$a^2 \notin R$ 和 $|a|$ 为奇数 ” 或“$a^2 \in R$ 和$|a|$ 为偶数”，注记 3.18 中的计算表明，定理 3.21 成立。因此，我们假设该箭图并非由一个顶点和一个环构成。

考虑由 $\mathscr{H}$ 生成的自由分次交换代数 $\mathscr{G}$，以及典范满射π ： $\mathscr{H} \to \mathrm{HH}^*(A)$，其核为 I。定理 [8, 58] 中通过逐个情形讨论证明了 I 由该定理列出的关系生成；更多细节请参见 [8, 定理 58]。

□

注 3.22。 在定理3.21中，有三种情形被表述的假设排除。在所有这些情形中，箭图只有一个顶点和一个环 a，该环不是特殊环，

(1) 假设 $a \in \mathrm{Sp}$，在这种情况下，上同调代数 $\mathrm{HH}^*(A)$ 由次数为 0 的元素 $(s(a)\ a)$ 的类自由生成，作为分次交换代数，并满足关系 $(s(a)\ a) \smile (s(a)\ a) = (s(a)\ a)$；(2) 如果 $a^2 \in R$，$\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 2$ 或 $|a|$ 为奇数，那么上同调代数 $\mathrm{HH}^*(A)$ 由次数为 $|a|$ 和 $1-|a|$ 的元素 $(s(a)\ a)$ 和 $(a, s(a))$ 的类自由生成，作为分次交换代数，并满足关系 $(s(a)\ a) \smile (s(a)\ a) = 0$；(3) 当 $a^2 \notin R$，且 $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ 并且 $|a|$ 为偶数，或 $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 2$ 时，上同调代数 $\mathrm{HH}^*(A)$ 由次数为 $|a|$ 和 $1-|a|$ 的元素 $(s(a)\ a)$ 和 $(a, s(a))$ 的类自由生成，作为分次交换代数，并满足关系 $(a, s(a)) \smile (a, s(a)) = 0$。

3.6. **Gerstenhaber 括号**。

本节中，我们使用比较态射，将第 2.2 节通过 bar 分解在 Hochschild 上链复形上引入的 Gerstenhaber 括号，转移到由 CS-投射分解诱导的 Hochschild 上链复形上。

给定两个元素 $(\gamma, \alpha) \in \Gamma_m\|\mathcal{B}$ 和 $(\eta, \beta) \in \Gamma_n\|\mathcal{B}$，其中 $m \geq 1$ 且 $n \geq 0$，Gerstenhaber 括号$[(\gamma, \alpha),(\eta, \beta)] \in \mathbb{K}(\Gamma_{m+n-1}\|\mathcal{B})$ 定义为

$$[(\gamma, \alpha), (\eta, \beta)] = (\gamma, \alpha) \circ (\eta, \beta) - (-1)^{(|\alpha|-|\gamma|+m-1)(|\beta|-|\eta|+n-1)}(\eta, \beta) \circ (\gamma, \alpha),$$

其中 $(\gamma, \alpha) \circ (\eta, \beta) = \sum_{i=1}^{m} (\gamma, \alpha) \circ_i (\eta, \beta)$，并且在 $\mathbb{K}(\Gamma\|\mathcal{B})$ 上对 $1 \leq i \leq m$ 执行运算 $\circ_i$ 可使用以下图示

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{K}(\Gamma_m\|\mathcal{B}) & \times & \mathbb{K}(\Gamma_n\|\mathcal{B}) & \xrightarrow{\circ_i} & \mathbb{K}(\Gamma_{m+n-1}\|\mathcal{B}) \\
\downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \uparrow \simeq \\
\mathrm{Hom}_{A^e}(A \otimes \mathbb{K}\Gamma_m \otimes A, A) & \times & \mathrm{Hom}_{A^e}(A \otimes \mathbb{K}\Gamma_n \otimes A, A) & & \mathrm{Hom}_{A^e}(A \otimes \mathbb{K}\Gamma_{m+n-1} \otimes A, A) \\
\downarrow \circ G^m & & \downarrow \circ G^n & & \uparrow \circ F^{m+n-1} \\
\mathrm{Hom}_{A^e}(A \otimes (s\overline{A})^m \otimes A, A) & \times & \mathrm{Hom}_{A^e}(A \otimes (s\overline{A})^n \otimes A, A) & & \mathrm{Hom}_{A^e}(A \otimes (s\overline{A})^{m+n-1} \otimes A, A) \\
\downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \uparrow \simeq \\
\mathrm{Hom}_{E^e}((s\overline{A})^m, A) & \times & \mathrm{Hom}_{E^e}((s\overline{A})^n, A) & \xrightarrow{\circ_i} & \mathrm{Hom}_{E^e}((s\overline{A})^{m+n-1}, A).
\end{array}$$

也就是说，$f_{(\gamma,\alpha)\circ_i(\eta,\beta)} = \big((f_{(\gamma,\alpha)} \circ G^m) \circ_i (f_{(\eta,\beta)} \circ G^n)\big) \circ F^{m+n-1}$。

假设 $1 \leq i \leq m$ 和 $x = x_{m+n-1} \cdots x_1 \in \Gamma_{m+n-1}$。若 $x_{i+n-1} \cdots x_i = \eta$，则：

$$f_{(\gamma,\alpha)\circ_i(\eta,\beta)}(1 \otimes x \otimes 1) = (-1)^{\sigma_i} f_{(\gamma,\alpha)} \circ G^m(1 \otimes sx_{m+n-1} \otimes \cdots sx_{i+n} \otimes s\beta \otimes sx_{i-1} \otimes \cdots \otimes sx_1 \otimes 1), \tag{3.1}$$

其中

$$\sigma_i = \sum_{j=2}^{m+n-1} (|x_j| + \cdots + |x_{m+n-1}|) + (|x_{i+n}| + \cdots + |x_{m+n-1}| + m - i)(|\beta| - |\eta| + n + 1) + \sum_{j=i+1}^{i+n-1} (|x_j| + \cdots + |x_{i+n-1}|);$$

而若 $x_{i+n-1} \cdots x_i \neq \eta$，则 $f_{(\gamma,\alpha)\circ_i(\eta,\ \beta)}(1 \otimes x \otimes 1) = 0$.

事实 3.23。 给定两个元素 $(\gamma,\ \alpha) \in \Gamma_m\|\mathcal{B}$ 和 $(\eta,\ \beta) \in \Gamma_n\|\mathcal{B}$，满足 $m \geq 1$ 且 $n \geq 0$，若 $l\ (\beta) = 0$，则 $(\gamma,\ \alpha) \circ (\eta,\ \beta) = 0$。事实上，这可由方程（3.1）直接推出。

记号 3.24。 令 $\gamma=\gamma_m\cdots\gamma_1\in Q_m$ 满足 $m\geq 1$，并设 β 是 Q 中的一条路径，且 $a\in Q_1$；对于任意 $1\leq j\leq m$，记

$$\gamma\vee_j^a\beta:=\begin{cases}\gamma_m\cdots\gamma_{j+1}\beta\gamma_{j-1}\cdots\gamma_1 & \text{if } \gamma_j=a,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

命题 3.25. 设$(\gamma,\alpha)\in\Gamma_m\|\mathcal{B}$和$(\eta,\beta)\in\Gamma_n\|\mathcal{B}$，其中 $m\geq 1$、 $n\geq 0$且 $l(\beta)\geq 1$。假设 $\gamma=\gamma_m\cdots\gamma_1$且 $\beta=\beta_{l(\beta)}\cdots\beta_1$。那么$(\gamma,\alpha)\circ_i(\eta,\beta)$如下：

(*a*) 若 $m=1$，则$(\gamma,\alpha)\circ_1(\eta,\beta)=\sum\limits_{j=1}^{l(\beta)}(-1)^{(|\alpha|-|\gamma|)|\beta_{l(\beta)}\cdots\beta_{j+1}|}(\eta,\pi(\beta\vee_j^\gamma\alpha))$,

(*b*) 若 $m>1$，则

$$(\gamma,\alpha)\circ_1(\eta,\beta)=\begin{cases}(-1)^{(|\gamma|-|\gamma_1|+m-1)|\beta|+m-1}(\gamma\vee_1^{\beta_{l(\beta)}}\eta,\pi(\beta\vee_{l(\beta)}^{\gamma_1}\alpha)) & \text{if } n=0,\\ (-1)^{(|\gamma|-|\gamma_1|+m-1)(|\beta|-|\eta|)+(m-1)(n-1)}(\gamma\vee_1^{\eta_n}\eta,\pi(\beta\vee_{l(\beta)}^{\eta_n}\alpha)) & \text{if } n\geq 1,\end{cases}$$

and

$$(\gamma,\alpha)\circ_m(\eta,\beta)=\begin{cases}(-1)^{(m-1)|\beta|+(|\alpha|-|\gamma|)(|\beta|-|\beta_1|)}(\gamma\vee_m^{\beta_1}\eta,\pi(\beta\vee_1^{\gamma_m}\alpha)) & \text{if } n=0,\\ (-1)^{(m-1)(|\beta|+|\eta|)+(|\alpha|-|\gamma|)(|\beta|-|\beta_1|)}(\gamma\vee_m^{\eta_1}\eta,\pi(\beta\vee_1^{\eta_1}\alpha)) & \text{if } n\geq 1,\end{cases}$$

(*c*) 若 $m>2$ 且 $2\leq i\leq m-1$，则

$$(\gamma,\alpha)\circ_i(\eta,\beta)$$
$$=\begin{cases}(-1)^{(i+1)|\beta|+m-i}(\beta^{m-1},\alpha) & \text{if } n=0 \text{ and } \gamma=\beta^m,\\ (\gamma,\alpha) & \text{if } n=1 \text{ and } \eta=\beta=\gamma_i,\\ (-1)^{(|\gamma_m\cdots\gamma_{i+1}|+m-1)|\delta|+(m-i)(n-1)}(\gamma_m\cdots\gamma_{i+1}\delta\gamma_{i-1}\cdots\gamma_1,\alpha) & \text{if } n>1,\ \beta=\gamma_i,\ \eta=\beta\delta \text{ with } \delta \text{ a complete cycle starts with } \beta,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

证明 (a) 令 $m=1$。由公式 (3.1)，可得

$$\begin{aligned}f_{(\gamma,\alpha)\circ_1(\eta,\beta)}(1\otimes x\otimes 1)&=\delta_{x,\eta}f_{\gamma,\alpha}\circ G^1(1\otimes s\beta\otimes 1)\\&=\delta_{x,\eta}\sum_{j=1}^{l(\beta)}f_{\gamma,\alpha}(\beta_{l(\beta)}\cdots\beta_{j+1}\otimes\beta_j\otimes\beta_{j-1}\cdots\beta_1)\\&=\delta_{x,\eta}\sum_{j=1}^{l(\beta)}(-1)^{(|\alpha|-|\gamma|)|\beta_{l(\beta)}\cdots\beta_{j+1}|}\delta_{\beta_j,\gamma}\pi(\beta_{l(\beta)}\cdots\beta_{j+1}\alpha\beta_{j-1}\cdots\beta_1),\end{aligned}$$

这意味着 $(\gamma,\ \alpha)\circ_1(\eta,\ \beta)=\sum\limits_{j=1}^{l(\beta)}(-1)^{(|\alpha|-|\gamma|)|\beta_{l(\beta)}\cdots\beta_{j+1}|}(\eta,\ \pi(\beta\vee_j^\gamma\alpha))$。

(b) 假设 $m>1$。根据公式 (3.1)，若 $n=0$，则有

$$\begin{aligned}f_{(\gamma,\alpha)\circ_1(\eta,\beta)}(1\otimes x\otimes 1)&=(-1)^{\sigma_1}f_{\gamma,\alpha}\circ G^m(1\otimes sx_{m-1}\otimes\cdots sx_1\otimes s\beta\otimes 1)\\&=(-1)^{(|\gamma|-|\gamma_1|+m-1)|\beta|+m-1}\pi(\alpha\beta_{l(\beta)-1}\cdots\beta_1),\end{aligned}$$

若 $\eta=s(x_1)$ 且 $\gamma=x_{m-1}\cdots x_1\beta_{l(\beta)}$。否则 $f_{(\gamma,\alpha)\circ_1(\eta,\ \beta)}(1\otimes x\otimes 1)=0$。因此，

$$(\gamma,\alpha)\circ_1(\eta,\beta)=(-1)^{(|\gamma|-|\gamma_1|+m-1)|\beta|+m-1}(\gamma\vee_1^{\beta_{l(\beta)}}\eta,\pi(\alpha\beta_{l(\beta)-1}\cdots\beta_1)).$$

若 $n\geq 1$，则

$$\begin{aligned}f_{(\gamma,\alpha)\circ_1(\eta,\beta)}(1\otimes x\otimes 1)&=(-1)^{\sigma_1}\delta_{x_n\cdots x_1,\eta}f_{\gamma,\alpha}\circ G^m(1\otimes sx_{m+n-1}\otimes\cdots sx_{n+1}\otimes s\beta\otimes 1)\\&=(-1)^{(|\gamma|-|\gamma_1|+m-1)(|\beta|-|\eta|)+(m-1)(n-1)}\pi(\alpha\beta_{l(\beta)-1}\cdots\beta_1),\end{aligned}$$

if $\eta = x_n \cdots x_1$ 和 $\gamma = x_{m+n-1} \cdots x_{n+1} \beta_{l(\beta)}$。否则 $f_{(\gamma,\alpha)\circ_1(\eta,\ \beta)}(1 \otimes x \otimes 1) = 0$ 和

$$(\gamma, \alpha) \circ_1 (\eta, \beta) = (-1)^{(|\gamma|-|\gamma_1|+m-1)(|\beta|-|\eta|)+(m-1)(n-1)} (\gamma \vee_1^{\beta_{l(\beta)}} \eta, \pi(\alpha \beta_{l(\beta)-1} \cdots \beta_1)),$$

若 $\gamma \vee_1^{\beta_{l(\beta)}} \eta \in \Gamma_{m+n-1}$，否则为零。

$(\gamma,\ \alpha) \circ_m (\eta,\ \beta)$ 的计算类似。

(c) 假设 $m > 2$ 且 $2 \le i \le m-1$。由等式 (3.1) 及 G^m的定义可知，若 $l(\beta) \ge 2$，则对于任意 $x \in \Gamma_{m+n-1}$

$$f_{(\gamma,\alpha)\circ_i(\eta,\beta)}(1 \otimes x \otimes 1) = 0,$$

也就是说，$(\gamma,\ \alpha) \circ_i (\eta,\ \beta) = 0$。

现在假设 $\beta \in Q_1$。若 $n = 0$，则 β 是一个环。在这种情况下，我们有

$$\begin{aligned} f_{(\gamma,\alpha)\circ_i(\eta,\beta)}(1 \otimes x \otimes 1) &= (-1)^{\sigma_i} f_{(\gamma,\alpha)} \circ G^m(1 \otimes s x_{m-1} \otimes \cdots \otimes s x_i \otimes s\beta \otimes s x_{i-1} \otimes \cdots \otimes s x_1 \otimes 1) \\ &= (-1)^{(|x_{m-1}\cdots x_i|+m-1)|\beta|+m-i} f_{(\gamma,\alpha)}(1 \otimes x_{m-1} \cdots x_i \beta x_{i-1} \cdots x_1 \otimes 1), \end{aligned}$$

若 $\eta = s(x_i)$ 且 $x_{m-1} \cdots x_i \beta x_{i-1} \cdots x_1 \in \Gamma_m$，因此 $\beta^2 \in S$ 且 $x = \beta^{m-1}$。于是，当$n = 0$时，我们得到

$$(\gamma, \alpha) \circ_i (\eta, \beta) = (-1)^{(i+1)|\beta|+m-i} (\beta^m, \alpha),$$

前提是 $\gamma = \beta^m$。

当 $n \ge 1$ 时，我们有

$$\begin{aligned} &f_{(\gamma,\alpha)\circ_i(\eta,\beta)}(1 \otimes x \otimes 1) \\ &= (-1)^{\sigma_i} f_{(\gamma,\alpha)} \circ G^m(1 \otimes s x_{m+n-1} \otimes \cdots s x_{i+n} \otimes s\beta \otimes s x_{i-1} \otimes \cdots \otimes s x_1 \otimes 1) \\ &= (-1)^{(|x_{m+n-1}\cdots x_{i+n}|+m-1)(|\beta|-|\eta|)+(m-i)(n-1)} f_{(\gamma,\alpha)}(1 \otimes x_{m+n-1} \cdots x_{i+n} \beta x_{i-1} \cdots x_1 \otimes 1). \end{aligned}$$

当且仅当 $\eta = x_{i+n-1} \cdots x_i$ 和 $x_{m+n-1} \cdots x_{i+n} \beta x_{i-1} \cdots x_1 \in \Gamma_m$ 时，这一结论成立。该条件意味着，若 $n = 1$，则 $\beta = \eta = x_i$；并且当 $n > 1$ 时，$\beta = x_{i+n-1} = x_i$ 和 $\eta = \beta\delta$ 满足 $\delta = x_{i+n-2} \cdots x_i$，且存在一个从 β 开始的完全循环。

因此，我们进一步得到

$$f_{(\gamma,\alpha)\circ_i(\eta,\beta)}(1 \otimes x \otimes 1) = (-1)^{(|\gamma_m \cdots \gamma_{i+1}|+m-1)(|\beta|-|\eta|)+(m-i)(n-1)} \alpha,$$

若 $\gamma = x_{m+n-1} \cdots x_{i+n} \beta x_{i-1} \cdots x_1$；否则，$f_{(\gamma,\alpha)\circ_i\ (\eta,\ \beta)}\ (1 \otimes x \otimes 1) = 0$。

总之，当 $n = 1$ 时，我们有

$$(\gamma, \alpha) \circ_i (\eta, \beta) = (\gamma, \alpha), \quad \text{if } (\eta, \beta) = (\gamma_i, \gamma_i).$$

当 $n > 1$ 时，我们得到

$$(\gamma, \alpha) \circ_i (\eta, \beta) = (-1)^{(|\gamma_m \cdots \gamma_{i+1}|+m-1)|\delta|+(m-i)(n-1)} (\gamma_m \cdots \gamma_{i+1} \delta \gamma_{i-1} \cdots \gamma_1, \alpha),$$

若 $(\eta,\ \beta) = (\gamma_i\delta,\ \gamma_i)$，其中 δ 是一个从 γ_i 开始的完全循环。在所有其他情况下，$(\gamma,\ \alpha) \circ_i (\eta,\ \beta) = 0$。

□

记号 3.26。若 c 是 Q 中的一支箭，且 $\gamma = \gamma_m \cdots \gamma_1$ 是一条路径，则我们定义

$$\deg_c(\gamma) := \#\{i \in \{1, \ldots, m\} \mid \gamma_i = c\},$$

the 路径 γ 经过 c的次数；若 $(\gamma,\ \alpha)$ 是 $\Gamma \| \mathcal{B}$ 的一个元素，我们令

$$\deg_c(\gamma, \alpha) := \deg_c(\alpha) - \deg_c(\gamma).$$

我们可以利用命题 3.25 计算 $\circ$ 代数 HH 的任意两个生成元之间的运算$^*(A)$。由此得到以下三个推论，它们确定了运算表 $\circ$。证明可由命题中的公式进行直接的逐步计算得到3.25，这里我们给出一个简短的证明。

推论 3.27. 设 $c \in Q_1 \setminus (T \cup \mathrm{Sp})$，且 $(\eta, \beta) \in \Gamma_n \| \mathcal{B}$ 满足 $n \geq 0$，则

$$(c, c) \circ (\eta, \beta) = \deg_c(\beta)(\eta, \beta).$$

证明 由命题 3.25 (1) 可得。

□

推论 3.28. 设 (Q, R, Sp) 是一个分次斜温和三元组，$(\gamma, \alpha) \in \Gamma_m \| \mathcal{B}$, $m \geq 1$，其中 γ Γ-极大，且 γ和 α 的首尾不含相同的箭。假设 $(\eta, \beta) \in \Gamma_n \| \mathcal{B}$ 满足 $n \geq 0$。则

$$(\gamma, \alpha) \circ (\eta, \beta) = \begin{cases} (\eta, \alpha) & \text{if } l(\gamma) = 1 \text{ and } \beta = \gamma, \\ (\gamma, \alpha) & \text{if } l(\gamma) > 1 \text{ and } \eta = \beta = \gamma_i \text{ for some } 1 \leq i \leq m, \\ (\gamma_m \dots \gamma_2, \alpha)(\text{coboundary }) & \text{if } l(\gamma) > 1,\ l(\eta) = 0 \text{ and } \beta = \gamma_1 \text{ or } \beta = \gamma_m, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明 假设 $l(\gamma) = 1$。由命题 3.25 (1)，我们有

$$(\gamma, \alpha) \circ_1 (\eta, \beta) = \sum_{j=1}^{l(\beta)} (-1)^{(|\alpha|-|\gamma|)|\beta_{l(\beta)} \cdots \beta_{j+1}|} (\eta, \pi(\beta \vee_j^{\gamma} \alpha)),$$

γ 的 Γ-极大性意味着，当 $l(\beta) > 1$时，$\pi(\beta \vee_j^{\gamma} \alpha) = 0$。当 $l(\beta) = 1$时，$\pi(\beta \vee_1^{\gamma} \alpha) = \alpha$ 当且仅当 $\beta = \gamma$。在这种情况下，我们得到

$$(\gamma, \alpha) \circ (\eta, \beta) = (\eta, \alpha).$$

假设 $l(\gamma) > 1$。若 $l(\beta) > 1$，则根据 γ 的 $\mathcal{A}$-极大性，以及 γ 和 α 的起始箭与终止箭均不相同这一事实，我们有

$$\pi(\beta \vee_{l(\beta)}^{\gamma_1} \alpha) = 0 = \pi(\beta \vee_1^{\gamma_m} \alpha).$$

因此，$(\gamma, \alpha) \circ (\eta, \beta) = 0$。

接下来，设 $l(\beta) = 1$。在此假设下，若 $n = 0$，则 β 是一个环。显然，对于$2 \leq i \leq m-1$，有 $(\gamma, \alpha) \circ_i (\eta, \beta) = 0$。对于 $(\gamma, \alpha) \circ_1 (\eta, \beta)$，我们有

$$(\gamma, \alpha) \circ_1 (\eta, \beta) = \begin{cases} (\gamma_m \cdots \gamma_2, \alpha) & \text{if } \gamma_1 = \beta, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

若 $\gamma_1 = \beta$，则根据斜温和代数的定义，我们有 $\alpha_1 = \gamma_2$，这意味着 $(\gamma_m \cdots \gamma_2, \alpha)$ 是一个余边界。类似的论证适用于 $(\gamma, \alpha) \circ_m (\eta, \beta)$。

因此，我们可以假设 $l(\eta) \geq 1$。若不存在满足 $\eta = \beta = \gamma_i$ 的 $i \in \{1, \dots, m\}$，则 $\gamma \vee_i^{\beta} \eta = 0$，从而 $(\gamma, \alpha) \circ (\eta, \beta) = 0$。反之，若存在满足 $\eta = \beta = \gamma_i$ 的 $i \in \{1, \dots, m\}$，则这样的 i 只有一个，即 $\gamma \vee_i^{\beta} \eta = \gamma$，因此 $(\gamma, \alpha) \circ (\eta, \beta) = (\gamma, \alpha)$。

□

推论 3.29。 设 (Q, R, Sp) 是一个分次斜温和三元组，并假设 Q 不是由一个顶点和一个环组成的箭图。令 $\langle\langle D \rangle\rangle_{gr} \in \mathscr{C}^{\mathrm{basic}}(\Gamma) \setminus \mathrm{Sp}^{\mathrm{basic}}$ 和 $v \in \mathscr{G}$，则

$$\langle\langle D \rangle\rangle_{gr} \circ v = \begin{cases} \deg_c(D) \langle\langle D \rangle\rangle_{gr} & \text{if } v = (c, c) \text{ for some } c \in Q_1 \setminus (T \cup \mathrm{Sp}), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

此外，当 $l(D) = 1$, $v = (\gamma, \alpha)$ 满足以下条件时：γ 是 Γ 的一个 Γ-极大元素，γ 和 α 既不以相同的箭开头，也不以相同的箭结尾，且 α 以 D开头或结尾，那么余循环 $\langle\langle D \rangle\rangle_{gr} \circ v$ 是一个余边界。

证明 我们仅给出最后一个结论的证明，即 $l(D)=1$ 且 $v=(\gamma,\alpha)$ 的情形，其中 γ 是 Γ的一个 Γ-极大元素，并且 γ 和 α 既不以相同的箭开头，也不以相同的箭结尾。其他情形的证明更简单，因此不再详细讨论。

如果 α 不经过 D，那么显然，对于任意 $i\in\{1,l(\alpha)\}$，都有 $\alpha\vee_i^D s(D)=0$，因此 $\langle\!\langle D\rangle\!\rangle_{gr}\circ(\gamma,\ \alpha)=0$。

相反，如果 α 经过 D，我们考虑三种情形：

情形 1： α 以 D 开始，即 $\alpha_1=D$。根据命题 3.25，我们有

$$\langle\!\langle D\rangle\!\rangle_{gr}\circ(\gamma,\alpha)=\pm(\gamma,\alpha_{l(\alpha)}\cdots\alpha_2).$$

这是一个余边界，因为根据斜温和代数的定义，γ 以 α_2 开始。

情形 2： 存在 $1<i<l(\alpha)$ 使得 $\alpha_i=D$。在这种情形下，显然 $\pi(\alpha\vee_i^D s(D))=0$。**情形 3：** α 以 D结尾。这种情形与第一种类似。

□

我们根据推论 $\circ$ 得到运算表：3.27、3.28 和 3.29。

$\circ$	$(s(\alpha)\ \alpha)$	$\langle\!\langle\alpha\rangle\!\rangle_s$	$(c,\ c)$	$(\gamma,\ \alpha)$	$\langle\!\langle C\rangle\!\rangle_{gr}$
$(s(\alpha')\ \alpha')$	0	0	0	0	0
$\langle\!\langle\alpha'\rangle\!\rangle_s$	0	0	0	0	0
$(d,\ d)$	次数$_d(\alpha)(s(\alpha)\ \alpha)$	次数$_d(\alpha)\langle\!\langle\alpha\rangle\!\rangle_s$	$\deg_d(c)(c,\ c)$	$\deg_d(\alpha)(\gamma,\ \alpha)$	0
$(\gamma',\ \alpha')$	0	0	$\deg_c(\gamma')(\gamma',\alpha')$	0	0
$\langle\!\langle D\rangle\!\rangle_{gr}$	0	0	$\deg_c(D)\langle\!\langle D\rangle\!\rangle_{gr}$	0	0

TABLE 2. 生成元之间的运算 $\circ$ $\mathrm{HH}^*(A)$，其中 Q 既不是由一个单环构成的箭图，也不是Kronecker箭 quiver。

定理 3.30 **.** 假设 Q 既不是由一个单环构成的箭图，也不是 *Kronecker*箭 *quiver* .

(1) 如果 $(c,c)\in\mathrm{HH}^{1,0}(A)$ 对应于 $T\cup\mathrm{Sp}$ 的补集中一支箭 c，并且 $v\in\mathrm{HH}^n(A)$，那么$[(c,c)\ v]=\deg_c(v)v$.(2) $\mathscr{G}$ 中元素之间的所有其他括号均为零。

此外，在(1) 中，如果 v 也属于$\mathrm{HH}^1(A)$，那么$\deg_c(v)$ 总是0、1 或 -1，因此$\mathrm{HH}^1(A)$ 的李代数结构不依赖于$\mathrm{char}(\mathbb{K})$。

现在我们来讨论被排除的情形。

Re标记 3.31. 假设箭图 Q 恰有一个顶点和一个环 a。由备注 3.18 可得：

- 若 $a\in\mathrm{Sp}$，则 $\mathscr{G}=\{(s(a)\ a)\}$，且 $\mathscr{G}$ 中元素之间的所有括号均为零。

现在我们假设 $a\notin\mathrm{Sp}$。

- 若满足以下任一条件：($a^2\in R$ 且 $\mathrm{char}(\mathbb{K})=2$ 为奇数，或 $|a|$ 为奇数)，或 ($a^2\notin R$ 且 $\mathrm{char}(\mathbb{K})=2$ 为偶数，或 $|a|$ 为偶数)，则 $\mathscr{G}=\{(s(a)\ a),\ (a,\ s(a))\}$，且 $\mathscr{G}$ 中元素之间唯一的非零括号为

$$[(a,s(a)),(s(a),a)]=(s(a),s(a)).$$

- 若 $a^2\in R$，$\mathrm{char}(\mathbb{K})\neq 2$ 且 $|a|$ 为偶数，则 $\mathscr{G}=\{(s(a)\ a),\ (a,\ a),\ (a^2,\ s(a))\}$ 且 $\mathscr{G}$ 的元素之间非零的括号为

$$[(a,a),(s(a),a)]=(s(a),a),\quad [(a,a),(a^2,s(a))]=-2(a^2,s(a)).$$

- 若 $a^2 \notin R$，$\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ 且 $|a|$ 为奇数，则 $\mathscr{G} = \{(s(a)\ a^2),\ (a,\ a),\ (a,\ s(a))\}$ 且 $\mathscr{G}$ 的元素之间唯一非零的括号为

$$[(s(a), a^2), (a, a)] = -2(s(a), a^2), \quad [(a, s(a)), (a, a)] = (a, s(a)).$$

注 3.32. 现在假设 Q 是带有箭 a 和 b的Kronecker箭 quiver。那么 $\mathscr{G} = \{(a,\ a),\ (a,\ b),\ (b,\ a)\}$。

- 若 $|a| - |b|$ 为奇数或 $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 2$，则 $\mathscr{G}$的元素之间唯一非零的括号为

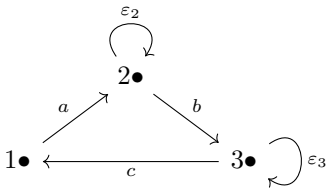
$$[(a, a), (a, b)] = -(a, b), \quad [(a, a), (b, a)] = (b, a).$$

- 若 $|a| - |b|$ 为偶数且 $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$，则 $\mathscr{G}$的元素之间唯一非零的括号为

$$[(a, a), (a, b)] = -(a, b), \quad [(a, a), (b, a)] = (b, a), \quad [(a, b), (b, a)] = -2(a, a).$$

现在给出一个例子。

例 3.33. 令 $A = \mathbb{K}Q/\langle R \cup \{\varepsilon^2 - \varepsilon \mid \varepsilon \in \mathrm{Sp}\}\rangle$ 为一个分次斜温和代数，对应于以下 skew-gentle 三元组（Q, R, Sp），其中 $R = \{ba, cb\}$ 且 $\mathrm{Sp} = \{\varepsilon_2, \varepsilon_3\}$。



没有 $\mathcal{B}$-极大圈，且 cba 是唯一的 Γ-极大元素。令 $\alpha := c\varepsilon_3 b\varepsilon_2 a$。我们有 e

$$\overline{\mathscr{C}}^{\mathrm{basic}}(\mathcal{B}) = \begin{cases} \{\alpha\} & \text{if } \mathrm{char}(\mathbb{K}) = 2 \text{ or } |\alpha| \text{ even}, \\ \{\alpha^2\} & \text{otherwise}, \end{cases} \quad \text{and } \overline{\mathscr{C}}^{\mathrm{basic}}(\Gamma) = \mathrm{Sp}^{\mathrm{basic}} = \begin{cases} \mathrm{Sp} & \text{if } \mathrm{char}(\mathbb{K}) = 2, \\ \mathrm{Sp}^2 & \text{otherwise}. \end{cases}$$

如果我们选取生成树 $T = \{a, b\}$，那么定理 $\mathscr{G}$3.19 中 $\mathrm{HH}^*(A)$ 的生成集作为代数由以下元素构成：

② $\begin{cases} \langle\!\langle \alpha^2 \rangle\!\rangle_s \in \mathrm{HH}^{0,2|\alpha|}(A) \subset \mathrm{HH}^{2|\alpha|}(A) & \text{if } \mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2 \text{ and } |\alpha| \text{ odd}, \\ \langle\!\langle \alpha \rangle\!\rangle_s \in \mathrm{HH}^{0,|\alpha|}(A) \subseteq \mathrm{HH}^{|\alpha|}(A) & \text{otherwise}. \end{cases}$

③ $(c, c) \in \mathrm{HH}^{1,0}(A) \subseteq \mathrm{HH}^1(A)$.

④ $(cba, e_1) \in \mathrm{HH}^{3,-|\alpha|}(A) \subseteq \mathrm{HH}^{3-|\alpha|}(A)$.

我们回顾一下，上述枚举对应于定理 3.19。定理 3.21 中的关系集 $\mathscr{R}$ 为$\mathscr{R} = \{ {}_2\bigcirc \smile {}_4\bigcirc,\ {}_3\bigcirc \smile {}_3\bigcirc,\ {}_3\bigcirc \smile {}_4\bigcirc,\ {}_4\bigcirc \smile {}_4\bigcirc\}$。因此，存在一个代数同构。

$$\mathrm{HH}^*(A) \cong \mathbb{K}\mathscr{G}/\langle\mathscr{R}\rangle.$$

此外，定理 3.30 中 $\mathscr{G}$ 的元素之间所有非零的括号为

$$[③, ④] = -④ \quad \text{and} \quad [③, ②] = \begin{cases} 2 \cdot ② & \text{if } \mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2 \text{ and } |\alpha| \text{ odd}, \\ ② & \text{otherwise}. \end{cases}$$

4. Geometric interpretation

在 [2, 3, 24] 中证明了，除少数特殊情形外，斜温和代数的同构类集合与带有二阶轨形点的轨形曲面上的某些剖分之间存在双射，并且这

为斜温和代数的有界导出范畴提供了一个几何模型。这一结果已推广至分次斜温和代数的完美导出范畴，见 [4, 10, 5, 29]。更具体地说，在 [4, 10, 5], 中，带有二阶轨形点的轨形曲面的部分包裹福柯范畴以三种不同（但等价）的方式给出：其一，是由带状图嵌入所产生的曲面剖分构造出的显式 A_∞-代数；其二，是带有 $\mathbb{Z}_2$-作用的轨形曲面光滑二重覆盖（的曲面剖分）所对应的轨道范畴；其三，是轨形曲面的带状图上一个 A_∞-范畴层的整体截面。随后在 [4, 5, 10] 中证明，对于上述任一种构造，范畴都存在一个特定的（形式）生成元，其形式为一个与分次斜温和代数相对应的轨形剖分。此外，同一分次轨形曲面的不同形式生成元所产生的所有分次结合代数彼此导出等价；并且在 [5] 中猜想，任何与分次斜温和代数导出等价的分次结合代数都可由此方式得到。由于霍赫希尔德上同调及其结构在导出等价下保持不变， [23], 因此，我们的计算给出了与某个轨形曲面相关联的任意分次代数（不一定是斜温和代数）导出等价代数的霍赫希尔德上同调及其结构；这些代数对应于该轨形曲面的不同（形式）剖分。更一般地说，我们的计算也给出了分次轨形曲面的部分包裹福柯范畴的霍赫希尔德上同调及其结构。我们将证明，与非分次温和代数的情形（见 [8]；另见 [6]分次温和情形下的第二霍赫希尔德上同调）一样，对于分次斜温和代数，霍赫希尔德上同调的生成元、杯积和 Gerstenhaber 括号都可以从与该斜温和代数相关联的轨形曲面上“读出”。

我们在此采用的方法是直接从斜温和代数构造分次标记带图，遵循 [24]中关于非分次情形的思路。这会得到一个分次标记轨形曲面，为分次斜温和代数的完美导出范畴提供几何模型。此外，如第3.2节所述，另见 [6] ，其中完整论述了分次温和代数的变形理论，任意分次斜温和代数都可以由一个分次温和代数变形得到。特别地，特殊环是分次温和代数中环 ε 的变形，其中 $\varepsilon^2 = 0$。就分次温和代数所关联的分次标记曲面而言，这样的环（其分次必为 0）会产生一个带有一个标记点且绕数为 1 的边界分支。文献 [6]证明了，沿相应霍赫希尔德 2-上循环进行的 A_∞-变形，在曲面上对应于将该边界分支替换为一个阶 2 的轨形点。

4.1. 由分次斜温和代数得到的分次轨形曲面。 现在我们遵循 [24] 和 [5]中的思路，引入分次斜温和代数的几何模型。该模型基于一个带有一组特殊顶点的分次标记带图。用于斜温和代数的这个带图，是对 [30]中为温和代数构造的带图所作的改编。

给定一个分次斜温和三元组 (Q, R, Sp)，令 $A = \mathbb{K}Q/I$ 为相应的分次斜温和代数，其中 I 表示由 $R \cup \{\varepsilon^2 - \varepsilon \mid \varepsilon \in \mathsf{Sp}\}$生成的 $\mathbb{K}Q$ 的双边理想。令 $A' := \mathbb{K}Q/\langle R \cup \{\varepsilon^2 \mid \varepsilon \in \mathsf{Sp}\}\rangle$为第 3.2 节中的相应温和代数。我们如下定义有限长度 Sp-极大路径的集合：首先，确定相应分次温和箭图 $(Q, R \cup \{\varepsilon^2 \mid \varepsilon \in \mathsf{Sp}\})$ 中的所有极大路径，也就是说，有限长度非零路径 p 构成的集合，其中对任意箭 $x \in Q_1$， $xp = px = 0$ 均属于 $\mathbb{K}Q/\langle R \cup \{\varepsilon^2 \mid \varepsilon \in \mathsf{Sp}\}\rangle$。有限长度 Sp-极大路径的集合，便是从有限长度极大路径中删去所有特殊环后所得子路径的集合。无限 Sp-极大路径的集合，是删去所有特殊环后、不含关系的本原循环的子循环所构成的旋转类。例 3.33 中的路径 cba 就是一个无限 Sp-极大路径的例子，它是不含关系的（本原）循环 $c\varepsilon_3 b\varepsilon_2 a$的子路径。注意，Sp-极大路径包含长度为二的关系，即在删去特殊环的所有位置。因此，它在 Q 中是非零路径，但在 A 或 A'中不是。接下来，我们如下构造与 (Q, R, Sp) 相关联的分次标记带图 G:

- G的边与 Q的顶点一一对应，

- G 的顶点由以下集合给出：
  – 有限长度 Sp-极大路径的集合，– 无限 Sp-极大路径的集合，– 满足以下条件的平凡路径 e_i： i 是唯一一支箭的源点或终点，或者 i 恰好是一支箭 α 的源点和一支箭 β的终点，并且 $\alpha\beta \notin R$，–特殊环 ε_i的集合，其中 i是 (Q, R,Sp) 中的特殊顶点。我们称这类顶点为 G 的特殊顶点，并将其记为 $\times$,

- G 的一条边 i 与 G 的一个顶点 q 关联，当且仅当 Q 中对应的路径 q 经过 Q中的顶点 i,

- 与特殊顶点相邻的边称为特殊边,
- G 中顶点 q 处各边的循环序 σ 由线性（或循环）顺序所诱导，该顺序由q 作为路径经过相应顶点的次序确定,
- 除对应于特殊环或无限 Sp-极大路径的顶点外， G的所有顶点均带有标记。为定义该标记，先考虑 q 是非圈的有限长度 Sp-极大路径的情形，此时我们标记点对 $(t(q)\ \sigma(t(q)))$，其中 $\sigma(t(q)) = s(q)$。若 $q = q_m \dots q_1$是一个圈，由于 q 是有限长度 Sp-极大路径，因此在顶点 s处必有关系 $q_1 q_m\ (q) = t(q)$。根据构造， G 中对应于 $s(q)$ 的边是一个环，我们可以将其视为对应于 $t(q)$ 和 $s(q)$ 的一对不同半边。在 q 处的循环序中，我们有 $\sigma(t(q)) = s(q)$，并像之前一样标记点对 $(t(q)\ \sigma(t(q)))$。若 q 对应于一条平凡路径，则它是一个叶顶点，我们只需在其旁边标记一下,

- 每个未标记对（i, $\sigma(i)$) 都对应一支箭 α： $i \to \sigma(i)$，我们通过将整数 $|\alpha|$与该对关联来为其赋予分级。

例如，在例 3.33中， G的顶点为 $\{cba, e_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$，而 G的边为 $\{1, 2, 3\}$，它们都与顶点 cba相邻。边 1 也与 e_1 相邻，而边 2 和 3 是特殊边，分别与特殊顶点 ε_2 和 ε_3相邻。唯一的标记位于顶点 e_1。对应的曲面是一个圆盘，其边界上有一个标记点，内部有一个标记点和两个二阶轨形点。注意，内部标记点对应于 cba 中 G 的顶点，该顶点是一条无限的 Sp-极大路径，见图1。

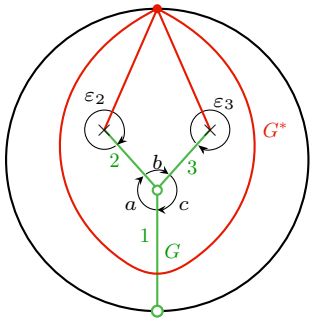


FIGURE 1. 这是具有两个二阶轨形点（图中以 $\times$表示）以及带状图 G 和 G^* 的曲面，它们与例3.33中的分级斜温和代数相关。

注 4.1. (1) 我们注意到，在上述情形中，如果 G 中一对循环连续边 $(i, \sigma(i))$ 对应于 (Q, R,Sp) 中的一个特殊环（即当 $i = \sigma(i)$ 时），那么 $(i, \sigma(i))$ 的分次为零。

(2) 注意到， G 的每条边都恰好关联到 G的两个顶点。这直接源于 $(Q, R \cup \{\varepsilon^2 \mid \varepsilon \in \mathrm{Sp}\})$ 是一个 gentle 对，以及相关带状图之间的密切关系。

(3) 当 Sp $=\emptyset$ 时，分次斜温和代数 A 是一个分次温和代数，并且其分次标记带图与 [30] 中分次温和代数的分次标记带图一致。

一个分次标记带图 G （不是只有一个顶点且没有边的平凡图）会导出一个带边界的紧致定向曲面 S，使得 G 是 S 的变形收缩，并且 G 的面与 S 的边界分支一一对应。随后， G 的标记给出一种唯一的方式，将 G 的标记顶点粘合到 S的边界上。注意，所有未标记顶点都留在 S的内部。特别地， G的特殊顶点也如此。我们将后者视为阶 2 轨形点，并用 $\mathcal{O}$表示这些轨形点的集合。G 的嵌入及其顶点与边界的粘合，导出一个广义曲面剖分（S， M， $\mathcal{O}$， G），其中 M表示 G的非特殊顶点集合，我们将其称为标记点。

由未分次情形下的 [3, 2, 24]以及分次情形下的 [4, 5, 10]可知，这样的曲面剖分对应于部分包裹福柯范畴 $\mathcal{W}$（S， M， $\mathcal{O}$， η）的一个（形式）生成元；作为生成元，它导出分次斜温和代数，而我们正是由此构造了分次标记带图 G。按照 [26] ，分次标记带图 G 诱导出一个线场 η。注意，在 [26]中，这一构造是用分次温和代数的带状图来描述的。然而，每个分次斜温和代数都是由一个温和代数经变形得到的，而该温和代数对应于一个使平方为零的环所诱导的霍赫希尔德 2-上循环。这些上循环恰好对应于环 $\varepsilon \in$Sp 的平方。另一方面，这些 2-余循环对应于相对于线场 η绕数为 1 的完全停止边界分支。曲面上去除轨形点后得到的线场，在轨形曲面上诱导出“相同”的线场，使每个轨形点的绕数均为 1。这是因为每个分次斜温和代数都是沿着一个对应于环平方为零的 2-余循环对温和代数进行变形而得，且曲面上相应边界分支的绕数为 1。从几何角度看，见 [5], ，通过这样的 2-余循环将分次（斜）温和代数变形为分次斜温和代数，对应于在曲面上将相对于 η 绕数为 1 的完全停止边界分支替换为一个轨形点，而该点相对于 η的绕数也为 1。

此外，由 [3, 2, 24] （非分次情形）和 [4, 5, 10] （分次情形）可知，连接边界分支的分次曲线的同伦类，以及绕数为零的分次闭曲线连同一个局部系统，分别对应于分次斜温和代数的完美导出范畴中的弦对象和带对象。

分次斜温和代数的 Koszul 对偶 $A^!$ 仍是分次斜温和代数，因此 $A^!$ 也有一个与之对应的分次带状图 $G^!$。对于 [24], 给定的斜温和代数，构造一个对偶图 G^* 。具体而言，设 A 为一个斜温和代数，其对应的分次标记带图为 G ，并设 $(S, M, \mathcal{O}, G)$ 为它生成的轨形曲面，即 G嵌入在 S中时，是 S 的变形收缩，其中 M 是 G 的顶点集（可能如上文所述与边界粘合），并设 $\mathcal{O}$ 为对应于 A中特殊环的轨形点集。则 G^* （作为嵌入曲面中的图）定义如下：在剖分 G的每条边界线段上，恰好放置一个 G^*的顶点，使得 G 和 G^*的顶点在边界上交替出现。此外，将 $(S, M, \mathcal{O}, G)$ 中每个未标记边界分支替换为 G^*的一个顶点。对于 G 的任何轨形点，也是 G^*的轨形点。 G的非特殊边与 G^* 的非特殊边一一对应，其中该双射将 G 中的边 v 映射到 G^*中连接 G^* 两个顶点且与 v 恰好相交一次的唯一边。 G 的每条特殊边都对应于 G^* 中的一条特殊边，该边连接轨形点与 G^* 的唯一顶点，且不与 G中的任何其他边相交。注意， G 将曲面 S 切分为多个多边形，每个多边形恰好包含 G^* 的一个顶点，该顶点位于边界上或内部。同样， G^* 将 S 切分为多个多边形，每个多边形恰好包含 G 的一个顶点，该顶点位于边界上或内部。

注记 4.2. 我们注意到，从辛几何和 Fukaya 范畴的语言来看，曲面内部的标记 G- 点和 G^*- 点分别对应如下边界分支。本文中，未标记边界分支被替换为内部的一个 G^*- 点；就与部分缠绕Fukaya范畴相关的曲面而言，这对应于一个完全停止的边界分支，参见例如 [20, 5, 6]。本文中，对应于 G 一个顶点的内部标记点，对应于 [20, 5, 6]中的一个完全标记边界分支，亦即一个未停止的边界分支。

4.2. 霍赫希尔德上同调的几何解释。 我们同时考虑开曲线和闭曲线。 S中的一条曲线是连续映射 $\mathsf{C}:[0,1]\to S$。如果对于所有 $x\in(0,1)$，$\mathsf{C}(x)\in S\setminus\partial S$，且 $\mathsf{C}(0)$ 和 $\mathsf{C}(1)$ 是与 G的顶点相关联的标记点，我们就称该曲线为开 曲线。如果 $\mathsf{C}(0)=\mathsf{C}(1)$，且对于所有 $x\in[0,1]$，$\mathsf{C}(x)\in S\setminus\partial S$，则称 C 为闭 曲线。我们还考虑第二类开曲线，即端点 $\mathsf{C}^*(0)$ 和 $\mathsf{C}^*(1)$ 是与 G^*的顶点相关联的标记点的曲线 C^* 。请注意，提及曲线时，我们总是将其与它在 S 中的像等同起来，并将其视为模同伦等价。此外，我们始终假设所讨论的曲线相对于 G 和 G^*处于最简位置。

4.2.1. 组合绕数的定义。 现在我们定义曲线 C 的组合绕数 $w(\mathsf{C})$。曲线 C 上的分次由函数 $f_n:\mathsf{C}\cap G^*\to\mathbb{Z}$给出，其中集合 $\mathsf{C}\cap G^*$ 按 C 的方向排序。设 $x_1,x_2\in[0,1]$ 满足 $\mathsf{C}(x_1)$ 和 $\mathsf{C}(x_2)$ 分别是 C 与 G^*的第一次和第二次交点，且 γ_1 是 C 上位于 x_1 和 x_2之间的线段。则 γ_1 位于由G^* 截出的多边形 P_f 中，并将 P_f 分成两个子多边形，其中一个包含与 G-顶点v对应的标记点。用 $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ 表示 P_f中不包含 v的那个子多边形内的箭。现在，曲线 C 的分次 f_n 定义如下：将整数 n 赋给 $\mathsf{C}(x_1)$，于是我们有

$$f_n(\mathsf{C}(x_2)):=\begin{cases}n+1-\sum_{i=1}^m|\alpha_i| & \text{if } v \text{ lies to the right of } \mathsf{C},\\ n-1+\sum_{i=1}^m|\alpha_i| & \text{if } v \text{ lies to the left of } \mathsf{C}.\end{cases}$$

将此规则沿整个 C 延伸，即定义了分次 f_n。组合绕数 $w(\mathsf{C})$ 定义为 $w(\mathsf{C})=f_n(\mathsf{C}(x_m))-n$ 其中，$\mathsf{C}\cap G^*$ 的有序集合由 $\{\mathsf{C}(x_1)\dots,\mathsf{C}(x_m)\}$ 给出。如果 C 是闭曲线，我们可以将 x_1 固定为 C 与 G^*的任意一个交点。不失一般性，我们可以假设 $x_1=0$ 且 $x_m=1$。注意， $w(\mathsf{C})$ 与 n无关。

对于 S 中的每个连通边界分支 B，我们用 C_B 表示与 B 同伦的曲线的同伦类的一个代表。此外，我们将 S 内部的 G- 顶点称为 G- puncture （穿孔点），并将内部的 G^*- 顶点称为 G^*-puncture。对于一个 G-puncture P，我们用 C_P 表示绕 P 的简单闭曲线的同伦类的一个代表。注意， P 作为 G 的一个顶点，对应于 (Q,I) 中一个没有关系的圈 p_C，而曲线 C_P 的绕数由 $w(\mathsf{C}_P)=|p_{\mathsf{C}}|$ 给出。类似地，对于一个 G^*-puncture P^*，我们用 C_{P^*} 表示绕 P^* 的简单闭曲线的同伦类的一个代表。注意， P^* 作为 G^* 的一个顶点，对应于 (Q,I) 中一个带有全部关系的圈 p_C，而曲线 C_{P^*} 的绕数由 $w(\mathsf{C}_{P^*})=l(p_C)-|p_{\mathsf{C}}|$ 给出。更一般地，根据 $(S,M,\mathcal{O},G)$ 的构造，每条曲线 C 都对应于 Q 中箭与箭的形式逆组成的一个序列，我们将此序列记为 p_{C}。反过来，注意对于每个 $(\gamma,\alpha)\in\Gamma\|\mathcal{B}$，我们都可以将曲线 C 与箭及逆箭序列 $p_{\mathsf{C}}:=\gamma\alpha^{-1}$ 联系起来，并且绕数 $w(\mathsf{C})$ 等于 $l(\gamma)-|\gamma|+|\alpha|-1$。注意，对于一个元素$\alpha=\pi(\alpha_m\cdots\alpha_1)\in\mathcal{B}$，其中任意一个 α_i 都可能是箭 β 与一端或两端的特殊环的拼接，具体取决于 $s(\alpha_i)$ 和 $t(\alpha_i)$ 是否为特殊顶点。由于特殊环是零次分次的，它们的存在不会影响我们刚才定义的绕数。最后，我们指出，可以验证，对于闭曲线，组合绕数与线场 η 的几何绕数一致；该线场由 A 的分次诱导，例见 [26]。

回顾， $A = \mathbb{K}Q/I$，其中 $I = \langle R \cup \{\varepsilon^2 - \varepsilon \mid \varepsilon \in \mathrm{Sp}\}\rangle$。现在考虑分次 gentle 代数$\Lambda \cong \mathbb{K}Q_\Lambda/\langle R\rangle$，它由 A 删除所有特殊环得到，即 $\Lambda = A/\langle \mathrm{Sp}\rangle$。特别地，$(Q_\Lambda)_0 = Q_0$，$(Q_\Lambda)_1 = Q_1 \setminus \mathrm{Sp}$。令 $(S_\Lambda, M_\Lambda, G_\Lambda)$ 为由与分次 gentle 代数 Λ 相关联的分次标记带状图 G_Λ 所得到的分次标记曲面。根据这些构造（未分次情形另见 [24] ），$(S_\Lambda, M_\Lambda, G_\Lambda)$ 是从 $(S, M, \mathcal{O}, G)$ 得到的，其方法是将每个轨形点周围的圆盘替换为光滑圆盘，因此曲面 S_Λ 是光滑曲面。

4.2.2. 箭图的基本群。对于箭图 Q，下面回顾其底层图的基本群定义。令 $\bar{Q}$ 为 Q 的双箭图，其中 $\bar{Q}_1 = Q_1 \cup Q_1^{-1}$ 和 Q_1^{-1} 是箭图 Q 中各箭的形式逆，也就是说，对于任意 $a \in Q^{-1}$，a 的形式逆 a^{-1} 是一条新的箭，使得$s(a^{-1}) = t(a)$，且 $t(a^{-1}) = s(a)$。现在令 $v \in Q_0$ 为一个顶点。

- Q 中的一条路径是 $a_n \cdots a_1$，其中 $a_i \in Q_1$，$t(a_i) = s(a_{i+1})$，对于 $1 \le i \le n-1$；而以 v 为起点的一个圈是一个以 v 为起点和终点的路径。
- 一个折返是形如 aa^{-1} 的子路径，其中 $a \in \bar{Q}_1$，且 a^{-1} 是其逆。
- 路径中的折返插入或删除称为初等同伦 。
- 如果两个环可以通过有限次初等同伦相互转化，则称它们同伦 。

以基点 v为基点的圈的同伦类集合，在路径拼接运算下构成一个群。这个群称为以 v 为基点的 Q 的基本群 ，记作 $\pi_1(Q, v)$。由于 Q 是连通的，我们可以省略基点 v，并在不指定基点的情况下，将 Q 的基本群视为同构意义下的群。

4.2.3. 霍赫希尔德上同调的几何解释。令 $\mathscr{G}$为定理 *（A）中所述的 HH 生成集 3.19 ，并令 $\mathcal{F} \subseteq \mathscr{G}$ 为由 $Q \setminus \mathrm{Sp}$ 中选定生成树 T的补集所产生的导子的一个固定集合。回忆命题 3.13 ， $\mathcal{F}$中的元素都是 $\mathrm{HH}^1_\bullet(A)$ 的元素。

引理 4.3. 设 A 是与分次斜温和三元组 (Q, R, Sp) 相关联的分次斜温和代数，并设 $\Lambda = \mathbb{K}Q_\Lambda/\langle R\rangle \cong A/\langle \mathrm{Sp}\rangle$ 是如上所述、具有曲面模型 $(S_\Lambda, M_\Lambda, G_\Lambda)$的相关联分次温和代数。那么，由集合 $\mathcal{F}$ 在 $\mathrm{HH}^1_\bullet(A)$ 中生成的自由群与基本群 $\pi_1(S_\Lambda)$同构。此外， $\pi_1(S_\Lambda)$ 的秩为 $1 - |Q_0| + |Q_1|$。

证明 设 T 是 Q的一棵生成树，则 T 也是箭图 Q_Λ 的一棵生成树。集合 $(Q_\Lambda)_1 \setminus T$ 与 $\pi_1(Q_\Lambda)$ 上的自由群同构，例如参见 [25, 定理 1.2.10]。更具体地，若取一个箭$c \in (Q_\Lambda)_1 \setminus T = Q_1 \setminus (T \cup \mathrm{Sp})$，则 $\pi_1(Q_\Lambda, v)$ 中对应的元素为 $T[t(c)\ v] \cdot c \cdot T[v, s(c)]$,，其中 $T[u, w]$ 是 T 中从顶点 u 到顶点 w 的唯一最短路径。

另一方面，根据 [28, 命题 1.22] ，我们有 $\pi_1(S_\Lambda) \cong \pi_1(Q_\Lambda)$。因此，$\mathrm{HH}^1_\bullet(A)$ 中由集合 $\mathcal{F}$ 生成的自由群与基本群 $\pi_1(S_\Lambda)$ 同构。

□

下述定理根据相应曲面对霍赫希尔德上同调给出了几何解释，我们也在表 3 中作了总结。为便于记号表达，我们称一个边界分支包含一个标记点，当且仅当其中恰好包含一个对应于 G 的顶点的标记点，因此也恰好包含一个对应于 G^* 的顶点的标记点。还请回忆第 4.2.1 小节末尾给出的分次温和代数 $\Lambda = \mathbb{K}Q_\Lambda/\langle R\rangle \cong A/\langle \mathrm{Sp}\rangle$ 的定义；它与分次斜温和代数 $A = \mathbb{K}Q/I$ 相关，其中$I = \langle R \cup \{\varepsilon^2 - \varepsilon \mid \varepsilon \in \mathrm{Sp}\}\rangle$，而 Q_Λ 则由 Q 的箭图删除所有特殊环后得到。

定理 4.4. 设 A 是与分次斜温和三元组 (Q, R, Sp) 相关联的分次斜温和代数，且$\Lambda = \mathbb{K}Q_\Lambda/\langle R\rangle \cong A/\langle \mathrm{Sp}\rangle$ 是与之相关联的分次温和代数。设 $(S, M, \mathcal{O}, G)$ 是 A 的轨形剖分，并且

$(S_\Lambda, M_\Lambda, G_\Lambda)$ 是 Λ的曲面剖分。则存在一一对应关系 e

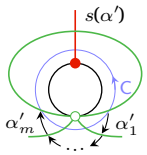
$$\{\mathscr{G}\} \longleftrightarrow \text{中 } \mathrm{HH}^*(A) \text{ 的生成元} \qquad \begin{array}{l} \{\}(S,M,G) \text{ 中含有 } 1 \text{ 个标记点的边界分支} \\ \cup\ \{G\}(S,M,G) \text{ 中的 个穿孔} \\ \cup\ \{G^*\}(S,M,G) \text{ 中的 个穿孔} \\ \cup\ \{\pi_1(S_\Lambda)\} \text{的生成元,} \end{array}$$

其中双射分解如下：

(1) 数对 $(c,c) \in HH^{1,0}(A)$，其中 $c \in Q_1 \setminus (T \cup Sp) \longleftrightarrow$ 是 $\pi_1(S_\Lambda)$ 的生成元；*(2)* 数对 $(s(\alpha)\ \alpha) \in HH^{0,|\alpha|}(A)$，其中 α 是 (Q,I) 中的 $\mathcal{B}$-极大路径，$\longleftrightarrow$ 是边界分支 B，且其中在 S 中有一个标记点，使得 $w(C_B) + 1 = 0 + |\alpha|$；*(3)* 数对 $(\gamma,\alpha) \in HH^{l(\gamma),|\alpha|-|\gamma|}(A)$，其中 γ 是 Γ 的 Γ- 极大元素，且 γ 和 α 在 $\longleftrightarrow$ 边界分支中都不以同一条箭开始或结束，其中有一个标记点位于 S，使得 $w(C_B)+1 = l(\gamma) + |\alpha| - |\gamma|$；*(4)* 和 $\langle\!\langle \alpha \rangle\!\rangle_s \in HH^{0,|\alpha|}(A)$，其中 α 是本原余完备圈，且 $|\alpha|$ 为偶数或 $char(\mathbb{K}) = 2 \longleftrightarrow$这些 G-*punctures* P 位于 S 中，使得 $w(C_P) = |\alpha|$；*(4′)* 和 $\langle\!\langle \alpha^2 \rangle\!\rangle_s \in HH^{0,2|\alpha|}(A)$，其中 α 是本原余完备圈，且 $|\alpha|$ 为奇数，$char(\mathbb{K}) \neq 2 \longleftrightarrow$ 这些 G-*punctures* P 位于 S 中，使得 $w(C_P) = |\alpha|$；*(5)* 和 $\langle\!\langle C \rangle\!\rangle_{gr} \in HH^{l(C),-|C|}(A)$，其中 C 是 $Q_{l(C)} \setminus Sp^{l(C)}$ 中的本原完备圈，且 $l(C) - |C|$为偶数或 $char(\mathbb{K}) = 2 \longleftrightarrow$这些 G^*-*punctures*，使得 $w(C_{P^*}) = l(C) - |C|$；*(5′)* 和 $\langle\!\langle C^2 \rangle\!\rangle_{gr} \in HH^{2l(C),-2|C|}(A)$，其中 C 是 $Q_{l(C)} \setminus Sp^{l(C)}$ 中的本原完备圈，且 $l(C) - |C|$为奇数，$char(\mathbb{K}) \neq 2 \longleftrightarrow$这些 G^*-*punctures*，使得 $w(C_{P^*}) = l(C) - |C|$。

证明 设 T 是箭图 Q的一棵生成树，令 $\mathcal{F} \subseteq \mathscr{G}$ 为由 $T \cup$Sp 的补集导出的一组固定导子。由引理 4.3，集合 $\mathcal{F}$ 与 $\pi_1(S_\Lambda)$ 的生成元之间存在一一对应。因此，我们只需证明 $\mathscr{G} \setminus \mathcal{F}$ 中的生成元与 $(S,M,\mathcal{O},G)$ 中仅含 1 个标记点的边界分支以及带有 G-穿孔和 G^*-穿孔的边界分支之间的对应关系。我们首先证明，定理 3.19 中描述的每个生成元 $g \in \mathscr{G} \setminus \mathcal{F}$ 都可以自然地关联到 $(S,M,\mathcal{O},G)$ 中仅含 1 个标记点的边界分支，或一个 G-穿孔，或一个 G^*-穿孔。

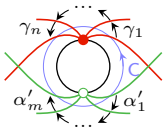
设 $g = (s(\alpha)\ \alpha) \in \mathrm{HH}^{0,|\alpha|}(A)$，其中 α 是一个 $\mathcal{B}$-极大路径，则 $\alpha = \alpha_n \cdots \alpha_1$ 是一个圈，且 $\alpha_1\alpha_n = 0$ 位于 A中。注意，由于 α 是一个 $\mathcal{B}$-极大路径，没有其他箭从 $s(\alpha) = t(\alpha)$ 出发或指向该处；此外，$s(\alpha)$ 不是特殊顶点。此外，α 也是 A' 中的一条极大路径，因此，删除 α中的所有特殊环后，它将产生一条有限长度的 Sp-极大路径 $\alpha' = \alpha'_m \cdots \alpha'_1$。根据 G的构造，α' 对应于 G的一个顶点，而 G 中对应于顶点 $s(\alpha) = s(\alpha')$ 的边是 G 中的一个环。此外，G 中顶点 α' 处的标记对是 $(t(\alpha'_m)\ s(\alpha'_1))$。因此，根据 S的构造，存在一个边界分支 B，其中仅包含一个标记点 α'。在 S 中，局部图如下：



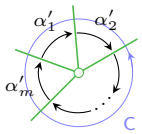
由图可知，g 自然对应于边界曲线 C_B，其 $w(\mathsf{C}_B)$ 为 $= -1 + \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i| = |\alpha| - 1$，且 $p_{\mathsf{C}_B} = \alpha$。注意，$g$ 的总次数恰好为 $w(\mathsf{C}_B) + 1$。

设 $g = (\gamma,\ \alpha) \in \mathrm{HH}^{n,\ |\alpha|-|\gamma|}(A)$，其中 $\gamma = \gamma_n \cdots \gamma_1$ 为一个 Γ-极大元素，且 γ和 $\alpha \in \mathcal{B}$既不以同一个箭开始，也不以同一个箭结束。由于 α 是一个 $\mathcal{B}$-极大元素，它将导出一条有限长度 Sp-极大路径 $\alpha' = \alpha'_m \cdots \alpha'_1$。根据 G的构造，α' 对应于 G 的一个顶点 v 以及该标记

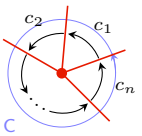
对 v 而言，该标记对为 $(t(\alpha'_m)\ s(\alpha'_1))$。因此，在 S的某个边界分支上，顶点 v 处存在一个具有 $\mathrm{m}+1$ 条边的极大扇 F。类似地， γ 是一个 Γ-极大元素，因此它对应于 G^* 的一个顶点 v^*，并且在 S的某个边界分支上，顶点 v^* 处存在一个具有 $n+1$ 条边的极大扇 F^*。由于 γ和 α 是平行路径， F 的第一条边——对应于 $s(\alpha) = s(\alpha')$——与 F^* 的第一条边相交；后者对应于 $s(\gamma)$。同样， F 的最后一条边——对应于 $t(\alpha) = t(\alpha')$——与 F^* 的最后一条边相交；后者对应于 $t(\gamma)$。根据 $(S, M, \mathcal{O}, G)$ 的构造，顶点 v和 v^* 位于同一个边界分支 B上，且 B上没有其他标记点。边界曲线 C_B 恰好是 $\mathsf{C}_{\gamma\alpha^{-1}}$，其中 $w(\mathsf{C}_{\gamma\alpha^{-1}}) = n-1+|\alpha|-|\gamma|$ 和$p_{\mathsf{C}_{\gamma\alpha^{-1}}} = \gamma\alpha^{-1}$。注意， g的总次数为 $w(\mathsf{C}_B)+1$。在 S的局部情形下，我们有如下图示：



给定 $g = \langle\!\langle \alpha \rangle\!\rangle_s \in \mathrm{HH}^{0,\ |\alpha|}(A)$，其中 $\overline{\alpha} \in \mathscr{C}_{\text{基本}}(\mathcal{B})$，圈 α导出一条 Sp-极大路径 $\alpha' = \alpha'_m \cdots \alpha'_1$，它对应于一个 G-穿孔 P。如果 α是一个本原循环，那么有 $p_{\mathsf{C}_P} = \alpha$, $w(\mathsf{C}_P) = |\alpha|$。否则，$\alpha$ 是一个本原圈的平方 D，而由 D 描出的路径对应于边界曲线 C_P，即 $p_{\mathsf{C}_P} = D$。在这种情况下， α 对应于 C_P^2，其中 $p_{\mathsf{C}_P^2} = \alpha$ 且 $w(\mathsf{C}_P^2) = |\alpha|$。在 S 的局部，我们有如下图示：



现在设 $g = \langle\!\langle C \rangle\!\rangle_{gr} \in \mathrm{HH}^{n,\ -|C|}(A)$，其中 $C = c_n \cdots c_1 \in \mathscr{C}_{\text{基本}}(\Gamma) \setminus \mathrm{Sp}^{\mathrm{basic}}$. 在此， C导出 G^*-穿孔 P^* 于 S中。如果 C是一个本原循环，那么有 $p_{\mathsf{C}_{P^*}} = C$, $w(\mathsf{C}_{P^*}) = n - |C|$。否则， C是一个本原圈的平方 D，而由 D 描出的路径对应于曲线 C_{P^*}，即 $p_{\mathsf{C}_{P^*}} = D$ 且$p_{\mathsf{C}^2_{P^*}} = C$，其中 $w(\mathsf{C}^2_{P^*}) = n - |C|$。在 S的局部，我们有如下图示：



反过来，假设 B 是一个边界分支，其中有一个标记点对应于G的顶点 v。根据 S的构造，该边界分支也恰好包含 G^*的一个顶点 v^*。 G 中位于 v 处的极大扇 F 对应于一条有限长度 Sp-极大路径，它由此产生 A中的一条 $\mathcal{B}$-极大路径 α。类似地， G^* 中位于 v^* 处的极大扇 F^* 对应于一条 Γ-极大路径 γ，其中有F^*的 $l(\gamma)$条边 $+1$。于是，边界曲线 C_B与曲线 $\mathsf{C}_{\gamma\alpha^{-1}}$同伦，并且 $p_{\mathsf{C}_B} = \gamma\alpha^{-1}$、 $w(\mathsf{C}_B) = l(\gamma) - 1 + |\alpha| - |\gamma|$。我们看到， $g = (\gamma, \alpha)$是 $\mathscr{G} \setminus \mathcal{F}$中的一个生成元，属于 $\mathrm{HH}^{l(\gamma), |\alpha|-|\gamma|}(A)$。特别地，我们注意到，当$l(\gamma) = 0$时，极大扇 F^* 可能只包含一条边 $s(\alpha)$。

设 P 是 G 中的一个 S-puncture，根据 G 的定义， P 对应于 (Q, R, Sp) 中一个不含关系的本原循环的旋转类。因此， p_{C_P} 是 $\mathcal{B}$ 中的本原循环路径，并且 $w(\mathsf{C}_P) = |p_{\mathsf{C}_P}|$。根据定理 3.19，如果 $w(\mathsf{C}_P)$ 是偶数，或者 $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 2$，那么 $\langle\!\langle p_{\mathsf{C}_P} \rangle\!\rangle_s$ 是 $\mathrm{HH}^{0,|p_{\mathsf{C}_P}|}(A)$ 中的一个生成元；否则， $\langle\!\langle p^2_{\mathsf{C}_P} \rangle\!\rangle_s$ 是 $\mathrm{HH}^{0,2|p_{\mathsf{C}_P}|}(A)$ 中的一个生成元。

最后，考虑 G^*-穿孔 P^*，它位于 S 中，对应于一个 B 且不含标记点的边界分支。假设 P^* 的价为 n，则曲线 C_{P^*} 对应于 $\Gamma \setminus \mathrm{Sp}^n$ 中的一个完全循环 $p_{\mathsf{C}_{P^*}}$，其绕数 $w(\mathsf{C}_{P^*})$等于 $n - |p_{\mathsf{C}_{P^*}}|$。因此，如果 $w(\mathsf{C}_{P^*})$为偶数或 $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 2$，那么 $\langle\!\langle p_{\mathsf{C}_{P^*}} \rangle\!\rangle_{gr}$ 是 $\mathrm{HH}^{n,\ -|p_{\mathsf{C}_{P^*}}|}(A)$ 中的一个生成元；否则， $\langle\!\langle p^2_{\mathsf{C}_{P^*}} \rangle\!\rangle_{gr}$ 是 $\mathrm{HH}^{2n,\ -2|p_{\mathsf{C}_{P^*}}|}(A)$ 中的一个生成元。

□

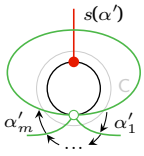
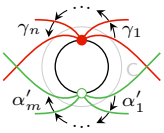
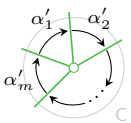
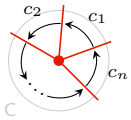
边界分支	$\mathrm{HH}^*(A)$ 的生成元
	$(s(\alpha)\ \alpha) \in \mathrm{HH}^{0,\ |\alpha|}(A) \subseteq \mathrm{HH}^{w_\eta(\mathsf{C})+1}(A)$, 其中 α 是一条 $\mathcal{B}$-极大路径，且 $\alpha' = \alpha'_m \cdots \alpha'_1$ 对应的 Sp-极大路径。
	$(\gamma, \alpha) \in \mathrm{HH}^{n,|\alpha|-|\gamma|}(A) \subseteq \mathrm{HH}^{w_\eta(\mathsf{C})+1}(A)$, 其中 γ 是一个 Γ-极大路径，γ 和 α 既不以同一个箭开始，也不以同一个箭结束，并且 $\alpha' = \alpha'_m \cdots \alpha'_1$ 是与 α对应的 Sp-极大路径。
	$\langle\!\langle \alpha^i \rangle\!\rangle_s \in \mathrm{HH}^{0,\ i|\alpha|}(A) \subseteq \mathrm{HH}^{iw_\eta(\mathsf{C})}(A)$, 其中 α 是一个本原余完备圈，并且 $\alpha' = \alpha'_m \cdots \alpha'_1$ 是相应的 Sp-极大路径 若 $\|\alpha\|$ 为偶数或 $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 2$，则为 $i = 1$；否则为 $i = 2$。
	$\langle\!\langle C^i \rangle\!\rangle_{gr} \in \mathrm{HH}^{in,\ -i|C|}(A) \subseteq \mathrm{HH}^{iw_\eta(\mathsf{C})}(A)$, 其中 $C = c_n \cdots c_1$ 是 $\Gamma_n \setminus \mathrm{Sp}^n$ 中的本原完备圈 若 $n - \|C\|$ 为偶数或 $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 2$，则为 $i = 1$；否则为 $i = 2$。

TABLE 3. HH 生成元与具有 1 个标记点的边界分支、$^*(A)$ 对应的关系 G^*-尖点和 G-尖点。需要指出的是，就例如 [4, 10, 5], a G 中所讨论的带停止点轨形曲面的部分包裹 Fukaya 范畴而言（如表格第三行所示），一个 -尖点对应于一条没有停止点的边界分支；而一个G^*-尖点（如表格第四行所示）对应于一条完全设有停止点的边界分支。

为了诠释分次斜温和代数 A的霍赫希尔德上同调中的杯积和 Gerstenhaber 括号，我们需要对 $\mathcal{F}$中的生成元给出另一种诠释。根据在（S, M, $\mathcal{O}$, G）上构造 G和 G^* 的方式，我们立即看到，$\mathcal{F}$中的一个元素（c, c）对应于一对曲线（C_c、C_c^*），其中 $p_{\mathsf{C}_c} = c = p_{\mathsf{C}_c^*}$，且 $w(\mathsf{C}_c) = 1 - |c|$。

4.3. **杯积的几何解释**。 注意，定理3.15 中任何非生成元的基元素，都是生成元的杯积。由表 1可知，HH 的生成元之间恰有四个非平凡杯积$^*(A)$:

(i) $\langle\!\langle \alpha \rangle\!\rangle_s \smile \langle\!\langle \alpha \rangle\!\rangle_s = \langle\!\langle \alpha^2 \rangle\!\rangle_s$ 与 $\alpha \in \mathscr{C}^{\mathrm{basic}}(\mathcal{B})$。与 $\langle\!\langle \alpha \rangle\!\rangle_s$ 相关的曲线是绕 G穿孔的本原循环或本原圈的平方。因此，杯积可以用一条曲线来描述，这条曲线由相应生成元的曲线拼接而成；(ii) $\langle\!\langle C \rangle\!\rangle_{gr} \smile \langle\!\langle C \rangle\!\rangle_{gr} = (-1)^{l(C)} \langle\!\langle C^2 \rangle\!\rangle_{gr}$ 与 $C \in \mathscr{C}^{\mathrm{basic}}(\Gamma) \setminus \mathrm{Sp}^{\mathrm{basic}}$。与 $\langle\!\langle C \rangle\!\rangle_{gr}$ 相关的曲线是绕 G^*穿孔的本原循环或本原圈的平方，因此杯积的几何解释与情形 (i) 类似，

(iii) $(c,\ c) \smile \langle\!\langle \alpha \rangle\!\rangle_s = (c,\ c\alpha)$ 与 $(c,\ c) \in \mathcal{F}$, $\alpha \in \overline{\mathscr{C}}_{\text{基本}}(\mathcal{B})$，且 c 出现在 α 中。生成元 $(c,\ c)$ 对应于曲线对 $(\mathsf{C}_c,\ \mathsf{C}_c^*)$，其中 $p_{\mathsf{C}_c} = c = p_{\mathsf{C}_c^*}$；而 $\langle\!\langle \alpha \rangle\!\rangle_s$ 对应于绕 G 穿孔的圈 C_P，且 P 与 $p_{\mathsf{C}_P} = \alpha$，因此元素 $(c,\ c\alpha)$ 对应于曲线对 $(\mathsf{C}_c,\ \mathsf{C}_c^* \cdot \mathsf{C}_P)$，其中 $\mathsf{C}_c^* \cdot \mathsf{C}_P$ 由曲线 C_c^* 和 C_P 在它们的交点处拼接而成，

(iv) $(c,\ c) \smile \langle\!\langle C \rangle\!\rangle_{\text{基本}} = (-1)^{|c|\cdot|C|}(cC,\ c)$ 与 $(c,\ c) \in \mathcal{F}$, $C \in \mathscr{C}^{-\text{basi}}(\Gamma) \setminus \text{Sp}$，且 c 出现在 C 中。生成元 $\langle\!\langle C \rangle\!\rangle_{gr}$ 对应于绕着一个 G^*-穿孔的圈 C_{P^*} P^*，其中 $p_{\mathsf{C}_{P^*}} = C$；元素 $(cC,\ c)$ 对应于曲线对 $(\mathsf{C}_c \cdot \mathsf{C}_{P^*},\ \mathsf{C}_c^*)$，其中 $\mathsf{C}_c \cdot \mathsf{C}_{P^*}$ 是由曲线 C_c 和 C_{P^*} 在其交点处拼接而成的。

4.4. Gerstenhaber 括号的几何解释。回顾定理 3.30，霍赫希尔德上同调生成元的 Gerstenhaber 括号几乎总是为零，唯一非平凡的情形来自形如 $[\mathcal{F}, \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}]$ 的括号。更确切地说，对于 $(c,c) \in \mathcal{F}$ 和 $v = (\gamma, \alpha) \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$，括号 $[(c,c)\ v]$ 在 $\deg_c(v)$ 非零时非零；也就是说，c 出现在 v 中，此时 $[(c,c)\ v] = \deg_c(v)v = (\deg_c(\alpha) - \deg_c(\gamma))v$。在几何模型中，设 (c,c) 由一对开曲线 $(\mathsf{C}_c, \mathsf{C}_c^*)$ 给出，与 v 相关联的闭曲线为 C_v。$\deg_c(\alpha)$ 非零这一事实对应于曲线 C_c^* 和 C_v 在带状图 G 中的一个扇内，在两条连续边之间平行延伸；$\deg_c(\alpha)$ 计算这些曲线以这种方式平行延伸的次数。类似地，$\deg_c(\gamma)$ 非零对应于曲线 C_c 和 C_v 在对偶图 G^* 中的一个扇内，在两条连续边之间平行延伸，而 $\deg_c(\gamma)$ 计算这种情况发生的次数。

Acknowledgements

作者谨向 Severin Barmeier 和 Kai Wang 致以谢意，感谢他们进行的诸多有益讨论。第一位和最后一位作者得到中国国家留学基金管理委员会（CSC）的资助。第二位作者获得德国研究联合会（DFG）通过项目 SFB/TRR 191（编号：281071066-TRR 191）提供的资助。第四位作者获得中国科学技术大学优秀博士生海外访学项目的资助。本研究的部分工作是在第一位、第四位和最后一位作者访问科隆大学期间完成的。他们由衷感谢科隆大学的热情接待。

References

[1] H. Abbaspour, *On algebraic structures of the Hochschild complex*，载于：《几何与拓扑中的自由环空间》，IRMA 数学理论物理讲义 24，欧洲数学学会，苏黎世，(2015)，165-222。[2] C. Amiot, *Indecomposable objects in the derived category of a skew-gentle algebra using orbifolds*，《代数表示及相关结构》，EMS 会议报告丛书，2021：1-24。[3] C. Amiot，T. Br¨ustle, *Derived equivalences between skew-gentle algebras using orbifolds*，《数学文献》，27 (2022)，933-982。[4] C. Amiot，P. G. Plamondon, *Skew-group A_∞-categories as Fukaya categories of orbifolds*，arXiv：2405.15466，(2024)。[5] S. Barmeier，S. Schroll，Z. F. Wang, *Partially wrapped Fukaya categories of orbifold surfaces*，arXiv：2407.16358，(2024)。[6] S. Barmeier，S. Schroll，Z. F. Wang, *Deformations of partially wrapped Fukaya categories of surfaces*，arXiv：2512.16354，(2025)。[7] C. Chaparro，S. Schroll 和 A. Solotar, *On the Lie algebra structure of the first Hochschild cohomology of gentle algebras andBrauer graph algebras*，《代数杂志》，558 (2020)，293–326，纪念 Michel Brou´e 专号。[8] C. Chaparro，S. Schroll，A. Solotar 和 M. Su´arez-´Alvarez, *The Hochschild cohomology and the Tamarkin–Tsygan calculus ofgentle algebras*，arXiv：2311.08003，(2023)。[9] H. Cartan，S. Eilenberg, *Homological algebra*，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，(1956) MR 0077480 (17,1040e)。[10] C. H. Cho，K. Kim, *Topological Fukaya category of tagged arcs*，arXiv：2404.10294，(2024)。[11] S. Chouhy，A. Solotar, *Projective resolutions of associative algebras and ambiguities*，《代数杂志》，432 (2015)，22-61。[12] S. Chouhy, *On geometric degenerations and Gerstenhaber formal deformations*，《伦敦数学会公报》，51 (2019)，787-797。[13] C. Cibils, *Rigidity of truncated quiver algebras*，Adv. Math.，79 (1) (1990)，18-42。[14] Y. F´elix，L. Menichi 和 J. C. Thomas, *Duality in Gerstenhaber algebras*，arXiv：math/0211229 [math.AT],(2002)。[15] S. Ganatra, *Symplectic cohomology and duality for the wrapped Fukaya category*，特许任教资格论文（博士）——麻省理工学院 ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，(2012)。

[16] S. Ganatra, *S*来自 Hochschild (上)同调的辛上同调，可访问：https://sheelganatra.com/wrapcy2.pdf。[17] C. Geiß, J. A. de la Pe˜na, *Auslander–Reiten components for clans*，墨西哥数学会公报，5 (1999)，307-326。[18] C. Geiß, J. A. de la Pe˜na, *On the deformation theory of finite-dimensional algebras*，《数学手稿》，88 (2) (1995)，191-208。[19] M. Gerstenhaber, *The homology structure of an associative ring*，《数学年刊》，4 (1963)，267-288。[20] F. Haiden, L. Katzarkov 和 M. Kontsevich, *Flat surfaces and stability structures*，高等科学研究院数学出版物，126 (2017)，246-318。[21] Y. Han, X. Liu 和 K. Wang, *Hochschild (co)homologies of DG K-algebras and their koszul duals*，《数学前沿》，18 (5) (2023)，1113-1155。[22] G. Hochschild, *On the cohomology groups of an associative algebra*，《数学年刊》，2 (46) (1945)，58-67。[23] J. Rickard, *Derived equivalences as derived functors*，伦敦数学会会刊，43 (1991)，37-48。[24] D. Labardini-Fragoso, S. Schroll, Y. Valdivieso, *Derived categories of skew-gentle algebras and orbifolds*，《格拉斯哥数学杂志》，64 (3) (2022)，649-674。[25] F. Lazarus, *Combinatorial graphs and surfaces from the computational and topological viewpoint*，特许任教资格论文，格勒诺布尔大学，2014，可访问 https://pagesperso.g-scop.grenoble-inp.fr/ lazarusf/Documents/hdr-Lazarus.pdf。[26] Y. Lekili, A. Polishchuk, *Derived equivalences of gentle algebras via Fukaya categories*，《数学年刊》，376 (1) (2020)，187-225。[27] S. Mac Lane, *Homology*，《数学科学基础丛书》，114，学术出版社，纽约，(1963)。[28] S. Opper, P. G. Plamondon, S. Schroll, *A geometric model for the derived category of gentle algebras*，arXiv：1801.09659，(2025)。[29] Y. Qiu, C. Zhang, Y. Zhou, *Two geometric models for graded skew-gentle algebras*，arXiv：2212.10369，(2022)。[30] S. Schroll, *Trivial extensions of gentle algebras and Brauer graph algebras*，《代数杂志》，444 (2015)，183-200。[31] A. Solotar, *The Gerstenhaber bracket in Hochschild cohomology: methods and examples*，《表示论及其他》。研讨会暨第18届代数表示国际会议，ICRA 2018，布拉格，捷克共和国，2018年8月13日至17日，2020，287-298，[32] Y. Volkov, S. Witherspoon, *Graded Lie structure on cohomology of some exact monoidal categories*，《同调、同伦与应用》，26 (2) (2024)，79-98。

School of Mathematical Sciences, East China Normal University, Shanghai 200241, China
Department of Mathematics, Universität zu Köln, Weyertal 86-90, 50931 Köln, Germany*Email address*: 52205500018@stu.ecnu.edu.cnDepartment of Mathematics, Universität zu Köln, Weyertal 86-90, 50931 Köln, Germany*Email address*: schroll@math.uni-koeln.deIMAS-CONICET and Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de BuenosAires, Pabellon I, Ciudad Universitaria, Buenos Aires, 1428, Argentina.Guangdong Technion Israel Institute of Technology, Shantou, Guangdong Province, China.*Email address*: asolotar@dm.uba.arSchool of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui, 230026, CHINA.Department of Mathematics, Universität zu Köln, Weyertal 86-90, 50931 Köln, Germany.*Email address*: wxchuang@mail.ustc.edu.cn
School of Mathematical Sciences, Laboratory of Mathematics and Complex Systems, Beijing Normal University, Beijing 100875, China.Department of Mathematics, Universität zu Köln, Weyertal 86-90, 50931 Köln, Germany.
Email address: cwen@mail.bnu.edu.cn