arXiv:2601.05327v1 [math.DS] 8 Jan 2026

论非遍历测度的谱

MICHAEL FRANCIS、CHRISTOPHER RAMSEY 和 NICOLAE STRUNGARU

Abstract. 考虑一个拓扑动力系统，其中群是阿贝尔群，拓扑是局部紧且第二可数的。给定该系统的一个不变测度，我们证明，若其动力学谱包含于对偶群的某个博雷尔子集中，那么通过肖凯定理得到的几乎所有遍历测度也满足这一性质。特别地，如果该不变测度具有纯点动力学谱，那么几乎所有遍历测度也具有纯点动力学谱。作为应用，我们证明，对于任意均值几乎周期测度，其包络中都存在一个 Besicovitch 几乎周期测度。

1. 引言 Introduction

40年前准晶体的发现 [24] 促成了一个名为非周期序的数学新领域，该领域致力于研究呈现长程非周期序的对象，这类对象通常具有较大的布拉格衍射谱。特别值得关注的是具有纯点衍射谱的对象。

在 [3, 8, 9, 16, 26, 25], 等早期工作的基础上， [11]从底层结构的几乎周期性角度刻画了纯点衍射。更确切地说，我们有：

- 纯点衍射等价于底层结构的均值几乎周期性；
- 纯点衍射与所谓的一致相位性质（CPP）等价于底层结构的 Besicovitch 几乎周期性；
- 纯点衍射以及沿所有 van Hove序列成立的 CPP 等价于底层结构的 Weyl 几乎周期性。

对于任意适当的拓扑动力系统（X, G），其中 G 为阿贝尔群，以及任意纯点 G-不变测度 m [12, 13]，也有类似的结果。事实上，对于一个传递点 $x \in X$，我们有：

- x 是均值几乎周期的，当且仅当 x 是具有纯点谱的 G-不变测度 m 的一般点；
- x 是Besicovitch几乎周期的，当且仅当 x 是某个具有纯点谱且满足 G-不变的遍历测度m的通用点，并且Wiener–Wintner定理成立；
- x 是Weyl几乎周期的，当且仅当 X 是唯一遍历的，具有连续特征函数和纯点谱。

上述工作引发了人们对这些测度空间（以及函数）的新一轮兴趣，尤其是对理解这些概念之间相似之处和差异的兴趣。

一个有趣的观察是，所有已知的并非 Besicovitch 几乎周期的均值几乎周期函数或测度的例子（例如参见 [11, 注 3.4 或命题 A.2]），都是通过交错拼接两个（或更多）Besicovitch 几乎周期函数/测度得到的。特别是，所有已知的这类函数/测度实际上都是相对于另一种平均序列而言的 Besicovitch 几乎周期函数/测度。这引出了一个自然的问题：

问题 1.1。给定一个相对于某个平均序列 $\mathcal{A}$ 均值几乎周期的函数/测度，我们能否找到另一种平均序列 $\mathcal{B}$，使该函数/测度成为 Besicovitch 几乎周期?

本文旨在证明答案是肯定的。

我们的方法如下：从定义在 G 上的均值几乎周期测度 μ 出发，可以在包络 X(μ) 上构造一个 G- 不变的概率测度 m，其具有纯点谱 [11, 12]。如果能够证明 X(μ) 上至少有一个具有纯点谱的遍历测度 ω，便可推得 X(μ) 存在 Besicovitch 几乎周期测度，由此得出所需结论。

为此，我们证明了一个关于拓扑动力系统上 G-不变概率测度的更一般结果。具体而言，设 (X，G) 是一个拓扑动力系统，其中 X 和 G 均为局部紧且第二可数的；设 m 是 X 上的一个 G- 不变概率测度。令 ρ 为 Erg(X) 上的测度，它通过肖凯定理表示 m。在我们的主要结果$\widehat{}$（定理 6.2）中，我们证明：若 $B \subseteq G$ 是一个博雷尔集，且 m 的谱包含于B，那么对于 ρ-几乎所有 $\omega \in$Erg(X)，ω 的谱也包含于 B。由此可知，若 m 具有纯点谱，那么对于 ρ-几乎所有 ω，$\omega \in$Erg(X) 也具有纯点谱。

为简洁起见，我们约定所有紧致空间、局部紧空间以及群均为豪斯多夫空间。

本文结构如下：第 2 节回顾函数与测度的一些基本定义和性质。第 3 节回顾第二可数局部紧豪斯多夫空间 X 上概率测度集合的博雷尔结构的性质。第 4 节简要回顾肖凯理论，第 5 节回顾谱测度和谱分解。给定一个动力系统 (X，G)，以及 X 上一个 G-不变概率测度 m，肖凯理论告诉我们，存在一个 Erg(X) 上的概率测度 ρ，使得

$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mathsf{m}(x) = \int_{\mathrm{Erg}(X)} \int_X f(y)\,\mathrm{d}\omega(y)\,\mathrm{d}\rho(\omega) \qquad \forall f \in C_0(X)\,. \tag{1}$$

我们在第 6 节证明，(1) 对所有 $f \in B(X)$ 都成立，其中 $f \in B(X)$ 是有界博雷尔函数代数。因此，由定理 6.2 可得：如果 $L^2(X, \mathsf{m})$ 的谱支撑在某个博雷尔集 $B \subseteq \widehat{G}$ 内，那么对于 ρ-几乎所有 $\omega \in$ Erg(X)，$L^2(X, \omega)$ 的谱也支撑在该集合内。

作为直接推论，我们得到：如果 $L^2(X, \mathsf{m})$ 具有纯点谱或奇异谱，那么对于 ρ-几乎所有 $\omega \in$ Erg(X)，$L^2(X, \omega)$ 也具有纯点谱或奇异谱。最后，我们在第 7 节证明：如果 $\mu \in \mathcal{M}^\infty(G)$ 关于某个范霍夫序列 $\mathcal{A}$ 是均值几乎周期的，那么 μ 关于某个平移子序列 $\mathcal{A}$ 也是 Besicovitch 几乎周期的。

2. 预备知识

本文中，X 表示一个第二可数局部紧豪斯多夫空间。我们研究定义在 X上的若干复值函数代数。用 $C_0(X)$表示在无穷远处消失的连续函数所构成的代数。赋予一致范数后，$C_0(X)$是一个可分的[1]C*-代数。我们用 $C_c(X)$表示 $C_0(X)$中的范数稠密理想，它由紧支撑连续函数构成。若 X 实际上是紧致的，则 $C_0(X) = C_c(X) = C(X)$，即定义在 X上的连续函数所构成的含幺代数。我们用 $B(X)$表示定义在X上的有界博雷尔可测函数所构成的含幺代数。注意，$B(X)$关于一致范数也构成一个C*-代数，但通常是不可分的。

[1]局部紧豪斯多夫空间 Y 是第二可数的，当且仅当它是 σ-紧的且可度量化的；这又当且仅当 $C_0(Y)$ 在一致范数下是可分的。

2.1. **测度空间**。我们研究定义在 X 上的复拉东测度，并允许其有限或无限。若要明确所考虑的测度，一种简单的方法是将它们定义为线性泛函。

定义 2.1. X 上的**有限测度**是定义在 $C_0(X)$ 上的线性泛函，且关于一致范数连续。我们将 X 上的有限测度空间记为 $\mathcal{M}_f(X)$。 $\mathcal{M}_f(X)$ 上的**弱*拓扑** 满足：$\mathrm{m}_i \to \mathrm{m}$ 当且仅当对于所有 $f \in C_0(X)$，$\mathrm{m}_i(f) \to \mathrm{m}(f)$。

定义 2.2. X 上的**拉东测度** 是定义在 $C_c(X)$ 上的线性泛函，其在理想 $C_0(U) \subseteq C_c(X)$ 上的限制，对于每个预紧开集 $U \subseteq X$，关于一致范数连续。我们将 X 上的拉东测度空间记为 $\mathcal{M}(X)$。 $\mathcal{M}(X)$ 上的**模糊拓扑** 满足：$\mu_i \to \mu$ 当且仅当对于所有 $\varphi \in C_c(X)$， $\mu_i(\varphi) \to \mu(\varphi)$。

无论采用上述何种线性泛函形式，我们常常写作 $\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$ 或类似形式，而不写作 $\mu(f)$。下面的注释旨在进一步澄清所讨论的测度类型。

注 2.3。

(i) 由于 $C_c(X)$ 在 $C_0(X)$ 中一致范数稠密，因此 $\mathcal{M}_f(X) \subseteq \mathcal{M}(X)$ 可以自然地定义。(ii) 正如在一致范数拓扑下， $\mathcal{M}_f(X)$ 是 $C_0(X)$ 的连续对偶空间一样，在归纳极限拓扑下， $\mathcal{M}(X)$ 是 $C_c(X)$ 的连续对偶空间 [21, 定理 C.4]。特别地，定义 2.2 中所称的模糊拓扑也可以称为弱星拓扑。采用两种术语，是为了尽量避免与定义 2.1 混淆。

(iii) 也可以将 $\mathcal{M}(X)$ 等价地看作正线性泛函锥 $\mathcal{M}_+(X)$ 在 $C_c(X)$ 上的复数域线性张成。另见 [21]。

(iv) 运用里斯–马尔可夫–角谷表示定理的适当版本， [22,定理 2.14], $\mathcal{M}_+(X)$ 可与满足条件 $\mu(K) < \infty$ （对所有紧集 $K \subseteq X$ 都成立）的正博雷尔测度集合（可能是无限测度） μ 在 X 上等同。由于假设 X 是第二可数的，因此无需担心正则性问题；根据 [22, 定理 2.18] ，以下条件自动成立：

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U \supseteq E, U \text{ open}\} = \sup\{\mu(K) : K \subseteq E, K \text{ compact}\}$$

对每个博雷尔集 $E \subseteq X$ 都成立。

(v) 同样，根据里斯–马尔可夫–角谷表示定理的适当版本，[22, 定理 6.19], ，连续对偶空间 $\mathcal{M}_f(X) = C_0(X)^*$ 可与 X 上有限复博雷尔测度构成的空间等同。再次，由于假设 X 是第二可数的，因此无需讨论测度论正则性问题。

(vi) 复测度的全变差测度 $|\mu|$ 和 Jordan 分解 μ等通常概念，不仅适用于有限测度，也适用于拉东测度。更多信息请参见 [18,定理 6.5。6]

2.2. **平移有界测度**。设 G 是一个第二可数、局部紧（且豪斯多夫）的阿贝尔群。

定义 2.4。如果对所有紧集 $K \subseteq G$ 都有 $\sup_{t\in G} |\mu|(t+K) < \infty$，则称复拉东测度 $\mu \in \mathcal{M}(G)$ 为**平移有界**。我们用 $\mathcal{M}^\infty(G)$ 表示平移有界测度空间。

注 2.5。

(a) 设 $U \subseteq G$ 为包含单位元的相对紧开集。于是，

$$\|\mu\|_U := \sup_{t\in G} |\mu|\,(t+U)$$

在 $\mathcal{M}^\infty(G)$ 上定义了一个范数。此外， U 的不同选择定义了等价范数 [3, p。 32]。（b）设 $U \subseteq G$ 为包含单位元的相对紧开集。根据定义，每个 $\mu \in \mathcal{M}(G)$ 都在 $C_0(U) \subseteq C_c(G)$ 上定义了一个连续线性泛函；测度 μ 是平移有界的，当且仅当其平移所定义的泛函 $\{T_t\mu\colon t \in G\}$ 包含在对偶空间 $C_0(U)^*$ 的某个球内。此外， $\|\mu\|_U$ 是此类最小球的半径。由 (a) 可知， U 的选择无关紧要。

(c) 固定一个 $U \subseteq G$ 相对紧开集和 $C > 0$。巴拿赫–阿劳格鲁定理蕴含

$$\mathcal{M}_{C,U} := \{\mu \in \mathcal{M}^\infty(G) : \|\mu\|_U \leq C\}$$

是 $\mathcal{M}^\infty(G)$的弱紧子集。由于 G 是第二可数的，模糊拓扑在$\mathcal{M}_{C,\ U}$ [2,定理 2]上可度量化。

(d) 测度 $\mu \in \mathcal{M}(G)$是平移有界的，当且仅当对于所有 $\varphi \in C_c(G)$，都有 $\mu * \varphi \in C_u(G)$，其中 $C_u(G)$表示有界一致连续函数代数。参见 [1, 定理 1.1] 或 [17,命题 4.9.21]。

定义 2.6。 平移有界测度 $\mu \in \mathcal{M}^\infty(G)$的**包络**是

$$\mathbb{X}(\mu) := \overline{\{T_t\mu : t \in G\}},$$

在 G的自然平移作用下， μ 轨道的模糊闭包 .

注 2.7。 对于任意包含单位元 $U \subseteq G$ 的相对紧开集，都有 $\mathbb{X}(\mu) \subseteq \mathcal{M}_{C,\ U}$对于 $C := \|\mu\|_U$。由于 $\mathcal{M}_{C,\ U}$ 是疏拓紧致且可度量化的，包络 $\mathbb{X}(\mu)$ 也是一个紧致可度量拓扑动力系统。

2.3. **几乎周期函数**。 我们简要回顾函数和测度的各种几乎周期性概念，尤其是 Besicovitch 几乎周期性和均值几乎周期性。更详细的回顾请参见 [11]。与前文一样， G 是一个第二可数局部紧阿贝尔群。我们用$C_u(G)$表示 G上有界一致连续函数在一致范数下构成的代数。先回顾最强且最经典的概念：若函数 $f \in C_u(G)$ 满足，对于每个 $\varepsilon > 0$，集合

$$P_{\varepsilon,\sup} := \{t \in G : \|T_t f - f\|_\infty < \varepsilon\}$$

ε-几乎周期数在 G 中相对稠密（也称余紧）。这等价于 Bochner 条件：轨道 $\{T_t f\colon\ t \in G\}$ 在 $(C_u(G)\ \|\ \|_\infty)$ 中具有紧致闭包。Bohr 几乎周期函数也可以刻画为 G上三角多项式代数在一致范数下的闭包。

注记 2.8。Bohr 几乎周期函数和 G 上所有一致连续函数的集合，在一致范数下都是 C*-代数。Bohr 几乎周期函数的 Gelfand谱称为 Bohr紧化，且已得到深入研究。一致连续函数的谱也已得到研究，有时称为 Samuel紧化或“万能轨道” [23]。

为了讨论平均和 Besicovitch几乎周期性，我们首先需要引入良好的平均序列。对于函数而言，所谓的 Følner条件已经足够。然而，处理测度时，则需要使用限制更严格的序列，称为 van Hove序列。

定义 2.9。 预紧集合序列 $F_n \subseteq G$ 称为**Følner 序列**，如果对于所有$t \in G$，都有

$$\lim_n \frac{|F_n \triangle (t + F_n)|}{|F_n|} = 0,$$

其中， $\triangle$ 表示集合的对称差，竖线表示 G上的一个固定哈尔测度。有时（在处理伯克霍夫遍历定理时），我们需要将注意力限制在**温和的**Følner 序列上，即满足以下附加性质的 Følner 序列 F_n ：存在某个 $C>0$ ，使得对于所有 n ，都有

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n-1} F_n - F_k\right| < C|F_n|\,.$$

定义 2.10. 若一列相对紧集 $A_n \subseteq G$ 满足以下条件，则称其为**范霍夫序列**：对于每个紧集 $K \subseteq G$ ，都有

$$\lim_n \frac{|\partial^K(A_n)|}{|A_n|} = 0\,.$$

这里， A_n 的**K-边界** $\partial^K(A_n)$定义如下：

$$\partial^K(A_n) \coloneqq \left(\overline{A_n + K} \setminus A_n^\circ\right) \cup \left(\left(\overline{\left(\overline{G \setminus A_n}\right)} - K\right) \cap \overline{A_n}\right).$$

注 2.11.
(a) 任何 Følner 序列都有一个温和子序列 [15,命题 1.4]。(b) 任何范霍夫序列显然都是 Følner 序列。反之则不成立。(c) 一个局部紧阿贝尔群存在 Følner 序列，当且仅当它存在范霍夫序列；这又当且仅当该群是 σ-紧的 [27]。注意，由于我们讨论的是阿贝尔群，通常与可 amen 性相关的复杂问题不会构成障碍。(d) 如果 A_n 是 Følner/范霍夫序列，且 $t_n \in G$ ，那么 $t_n + A_n$ 也是 Følner/范霍夫序列。(e) 这些定义并不要求平均序列穷尽整个群。因此，例如，$A_n = [0,n]$ 是 $G = \mathrm{R}$ 的一个可接受的 Følner 序列。

现在可以引入 Besicovitch 半范数以及均值几乎周期性／Besicovitch 几乎周期性。这里需要指出，所有这些概念都可以更一般地定义在局部可积函数上，参见 [11]。由于下文始终讨论 $C_{\mathsf{u}}(G)$ 中的函数，因此我们将定义限定在这个空间上。

定义 2.12. 每个 $\mathcal{A} = \{A_n\}$ in G 都通过下式在 $C_{\mathsf{u}}(G)$ 上定义一个半范数

$$\|f\|_{\mathsf{b},1,\mathcal{A}} \coloneqq \limsup_n \frac{1}{|A_n|}\int_{A_n} |f(t)|\,\mathrm{d}t\,.$$

这称为与 $\mathcal{A}$相关的**Besicovitch 半范数** 。

定义 2.13. 设 $f \in C_{\mathsf{u}}(G)$，且 $\mathcal{A}$ 是 G中的一个 Følner 序列。若对每个 $\varepsilon > 0$ ，集合

$$P_{\varepsilon,\mathsf{b}} \coloneqq \{t \in G : \|T_t f - f\|_{\mathsf{b},1,\mathcal{A}} < \varepsilon\}$$

都是相对稠密的，则称 $f \in C_{\mathsf{u}}(G)$ 关于 $\mathcal{A}$ 是**均值几乎周期** 的。若对每个 $\varepsilon > 0$ ，都存在某个博尔几乎周期函数 g ，使得

$$\|f - g\|_{\mathsf{b},1,\mathcal{A}} < \varepsilon\,.$$

我们将均值几乎周期函数空间和 Besicovitch 几乎周期函数空间分别记为 $\mathrm{MAP}_{\mathcal{A}}(G)$ 和 $\mathrm{BAP}_{\mathcal{A}}(G)$。有 $\mathrm{BAP}_{\mathcal{A}}(G) \subseteq \mathrm{MAP}_{\mathcal{A}}(G)$，且该包含关系一般是严格的。

注 2.14.

（a）注意，在相关工作中，使用了略大的函数空间 $\mathrm{Bap}_{\mathcal{A}}(G)$ 和 $\mathrm{Map}_{\mathcal{A}}(G)$，记为 [11], ，其中的函数不要求一致连续。将后者与 $C_{\mathsf{u}}(G)$ 求交，可得到本文所使用的空间 $\mathrm{BAP}_{\mathcal{A}}(G)$ 和 $\mathrm{MAP}_{\mathcal{A}}(G)$。（b）对于每个$1 \leq p < \infty$，都可以定义 Besicovitch 半范数以及均值/Besicovitch 几乎周期性（见 [11]）。尽管对于不同的 p，这些概念一般可能不同，但在空间 $C_{\mathsf{u}}(G)$ 上，均值/ Besicovitch 几乎周期函数这一概念对于所有 $1 \leq p < \infty$ 都相同。因此，本文限于讨论 $p = 1$ 的情形。（c）$\mathrm{BAP}_{\mathcal{A}}(G)$ 和 $\mathrm{MAP}_{\mathcal{A}}(G)$ 在 $C_{\mathsf{u}}(G)$ 中关于范数是闭的，因而也是 C*-代数 [12]。

均值几乎周期性和 Besicovitch 几乎周期性的概念，可以从函数的情形推广到平移有界测度的情形。这些测度类对于具有纯点谱 [11, 12] 的系统分类具有重要意义。

定义 2.15。设 $\mu \in \mathcal{M}^{\infty}(G)$。我们称 μ 关于范霍夫序列 $\mathcal{A}$ 是**均值/Besicovitch 几乎周期**的，如果对于所有 $\varphi \in C_{\mathsf{c}}(G)$，函数 $\mu * \varphi \in C_{\mathsf{u}}(G)$ 关于 $\mathcal{A}$ 都是均值/Besicovitch 几乎周期的。均值几乎周期测度空间和 Besicovitch 几乎周期测度空间分别记为 $\mathcal{MAP}_{\mathcal{A}}(G)$ 和 $\mathcal{BAP}_{\mathcal{A}}(G)$。

下面的技术引理表明，为了证明一个测度具有 Besicovitch 几乎周期性，并不需要考虑它与每个连续紧支撑函数的卷积；只需取一个适当的稠密集合即可。对于均值几乎周期测度，也有类似的结论，但我们不会用到这一点。

引理 2.16。设 X 是第二可数局部紧豪斯多夫空间。则存在某个可数集合 $D \subseteq C_{\mathsf{c}}(X)$，使得对每个 $\varphi \in C_{\mathsf{c}}(X)$，都存在一个序列 $\psi_n \in D$，该序列一致收敛于 φ，且其支集包含在同一个紧致集合 $K_{\varphi} \subseteq G$中。

证明。设 $U_n \subseteq X$ 是一个递增的预紧开集序列，且覆盖 X。对每个 n，令 D_n 为 $C_0(U_n)$的一个可数稠密子集。令 $D = \bigcup_n D_n$，即可得到所述结论。□

引理 2.17。设 G 为第二可数空间，且令 D 如引理 *2.16* 中所述。设 $\mu \in \mathcal{M}^{\infty}(G)$。则$\mu \in \mathcal{BAP}_{\mathcal{A}}(G)$ 当且仅当对所有 $\varphi \in D$，$\mu * \varphi \in \mathrm{BAP}_{\mathcal{A}}(G)$ 成立。

证明。首先注意，若 $\mu \in \mathcal{M}^{\infty}(G)$ 和 $\varphi \in C_{\mathsf{c}}(G)$ 的 $\mathrm{supp}(\mu) \subseteq -K$ 对紧致 $K \subseteq G$，则

$$\|\mu * \varphi\|_{\mathsf{b},1,\mathcal{A}} \leq \|\mu * \varphi\|_{\infty} \leq \|\varphi\|_{\infty}\|\mu\|_K .$$

现在固定 $\varphi \in C_{\mathsf{c}}(G)$，并令 $\varphi_n \in D$ 一致收敛到 φ，且其支集包含在一个紧集 $K \subseteq G$ 中。根据上述观察，$\mu * \varphi_n \to \mu * \varphi$ 属于$\|\cdot\|_{\mathsf{b},\ 1,\ \mathcal{A}}$。由于 $\mu * \varphi_n \in \mathrm{BAP}_{\mathcal{A}}(G)$，存在 Bohr 几乎周期函数 f_n，使得 $\|\mu * \varphi_n - f_n\|_{\mathsf{b},\ 1,\ \mathcal{A}} < \frac{1}{n}$。于是，

$$\|\mu * \varphi - f_n\|_{\mathsf{b},1,\mathcal{A}} \leq \|\mu * \varphi - \mu * \varphi_n\|_{\mathsf{b},1,\mathcal{A}} + \|\mu * \varphi_n - f_n\|_{\mathsf{b},1,\mathcal{A}} \to 0 .$$

□

2.4. **包络上的不变测度**。我们通过回顾以下来自 [14]的结果来结束本节的预备内容。另请比较 [13]。

定理 2.18 (命题 4.5(b) [14])。设 G 为第二可数局部紧阿贝尔群，$\mathcal{A}$ 为 G中的范霍夫序列。固定 $\mu \in \mathcal{M}^{\infty}(G)$。那么，存在 $\mathcal{A}$ 的某个子序列 $\mathcal{B} = \{B_n\}$ 以及一个 G- 不变概率测度 m，定义在 $\mathbb{X}(\mu)$ 上，使得对所有 $F \in C(\mathbb{X}(\mu))$，都有

$$\lim_n \frac{1}{|B_n|} \int_{B_n} F(T_t\mu)\, \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{X}(\mu)} F(\omega)\, \mathrm{d}\mathsf{m}(\omega) .$$

此外，若 $\mu \in \mathcal{MAP}_{\mathcal{A}}(G)$，则m 具有纯点动力学谱。 □

3. The Borel structure of probability measures

本节汇集了一系列关于概率测度空间的博雷尔结构的必要结果。按照惯例， X 表示一个第二可数局部紧豪斯多夫空间。

回顾一下，若 Z 是巴拿赫空间，则巴拿赫–阿劳格鲁定理表明， Z^* 的单位球在弱星拓扑下是紧致空间；若 Z 进一步可分，则 Z^*的单位球是第二可数的（或等价地，可度量化的）。特别地，$\mathcal{M}_f(X) := C_0(X)^*$的单位球是一个紧致可度量空间。拟概率测度空间 $\mathrm{Prob}_0(X)$是该单位球的正部分，即由满足$\|\mu\| = \mu(X) \leq 1$的正博雷尔测度 μ 组成的凸紧致可度量空间。概率测度空间 $\mathrm{Prob}(X) \subseteq \mathrm{Prob}_0(X)$是 $\mu \in \mathrm{Prob}_0(X)$的凸子空间，其中 $\|\mu\| = \mu(X) = 1$；换言之，它是 $C_0(X)^*$的单位球面的正部分。$\mathrm{Prob}(X)$与 $\mathrm{Prob}_0(X)$空间之间的差异相当小；$\mathrm{Prob}_0(X)$是 $\mathrm{Prob}(X)$与零测度的凸包。若 X 是紧致的，则 $\mathrm{Prob}(X)$自身在弱星拓扑下紧致；但一般而言，$\mathrm{Prob}(X)$只是 $\mathrm{Prob}_0(X)$的一个 G_δ 子集。

回忆一下， $B(X)$表示 X 上配备上确界范数的有界博雷尔可测函数空间。每个 $f \in B(X)$都诱导出一个仿射函数 $\Phi_f : \mathrm{Prob}_0(X) \to \mathbb{C}$，定义如下：

$$\Phi_f(\omega) := \int_X f \, \mathrm{d}\omega \, .$$

显然，这一对应在一致范数下是等距的：

$$\|\Phi_f\|_\infty = \|f\|_\infty \, .$$

根据弱星拓扑的定义，若 $f \in C_0(X)$，则 $\Phi_f \in C(\mathrm{Prob}_0(X))$。尽管这一点并非显而易见，但若 $f \in B(X)$，则 $\Phi_f \in B(\mathrm{Prob}_0(X))$同样成立。后者可由 [29]中引理2.3的证明推出。为方便读者，我们在此给出证明。

命题 3.1。 设 X 是一个第二可数局部紧空间。那么，$\mathrm{Prob}_0(X)$ 上的以下σ-代数相等：

(i) 由$\mathrm{Prob}_0(X)$ 从 $C_0(X)^*$上的弱星拓扑继承的紧致可度量拓扑所生成的博雷尔 σ-代数；*(ii)* [29]的“惯常σ代数”。根据定义，这是$\mathrm{Prob}_0(X)$ 上的最小σ-代数，使得对每个博雷尔集 $A \subseteq X$，$\omega \mapsto \omega(A)$ 都是可测函数。

此外，这个σ-代数具有如下性质：对于每个 $f \in B(X)$，由 $\Phi_f : \mathrm{Prob}_0(X) \to \mathbb{C}$定义的函数 $\Phi_f(\omega) := \int_X f \mathrm{d}\omega$ 是可测的（显然 Φ_f 是仿射的，且 $\|\Phi_f\|_\infty = \|f\|_\infty$）。

我们指出，这个命题特别表明，$\mathrm{Prob}_0(X)$ 的博雷尔结构只取决于 X 的博雷尔结构，而不取决于其拓扑。

证明。 首先，我们证明 (ii) 包含于 (i)。

令 $\mathcal{F}$ 表示所有满足 $\Phi_f \in B(\mathrm{Prob}_0(X))$ 的 $f \in B(X)$ 的集合。若 $f \in C_0(X)$，则根据弱星拓扑的定义，$\Phi_f \in C(\mathrm{Prob}_0(X))$，因此

$$C_0(X) \subseteq \mathcal{F} \subseteq B(X) \, .$$

显然， $\mathcal{F}$ 在取 $\mathbb{C}$-线性组合后仍然封闭。我们断言， $\mathcal{F}$ 在取一致有界的逐点极限后也仍然封闭。事实上，假设 (f_n) 是 $\mathcal{F}$ 中的一个一致有界序列，并逐点收敛到 $f \in B(X)$。那么，根据控制收敛定理，对于所有$\omega \in \mathrm{Prob}_0(X)$，我们有

$$\int_X f_n \, \mathrm{d}\omega \to \int_X f \, \mathrm{d}\omega \, .$$

这意味着 Φ_{f_n} 逐点收敛到 Φ_f。这意味着 $\Phi_f \in B(\text{Prob}_0(X))$，因而$f \in \mathcal{F}$。

令 $\mathcal{D}$ 表示满足 $\mathbb{1}_D \in \mathcal{F}$ 的博雷尔子集 $D \subseteq X$ 的集合。注意， $\mathcal{D}$ 是一个 λ-系统[2]。每个紧集 $K \subseteq X$ 都是一个 G_δ 集，而且， $\mathbb{1}_K$ 可以表示为一列连续函数 $f_n \in C_0(X)$ 的逐点极限。因此，对于所有紧集 $K \subseteq X$，都有 $\mathbb{1}_K \in \mathcal{F}$ 和 $K \in \mathcal{D}$ 。现在， X 的紧子集构成一个 π-系统[3], ，所以 Sierpi´nski–Dynkin 的 λ-π 定理表明， $\mathcal{D}$ 包含由紧集生成的 X 上的 σ-代数。因此， $\mathcal{D}$ 是 X 的博雷尔 σ-代数，由此确立了 (ii) 包含于 (i)。

对于“此外”这一陈述，注意到由线性性可知， $\mathcal{F}$ 包含所有简单函数；因此，由于 $\mathcal{F}$ 对一致有界逐点极限封闭，便可推出 $\mathcal{F} = B(X)$。

剩下只需证明 (i) 包含于 (ii)，也就是说，惯常σ代数包含 $\text{Prob}_0(X)$ 的所有弱星开子集。关键在于，由于 $\text{Prob}_0(X)$ 是第二可数的，只需验证弱星拓扑的通常子基中的开集属于惯常σ代数（见下文引理 3.2）。也就是说，只需验证给定 $f \in C_0(X)$ 和 $V \subseteq \mathbb{C}$ 开集时，子基开集

$$\{\omega \in \text{Prob}_0(X) : \int_X f \, d\omega \in V\}$$

是惯常σ代数上的可测集，也就是说， $\omega \mapsto \int_X f \, d\omega$ 是惯常σ代数上的可测函数。事实上，根据惯常σ代数的定义，若 f 改为简单函数，则结论成立。由于每个 $f \in B(X)$，特别是每个 $f \in C_0(X)$，都是简单函数序列的一致极限，而可测函数对一致极限（甚至逐点极限）封闭，因此得证。□

引理 3.2。 设 Y 为一个集合， $\mathcal{S}$ 为 Y 的子集族，且由 $\mathcal{S}$ 生成的拓扑 τ是第二可数的。那么，由 $\mathcal{S}$ 生成的 σ-代数 $\Sigma(\mathcal{S})$ 与由 τ生成的 σ-代数 $\Sigma(\tau)$ 相同。

证明。 显然， $\Sigma(\mathcal{S}) \subseteq \Sigma(\tau)$。由 $\mathcal{S}$的有限子集族的交集组成的拓扑 τ的基 $\mathcal{B}$ 满足 $\mathcal{B} \subseteq \Sigma(\mathcal{S})$。 τ 的第二可数性意味着存在一个可数基$\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$。于是， τ 中的每个开集都是 $\mathcal{B}' \subseteq \Sigma(\mathcal{S})$中元素的可数并，这表明 $\tau \subseteq \Sigma(\mathcal{S})$，从而 $\Sigma(\tau) \subseteq \Sigma(\mathcal{S})$。□

请注意，上述引理中的第二可数性假设不可省略。例如，考虑一个不可数集的单元素子集族。由这些单点集生成的 σ-代数就是可数余可数 σ-代数。由这些单点集生成的拓扑就是离散拓扑。

还可以考虑在 $\text{Prob}_0(X)$ 上赋予另一种 σ-代数。具体来说，就是将 $\text{Prob}_0(X)$ 视为弱星拓扑下 $B(X)^*$ 的子空间而得到的博雷尔 σ-代数。这个 σ-代数通常是不同的。

例 3.3。 设 $X = [0, 1]$。那么，$\text{Prob}_0(X)$ 从 $B(X)^*$ 继承的弱星拓扑，比 $\text{Prob}_0(X)$ 从$C(X)^*$ 继承的弱星拓扑生成更大的博雷尔 σ-代数。为了解释这一点，请注意，后一个 σ-代数包含连续统多个集合。事实上，超限归纳论证表明，任何可由连续统多个或更少的集合生成的 σ-代数，至多包含连续统多个集合。另一方面，对于任意子集$S \subseteq [0, 1]$ ，都有集合 $U_S \subseteq \text{Prob}_0(X)$，其中包含满足 $\omega(\{x\}) > 0$ 的测度 ω ，其

[2]根据定义，这意味着：（i） $X \in \mathcal{D}$， （ii）如果 D_1， $D_2 \in \mathcal{D}$ 且 $D_1 \subseteq D_2$，那么 $D_2 \setminus D_1 \in \mathcal{D}$；以及（iii）如果 $D_1 \subseteq D_2 \subseteq \ldots$ 都属于 $\mathcal{D}$，那么 $\bigcup_n D_n \in \mathcal{D}$。[3]一个在交集运算下封闭的非空集合族。

中至少有一个 $x \in S$ 对从 $B(X)$ 继承的弱星拓扑 $\mathrm{Prob}_0(X)$ 是开集*。因此，该拓扑及其生成的 σ-代数所包含的集合至少与 $[0,1]$ 的幂集一样多。

下面这个著名引理提供了一种严谨的方式，来阐明如下断言：有界博雷尔函数代数由连续函数代数"生成"。为方便起见，我们给出证明。

引理 3.4. 设 X 是一个第二可数局部紧空间。那么， $B(X)$是包含 $C_0(X)$ 且对一致有界序列的逐点极限封闭的最小代数。

证明。注意， $B(X)$是一个包含 $C_0(X)$、且对一致有界序列的逐点极限封闭的代数；并且，这类代数的任意交集仍是这类代数。因此，最小的这类代数 $\mathcal{F}$ 存在，且 $C_0(X) \subseteq \mathcal{F} \subseteq B(X)$。首先，对于每个紧集 $K \subseteq X$，示性函数 $\mathbb{1}_K$ 属于 $\mathcal{F}$，因为它可以表示为一个一致有界连续函数序列的逐点极限。接下来，我们证明，所有特征函数属于 $\mathcal{F}$ 的博雷尔集构成一个 σ-代数。事实上，回想 X是第二可数的， $\mathbb{1}_X \in \mathcal{F}$。若 $\mathbb{1}_A \in \mathcal{F}$，则 $\mathbb{1}_{X\setminus A} = \mathbb{1}_X - \mathbb{1}_A \in \mathcal{F}_A$。若$\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B \in \mathcal{F}$，则 $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \in \mathcal{F}$。若对于 $n = 1$，2，3，.....，有 $\mathbb{1}_{A_n} \in \mathcal{F}$，则 $\mathbb{1}_A \in \mathcal{F}$对于 $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$成立，因为一致有界序列 $\mathbb{1}_{A_1}, \mathbb{1}_{A_1\cap A_2}, \mathbb{1}_{A_1\cap A_2\cap A_3}, \ldots$ 的逐点极限是 $\mathbb{1}_A$。 X 的紧子集生成整个博雷尔 σ-代数，因此，博雷尔集的所有示性函数都属于 $\mathcal{F}$。最后，简单函数在 $B(X)$ 中范数稠密，故结论成立。□

现在我们可以证明以下对论证至关重要的结果。命题 3.1 保证，当$f \in B(X)$时，下述命题中等式右侧的表达式有意义。

命题 3.5. 设 X 是一个第二可数局部紧空间。固定 $\mathsf{m} \in \mathrm{Prob}_0(X)$。假设 $\rho \in \mathrm{Prob}(\mathrm{Prob}_0(X))$ 以如下意义表示m：

$$\int_X f(y)\,\mathrm{d}\mathsf{m}(y) = \int_{\mathrm{Prob}_0(X)} \int_X f(x)\,\mathrm{d}\omega(x)\,\mathrm{d}\rho(\omega) \qquad \textit{for all } f \in C_0(X).$$

那么，对于所有 $f \in B(X)$，同一等式也成立。

证明。 首先，命题 3.1 保证，对于每个 $f \in B(X)$， $\omega \mapsto \int_X f\,\mathrm{d}\omega$ 都是 $\mathrm{Prob}_0(X)$ 上有界的博雷尔函数。因此，所需等式右侧的表达式至少对$f \in B(X)$有意义。现在，令 $\mathcal{F} \subseteq B(X)$表示所需等式成立的函数 f 的集合。根据假设， $C_0(X) \subseteq \mathcal{F}$。利用控制收敛定理，也容易看出， $\mathcal{F}$ 在一致有界逐点极限下封闭。因此，根据引理 3.4， $\mathcal{F} = B(X)$。□

4. Review of Choquet theory

肖凯理论关注的是如何将局部凸拓扑向量空间中某个紧凸子集的点，表示为该集合的极点上的概率测度的重心。这一理论的一项重要应用，也是与本文相关的应用，是将不变测度分解为遍历测度的加权组合。下面简要回顾这一理论的相关内容。

定理 4.1（肖凯定理）。 设 K 是局部凸向量空间 V中的一个紧致凸可度量化子集（该向量空间为豪斯多夫空间）。那么，对于每个 $z_0 \in K$，都存在一个由极点集合 $E \subseteq K$ 支撑的 $\rho \in \mathrm{Prob}(K)$，使得 $\Phi(z_0) = \int_E \Phi(z)\mathrm{d}\rho(z)$ 对 K上的每个连续仿射函数Φ都成立。□

注 4.2。 一般而言，测度 ρ未必唯一。当 K 是 $\mathbb{R}^2$中的一个正方形时，唯一性就不成立。若唯一性成立，则将 K 称为**肖凯单纯形**。

读者可参阅专著 [20]，了解定理 4.1 的证明（见 [20] 第 3 节）以及更广泛理论的阐述。假设（如我们所做的） K 可度量化，则容易证明，极点集合 E 是 K 的博雷尔子集 G_δ（见 [20], 命题 1.3），因此上文所说的“支撑于”便有了明确含义。在不可度量化的情形下， E 甚至未必是 K 的博雷尔子集；要阐明 K 上的测度“支撑于 E”的含义，还需要做额外工作。肖凯定理在不可度量化情形下的这一推广通常称为肖凯–毕晓普–德利厄定理。我们不需要这一额外的普遍性。

肖凯定理有一个直接推论，涉及如何将概率测度表示为重心。

推论 4.3。 设 X 是一个第二可数局部紧空间。设 $K \subseteq \mathrm{Prob}_0(X)$ 是一个弱星闭凸集合。那么，对每个$\mathsf{m} \in K$，都存在一个支撑于极点集合 $E \subseteq K$上的 $\rho \in \mathrm{Prob}(K)$，使得

$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mathsf{m}(x) = \int_E \int_X f(x)\,\mathrm{d}\omega(x)\,\mathrm{d}\rho(\omega)$$

对所有 $f \in C_0(X)$，均成立。 □

备注 4.4。 如果 K 是局部凸拓扑向量空间 V 中的一个紧凸子集，那么连续仿射函数最显而易见的来源，是将 V 上的连续仿射函数限制到 K 上；换言之，就是连续线性泛函加上常数。一般而言， K 上的连续仿射函数未必都能以这种形式表示。事实上，即使在上述推论 4.3 的情形下，这一点也可能不成立。 $C_0(X)^*$ 上的弱星拓扑所对应的对偶空间是 $C_0(X)$，但并非每个 K 上弱星连续的仿射函数都必然具有 $\omega \mapsto c + \int_X f\,\mathrm{d}\omega$ 的形式，其中 $f \in C_0(X)$， $c \in \mathbb{C}$。参见下文例 4.5。因此，我们陈述的推论 4.3 并未充分利用定理 4.1。尽管如此，为所有 $\varphi \in V^*$ 指定 $\varphi(z_0)$，当然可以唯一确定 $z_0 \in K$，因为 V^* 能够分离 V 中的点。

例 4.5。 设 $X = \mathbb{N}$。令 $K \subseteq \mathrm{Prob}_0(X)$ 为满足以下条件的 $\omega \in \mathrm{Prob}_0(X)$ 的集合

$$\omega(\{n\}) \leq \frac{1}{n 2^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

那么， K是 $\mathrm{Prob}_0(X)$ 的一个闭凸子集，而 $F(\omega) = \sum n\omega(\{n\})$ 定义了 K 上的一个连续仿射函数 F，它不能表示为对 $C_0(X)$ 中任何元素积分所得。

设 X 为第二可数局部紧空间， S 为一组同胚 $X \to X$。那么，满足 $\theta_*(\omega) = \omega$ 对所有 $\theta \in S$ 成立的 $\omega \in \mathrm{Prob}_0(X)$ 构成的集合 $\mathrm{Prob}_0^S(X)$，是 $\mathrm{Prob}_0(X)$ 的一个闭凸子集。特别地，若 G 是一个通过同胚作用于X上的群[4] ，则其 G-不变测度所构成的集合 $\mathrm{Prob}_0^G(X)$ 是 $\mathrm{Prob}_0(X)$ 的一个闭凸子集。

X 上的 G-不变概率测度集合 $\mathrm{Prob}^G(X)$ 是 $\mathrm{Prob}_0^G(X)$ 的一个凸子集。这两个空间关系十分密切； $\mathrm{Prob}_0^G(X)$ 是 $\mathrm{Prob}^G(X)$ 与零测度的凸包。若 X 是紧致的，则 $\mathrm{Prob}^G(X)$ 是闭集；但一般而言，我们只能说 $\mathrm{Prob}^G(X)$ 是 $\mathrm{Prob}_0^G(X)$ 的一个 G_δ 子集。$\mathrm{Prob}^G(X)$ 的极点恰好是作用下的遍历概率测度集合 $\mathrm{Erg}(X)$（参见 [4], 命题 3.1）。$\mathrm{Prob}_0^G(X)$ 的极点集合为 $\mathrm{Erg}(X) \cup \{0\}$。

关于将不变概率测度表示为遍历概率测度的重心，肖凯理论给出如下结论：

[4]稍后我们将把 G 取为一个拓扑群，但 G 的拓扑在当前讨论中不起作用。

推论 4.6。设 X 是一个第二可数局部紧空间。设 G 是一个通过同胚作用于 X 上的群。令 $\mathsf{m} \in \mathrm{Prob}^G(X)$。那么，存在一个概率测度 ρ 定义在 $\mathrm{Erg}(X)$ 上，使得对于所有 $f \in C_0(X)$，我们有

$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mathsf{m}(x) = \int_{\mathrm{Erg}(X)} \int_X f(x)\,\mathrm{d}\omega(x)\,\mathrm{d}\rho(\omega)\,.$$

□

证明。如果 X 是紧致的，因此 $\mathrm{Prob}^G(X)$ 是 $\mathrm{Prob}_0(X)$ 的一个闭凸子集，那么这直接由推论 4.3 得出。如果 X 不是紧致的，我们则将 m 视为属于闭凸集 $\mathrm{Prob}_0^G(X) \subseteq \mathrm{Prob}_0(X)$，并将 m 表示为 $\mathrm{Erg}(X)\cup\{0\}$上的一个概率测度 ρ 的重心。由于 m 是一个概率测度，很容易看出 $\rho(\{0\}) = 0$，因此 ρ实际上支撑在 $\mathrm{Erg}(X)$ 上。□

注记 4.7。虽然与我们的需要关系不大，但我们提及，$\mathrm{Erg}(X)$ 上表示给定 $\mathsf{m} \in \mathrm{Prob}^G(X)$ 的测度 ρ 实际上是唯一的，也就是说，空间 $\mathrm{Prob}(\mathrm{Erg}(X))$ 和 $\mathrm{Prob}^G(X)$ 一一对应。简言之，至少在 X 紧致的情况下，可以说“$\mathrm{Prob}^G(X)$ 是一个肖凯单纯形”（通常根据定义，肖凯单纯形必须是紧致的）。

5. Spectral decomposition

本节中，G 表示一个配备固定 Haar 测度的第二可数局部紧阿贝尔群，$\widehat{G}$表示其庞特里亚金对偶群。

5.1. 谱测度与谱定理。设 $U\colon G \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$是 G 在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上的强连续酉表示。我们回顾以下相关对象的构造，主要目的是统一术语和记号：

- 谱测度：</style>每个 $h \in \mathcal{H}$ 都确定一个定义在 G上的正博雷尔测度 σ_h。$\widehat{\ }$
- 投影值测度：一个映射 $B \mapsto P(B)$，它将 G 的博雷尔子集映射为 $\mathcal{H}$上的投影。

定义 σ_h 的一种方式是将其定义为满足以下条件的唯一正测度：

$$\int_{\widehat{G}} \chi(t)\,\mathrm{d}\sigma_h(\chi) = \langle U(t)h, h\rangle \text{ for all } t \in G, \tag{2}$$

利用博赫纳定理证明这些积分唯一确定了 σ_h。另一种（等价的）处理谱测度的方法，也是我们在此将采用的方法，是先将 $U\widehat{\ }$转换为其对应的 $*$-表示 $\pi : C_0(G) \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$，并将 σ_h 定义为满足以下条件的唯一正测度：

$$\int_{\widehat{G}} f\,\mathrm{d}\sigma_h = \langle \pi(f)h, h\rangle \text{ for all } f \in C_0(\widehat{G}), \tag{3}$$

此处采用里斯–马尔可夫–角谷表示定理，而非博赫纳定理。这种方法在算子理论中较为常见，相关细节可参见多种资料，例如 [7, 19, 30]。下面我们总结与此相关的要点。

定义 5.1。给定 U 在希尔伯特空间$\curvearrowright\mathcal{H}$上的强连续酉表示 G，其**相应的 $*$-表示** $\pi\colon C_0(G) \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ 定义为

$$\pi(\widehat{f})h = \int_G f(t)U(t)h\,\mathrm{d}t$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$对于 $f \in C_c(G)$， $h \in \mathcal{H}$ 并通过连续性延拓至 $C_0(G)$。此处， $f \in C_0(G)$ 表示 f 的傅里叶变换，我们将其取为

$$\widehat{f}(\chi) = \int_G f(t)\overline{\chi(t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

$\widehat{\ }$**例 5.2**。 设上述情形中 $G = \mathbb{Z}$，并作如下识别： $G = \mathbb{T}$。则存在唯一的酉算子 $u \in B(\mathcal{H})$，使得对所有 $n \in \mathbb{Z}$， $U(n) = u^n$ 。相应的 $*$-表示 π 即为通常的连续函数演算： $f \mapsto f(u) : C(\mathbb{T}) \to B(\mathcal{H})$。

定义 5.3。 设 Y 为第二可数局部紧空间。设 $\pi : C_0(Y) \to B(\mathcal{H})$ 是一个非退化的 $*$-表示。

(a) 给定 $h \in \mathcal{H}$，相应的**谱测度** 是 Y 上由以下条件唯一确定的正博雷尔测度 σ_h：

$$\int_Y f(y)\,\mathrm{d}\sigma_h(y) = \langle \pi(f)h, h\rangle \qquad \forall f \in C_0(Y)\,.$$

(b) π 的**典范博雷尔扩张** 是较大的有界博雷尔函数代数在 Y 上的 $\bar{*}$-表示 $\pi : \underline{B}(Y) \to B(\mathcal{H})$，满足对于所有 $f \in B(Y)$， $\pi(f)$ 是满足以下条件的唯一算子：

$$\langle \overline{\pi}(f)h, h\rangle = \int f(y)\,\mathrm{d}\sigma_h(y) \qquad \forall h \in \mathcal{H}\,.$$

见 [6, 命题 IX.1.12]。

(c) 对每个博雷尔集 $B \subseteq X$，**谱投影**定义为 $P(B) := \pi(\mathbb{1}_B)$，其中 $\mathbb{1}_B$ 是 B的示性函数。

例 5.4。 假设上文中 $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mu)$，其中 (Ω, Σ, μ) 是一个测度空间，并且存在一个可测映射 $p: \Omega \to Y$，使得 π 是相应的乘法表示：$\pi(f)h = (f \circ p)h$，对于 $f \in C_0(Y)$， $h \in L^2(\Omega, \mu)$。那么：

- 给定 $h \in L^2(\Omega, \mu)$，相应的谱测度是推前 $\sigma_h = p_*(|h|^2\mu)$。
- 典范博雷尔扩张由 $\pi(f)h = (f \circ p)h$ 给出，对于 $f \in B(Y)$， $h \in L^2(\Omega, \mu)$。
- 对于 $B \subseteq X$ 和 $h \in L^2(\Omega, m)$，我们有 $P(B)h = \mathbb{1}_{p^{-1}(B)}h$。

我们注意到一些简 单的谱测度与谱投影之间的关系 .

引理 5.5. 在上文定义 *5.3* 的设定下，设 $B \subseteq Y$ 为博雷尔集，并固定 $h \in \mathcal{H}$。那么，

(a) $\|P(B)h\|^2 = \sigma_h(B)$

(b) $\sigma_h|_B = \sigma_{P(B)h}$。

证明。 注意到

$$\|P(B)h\|^2 = \langle P(B)h, h\rangle = \int_Y \mathbb{1}_B \sigma_h = \sigma_h(B)\,,$$

并且，对于任意 $f \in C(Y)$，我们有

$$\int_Y f\,\mathrm{d}\sigma_{P(B)h} = \langle \pi(f)\overline{\pi}(\mathbb{1}_B)h, \overline{\pi}(\mathbb{1}_B)h\rangle = \langle \overline{\pi}(f \cdot \mathbb{1}_B)h, h\rangle = \int_Y f \cdot \mathbb{1}_B\,\mathrm{d}\sigma_h = \int_B f\,\mathrm{d}\sigma_h\,.$$

□

注 5.6. 上面的条件 (a) 表明，谱测度族 $\{\sigma_h : h \in \mathcal{H}\}$ 与 π 的投影值测度 P 彼此唯一确定（因为正交投影由其核确定）。这也表明，对于所有 $h \in \mathcal{H}$， $P(B) = 0$ 当且仅当 $\sigma_h(B) = 0$；或者等价地，对于所有 $h \in \mathcal{H}$， $P(B) = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ 当且仅当 σ_h 支撑在 B 中。

5.2. **动力学谱**。

定义 5.7. 设 α 是第二可数局部紧阿贝尔群G 在第二可数局部紧空间 X上的连续作用。固定一个不变测度 $\mathsf{m} \in \mathrm{Prob}_0^G(X)$。

(a) U_{m} 表示在 $L^2(X,\mathsf{m})$上由$(U_{\mathsf{m}}(t)h)(x) = h(\alpha(-t,x))$定义的 G 的强连续表示，其中 $t \in G$, $x \in X$。

(b) $\pi_{\mathsf{m}}\colon C_0(\widehat{G}) \to \mathrm{B}(L^2(X,\mathsf{m}))$表示相应的 $*$**表示**。注意，若 $f = \widehat{g}$ 对$g \in C_{\mathsf{c}}(G)$和 $\varphi \in C_0(X)$成立，则 $\pi_{\mathsf{m}}(f)[\varphi]_{\mathsf{m}} = [g * \varphi]_{\mathsf{m}}$，其中卷积 $g * \varphi \in C_0(X)$定义为

$$(g * \varphi)(x) \coloneqq \int_G g(t)\varphi(\alpha(-t,x))\,\mathrm{d}t \qquad \forall x \in X\,.$$

(c) σ_h^{m}表示与 $h \in L^2(X,\mathsf{m})$相关联的 $\widehat{G}$ 上的**谱测度**。注意

$$\|\sigma_h^{\mathsf{m}}\| = \|h\|_{\mathsf{m}}^2$$

因此，如果 $\|h\|_{\mathsf{m}} \le 1$，则 $\sigma_h^{\mathsf{m}} \in \mathrm{Prob}_0(G)$。

另请注意，如果 $f = \widehat{g}$ 其中 $g \in C_{\mathsf{c}}(G)$ 且 $\varphi \in C_0(X)$，那么

$$\int_{\widehat{G}} f(\chi)\,\mathrm{d}\sigma_\varphi^{\mathsf{m}}(\chi) = \int_X (g * \varphi)(x)\overline{\varphi(x)}\,\mathrm{d}\mathsf{m}(x)\,,$$

其中 $(g * \varphi)\varphi \in C_0(X)$。

(d) $\overline{\pi}_{\mathsf{m}} : B(\widehat{G}) \to \mathrm{B}(L^2(X,\mathsf{m}))$ 表示 π_{m} 在 G上由以下内容确定的有界博雷尔函数代数上的**典范博雷尔扩张**

$$\langle \overline{\pi}(f)h, h\rangle = \int_{\widehat{G}} f(\chi)\,\mathrm{d}\sigma_h^{\mathsf{m}}(\chi) \qquad \forall f \in B(\widehat{G}), h \in \mathcal{H}\,.$$

(e) P_{m} 表示由以下内容定义的相关**投影值测度**

$$P_{\mathsf{m}}(B) \coloneqq \overline{\pi}_{\mathsf{m}}(\mathbb{1}_B)$$

对于博雷尔子集 $B \subseteq G$。

(f) 若 m 在某个博雷尔集 $B \subseteq G$ 中是**谱支撑** 的，则称之为谱支撑；若对所有$h \in L^2(X, \mathsf{m})$, σ_h^{m} 都支撑在 B 中。等价表述见注 5.6。

我们回顾以下标准定义：

定义 5.8。回顾一下，非零元素 $h \in L^2(X, \mathsf{m})$称为一个**特征函数**，其**特征值** 为 $\chi \in G$，如果它满足

$$U(t)h = \chi(t)h \qquad \text{for all } t \in G.$$

We 用 S 表示特征值的集合。注意，当 m 是遍历的时，S 是一个群 .

对于每个 $\chi \in \mathsf{S}$，我们记为

$$E_\chi := \{f \in L^2(X,\mathsf{m}) : f \text{ is eigenfunction for } \chi\} \cup \{0\}\,,$$

这是 χ 的**特征空间** 。

我们定义

$$\begin{aligned}\left(L^2(X,\mathsf{m})\right)_{\mathsf{pp}} &:= \{f \in L^2(X,\mathsf{m}) : \sigma_f \text{ is pure point } \}\\ \left(L^2(X,\mathsf{m})\right)_{\mathsf{c}} &:= \{f \in L^2(X,\mathsf{m}) : \sigma_f \text{ is continuous } \}\\ \left(L^2(X,\mathsf{m})\right)_{\mathsf{ac}} &:= \{f \in L^2(X,\mathsf{m}) : \sigma_f \text{ is absolutely continuous } \}\\ \left(L^2(X,\mathsf{m})\right)_{\mathsf{sc}} &:= \{f \in L^2(X,\mathsf{m}) : \sigma_f \text{ is singular continuous } \}.\end{aligned}$$

以下事实众所周知，参见 [5,定理 8.49]。

事实* 1. 我们有

$$\begin{aligned}L^2(X,\mathsf{m}) &= \left(L^2(X,\mathsf{m})\right)_{\mathsf{pp}} \bigoplus \left(L^2(X,\mathsf{m})\right)_{\mathsf{c}}\\ \left(L^2(X,\mathsf{m})\right)_{\mathsf{c}} &= \left(L^2(X,\mathsf{m})\right)_{\mathsf{ac}} \bigoplus \left(L^2(X,\mathsf{m})\right)_{\mathsf{sc}}\\ \left(L^2(X,\mathsf{m})\right)_{\mathsf{pp}} &= \bigoplus_{\chi \in \mathbb{S}} E_\chi .\end{aligned}$$

由于 X 是第二可数的， $C(X)$ 是可分的，因此 $L^2(X,\mathsf{m})$ 也是可分的。因此，$\mathbb{S}$ 是可数的。特别地，$L^2(X,m)_{\mathsf{pp}}$ 总是具有一个可数的特征函数标准正交基。

注意，常值函数 1 总是属于 E_0，因此 E_0 是非平凡的。特别地，$\left(L^2(X,\mathsf{m})\right)_{\mathsf{pp}}$ 总是非平凡的。有鉴于此，我们可以引入以下定义。注意，这里我们使用了加法记号，因此平凡特征记为 0。

定义 5.9。我们称 (X,G,m) 具有
(a) 若 $\left(L^2(X,\mathbf{m})\right) = \left(L^2(X,\mathbf{m})\right)_{\mathbf{pp}}$，则为纯点谱；(b) 若 $\left(L^2(X,\mathbf{m})\right) = E_0 \bigoplus \left(L^2(X,\mathbf{m})\right)_{\mathbf{c}}$，则为连续谱；(c) 若 $\left(L^2(X,\mathbf{m})\right) = E_0 \bigoplus \left(L^2(X,\mathbf{m})\right)_{\mathbf{ac}}$，则为绝对连续谱；(d) 若 $\left(L^2(X,\mathbf{m})\right) = E_0 \oplus \left(L^2(X,\mathbf{m})\right)_{\mathbf{sc}}$，则为奇异连续谱。

注 5.10。
(a) (X,G,m) 具有纯点谱，当且仅当对所有 $h \in L^2(X,\mathsf{m})$，测度 σ_h 为纯点测度；这又当且仅当由特征函数张成的子空间在 $L^2(X,\mathsf{m})$ 中稠密。等价地，若存在一个可数（因而是博雷尔）集合 $C \subseteq G$，使得 m 的谱支撑于 C，则 m 具有纯点谱。

(b) (X, G, m)具有（绝对/奇异）连续谱，当且仅当对于所有 $h \in L^2(X, \mathsf{m})$，测度 $\sigma_h - \sigma_h(\{0\})\delta_0$ 都是（绝对/奇异）连续的。
(c) 如果m是遍历的，那么 $\mathbb{1}_X$ 是 E_0的一组基。这意味着

$$\sigma_h(\{0\}) = \|P_0(h)\|^2 = \left|\int_X h(t)\mathrm{d}t\right|^2 ,$$

其中 P_0 是 E_0上的正交投影。

容易看出，在这种情况下，(X, G, m) 具有（绝对/奇异）连续谱，当且仅当对于所有满足 $\int_X f(t)\mathrm{d}t = 0$ 的 $h \in L^2(X, \mathsf{m})$，测度 σ_h 是（绝对/奇异）连续的。

6. Main results

本节中，我们证明引言里描述的结果。按照惯例， X 是第二可数局部紧空间， G 是第二可数局部紧阿贝尔群，而 α 是 G 在 X 上的连续作用。

引理 6.1. 设 $\mathsf{m} \in$ 概率$_0^G(X)$，$\rho \in$ 概率(概率$_0^G(X)$) 满足

$$\int_X f(y)\,\mathrm{d}\mathsf{m}(y) = \int_{\mathrm{Prob}_0^G(X)} \int_X f(x)\,\mathrm{d}\omega(x)\,\mathrm{d}\rho(\omega) \qquad \forall f \in C_0(X)\,.$$

固定 $\varphi \in C_0(X)$。

对于 $f \in B(\widehat{G})$，定义仿射函数 $\Psi_f \colon$ 概率$_0^G(X) \to \mathbb{C}$ 为

$$\Psi_f(\omega) \coloneqq \int_{\widehat{G}} f(\chi)\,\mathrm{d}\sigma_\varphi^\omega(\chi)\,.$$

于是有以下结论：

(a) 对所有 $f \in C_0(\widehat{G})$，都有 $\Psi_f \in C(\mathrm{Prob}_0^G(X))$；***(b)*** $\omega \mapsto \sigma_\varphi^\omega \colon \mathrm{Prob}_0^G(X) \to \mathrm{Prob}_0(\widehat{G})$ 关于弱星拓扑是连续的；***(c)*** 对所有 $f \in B(\widehat{G})$，都有 $\Psi_f \in B(\mathrm{Prob}_0^G(X))$；以及 ***(d)***

$$\int_{\widehat{G}} f(\chi)\,\mathrm{d}\sigma_\varphi^{\mathsf{m}}(\chi) = \int_{\mathrm{Prob}_0^G(X)} \int_{\widehat{G}} f(\chi)\,\mathrm{d}\sigma_\varphi^\omega(\chi)\,\mathrm{d}\rho(\omega) \qquad \forall f \in B(\widehat{G})\,.$$

证明。不失一般性， $\|\varphi\|_\infty = 1$。对所有 ω，都有

$$|\Psi_f(\omega)| \le \|f\|_\infty\, \sigma_\varphi^\omega(\widehat{G}) \le \|f\|_\infty\,.$$

对于 (a)，只需验证 Ψ_f 在 $C_0(G)$ 的一致稠密子集上连续。

令 $f = \widehat{g}$，其中 $g \in C_{\mathsf{c}}(G)$。在这种情况下，令 $F = (g * \varphi)\varphi \in C_0(X)$ where

$$(g * \varphi)(x) = \int_G g(t)\varphi(\alpha(-t, x))\,\mathrm{d}t\,,$$

根据定义 5.7，得到

$$\Psi_f(\omega) = \int_{\widehat{G}} f(\chi)\,\mathrm{d}\sigma_\varphi^\omega(\chi) = \langle \pi_\omega(f)\varphi, \varphi\rangle_\omega = \int_X F(x)\,\mathrm{d}\omega(x)\,.$$

由于 $F \in C_0(X)$，根据弱星拓扑的定义，右侧表达式作为 ω 的函数是连续的，从而证明了 (a)。

显然 (a) 蕴含 (b)。

对于 (c)，设 $f \in B(G)$。由于

$$\mathrm{Prob}_0(X) \ni \omega \mapsto \sigma_\varphi^\omega \in \mathrm{Prob}_0(\widehat{G})$$

是连续的，并且

$$\mathrm{Prob}_0(\widehat{G}) \ni \sigma \mapsto \int_{\widehat{G}} f(\chi)\,\mathrm{d}\sigma(\chi) \in \mathbb{C}$$

是博雷尔集（见引理 3.1），因此如所需， Ψ_f 是 Borel 可测的。

Towa对于 (d)，首先注意，若 $f = \widehat{g}$ 对于 $g \in C_c(G)$ 和 $F := (g * \varphi)\varphi$,¯如前所述，则

$$\int_{\widehat{G}} f(\chi)\,\mathrm{d}\sigma_\varphi^{\mathsf{m}}(\chi) = \int_X F(x)\,\mathrm{d}\mathsf{m}(x) = \int_{\mathrm{Prob}_0^G(X)} \int_X F(y)\,\mathrm{d}\omega(y)\,\mathrm{d}\rho(\omega)$$
$$= \int_{\mathrm{Prob}_0^G(X)} \int_{\widehat{G}} f(\chi)\,\mathrm{d}\sigma_\varphi^{\omega}(\chi)\,\mathrm{d}\rho(\omega)$$

因此，在这种情况下 (d) 成立。

由于 $f \mapsto \Psi_f$ 是压缩的，利用简单的连续性论证可知，对于所有 $f \in C_0(G)$，(a) 也成立。等价地，

$$\int_{\widehat{G}} f(\chi)\,\mathrm{d}\sigma_\varphi^{\mathsf{m}}(\chi) = \int_{\mathrm{Prob}_0(\widehat{G})} \int_{\widehat{G}} f(\chi)\,\mathrm{d}\sigma(\chi)\,\mathrm{d}\rho^\sharp(\omega)$$

对于所有 $f \in C_0(\widehat{G})$，其中 $\rho^\sharp \in \mathrm{Prob}(\mathrm{Prob}_0(\widehat{G}))$ 表示 ρ 在 $\omega \mapsto \sigma_\varphi^\omega$ 下的推前。根据命题 3.5，可得

$$\int_{\widehat{G}} f(\chi)\,\mathrm{d}\sigma_\varphi^{\mathsf{m}}(\chi) = \int_{\mathrm{Prob}_0(\widehat{G})} \int_{\widehat{G}} f(\chi)\,\mathrm{d}\sigma(\chi)\,\mathrm{d}\rho^\sharp(\sigma)$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$对于所有 $f \in B(G)$，这相当于对于所有 $f \in B(G)$，(d) 成立。 □

由此，我们得到以下定理，它是本文的主要结果，并将导出关于均值几乎周期测度的有趣推论。

定理 6.2. 设 G 是一个第二可数局部紧阿贝尔群，连续作用于第二可数局部紧空间 X。假设 $\mathsf{m} \in$ 概率$^G(X)$ 且 $\rho \in$ 概率(遍历部分(X)) 满足

$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mathsf{m}(x) = \int_{\mathrm{Erg}(X)} \int_X f(y)\,\mathrm{d}\omega(y)\,\mathrm{d}\rho(\omega) \qquad \forall f \in C_0(X)\,.$$

若 $B \subseteq \widehat{G}$是一个博雷尔 尔集合，使得 $P_{\mathsf{m}}(B) =$ 恒等$_{L^2(X,\mathsf{m})}$，则 $P_\omega(B) =$ 恒等$_{L^2(X,\omega)}$ 对 ρ-几乎处处的 $\omega \in$ 遍历部分(X) .

证明。 设 $N = X - D$，使得待证命题为 $P_\omega(N) = 0$ 对 ρ-几乎处处的 $\omega \in$ 遍历部分(X)成立。

固定一个序列 $\varphi_n \in C_0(X)$、 $n = 1$，2，.....，其线性张成稠密。于是，对每个 $\omega \in$ 概率$_0(X)$，序列（等价类） $\varphi_n \in L^2(X,\ \omega)$ 的线性张成稠密，因此

$$\{\omega \in \mathrm{Erg}(X) : P_\omega(D) = 0\} = \textstyle\bigcap_{n=1}^\infty \{\omega \in \mathrm{Erg}(X) : P_\omega(D)\varphi_n = 0\}\,.$$

由于余零集对可数交封闭，我们只需固定任意一个 $\varphi \in C_0(X)$，并证明对于 ρ-几乎处处的 $\omega \in \mathrm{Erg}(X)$，有 $P_\omega(N)\varphi = 0$ 。回想 $\|P_\omega(N)\varphi\|_\omega^2 = \sigma_\varphi^\omega(N)$，并利用引理 6.1 将其写为

$$\sigma_\varphi^{\mathsf{m}}(N) = \int_{\mathrm{Erg}(X)} \sigma_\varphi^\omega(N)\,\mathrm{d}\rho(\omega),$$

即可得到我们所需的结论。 □

接下来，我们回顾 [12] 中的以下定义

定义 6.3. 设 (X, G) 是一个拓扑动力系统，且 $\mathcal{A}$ 是 Følner 序列。若对于所有 $f \in C(X)$，函数

$$G \ni t \to f_x(x) := f(\alpha(t, x))$$

属于 $\mathrm{BAP}_{\mathcal{A}}(G)$。有关 Besicovitch 几乎周期点的性质，请参见 [12]。

X 中的 Besicovitch 几乎周期点集合记作

$$\mathsf{Bap}_{\mathcal{A}}(X)\,.$$

注 6.4。 令 $\mu \in \mathcal{M}^{\infty}(G)$，并令 $\mathcal{A}$ 为一个范霍夫序列。则，当且仅当 μ是 $\mathbf{X}(\mu)$ 中相对于 $\mathcal{A}$ [12,命题 7.1]的 Besicovitch 几乎周期点时， $\mu \in \mathcal{BAP}_{\mathcal{A}}(G)$。

下面是主定理的一个直接应用。

定理 6.5。 令 (X, G, m) 为任意可测动力系统。假设 $L^2(X,\mathsf{m})$ 具有纯点谱。则存在某个 $Y \subseteq$遍历部分(X)，满足以下性质：

(a) $\rho(Y) = 1$。(b) 对于所有 $\omega \in Y$, $L^2(X,\omega)$ 均具有纯点谱。(c) 若 $\mathcal{A}$是一个满足伯克霍夫遍历定理的 ***Følner*** 序列，则对于所有$\omega \in Y$，集合 $\mathsf{Bap}_{\mathcal{A}}(X)$ 是 ω-可测的，并且

$$\omega(\mathsf{Bap}_{\mathcal{A}}(X)) = 1\,.$$

特别是，

$$\mathsf{Bap}_{\mathcal{A}}(X) \neq \emptyset\,.$$

(d) $\chi \in \widehat{G}$ 是m 的特征值，当且仅当存在某个 $\omega \in Y$，使得 χ 是 ω的特征值。此外，在这种情况下，使 ω 的特征值为 χ 的 $\omega \in$遍历部分(X) 构成的集合具有正测度。

注 6.6. 如果 $\mathsf{Bap}_{\mathcal{A}}(X)$ 是 Borel 可测的，那么

$$\mathsf{m}(\mathsf{Bap}_{\mathcal{A}}(X)) = \int_{\mathrm{Erg}(X)} \omega(\mathsf{Bap}_{\mathcal{A}}(X))\mathrm{d}\rho(\omega) = 1$$

因为对于几乎所有的 ρ- ω， $\omega(\mathsf{Bap}_{\mathcal{A}}(X)) = 1$。

证明。 令 $\mathsf{S} \subseteq \widehat{G}$ 为 $L^2(X,\mathsf{m})$的谱。那么，S 是可数的，且每个 $\chi \in \mathsf{S}$ 都是 $L^2(X,\mathsf{m})$的特征值。

我们有 $P_{\mathsf{S}} = \mathrm{id}_{L^2(X,\mathsf{m})}$，由定理 6.2 可知，存在某个集合 $Y \subseteq \mathrm{Erg}(X)$，使得 $\rho(Y) = 1$，并且对所有 $\omega \in Y_0$ 都有 $P_{\mathsf{S}} = \mathrm{id}_{L^2(X,\omega)}$。特别地，所有 $\omega \in Y$ 的谱都是可数的，且包含于 S。(a)、(b)以及(d)中的蕴含 $\Longleftarrow$ 得证。

（c）由 [12, 定理 4.7] 得出。

我们需要证明 (d) 中的蕴含 $\Longrightarrow$。任取一个 $\chi \in \mathsf{S}$。由于 $C(X)$ 在 $L^2(X,\mathsf{m})$ 中稠密，且 $P_{\mathsf{m}}(\{\chi\}) \neq 0$，因此存在某个 $\phi \in C(X)$，满足 $\|\phi\|_{2,\mathsf{m}} = 1$，使得

$$P_{\mathsf{m}}(\{\chi\})\varphi \neq 0\,.$$

于是，

$$0 \neq \|P_{\mathsf{m}}(\{\chi\})\varphi\|_2^2 = \sigma^{\mathsf{m}}_{P_{\mathsf{m}}(\{\chi\})\varphi}(\widehat{G}) = \sigma^{\mathsf{m}}_{\varphi}|_{\{\chi\}}(\widehat{G}) = \sigma^{\mathsf{m}}_{\varphi}(\{\chi\})\,.$$

应用 引理 6.1 (d)，其中 $f = 1_{\chi}$ 是单点集 χ 的示性函数，我们得到 et

$$0 \neq \sigma^{\mathsf{m}}_{\varphi}(\{\chi\}) = \int_{\mathrm{Prob}^G_0(X)} \sigma^{\omega}_{\varphi}(\{\chi\})\,\mathrm{d}\rho(\omega)\,.$$

这蕴含着满足以下条件的 $\omega \in$遍历部分(X) 的集合

$$\sigma^{\omega}_{\varphi}(\{\chi\}) \neq 0\,,$$

在 $\mathrm{Erg}(X)$ 中具有正测度。由于 $\rho(Y) = 1$，该集合与 Y 相交。特别地，存在某个 $\omega \in Y$，使得

$$\sigma^{\omega}_{\varphi}(\{\chi\}) \neq 0\,.$$

那么， χ 是 $L^2(X,\ \omega)$ 的特征值。 □

注 6.7. 在定理 6.5 的假设下，m 的谱就是 $\omega \in Y$ 的谱的并集。

接下来讨论 m 的特征值。下面的结果给出了特征值和有界特征函数的一个简单刻画。

定理 6.8. 设 G 是一个第二可数局部紧阿贝尔群，它连续作用于第二可数局部紧空间 X。假设 $\mathsf{m} \in \mathrm{Prob}^G(X)$ 和 $\rho \in \mathrm{Prob}(\text{遍历部分}(X))$ 满足

$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mathsf{m}(x) = \int_{\mathrm{Erg}(X)} \int_X f(y)\,\mathrm{d}\omega(y)\,\mathrm{d}\rho(\omega) \qquad \forall f \in C_0(X)\,.$$

设 $f \in B(X)$ 和 $\chi \in \widehat{G}$。那么 f 是特征值为 χ 的特征函数，当且仅当存在某个集合 $Y \subseteq$ 遍历部分(X)，使得 $\rho(Y) = 1$，并且对于所有 $\omega \in Y$， f 都是 $L^2(X,\omega)$ 中特征值为 χ 的特征函数。

证明。 取一个稠密可数集 $D \subseteq G$。

现在，对于每个 $t \in D$，由命题 3.5 可得

$$\int_X |U_t f(x) - \chi(t) f(x)|^2\,\mathrm{d}\mathsf{m}(x) = \int_{\mathrm{Erg}(X)} \int_X |U_t f(y) - \chi(t) f(y)|^2\,\mathrm{d}\omega(y)\,\mathrm{d}\rho(\omega)\,. \tag{4}$$

$\Longleftarrow$: 根据假设，对于所有 $\omega \in Y$，我们有

$$\int_X |U_t f(y) - \chi(t) f(y)|^2\,\mathrm{d}\omega(y) = 0\,.$$

这意味着

$$\int_X |U_t f(x) - \chi(t) f(x)|^2\,\mathrm{d}\mathsf{m}(x) = 0$$

因此

$$U_t f = \chi(t) f \qquad \text{in } L^2(X,\mathsf{m})$$

对于所有 $t \in D$。由于 D 在 G 中稠密，并且 U_t 和乘以 $\chi(t)$ 都是连续的，我们得到 f 是一个特征函数，其特征值为 χ。

$\Longrightarrow$ 类似。对于每个 $t \in D$，我们有

$$\int_X |U_t f(y) - \chi(t) f(y)|^2\,\mathrm{d}\omega(y) = 0\,.$$

于是，由 (4) 可知，存在集合 $Y_t \subseteq \mathrm{Erg}(X)$，满足 $\rho(Y_t) = 1$，使得对于所有 $\omega \in Y_t$，我们有

$$\int_X |U_t f(y) - \chi(t) f(y)|^2\,\mathrm{d}\omega(y) = 0\,.$$

于是，集合

$$Y := \cap_{t \in D} Y_t$$

在 $\mathrm{Erg}(X)$ 中具有满测度，并且对于所有 $\omega \in Y$ 和 $t \in D$，我们有

$$\int_X |U_t f(y) - \chi(t) f(y)|^2\,\mathrm{d}\omega(y) = 0\,.$$

与上文完全相同，这表明对于所有 $\omega \in Y$ f，都是特征值为 χ 的特征函数。 □

接下来，我们列出定理 6.5 的两个直接推论。

推论 6.9。 设 (X, G, m) 为任意可测动力系统。若 $L^2(X, \mathsf{m})$ 具有奇异谱，则 ρ-几乎处处， $\omega \in$遍历部分(X) 具有奇异谱。□

推论 6.10. 设 (X, G, m) 是任意可测动力系统。若 $L^2(X, \mathsf{m})$的谱的豪斯多夫维数至多为 $\alpha \geq 0$ ，那么对于 ρ-几乎处处的 $\omega \in$ 遍历部分(X) ， $L^2(X, \omega)$ 的谱的豪斯多夫维数至多为 $\alpha > 0$。□

我们通过考察一个有趣的例子来结束本节。

例 6.11. 设 α 是二维环面 $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 上的同胚，其加法记法定义为矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。也就是说， $\alpha(x, y) = (x + y, y)$。令 $\mathsf{m} \in \mathrm{Prob}(\mathbb{T}^2)$ 为归一化哈尔测度。对于固定的 $y \in \mathbb{T}$，令 $\omega_y \in \mathrm{Prob}(\mathbb{T}^2)$ 为 $\mathbb{T}$ 在切片 $\mathbb{T}_y$上的归一化哈尔测度。在切片 $\mathbb{T}_y$上， α 的作用是旋转角度 y。因此，我们可以将动力系统 $(\mathbb{T}^2, \alpha)$ 看作所有圆周旋转（包括有理旋转和无理旋转）的集合。 α 的遍历概率测度分为两类：

- 对于无理角 $y \in \mathbb{T}_{\mathrm{irrat}}$，旋转 $x \mapsto x + y : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ 是极小的，并且具有唯一遍历测度 $\mathrm{d}x$。将此测度复制到圆形切片 $\mathbb{T} \times \{y\}$ 上，即可得到 α的一个遍历测度。
- α 的其余遍历测度是沿有限轨道的归一化计数测度。具体而言，对于有理角 $y \in \mathbb{T}_{\mathrm{rat}}$，旋转 $x \mapsto x + y : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ 是 n-周期的，其中 $n \in \mathbb{Z}^+$ 是 y 以最简形式表示时的分母。这些轨道是 n重覆盖映射 $x \mapsto nx : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ 的纤维，因此自然可以用 $\mathbb{T}$ 对它们进行参数化。

总而言之，我们有一个自然的对应：

$$\mathrm{Erg}(\mathbb{T}^2, \alpha) = \mathbb{T}_{\mathrm{irrat}} \cup (\mathbb{T}_{\mathrm{rat}} \times \mathbb{T}).$$

通常的哈尔测度 $\mathsf{m} = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 在 $\mathbb{T}^2$ 上是 α-不变的。

容易证明，映射 $y \mapsto \mathrm{d}x \times \delta_y : \mathbb{T} \to \mathrm{Prob}(\mathbb{T}^2)$ 是到其像上的一个同胚，但要注意，当 θ 为有理数时， $\omega_\theta \notin \mathrm{Erg}(X)$。另一方面， $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ 的同胚像是一个包含于 $\mathrm{Erg}(X)$ 中的 G_δ-集合。设 ρ 是 $\mathrm{Erg}(X)$ 上的概率测度，它是将通常弧长测度在$[0, 1]$上的限制于 $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ 后，经 $\theta \mapsto \omega_\theta$ 推前所得的测度。很容易看出，这就是所需的测度 ρ。

我们得到相应的酉算子：

$$U : L^2(\mathbb{T}^2) \to L^2(\mathbb{T}^2) \qquad (Uh)(x, y) = h(x + y, y).$$

在通常的标准正交基 $\{w^m z^n : m, n \in \mathbb{Z}\}$ 上，其中 $w(x, y) = e^{2\pi i x}$, $z(x, y) = e^{2\pi i y}$， U 的作用由下式给出

$$Uw^m z^n = w^m z^{m+n}.$$

换言之，在傅里叶同构 $L^2(\mathbb{T}^2) \cong \ell^2(\mathbb{Z}^2)$下，酉算子 U 共轭于：

$$V : \ell^2(\mathbb{Z}^2) \to \ell^2(\mathbb{Z}^2) \qquad (Vh)(m, n) = h(m + n, n).$$

也就是说，这是由矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 所定义的 $\mathbb{Z}^2$ 上的置换所诱导的酉算子。因此， V可以相当直接地理解为 $m \in \mathbb{Z}$ 上双边移位 S 的 m 次幂的直和： $\ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$。

不过，为了计算该 $\mathbb{Z}$-作用的谱测度，只对 x 变量进行傅里叶变换会稍微方便一些。这是因为，在所得的同构 $L^2(\mathbb{T}^2) \cong L^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{T})$ 下，酉算子 U 与一个乘法算子共轭

$$W : L^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{T}) \qquad (Wh)(m, y) = e^{2\pi i m y} h(m, y).$$

参见例 5.4，在 L^2(Z ×T) 上的 C(T) 的相关 $*$-表示 π 也是由乘法算子给出的作用：

$$(\pi(f)h)(m,y) = f(my)h(m,y) \qquad\qquad f \in C(\mathbb{T}), h \in L^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{T})\,.$$

给定一个 $h \in L^2$(Z ×T)，其在 T 上的相应谱测度 σ_h^{m} 是 $|h(m,\ y)|^2 dy$ 经映射推前得到的

$$q : \mathbb{Z}\times\mathbb{T} \to \mathbb{T} \qquad\qquad q(m,y) = my.$$

定义 $\eta \in L^1_+$(T) 和 $c \geq 0$：

$$\eta(x) \coloneqq \sum_{m\neq 0}\frac{1}{|m|}\sum_{q(m,y)=x}|h(m,y)|^2 \qquad\qquad c \coloneqq \int_{\mathbb{T}}|h(0,y)|^2\,\mathrm{d}y.$$

于是，我们有

$$\sigma_h^{\mathsf{m}} = \eta(x)\mathrm{d}x + c\delta_0$$

其中 $\mathrm{d}x$ 是 T 上的哈尔测度，而 δ_0 是单位元处的狄拉克测度。

7. Dynamical and diffraction spectrum of translation bounded measures

7.1. 动力学谱。 让我们回顾一下 [2] 的以下定义。

定义 7.1。 简称**平移有界测度动力系统（或 TMDS）**，是指一对 (X G，m)，其中 X 是 G-不变的 $\mathcal{M}^\infty$(G) 的弱紧子集。

每当 $\mu \in \mathcal{M}^\infty(G)$ 时，包络 X(μ) 就会产生一个 TMDS .

我们先来看定理 6.2 的两个直接推论。

定理 7.2。 设($\mathbb{X}$ G) 是一个 *TMDS*，且m 是 $\mathbb{X}$ 上任意一个 G-不变概率测度。若 ($\mathbb{X}$,m) 的动力学谱支撑于博雷尔集 $B \subseteq G$ 内，那么对于 ρ-几乎处处的所有 $\omega \in$ 遍历部分($\mathbb{X}$)，其谱也支撑于该集合内。□

定理 7.3。 设($\mathbb{X}$ G) 是一个 *TMDS*，且m 是$\mathbb{X}$上的任意一个 G-不变概率测度。若($\mathbb{X}$,m) 的动力学谱是奇异的，那么对于 ρ-几乎处处的所有 $\omega \in$ 遍历部分 ($\mathbb{X}(\mu)$)，谱 f ($\mathbb{X}$ ω) 是奇异的。□

接下来, 以下结论可由定理 6.5 和 [12, 命题 7.1] 立即推出。

定理 7.4。 设($\mathbb{X}$ G) 是一个拓扑动力学测度系统，且m 是$\mathbb{X}$上的任意 G-不变概率测度。

假设 L^2($\mathbb{X}$,m) 具有纯点谱。令 ρ 为表示m的遍历部分($\mathbb{X}$)上的概率测度。则存在某个 $Y \subseteq$遍历部分($\mathbb{X}$，满足以下性质：

(a) $\rho(Y) = 1$.(b) 对于所有 $\omega \in Y$， $L^2(\mathbb{X}\ \omega)$ 都具有纯点谱。(c) 如果 $\mathcal{A}$ 是一个满足伯克霍夫遍历定理的范霍夫序列，那么对于所有$\omega \in Y$，集合$\mathbb{X} \cap \mathcal{BAP}_{\mathcal{A}}(G)$

$$\omega(\mathbb{X}\cap\mathcal{BAP}_{\mathcal{A}}(G)) = 1\,.$$

特别是，

$$\mathbb{X}\cap\mathcal{BAP}_{\mathcal{A}}(G) \neq \emptyset\,.$$

(d) $\chi \in G$ 是测度 m 的特征值，当且仅当存在某个 $\omega \in Y$，使得 χ 是 ω的特征值。此外，在这种情况下，使 χ 成为 ω 的特征值的 $\omega \in$遍历部分($\mathbb{X}$) 集合具有正测度。

□

因此，我们得到:

推论 7。 **5.** 设 μ 是一个平移有界测度， $\mathcal{A}$ 是一个范霍夫序列。
若 $\mu \in \mathcal{MAP}_{\mathcal{A}}(G)$ ，则存在 $\mathcal{A}$ 的某个子序列 $\mathcal{A}'$ ，使得

$$\mathbb{X}(\mu) \cap \mathcal{BAP}_{\mathcal{A}'}(G) \neq \emptyset .$$

证明。 由定理 2.18，测度 m 在 X(μ) 上具有纯点谱。此外，由 [15, 定理 1.2 和推论 1.4] $\mathcal{A}$ ，存在一个温和子序列 $\mathcal{A}'$，且伯克霍夫遍历定理沿着 $\mathcal{A}'$ 成立。

结论由定理 7.4 得出。 □

现在我们可以证明，每个均值几乎周期测度沿着 $\mathcal{A}$的某个平移子序列都是 Besicovitch 几乎周期的。首先，我们需要以下预备结果。

命题 7.6。 设 G 是一个第二可数局部紧阿贝尔群。固定一个平移有界测度 $\mu \in \mathcal{M}^{\infty}(G)$ 和一个范霍夫序列 $\mathcal{A} = \{A_n\}$。如果包络 $\mathbb{X}(\mu)$ 包含一个测度 ν ，该测度关于 $\mathcal{A}$是 ***Besicovitch*** 几乎周期的，那么存在群元素$t_n \in G$ ，使得 μ 关于 $\mathcal{B} = \{B_n\}$是 ***Besicovitch*** 几乎周期的，其中 $B_n = t_n + A_n$。

证明。 由于 G 是第二可数的，根据引理 2.16，存在 $C_{\mathsf{c}}(G)$中的一个可数稠密集 $D = \{\varphi_m\}_m$ 。

现在，由于 $\nu \in \mathcal{BAP}_{\mathcal{A}}(G)$，对于每个 m， l，存在某个 $f_{m,\ l} \in SAP(G)$，使得

$$\|\nu * \varphi_m - f_{m,l}\|_{\mathsf{b},1,\mathcal{A}} < \frac{1}{l} .$$

接下来，选取某个 s_n 使得

$$T_{s_n}\mu \to \nu .$$

接下来，对每个 m, l ，轨道闭包

$$C_{m,l} = \overline{\{T_t f_{m,l} : t \in G\}} \subseteq (C_{\mathsf{u}}(G), \| \|_{\infty})$$

是紧致的。因此

$$C := \prod_{m,l} C_{m,l}$$

是一个紧致可度量空间。因此，序列 $(T_{s_n} f_{m,l})_{m,l} \in C$ 存在子序列收敛到某个 $(g_{m,l})_{m,l} \in C$。因此，存在 s_n 的某个子序列 s_{k_n} 以及 $g_{m,l} \in SAP(G)$，使得

$$\lim_n \|T_{s_{k_n}} f_{m,l} - g_{m,l}\|_{\infty} = 0 \qquad \forall m, l . \tag{5}$$

特别地，对每个 m, l 以及每个 $t \in G$ ，我们有

$$\lim_n g_{m,l}(s_{k_n} + t) = f_{m,l}(t) . \tag{6}$$

接下来，对每个固定的 m, l, j，定义

$$h_n(t) := \frac{1}{|A_j|} 1_{A_j}(t) \left| g_{m,l}(t + s_{k_n}) - \mu * \varphi_m(t + s_{k_n}) \right| .$$

于是， h_n 由 $\frac{\|g_{m,l}\|_{\infty} + \|\mu * \varphi_m\|_{\infty}}{|A_j|} 1_{A_j} \in L^1(G)$ 所界定。此外，由于 $T_{s_n}\mu \to \nu$ 在模糊拓扑中，我们有

$$\mu * \varphi_m(t + s_{k_n}) \overset{\text{pointwise}}{\longrightarrow} \nu * \varphi_m(t) .$$

另外，由 (6) 可得

$$g_{m,l}(t+s_{k_n}) \overset{\text{pointwise}}{\longrightarrow} f_{m,l}(t)\,.$$

因此，由控制收敛定理，对于每个固定的 m,l,j

$$\lim_n \frac{1}{|A_j|}\int_{A_j} |g_{m,l}(t+s_{k_n})-\mu*\varphi_m(t+s_{k_n})|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{|A_j|}\int_{A_j}|f_{m,l}(t)-\nu*\varphi_m(t)|\,\mathrm{d}t\,.$$

现在，取某个 $j>1$。那么，存在某个 N_j，使得对于所有 $1\leq m,l\leq j$ 以及所有 $n\geq N_j$，我们有

$$\frac{1}{|A_j|}\int_{A_j} |g_{m,l}(t+sk_n)-\mu*\varphi_m(t+s_{k_n})|\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{|A_j|}\int_{A_j}|f_{m,l}(t)-\nu*\varphi_m(t)|\,\mathrm{d}t+\frac{1}{j}\,.$$

不失一般性，我们还可以假设 N_j 严格递增。

定义

$$t_j := -s_{k_{N_j}}\,.$$

那么，对于所有 $1\leq m,l\leq j$，我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{|A_j|}\int_{t_j+A_j}|g_{m,l}(t)-\mu*\varphi_m(t)|\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{|A_j|}\int_{A_j}\left|g_{m,l}(t+sk_{N_j})-\mu*\varphi_m(t+s_{k_{N_j}})\right|\,\mathrm{d}t\\ &\leq \frac{1}{|A_j|}\int_{A_j}|f_{m,l}(t)-\nu*\varphi_m(t)|\,\mathrm{d}t+\frac{1}{j}\,.\end{aligned}$$

令 $j\to\infty$，我们得到

$$\|g_{m,l}-\mu*\varphi_m\|_{\mathsf{b},1,\mathcal{B}} \leq \|\nu*\varphi_m-f_{m,l}\|_{\mathsf{b},1,\mathcal{A}} < \frac{1}{l}\,.$$

这表明，对所有 φ_m，$\mu*\varphi_m\in \mathsf{BAP}_{\mathcal{B}}(G)$。

因此，由引理 2.17，$\mu\in\mathcal{BAP}_{\mathcal{B}}(G)$。

□

综合本节的所有结果，我们得到：

定理 7.7。设 G 是一个第二可数局部紧阿贝尔群。假设平移有界测度 $\mu\in\mathcal{M}^\infty(G)$ 相对于范霍夫序列$\mathcal{A}=\{A_n\}$是均值几乎周期的。那么，存在 A_n 的一个子序列 A_{k_n} 以及群元素 $t_n\in G$，使得 μ 相对于 $\mathcal{B}=\{B_n\}$ 是 *Besicovitch* 几乎周期的，其中 $B_n=t_n+A_{k_n}$。□

以下结论是定理 7.7 和 [11, 命题 3.33]的直接推论。

定理 7.8. 设 $\mathcal{A}=\{A_n\}$ 是一个范霍夫序列，并令 $f\in C_{\mathsf{u}}(G)\cap\mathsf{MAP}_{\mathcal{A}}(G)$。

那么，存在 A_n 的一个子序列 A_{k_n} 以及某个 $t_n\in G$，使得令 $B_n=t_n+A_{k_n}$ 和 $\mathcal{B}=\{B_n\}$ 后，我们有

$$f\in\mathsf{BAP}_{\mathcal{B}}(G)\,.$$

□

推论 7.9。设 $f\in C_{\mathsf{u}}(G)$，并设 $\mathcal{A}$ 为一个范霍夫序列。若 $f\in\mathsf{MAP}_{\mathcal{A}}(G)$，则存在某个 $g\in\mathbb{X}(f)\cap\mathsf{BAP}_{\mathcal{A}}(G)$。□

7.2. **衍射谱**。 考虑一个拓扑动力学测度系统 (X G)。每个 $\varphi \in C_c(G)$ 都定义了一个连续函数 $f_\varphi : X \to \mathbb{C}$，其定义如下：

$$f_\varphi(\omega) := \omega * \varphi(0)\,.$$

我们回顾以下结果：

定理 7.10. [2, 命题 6] 设 $(\mathbb{X}\ G)$ 是一个（拓扑动力学测度系统），且 m 是$\mathbb{X}$上的一个 G-不变概率测度。那么，存在 上的正定测度 γ_m，满足

$$\langle f_\varphi, U_t f_\varphi\rangle = \gamma_m * \varphi * \widetilde{\varphi}(t)$$

对所有 $\varphi \in C_c(G)$ 以及所有 $t \in G$，均成立。 □

由于 γ_m 是正定的，根据 [1, 28]，存在 $\widehat{G}$ 上的正测度，使得对所有 $\varphi \in C_c(G)$，都有 $|\widehat{\varphi}|^2 \in L^1(\widehat{\gamma_m})$；并且 $\gamma_m * \varphi * \widetilde{\varphi}$ 是通过博赫纳定理与有限正测度 $|\widehat{\varphi}|^2\widehat{\gamma_m}$相关联的连续正定函数。

定义 7.11。 定理 7.10 中的测度 γ_m 称为 (X G, m) 的**自相关测度**，而测度 $\widehat{\gamma_m}$称为 (X G, m) 的**衍射测度**。

注 7.12。 (a) 给定某个 $\mu \in \mathcal{M}^\infty(G)$ 和一个范霍夫序列 $\mathcal{A}$，μ 的自相关γ 通常定义为以下对象的弱簇点

$$\frac{1}{|A_n|}\mu|_{A_n} * \widetilde{\mu|_{A_n}}\,.$$

当 G是第二可数的时，始终存在 A_n 的一个子序列 A_{k_n}，使得其弱极限

$$\gamma = \lim_n \frac{1}{|A_{k_n}|}\mu|_{A_{k_n}} * \widetilde{\mu|_{A_{k_n}}}\,.$$

通过最终将 A_n 替换为 A_{k_n}，通常可以不失一般性地假设自相关 γ 沿着 $\mathcal{A}$存在。

(b) 假设 $\mu \in \mathcal{M}^\infty(G)$ 的自相关沿着 $\mathcal{A}$存在。设 m 为由定理 2.18 给出的 X(μ) 上的测度。那么

γ 是.....的自相关 $(\mathbb{X}(\mu), G, m)$ [5]。

现在让我们回顾一下所谓的Dworkin论证，例如参见 [2, 9, 10]。

命题7.13。 设$(\mathbb{X}\ G)$ 是一个（拓扑动力学测度系统），且m 是$\mathbb{X}$上的一个 G-不变概率测度。那么，对于所有 $\varphi \in C_c(G)$，我们有

$$\sigma_\varphi^m = |\widehat{\varphi}|^2\,\widehat{\gamma_m}\,.$$

□

注7.14。 衍射谱可视为 G 在 G-不变希尔伯特空间上的子表示 U 的动力学谱（参见 [2,引理8和定理 6]）

$$\mathcal{H} = \overline{\{f_\varphi : \varphi \in C_c(G)\}} \subseteq L^2(\mathbb{X}, m)\,.$$

一般而言，衍射谱比动力学谱小，而且可能严格小于动力学谱。

另一方面，纯点衍射与动力学谱等价，且 [2, 定理7，定理 9] S是由以下元素生成的群

$$\{\chi \in \widehat{G} : \widehat{\gamma_m}(\{\chi\}) > 0\,.$$

[5]测度 $\widehat{\gamma_m}$ 称为 γ [1]的**傅里叶变换**。

现在，我们得到引理 6.1 的以下推论，可以将其视为定理 6.2 的衍射版本。

定理 7.15. 设 $(\mathbb{X}\ G)$ 是一个拓扑动力学测度系统，并设 m 是 $\mathbb{X}$ 上任意一个 G-不变概率测度。设 ρ 是表示 m 的定义在 遍历部分$(\mathbb{X})$ 上的概率测度。那么，

(a) 对于所有 $\varphi \in C_{\mathsf{c}}(G)$ 以及博雷尔集 $B \subseteq G$，我们有

$$\int_B |\widehat{\varphi}(\chi)|^2 \, \mathrm{d}\widehat{\gamma_{\mathsf{m}}}(\chi) = \int_{\mathrm{Erg}(\mathbb{X})} \int_B |\widehat{\varphi}(\chi)|^2 \, \mathrm{d}\widehat{\gamma_{\omega}}(\chi) \mathrm{d}\rho(\omega) \, .$$

(b) 对于所有满足 $\mathrm{supp}(h)$ 紧致的 $h \in B(G)$，我们有

$$\int_{\widehat{G}} h(\chi) \mathrm{d}\widehat{\gamma_{\mathsf{m}}}(\chi) = \int_{\mathrm{Erg}(\mathbb{X})} \int_{\widehat{G}} h(\chi) \mathrm{d}\widehat{\gamma_{\omega}}(\chi) \mathrm{d}\rho(\omega) \, .$$

证明. (a) 由引理 6.1(d) 应用于 $f = \mathbb{1}_B$ 和 f_φ 得出。

对于(b)，取某个紧集 K，使得 $\mathrm{supp}(h) \subseteq K^\circ$。

根据 [28, 17]，存在某个 $\varphi \in C_{\mathsf{c}}(G)$，使得 $\widehat{\varphi} \geq 1_K$。然后我们可以取某个 $f \in B(G)$，使得

$$f \cdot |\widehat{\varphi}|^2 = h \, .$$

将引理 6.1(d)应用于 f 和 f_φ，即可得出该结论。

□

现在，我们列出其中一些推论。

推论 7.16. 设$(\mathbb{X}\ G)$ 是一个拓扑动力学测度系统，且m 是$\mathbb{X}$上的任意 G-不变概率测度。设 ρ 是$\mathrm{Erg}(\mathbb{X})$ 上表示m的概率测度。设 $B \subseteq G$ 是一个博雷尔集，且 $\chi \in G$。那么，

(a) 如果 B 是预紧的，那么

$$\widehat{\gamma_{\mathsf{m}}}(B) = \int_{\mathrm{Erg}(\mathbb{X})} \widehat{\gamma_{\omega}}(B) \mathrm{d}\rho(\omega) \, .$$

(b)

$$\widehat{\gamma_{\mathsf{m}}}(\{\chi\}) = \int_{\mathrm{Erg}(\mathbb{X})} \widehat{\gamma_{\omega}}(\{\chi\}) \mathrm{d}\rho(\omega) \, .$$

(c) 如果 $\mathit{supp}(\widehat{\gamma_{\mathsf{m}}}) \subseteq B$，那么对于 ρ-几乎处处的所有 $\omega \in \mathit{Erg(X)}$，$\mathit{supp}(\widehat{\gamma_{\omega}}) \subseteq B$。*(d)* 如果 $\widehat{\gamma_{\mathsf{m}}}(\{\chi\}) = 0$，那么对于 ρ-几乎处处的所有 $\omega \in \mathit{Erg(X)}$，$\widehat{\gamma_{\omega}}(\{\chi\}) = 0$。*(e)* 如果 $\widehat{\gamma_{\mathsf{m}}}(B) > 0$，那么对于属于 *Erg(X)* 中一个具有正 ρ-测度的子集的 ω，$\widehat{\gamma_{\omega}}(B) > 0$。*(f)* 如果 $\widehat{\gamma_{\mathsf{m}}}(\{\chi\}) > 0$，那么对于属于 *Erg(X)* 中一个具有正 ρ-测度的子集的 ω，$\widehat{\gamma_{\omega}}(\{\chi\}) > 0$。*(g)* 如果 $\widehat{\gamma_{\mathsf{m}}}$ 是纯点型，那么对于 ρ-几乎处处的所有 $\omega \in \mathit{Erg(X)}$，$\widehat{\gamma_{\omega}}$ 是纯点型。*(h)* 如果 $\widehat{\gamma_{\mathsf{m}}}$ 是奇异的，那么对于 ρ-几乎处处的所有 $\omega \in \mathit{Erg(X)}$，$\widehat{\gamma_{\omega}}$ 是奇异的。

□

Acknowledgements

C.R. 获 NSERC 探索基金 2019-05430 资助，N.S. 获 NSERC 探索基金 2024-04853 资助。

References

[1] L. N. Argabright 和 J. Gil de Lamadrid。 *Fourier analysis of unbounded measures on locally compact abelian groups* 145 *Memoirs of the American Mathematical Society* 1974 ，第 卷。AMS，罗德岛州普罗维登斯，。[2] M. Baake 和 D. Lenz。平移有界测度上的动力系统：纯点动力谱与衍射谱。 *Ergodic Theory Dynam. Systems*，24(6):1867–1893，2004年。[3] M. Baake 和 R. V. Moody。具有纯点衍射的加权狄拉克梳。 *J. Reine Angew. Math.*，573:61–94，2004年。[4] M. B. Bekka 和 M. Mayer。 *Ergodic theory and topological dynamics of group actions on homogeneous spaces*，数学研究生教材第269卷。剑桥大学出版社，剑桥，2000年。[5] C. Cheverry 和 N. Raymond。 *A guide to spectral theory—applications and exercises*。Birkh¨auser 高级教材：巴塞尔教材。Birkh¨auser/施普林格，尚，2021年。[6] J. B. Conway。 *A course in functional analysis*， *Graduate Texts in Mathematics*第96卷。施普林格出版社，纽约，第二版，1990年。[7] G. B. Folland。 *A course in abstract harmonic analysis*。数学教材。CRC出版社，佛罗里达州博卡拉顿，第二版，2016年。[8] J. Gil de Lamadrid 和 L. N. Argabright。 *Almost periodic measures* 85 *Memoirs of the American* ，第 卷。*Mathematical Society* 1990 AMS，罗德岛州普罗维登斯，。[9] J.-B. Gou´er´e。准晶体与几乎周期性。 *Communications in Mathematical Physics*，255(3):655–681，2005年4月。[10] J.-Y. Lee、R. V. Moody 和 B. Solomyak。纯点动力谱与衍射谱，载于 *Annales Henri Poincaré* 3, 1003 1018 2002 ，卷 页 –。施普林格，。[11] D. Lenz、T. Spindeler 和 N. Strungaru。纯点衍射与均值、Besicovitch 及 Weyl 几乎周期性，2020年，2006.10821。[12] D. Lenz、T. Spindeler 和 N. Strungaru。动力系统的纯点谱与均值、Besicovitch 及 Weyl 几乎周期性。 *Ergodic Theory Dynam. Systems*，44(2):524–568，2024年。[13] D. Lenz 和 N. Strungaru。关于弱几乎周期测度。 *Trans. Amer. Math. Soc.* 371 10 6843 6881, , ( ): –。2019
[14] D. Lenz 和 N. Strungaru。拓扑动力系统的维纳–温特纳点。2025年，2510.18056。[15] E. Lindenstrauss。可 amen 群的逐点定理。 *Invent. Math.*，146(2):259–295，2001年。[16] Y. Meyer。准晶体、几乎周期图案、均值周期函数与非规则采样。*J. Math. (N.S.)* 13 1 1 45, 2012 *Afr. Diaspora* ，( ): –。

[17] R. V. Moody 和 N. Strungaru。几乎周期测度及其傅里叶变换。载于 M. Baake 和 U. Grimm 编， *Aperiodic order: Volume 2*， *Crystallography and almost periodicity*，第4章，第173–270页。剑桥。[18] G. Pedersen。 *Analysis now*。数学研究生教材。施普林格纽约，2012年。[19] G. Pedersen。 C^**-algebras and their automorphism groups*。纯粹与应用数学（阿姆斯特丹）。学术出版社，伦敦，第二版，2018年。由 Søren Eilers 和 Dorte Olesen 编辑并撰写序言。[20] R. R. Phelps。 *Lectures on Choquet's theorem*，施普林格数学研究生教材第1757卷。施普林格出版社，柏林，第二版，2001年。[21] C. Richard 和 N. Strungaru。切投集纯点衍射简明指南。 *J. Phys. A*，50 15( ):154003，25，2017年。[22] W. Rudin。 *Real and complex analysis*。麦格劳-希尔图书公司，纽约，第三版，1987年。[23] P. Samuel。超滤子与一致空间的紧化。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，64(1):100–132，1948年。[24] D. Shechtman、I. Blech、D. Gratias 和 J. W. Cahn。具有长程取向有序且无平移对称性的金属相。 *Phys. Rev. Lett.*，53:1951–1953，1984年11月。[25] B. Solomyak。自相似铺砌的动力学。 *Ergodic Theory Dynam. Systems*，17(3):695–738，1997年。[26] B. Solomyak。由德洛内集产生的动力系统的谱。载于 J. Patera 编， *Quasicrystals and discrete geometry (Toronto, ON, 1995)* 10 *Fields Institute Monographs* 265 275 ，第 卷，共 页 –。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1998年。[27] T. Spindeler 和 N. Strungaru。关于测度傅里叶变换的（不）连续性。*Appl.* 499 2 125062, 2021 *J. Math. Anal.* ，( ):。

[28] C. van den Berg 和 G. Forst。 *Potential theory on locally compact abelian groups*，第87卷。施普林格科学与商业媒体，2012年。[29] V. S. Varadarajan。博雷尔空间的自同构群。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，109:191–220，1963年。

[30] D. P. Williams. *Crossed products of C^*-algebras*, *Mathematical Surveys and Monographs*第 134 卷。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2007年。

Department of Mathematics and Statistics, MacEwan University, Edmonton, Alberta, Canada*Email address*: francism29@macewan.ca*URL*: https://mdfrancis.github.io/

Department of Mathematics and Statistics, MacEwan University, Edmonton, Alberta, Canada*Email address*: ramseyc5@macewan.ca*URL*: https://sites.google.com/macewan.ca/chrisramsey/

Department of Mathematics and Statistics, MacEwan University, Edmonton, Alberta, Canada, and Institute of Mathematics "Simon Stoilow", Bucharest, Romania *Email address*: strungarun@macewan.ca*URL*: https://sites.google.com/macewan.ca/nicolae-strungaru/