根据邻接矩阵的特征值确定双正则 Tanner 图的环数

Roxana Smarandache，*IEEE* 高级会员，和 David G. M. Mitchell，*IEEE* 高级会员。

arXiv:2601.05340v1 [cs.IT] 8 Jan 2026

摘要

本文探讨了低密度奇偶校验（LDPC）码图中的环与相应邻接矩阵特征值之间的新联系。利用所得观察结果，我们推导出了围长为 g 的双正则图中长度为 $2k$、$k < g$ 的环数 N_{2k} 的快速、简单递推公式。此外，我们还根据邻接矩阵的非零特征值，推导出了 N_{2k}、$k \leq 7$ 的显式公式。全文重点研究具有实际意义的双正则准循环低密度奇偶校验（QC-LDPC）码类；对于这类码，可以通过应用分块循环矩阵所使用的技术，高效地获得其特征值。

一、引言

在二部图中计数短环是许多领域都关注的一个基础问题。例如，低密度奇偶校验（LDPC）码的 Tanner 图中存在的短环分布，在很大程度上决定了该码在瀑布区和误码平台区采用迭代译码算法时的比特／块错误率性能 [1]–[6]。受此启发，人们为高效计算二部图的环分布付出了大量努力，参见例如 [7]–[17]。

本材料基于美国国家科学基金会资助项目（编号：CCF-2145917）的支持成果。R. Smarandache 任职于圣母大学数学系和电气工程系，地址为美国印第安纳州圣母院 46556（电子邮箱：rsmarand@nd.edu）。D. G. M. Mitchell 任职于新墨西哥州立大学 Klipsch 电气与计算机工程学院，地址为美国新墨西哥州 88003（电子邮箱：dgmm@nmsu.edu）。

Dehghan 和 Banihashemi [15]描述了有向边矩阵 A_e 的特征值 $\{\eta_i\}$与连通的、规模为 $m \times n$的(q_1, q_2)-双正则二部图 G 的邻接矩阵 A 的特征值 λ_i 之间的一种有用联系。具体而言，对于 A的每个严格负特征值 λ，以及方程 $\xi^2 + (-\lambda^2 + q_1 + q_2)\xi + q_1 q_2 = 0$的每个解 $\xi \neq 1$，数值 $\pm\sqrt{\xi}$ 都是 A_e的特征值，且其重数与 λ在 A的谱中的重数相同。此外，$\pm\sqrt{-q_1}$ 和 $\pm\sqrt{-q_2}$分别以重数 $n - \text{rank}(A)/2$和 $m - \text{rank}(A)/2$，以及 ± 1（各自的重数为 $|E| - (m + n) + 1$）也是 A_e的特征值。结合二部图 G 的围长为 g 时，其 k-环 N_k 的数量由 $N_k = \sum \binom{\eta_i^k}{2k}$ 给出（其中 $k < 2g$）这一事实，他们得出了一个定理，并给出了一种从 A的特征值 λ 出发计算 $N_{2k}, k < g$的方法 [15]。

—

本文进一步探讨该定理的步骤，并展示如何通过直接使用 λ_i，以及给出一个仅包含矩阵 A的特征值的幂、而非 $\{\eta_i\}$的幂的闭式公式，来绕过由方程 $\xi^2 + (-\lambda^2 + q_1 + q_2)\xi + q_1 q_2 = 0$ 计算$\{\eta_i\}$ 的过程。我们首先针对二分（q_1, q_2）双正则图推导 N_{2k} 的一个简单递推公式，由此得到一个取决于 $\{\lambda_i^j\}, j \leq k$之和的 N_{2k} 公式，进而得到一个关于 $\sum\{\lambda_i^k\}$ 和 $N_{2j}, j < k$的 N_{2k} 公式。

本文的结构如下。在第二节和第三节中，我们给出全文其余部分所需的记号、定义和背景知识。在第四节中，我们列出所使用的事实，以绕过计算有向边矩阵的特征值 η_i 的幂，并推导出取决于邻接矩阵 A的特征值 λ的递推公式。在第五节A中，我们给出一个关于特征值 $\alpha_i = \lambda_i - (q_1 + q_2)$ 的 N_{2k} 公式；在第五节B中，我们推导关于 λ 的幂的 N_{2k} 公式，尤其是仅取决于最大幂 λ_i^k 和 $N_{2j}, 1 < j < k$的公式。我们还重新讨论第四节中的示例，以说明这些公式。我们在第六节中给出一些总结性评论，随后在附录中给出第五节B中各公式的证明。

II. 基本符号与定义

本文中的所有码均为长度为 n 的二元线性码，由（标量）校验矩阵 $H = (h_{i,j}) \in \mathbb{F}_2^{m \times n}$定义为满足条件$\mathbf{c}^\intercal = \mathbf{0}^\intercal$的所有向量 $\mathbf{c} \in \mathbb{F}_2^n$ $H \cdot$，其中$^\intercal$ 表示转置，$\mathbb{F}_2$ 为二元域。对于正整数 L,

$[L]$ 表示小于 L的非负整数集合，即 $[L] = \{0, 1, \ldots, L-1\}$。我们用 I_N表示 $N \times N$ 单位矩阵。

长度为 $n = n_v N$ 的线性准循环低密度奇偶校验码 $\mathcal{C}_{\mathrm{QC}} \triangleq \mathcal{C}^{(N)}{}_{\mathrm{QC}}$ 可由一个 $n_c N \times n_v N$（标量）校验矩阵 $H^{(N)}{}_{\mathrm{QC}} \triangleq H$ 描述，该矩阵由一个 $n_c \times n_v$ 阵列的 $N \times N$ 个循环矩阵构成

$$H = \begin{bmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & \cdots & P_{1,n_v} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & \cdots & P_{2,n_v} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n_c,1} & P_{n_c,2} & \cdots & P_{n_c,n_v} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

其中各项 $P_{i,j}$ 均为循环矩阵。显然，若将这些循环矩阵选为低密度矩阵，则校验矩阵也将是低密度的。利用循环矩阵环与模 $x^N - 1$ 多项式环之间众所周知的同构，我们可以为每个矩阵 $P_{i,j}$关联一个多项式 $p_{i,j}(x)$，因此，准循环低密度奇偶校验码也可以等价地用一个多项式校验矩阵描述

$$H(x) = \begin{bmatrix} p_{1,1}(x) & p_{1,2}(x) & \cdots & p_{1,n_v}(x) \\ p_{2,1}(x) & p_{2,2}(x) & \cdots & p_{2,n_v}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n_c,1}(x) & p_{n_c,2}(x) & \cdots & p_{n_c,n_v}(x) \end{bmatrix}, \tag{2}$$

其大小为 $n_c \times n_v$，多项式运算以模 $x^N - 1$ 进行。

通过对标量校验矩阵 H,[1] 的行和列进行置换，我们得到准循环码 $\mathcal{C}^{(N)}{}_{\mathrm{QC}}$ 的一个等价校验矩阵表示，形式如下

$$\bar{H} \triangleq \begin{bmatrix} H_0 & H_{N-1} & \cdots & H_1 \\ H_1 & H_0 & \cdots & H_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N-1} & H_{N-2} & \cdots & H_0 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

其中 $H_0, H_1, \ldots, H_{N-1}$ 是标量 $n_c \times n_v$ 矩阵，这两种表示之间的联系为

$$H_0 + H_1 x + \cdots + H_{N-1} x^{N-1} = H(x). \tag{4}$$

[1]此置换通过以下方式完成：取 N 行的第一个块中的第一行、 N行的第二个块中的第一行，依此类推；然后取第一个块中的第二行、第二个块中的第二行，依此类推；列也以同样的方式处理。

对于任意整数 $N \geq 1$，令 $R_N \triangleq \{e^{i2\pi j/N}, 0 \leq j < N\}$表示复数 N次单位根的集合。符号 *表示复共轭。其元素为方阵 $n_c \times n_c$ 的 $N \times N$ 数组的 $Nn_c \times Nn_c$循环矩阵B称为 n_c块循环矩阵；记作 $B = \mathbf{circ}(\mathbf{b}_0, \mathbf{b1}, \ldots, \mathbf{b}_{N-1}) \in \mathcal{C}^{Nn_c \times Nn_c}$，其中 B的第一个块列中的方阵 $n_c \times n_c$元素依次为$\mathbf{b}_0, \mathbf{b1}, \ldots, \mathbf{b}_{N-1}$。若 B的关联（列）矩阵多项式为 $W(x) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 x + \cdots + \mathbf{b}_{N-1} x^{N-1}$，则 B 的特征值由对所有 $\rho \in R_N$ [9]而言的矩阵 $n_c \times n_c$ $W(\rho)$ 的特征值的并集给出。特别地，若对于某个属于 R_N的 ρ，$\mathbf{v}$是 $W(\rho)$的一个特征值 λ 对应的特征向量，则向量 $\begin{bmatrix} \mathbf{v}^\mathsf{T} & \rho\mathbf{v}^\mathsf{T} & \rho^2\mathbf{v}^\mathsf{T} & \cdots & \rho^{(N-1)}\mathbf{v}^\mathsf{T} \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ 是 B的特征向量。

III. 线性代数背景知识

我们简要回 顾一些必要的结果，使本文内容完整自洽 .

A. 特征值

- 设 M是一个 $m \times n$矩阵。那么， $m \times m$矩阵 MM^T和 $n \times n$矩阵 $M^T M$具有相同的特征值（均为实数），但有一组 $|m-n|$ 零特征值除外，这组零特征值的数量恰好补足了 $|m-n|$ 矩阵尺寸之差。
- 秩(MM^T) =秩$(M^T M)$ =秩(M) =秩(M^T) =# {个非零特征值，属于MM^T}。
- 设 $p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$是一个度为 n的多项式， M是一个 $m \times m$矩阵，且 λ是 M的任意一个特征值，其对应的特征向量为$\mathbf{x}$。则 $p(\lambda) \triangleq a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0$是 $p(M) \triangleq a_n M^n + a_{n-1} M^{n-1} + \cdots + a_1 M + a_0 I_n$的一个特征值，且具有相同的特征向量$\mathbf{x}$。– 特别地，对于所有 $k = 1, 2, \ldots,$ M^k的特征值为 λ^k。

B. 牛顿恒等式

- 若 $p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$是一个首一多项式，即 $a_n = 1$，且其零点为$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ （计入重数），而 $E_k \triangleq \sum \alpha_i^k, k = 1,2, \ldots,$是这些零点的第 k 阶矩，则牛顿恒等式成立：

  – 对所有 $k = 1, 2, \ldots, n,$ $E_k + a_{n-1}E_{k-1} + a_{n-2}E_{k-3} + \cdots + a_{n-k+1}E_1 + a_{n-k}k = 0$,– 对于 $k = 1, 2, \ldots,$ $E_{n+k} + a_{n-1}E_{n+k-1} + a_{n-2}E_{n+k-3} + \cdots + a_0 E_k = 0.$
- 特别地，实矩阵 $m \times m$ M 的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$（包括重数）的 k 阶矩 $E_k \triangleq \sum \lambda_i^k$，$k = 1, 2, \ldots$ 可以如上递归计算

利用矩阵 M 的（首一）特征多项式 $p(t) = \det(tI_m - M)$ 进行计算，该特征多项式的根为特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$。

C. 与校验矩阵 H 相关联的 *Tanner* 图的邻接矩阵 A 假设 H 是一个 $m \times n$ 矩阵，$m < n$。

- 与校验矩阵 H 相关联的 Tanner 图的邻接矩阵 A为

$$A \triangleq \begin{bmatrix} 0 & H \\ H^{\mathsf{T}} & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow A^2 = \begin{bmatrix} HH^{\mathsf{T}} & 0 \\ 0 & H^{\mathsf{T}}H \end{bmatrix}.$$

- 以下各项等价:

1) $\lambda \neq 0$ 是 HH^{T} 的一个重数为 μ 的特征值；2) $\lambda \neq 0$ 是 A^2 的一个重数为 2μ 的特征值；3) 非零的 $-\sqrt{\lambda}$、$\sqrt{\lambda}$ 是 A 的特征值，且每个特征值的重数均为 μ；4) $\sqrt{\lambda} \neq 0$ 是 H 的奇异值，重数为 μ。

A 的秩是 H 的秩的两倍。•

D. 准循环码的 $H^{\mathsf{T}}H$ 特征值

我们回顾、证明并举例说明一个关于准循环低密度奇偶校验码特征值的已有结果。

推论 1 ([18])。 设 $\mathcal{C}_{\mathrm{QC}} \triangleq \mathcal{C}^{(N)}$ 准循环码 为一个准循环低密度奇偶校验码，其校验矩阵为 H、$H(x)$ $\bar{H}$，如式(1)、(2) 和(3)所示。则 HH^{T} 的特征值由 $n_c \times n_c$矩阵 $H(\rho)H$和$(\rho)^{\mathsf{T}}$的特征值的并集给出，其中 N取遍 $\rho = e^{i\frac{2\pi j}{n}}$在 R_N、$i^2 = -1$中的所有单位根，对于$j = 0$、1、.....、$N - 1$。

证明: 对于固定的 $N \geq 1$，(3) 和 (4) 在多项式矩阵 $H(x) \in (\mathbb{R}[x]/(x^N - 1))^{n_c \times n_v}$ 集合与校验矩阵 H集合之间建立了简单的双射对应。此外，在有定义时，两个此类多项式矩阵 $H(x)L(x)$的乘积通过此双射，与对应校验矩阵 $\bar{H}\bar{L}$的乘积建立了另一种对应；而形式为 (2) 的转置 $H(x)^{\mathsf{T}}$ 对应于形式为 $\bar{H}^{\mathsf{T}}$的相应校验矩阵的转置。特别地，$H(x)H(x)^{\mathsf{T}} \in (\mathbb{R}[x]/(x^N - 1))^{n_c \times n_c}$ 对应于 n_c 分块循环矩阵 $\bar{H}\bar{H}^{\mathsf{T}}$，其特征值为 $H(\rho)H^{\mathsf{T}}(\rho)$，对所有 $\rho \in R_N$ 均成立，参见第二节。

■

例 1. 令 $N = 31$，并考虑由 93×155 标量矩阵给出的 $(3, 5)$-正则 $[155, 91, 20]$ 准循环低密度奇偶校验码 [19]

$$H = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_4 & P_8 & P_{16} \\ P_5 & P_{10} & P_{20} & P_9 & P_{18} \\ P_{25} & P_{19} & P_7 & P_{14} & P_{28} \end{bmatrix},$$

其中 P_ℓ 表示将行循环向左移动 ℓ 个位置后的 31×31 单位矩阵，或者等价地，通过多项式校验矩阵

$$H(x) = \begin{bmatrix} x & x^2 & x^4 & x^8 & x^{16} \\ x^5 & x^{10} & x^{20} & x^9 & x^{18} \\ x^{25} & x^{19} & x^7 & x^{14} & x^{28} \end{bmatrix}, \; H^{\mathsf{T}}(x) = \begin{bmatrix} x^{30} & x^{26} & x^6 \\ x^{29} & x^{21} & x^{12} \\ x^{27} & x^{11} & x^{24} \\ x^{23} & x^{22} & x^{17} \\ x^{15} & x^{13} & x^3 \end{bmatrix},$$

其中 $H(x) \in (\mathbb{R}[x]/(x^{31} - 1))^{3\times 5}$。

特 征值由计算相关的标量矩阵 HH^T 得到，即计算

$$H(x)H^{\mathsf{T}}(x) = \begin{bmatrix} 5 & f_1^{\mathsf{T}} & f_2 \\ f_1 & 5 & f_3^{\mathsf{T}} \\ f_2^{\mathsf{T}} & f_3 & 5 \end{bmatrix}$$

with

$$f_1 \triangleq x + x^2 + x^4 + x^8 + x^{16},$$
$$f_2 \triangleq x^{25} + x^{19} + x^7 + x^{14} + x^{28},$$
$$f_3 \triangleq x^5 + x^{10} + x^{20} + x^9 + x^{18},$$

在 $\rho^k = \exp\left(\frac{i2\pi k}{31}\right)$ 处的值，其中所有 $k = 0, 1, \ldots\ldots, 30$，且 $f_{\mathsf{T}i}(x) \triangleq f_i(x^{-1})$，所有指数均对 $N = 31$ 取模。对于所有 $k \in [31], \; k \neq 0, \; H(\rho^k)H^{\mathsf{T}}(\rho^k)$ 的特征多项式为

$$p(t) \triangleq \det\left(tI - H(\rho^k)H^{\mathsf{T}}(\rho^k)\right) = t^3 - 15t^2 + 62t - 62$$
$$= (t - 8.6801)(t - 4.8459)(t - 1.4740),$$

从而得到特征值 8.6801,4.8459 和 1.4740，每个特征值的重数均为 30。这种高重数是由矩阵 $H(x)$ 的结构所导致的。

事实上， $H(x)$ 的行 $H_k(x)$ 满足 $H_1(x^{25}) = H_2(x^5) = H_3(x)$，并且由于 $2^5 = 1$ 和 $5^3 = 1$ 属于 $\mathbb{Z}_{31}$，我们有

$$f_j(\rho^k) = f_j(\rho^{2k}) = f_j(\rho^{4k}) = f_j(\rho^{8k}) = f_j(\rho^{16k}), \text{ for } j = 1, 2, 3, \text{ and } k \in [31],$$

并且，对于所有 $k \in [31]$,

$$f_1(\rho^{25k}) = f_2(\rho^k) = f_3(\rho^{5k}).$$

因此，当用单位根 ρ^j、 $1 \le j \le 30$代替 x 中的 $H(x)H(x)^\mathsf{T}$进行求值时，所得矩阵要么等于 $H(\rho)H^\mathsf{T}(\rho)$，其中 $j = 1$、 2 、 4 、 8 、 16，要么等于通过对称行列置换从该矩阵得到的矩阵（即执行与所进行的行运算相同的列运算），其中

$$H(\rho)H^\mathsf{T}(\rho) = \begin{bmatrix} 5 & 1.5419 - 2.2180i & -0.3934 - 0.8726i \\ 1.5419 + 2.2180i & 5 & -1.6485 - 1.4384i \\ -0.3934 + 0.8726i & -1.6485 + 1.4384i & 5 \end{bmatrix}.$$

因此，在 ρ^j处对 $H(x)H(x)^\mathsf{T}$ 求值，对于 $1 \le j \le 30$，具有相同的 3 个特征值：8．6801、4．8459 和 1．4740。在 $\rho^0 = 1$处，矩阵 $H(1) \cdot H^\mathsf{T}(1) = 5J_3$，其中 J_3 是 3×3 全1矩阵，因此其特征值为 15、0、0。这给出了 HH^T 的非零特征值：15、8．6801、4．8459 和 1．4740，其重数分别为 1、30、30 和 30，因此 H和 HH^T 的秩均为 91。□

IV. 环计数

A. 已有结果

在进一步发展我们的理论之前，本节先回顾两个重要的定理。第一个定理说明如何利用有向边矩阵的谱 [10],计算二部双正则图中的环数；第二个定理则说明该谱与邻接矩阵的谱 [15]之间的联系。

定理 1 ([10]). 设有一个二部图 G，其有向边矩阵为 A_e，[2]，且 $\{\eta_i\}$是 A_e的谱。那么， G 中的 k-环数为 $N_k = \sum \binom{\eta_i^k}{2k}$，其中 $k < 2g$，$_i$，而 g 是 G的围长。 —

[2]有向边矩阵是一个 $2|E| \times 2|E|$ 矩阵，用于刻画二部图中的 $|E|$ 边。关于有向边矩阵的定义，请参阅 [10]。

定理 2 ([15])。 设 $G=(V=U\cup W,E)$ 是一个连通双正则二分图，其中 U 中的每个节点的度为 q_1+1，而 W 中的每个节点的度为 q_2+1，其中 $q_2\geq 2$、 $q_1\geq 1$和 $q_2\geq q_1$。此外，假设 $|U|=n$和 $|W|=m$。那么，可以根据邻接矩阵 A 的特征值计算 G 的有向边矩阵 A_e 的特征值，具体如下：

步骤 *1.* 对于每个严格负特征值 λ *of* A，使用方程

$$\xi^2+(-\lambda^2+q_1+q_2)\xi+q_1q_2=0$$

求出两个解。对于每个解 $\xi\neq 1$，数值 $\pm\sqrt{\xi}$ 都是 A_e的特征值，且每个特征值的重数与 A的谱中 λ 的重数相同。（此步骤得到的 A_e 特征值总数为 $2(m+n)-2$零化度$(A)-2$。）

步骤 *2.* 矩阵 A_e 也具有特征值 $\pm\sqrt{-q_1}$ 和 $\pm\sqrt{-q_2}$。[3] 每个特征值 $\pm\sqrt{-q_1}$（分别为 $\pm\sqrt{-q_2}$）的重数为$n-$秩$(A)/2$（分别为 $m-$秩$(A)/2$）。（此步骤得到的 A_e 特征值总数为 $2(m+n)-2$秩$(A)=2$零化度(A)。）

步骤 *3.* 此外，矩阵 A_e 具有特征值 ± 1，每个特征值的重数为 $|E|-(m+n)+1$。（此步骤中的特征值总数为 $2|E|-2(m+n)+2$。）

B. 观察结果

稍后我们将利用以下观察结果改写定理 1 中的公式：

1) 对于二部图，只存在偶数长度的环，因此我们关心的和为

$$N_{2k}=\sum_{\eta}\frac{\eta^{2k}}{4k}=\sum_{\eta}\frac{(\eta^2)^k}{4k};$$

2) 以下各项等价：

a) $\pm\lambda$ 是 A的非零特征值，重数均为 μ_λ；b) λ^2 是 HH^{T} 的特征值，重数为 μ_λ；c) $\alpha\triangleq\lambda^2-(q_1+q_2)$是 $HH^{\mathsf{T}}-(q_1+q_2)I_m$ 的特征值，重数为 $\mu_\alpha=\mu_\lambda$；

3) 设$\pm\sqrt{\xi_{\alpha,1}}$，$\pm\sqrt{\xi_{\alpha,2}}$为 A_e的特征值，其中$\xi_{\alpha,1}$，$\xi_{\alpha,2}$是.....的根 f

$$\xi^2-\alpha\xi+q_1q_2,$$

[3]注意，$\pm\sqrt{-q_1}$，$\pm\sqrt{-q_2}$是 $\lambda=0$时 $\xi^2+(-\lambda^2+q_1+q_2)\xi+q_1q_2=0$ 的解。

其中 $\alpha=\lambda^2-(q_1+q_2)$ 是 $HH^\top-(q_1+q_2)I_m$ 的一个特征值，重数为 μ_α，且满足 $\alpha\neq-(q_1+q_2)$。于是

$$\frac{\sum_\alpha \mu_\alpha(+\sqrt{\xi_{\alpha,1}})^{2k}+\mu_\alpha(-\sqrt{\xi_{\alpha,1}})^{2k}+\mu_\alpha(+\sqrt{\xi_{\alpha,2}})^{2k}+\mu_\alpha(-\sqrt{\xi_{\alpha,2}})^{2k}}{4k}$$
$$=\frac{\sum_\alpha \mu_\alpha(\xi_{\alpha,1}^k+\xi_{\alpha,2}^k)}{2k},$$

其中求和遍历所有不同的特征值 $HH^\top-(q_1+q_2)I_m$，且这些特征值不等于 $-(q_1+q_2)$，因此每个特征值的重数 μ_α 都包含在求和中；

4) 等价地，对 $HH^\top-(q_1+q_2)I_m$ 的所有特征值 $\alpha\neq-(q_1+q_2)$ 求和，共有 $\mu=\sum \mu_\alpha=\mathrm{rank}(H)$ 个这样的特征值（不一定互不相同）。$\alpha\neq-(q_1+q_2)$求和等于

$$\frac{\sum_{\substack{\text{distinct }\alpha\\ \alpha\neq-(q_1+q_2)}}\mu_\alpha(\xi_{\alpha,1}^k+\xi_{\alpha,2}^k)}{2k}=\frac{\sum_{\substack{\alpha\\ \alpha\neq-(q_1+q_2)}}(\xi_{\alpha,1}^k+\xi_{\alpha,2}^k)}{2k};$$

5) 由于 $\pm\sqrt{-q_1}$ 和 $\pm\sqrt{-q_2}$ 是 A_e 的特征值，因此 $(\pm\sqrt{-q_1})^{2k}=(-q_1)^k$，且 $(\pm\sqrt{-q_2})^{2k}=(-q_2)^k$，它们的重数分别为 $n-\mu$ 和 $m-\mu$，其中 $\mathrm{rank}(H)=\mu$。因此，

$$\frac{((\sqrt{-q_1})^{2k}+(-\sqrt{-q_1})^{2k})(n-\mu)+((\sqrt{-q_2})^{2k}+(-\sqrt{-q_2})^{2k})(m-\mu)}{4k}$$
$$=\frac{(-q_1)^k(n-\mu)+(-q_2)^k(m-\mu)}{2k};$$

6) 由于 ±1 是 A_e 的特征值，重数为 $|E|-(m+n)+1$，因此

$$\frac{(-1)^{2k}(|E|-(m+n))+1^{2k}(|E|-(m+n)+1}{4k}=\frac{|E|-(m+n)+1}{2k}.$$

此外，$|E|=n(q_1+1)=m(q_2+1)$。

7）对于特征值 $\alpha_0=(q_1+1)(q_2+1)-(q_1+q_2)=q_1q_2+1$，$\xi^2-\alpha_0\xi+q_1q_2=0$的根为 1 和 q_1q_2，重数均为 1。因此，

$$\frac{(\xi_{0,1}^k+\xi_{0,2}^k)}{2k}=\frac{1+q_1^kq_2^k}{2k}.$$

然而，等于 1 的特征值已经在 $|E|-(m+n)+1$ 中计算过了，因此我们需要从 $|E|-(m+n)+1$ 中减去 1，于是得到以下两个和：

$$\frac{|E|-(m+n)+\sum_{\substack{\alpha\\ \alpha\neq-(q_1+q_2)}}(\xi_{\alpha,1}^k+\xi_{\alpha,2}^k)}{2k}=\frac{|E|-(m+n)+1+(q_1q_2)^k+\sum_{\substack{\alpha\\ \alpha\neq-(q_1+q_2),q_1q_2+1}}(\xi_{\alpha,1}^k+\xi_{\alpha,2}^k)}{2k};$$

8) 对于 $\alpha \quad HH^{\mathsf{T}} - (q_1+q_2)I_m$ 的每个特征值，$\alpha \neq -(q_1+q_2)$，我们递归地将这些和 $S_{\alpha,k} \triangleq \xi_{\alpha,1}^k + \xi_{\alpha,2}^k$ 计算为 α 的幂的函数，并使用牛顿恒等式，具体如下。由于 $\xi_{\alpha,1}$,$\xi_{\alpha,2}$ 是 $\xi^2 - \alpha\xi + q_1q_2$, 的根，因此

$$\xi_{\alpha,1} + \xi_{\alpha,2} = \alpha, \quad \xi_{\alpha,1}\xi_{\alpha,2} = q_1q_2,$$

因此,

$$S_{\alpha,1} \triangleq \alpha, S_{\alpha,2} = S_{\alpha,1}^2 - 2q_1q_2 = \alpha^2 - 2q_1q_2, S_{\alpha,k} = \alpha S_{\alpha,k-1} - q_1q_2S_{\alpha,k-2}, k \geq 3. \quad (5)$$

我们得到

$$S_{\alpha,1} = \alpha, S_{\alpha,2} = \alpha^2 - 2q_1q_2, S_{\alpha,3} = \alpha^3 - 3q_1q_2\alpha, S_{\alpha,4} = \alpha^4 - 4q_1q_2\alpha^2 + 2q_1^2q_2^2$$
$$S_{\alpha,5} = \alpha^5 - 5q_1q_2\alpha^3 + 5q_1^2q_2^2\alpha, S_{\alpha,6} = \alpha^6 - 6q_1q_2\alpha^4 + 9q_1^2q_2^2\alpha^2 - 2q_1^3q_2^3$$
$$S_{\alpha,7} = \alpha^7 - 7q_1q_2\alpha^5 + 14q_1^2q_2^2\alpha^3 - 7q_1^3q_2^3\alpha, \quad \text{and, in general}$$
$$S_{\alpha,k} = \alpha_i^k - kq_1q_2\alpha_i^{k-2} + \frac{k(k-3)}{2}q_1^2q_2^2\alpha_i^{k-4} - (k^2-8k+14)q_1^3q_2^3\alpha_i^{k-6} + \cdots$$

$S_{\alpha、k}$、 $k \geq 8$ 的系数可类似地递归推导；9）因此，如果

$$E_k \triangleq \begin{cases} \sum_{\alpha \neq -(q_1+q_2)} \alpha^k = \sum_{\lambda \neq 0} \left(\lambda^2 - (q_1+q_2)\right)^k, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases},$$

then

$$\sum_{\alpha \neq -(q_1+q_2)} S_{\alpha,k} = E_k - kq_1q_2E_{k-2} + \frac{k(k-3)}{2}q_1^2q_2^2E_{k-4} - (k^2-8k+14)q_1^3q_2^3E_{k-6} + \cdots$$

C. 主要结果与示例

综合以上观察，我们得到以下公式，可递归计算2k-环的数量。

定理3。 设 $G = (V = U \cup W, E)$ 是一个连通双正则二部图，其中 U 中的每个节点的度为 $q_1 + 1$，而 W 中的每个节点的度为 $q_2 + 1$，其中 $q_2 \geq 2$、 $q_1 \geq 1$ 和$q_2 \geq q_1$。此外，假设 $|U| = n$ 和 $|W| = m$。

设 $\{\alpha\}$ 为 $HH^T-(q_1+q_2)I_m$ 的所有非零特征值的集合，且 $\mu \triangleq |\{\alpha \neq -(q_1+q_2)\}|$表示 H 的秩（其等于 HH^T的秩）。那么， N_{2k} 中长度为 $2k$的环的数量G 等于

$$N_{2k} = \frac{|E| - (m+n) + (-q_1)^k(n-\mu) + (-q_2)^k(m-\mu) + \sum\limits_{\alpha \neq -(q_1+q_2)} S_{\alpha,k}}{2k}$$

其中

$$S_{\alpha,1} = \alpha, \quad S_{\alpha,2} = S_{\alpha,1}^2 - 2q_1q_2 = \alpha^2 - 2q_1q_2, \quad S_{\alpha,k} = \alpha S_{\alpha,k-1} - q_1q_2S_{\alpha,k-2}, k \geq 3.$$

证明：证明见第四节 B 中列出的观察结果 1–8。 ■

注 1。对于具有 $n_c \times n_v$ 双正则校验矩阵 $P(x)$ 的准循环低密度奇偶校验码，模$x^N - 1$,

$$n = n_vN, m = n_cN, |E| = n_cN(q_2+1) = n_vN(q_1+1), \mu = n_cN - 2.$$

如果矩 阵仅由单项式构成且不含零点，则 $q_1 + 1 = n_c$， $q_2 + 1 = n_v$. □

例2. 令 $H(x)$ 为以下 $3 \times n$ 单项式矩阵

$$H(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ 1 & x^{i_1} & x^{i_2} & \dots & x^{i_{n-1}} \end{bmatrix},$$

模 $x^n - 1$, n 为奇数时，已知该图的围长为 6。[4] 由 [20], 可知，围长 6 是通过以下方式达到的

$$\{i_1, \dots i_{n-1}\} = \{1 - i_1, \dots, n-1-i_{n-1}\} = \{1, \dots, n-1\}. \tag{6}$$

[4]对于 n 奇数， $N = n$ 是使 $3 \times n$ 原图达到围长 6 所需的最小提升因子。

我们有 $q_1 = 2$, $q_2 = n-1$. 若 $f \triangleq 1 + x + \cdots + x^{n-1}$, 则 $f(\rho) = 0$ 对于 $\rho = e^{i2\pi j/n}$, $j \neq 0$, 因此 $f(\rho) = n$, 对于 $\rho = 1$, 并且

$$H(x)H(x)^T = \begin{bmatrix} n & f & f \\ f & n & f \\ f & f & n \end{bmatrix} \Rightarrow H(\rho)H^T(\rho) = \begin{cases} \begin{bmatrix} n & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \end{bmatrix}, & \rho = e^{i2\pi j/n}, j \neq 0, \\ \begin{bmatrix} n & n & n \\ n & n & n \\ n & n & n \end{bmatrix}, & \rho = 1 \end{cases}$$

因此，相应的标量 $3n \times 3n$ 矩阵 HH^{T} 具有非零特征值 n，其重数为 $3(n-1)$；以及 $3n$，其重数为 1，秩为 $3n-2$。因此，$HH^T - (1+n)I_{3n}$ 的非零特征值及其重数为

$$\alpha_0 = 2n-1, \mu_0 = 1, \alpha_1 = -1, \mu_1 = 3(n-1).$$

因此，对于 $k = 1$，2，3，4，5，

$$N_{2k} = \frac{2n^2 - 3n + 1 + (n^2 - 3n + 2)(-2)^k + 2(1-n)^k + 2^k(n-1)^k + 3(n-1)S_{\alpha_1,k}}{2k} = (n-1) \cdot \frac{2n - 1 + (n-2)(-2)^k - 2(1-n)^{k-1} + 2^k(n-1)^{k-1} + 3S_{\alpha_1,k}}{2k}$$

$S_{\alpha_1,1} = -1; S_{\alpha_1,2} = 5 - 4n$; $S_{\alpha_1,3} = 6n - 7$; $S_{\alpha_1,4} = 8n^2 - 24n + 17$; $S_{\alpha_1,5} = -20n^2 + 50n - 31$.

我们得到

$$N_2 = N_4 = 0, \quad N_6 = n^2(n-1), \quad N_8 = \frac{3n^2(n-1)(3n-5)}{4}, \quad N_{10} = 3n^2(n-1)(n-2)^2.$$

例如，对于 $n = 5$, $H(x) = H_{n=5}(x)$ 是一个模 $x^5 - 1$ 的 3×5 单项式矩阵，而对于 $n = 7$, $H(x) = H_{n=7}(x)$ 是一个模 $x^7 - 1$ 的 3×7 单项式矩阵,

$$H_{n=5}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & x^4 & x^3 & x^2 & x \end{bmatrix}, H_{n=7}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 & x^6 \\ 1 & x^6 & x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x \end{bmatrix}.$$

我们得到，对于 $n = 5$,

$$N_7 = N_4 = 0, \quad N_6 = 25 \cdot 4 = 100, \quad N_8 = 750, \quad N_{10} = 2700,$$

并且，对于 $n=7$,

$$N_2=N_4=0, N_6=49\cdot 6=294, N_8=\frac{3\cdot 49\cdot 6\cdot 16}{4}=3528, N_{10}=3\cdot 49\cdot 6\cdot 25=22050.$$

一般而言，对于给定的 n，无论我们如何选择指数 i_1、i_2、.....、i_n，只要满足 (6)，环 N_{2k} 的数量对于所有此类码都相同。这是因为所有此类矩阵都具有相同的特征值以及相同的值 q_1、q_2。□

注记 2。如果应用原定理 2，我们需要对每个 k 计算 $\xi_1^k+\xi_2^k$，其中 ξ_1、ξ_2 是一个具有整数系数的多项式的根，但它们本身不一定是整数。此外，用 n 表示的公式可能不那么简洁，因为我们需要使用二项式公式来得到 ξ_1、ξ_2，因此 n中的表达式将含有平方根。定理3中的递推公式使我们能够直接使用整数系数，从而得到关于 n的正幂的简洁公式。此外，还存在这样的情形：特征值不是整数，但特征多项式具有整数系数。同样，递推公式和牛顿恒等式能够使我们直接使用这些系数，甚至省去计算 HH^{T} 的特征值，以及在将这些特征值代入原公式时所必需的近似值（这可能会导致 N_{2k}的计算结果略有偏差）。下面的例子将说明这一点。□

例 1（续）。我们重新考察 3×5, $[155,64,20]$ 码， $N=31$。已求得HH^{T} 的正特征值为 $\lambda_1=8.6801$， $\lambda_2=4.8459$， $\lambda_3=1.4740$，每个重数均为 30，且 λ_i， $i=1$，2，3满足方程 $t^3-15t^2+62t-62=0$，而 $\lambda_0^2=15$ 的重数为 1。[5] 因此，

$$\sum_{i=1}^{3}\lambda_i=15, \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{3}\lambda_i\lambda_j=62, \prod_{i=1}^{3}\lambda_i=62,$$

由此可得

$$E_1\triangleq\sum_{i=1}^{3}\alpha_i=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i-3(q_1+q_2)=-3,$$

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{3}\alpha_i\alpha_j=\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{3}\lambda_i\lambda_j-2(q_1+q_2)\sum_{i=1}^{3}\lambda_i+3(q_1+q_2)^2=-10,$$

$$\prod_{i=1}^{3}\alpha_i=\prod_{i=1}^{3}(\lambda_i^2-(q_1+q_2))=\prod_{i=1}^{3}\lambda_i-(q_1+q_2)\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{3}\lambda_i\lambda_j+(q_1+q_2)^2\sum_{i=1}^{3}\lambda_i-(q_1+q_2)^3=14.$$

[5]为简化记号，我们将用 λ代替 λ^2 来表示 HH^{T}的特征值。

请注意，为了得到整数，我们按照上述方法计算它们，而不使用特征值的近似值。

因此， $H(\rho)H^{\mathsf{T}}(\rho) - (q_1+q_2)I_3$ 的特征多项式为 $\alpha^3+3\alpha^2-10\alpha-14$，其中 ρ 是 31 次单位根。利用这三个根的牛顿恒等式，我们得到

$$\sum_{i=1}^{3}\alpha_i=-3,\quad \sum_{i=1}^{3}\alpha_i^2=-3\sum_{i=1}^{3}\alpha_i-2\cdot(-10)=29,\quad \sum_{i=1}^{3}\alpha_i^3=-3\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^2+10\sum_{i=1}^{3}\alpha_i+3\cdot 14=-75,$$
$$\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^4=-3\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^3+10\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^2+14\sum_{i=1}^{3}\alpha_i=473,\quad \sum_{i=1}^{3}\alpha_i^5=-3\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^4+10\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^3+14\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^2=-1763,$$
$$\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^6=-3\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^5+10\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^4+14\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^3=8969,\quad \sum_{i=1}^{3}\alpha_i^7=-3\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^6+10\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^5+14\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^4=-37915.$$

3我们利用这三个 α_i 递归计算$S_{\alpha_i,\ k}$，尤其是求和式$\sum S_{\alpha_i,\ k}$。 $_{i=1}$然后，在 N_{2k}的公式中将其取重数 30，其中

$$N_{2k}=\frac{218+8^k+64(-2)^k+2(-4)^k+30\sum_{i=1}^{3}S_{\alpha_i,k}}{2k},$$
$$S_{\alpha,\ 1}=\alpha,\qquad S_{\alpha,\ 2}=S_{\alpha,\ 1}^2-2q_1q_2=\alpha^2-2q_1q_2,\qquad S_{\alpha,\ k}=\alpha S_{\alpha,\ k-1}-q_1q_2S_{\alpha,\ k-2},\quad k\geq 3,$$

$$\sum_{i=1}^{3}S_{\alpha_i,1}=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i=-3,\quad \sum_{i=1}^{3}S_{\alpha_i,2}=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^2-6q_1q_2=-19,$$
$$\sum_{i=1}^{3}S_{\alpha_i,3}=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^3-3q_1q_2\sum_{i=1}^{3}\alpha_i=-3,\quad \sum_{i=1}^{3}S_{\alpha_i,4}=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^4-4q_1q_2\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^2+6q_1^2q_2^2=-71$$
$$\sum_{i=1}^{3}S_{\alpha_i,5}=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^5-5q_1q_2\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^3+5q_1^2q_2^2\sum_{i=1}^{3}\alpha_i=277,$$
$$\sum_{i=1}^{3}S_{\alpha_i,6}=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^6-6q_1q_2\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^4+9q_1^2q_2^2\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^2-6q_1^3q_2^3=-103$$
$$\sum_{i=1}^{3}S_{\alpha_i,7}=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^7-7q_1q_2\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^5+14q_1^2q_2^2\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^3-7q_1^3q_2^3\sum_{i=1}^{3}\alpha_i=4365$$

因此，我们如预期得到（与其他采用不同方法和算法的论文结果一致，例如， [14]）

$$N_4=0,N_6=0,N_8=465,N_{10}=3720,N_{12}=22630,N_{14}=156240.$$

注3。 对于 N 奇数， $H(\rho^j)H^{\mathsf{T}}(\rho^j)$ 的特征值与 $H(\rho^{N-j})H^{\mathsf{T}}(\rho^{N-j})$ 的特征值相同，因此最多可以有 $1+\binom{N-1}{2}$ 组不同的 n_c 特征值；而对于 N 偶数，我们还有 $\binom{N-2}{2}$ 对相等的 n_c 特征值组，而 $\rho=\pm 1$ 还会给出两组额外的不同 n_c

特征值。对于具有大量结构的码，例如例2中的码或例1中的 Tanner 码，由于指数所满足的约束，特征值只有少量不同的取值。□

V. 公式的不同表达形式 N_{2k}

本节探讨长度为 $2k$、$k < g$的环数的不同表达方式，联系实现给定围长的充要条件，并给出示例。

A. 用 α的幂表示 N_{2k} 的公式

Bel现在我们求解递推关系，得到 N_{2k} 作为 E_k的函数，wit h

$$E_k \triangleq \begin{cases} \sum\limits_{\alpha \neq -(q_1+q_2)} \alpha^k = \sum\limits_{\lambda \neq 0} \left(\lambda - (q_1+q_2)\right)^k, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases},$$

其中， α 遍历 $HH^{\mathsf{T}} - (q_1+q_2)I_{n_cN}$ 的所有特征值，而 λ 遍历HH^{T}.[6]的所有特征值

Co推论 2. 根据特征值， N_{2k}（如定理*3*中所定义）的公式为

$$N_{2k} = \frac{|E| - (m+n) + (-q_1)^k(n-\mu) + (-q_2)^k(m-\mu) + E_k - kq_1q_2E_{k-2} + \frac{k(k-3)}{2}q_1^2q_2^2E_{k-4} - (k^2-8k+14)q_1^3q_2^3E_{k-6} + \cdots}{2k} =$$

$$\frac{|E|\left(1 + \frac{(-q_1)^k-1}{q_1+1} + \frac{(-q_2)^k-1}{q_2+1}\right) - \mu\left((-q_1)^k + (-q_2)^k\right) + E_k - kq_1q_2E_{k-2} + \frac{k(k-3)}{2}q_1^2q_2^2E_{k-4} - (k^2-8k+14)q_1^3q_2^3E_{k-6} + \cdots}{2k}$$

其余系数通过定理中的递推关系计算得出 *3.*

证明： 我们应用递推关系求出 α_i^k 的系数，然后将它们对所有$\alpha \neq -(q_1+q_2)$求和。

■

B. 用 λ的幂表示 N_{2k} 的公式

如果我们想将 N_{2k} 表示为 HH^{T}的特征值 λ 的函数，就将定理3中的 $\alpha = \lambda - q_1 - q_2$代入。下面，我们推导 N_{2k}、 $k = 2$、3、4、5、6、7的公式。采用与这些计算类似的方法，我们也可以用 λ的幂表示 N_{2k}、 $k \geq 8$。这些计算留给感兴趣的读者。

[6]为简化记号，我们再次用 λ代替 λ^2 表示 HH^{T}的特征值。

记号

$$\sum \lambda \triangleq \sum_{\lambda} \lambda = \sum_{\lambda \neq 0} \lambda$$

表示 λ 遍历 HH^{T} 的所有特征值，等价地，遍历所有非零特征值。由于零特征值不会对求和产生任何贡献，因此我们不妨对所有特征值求和。

推论3. 对于 $2 \le k \le 7$、 N_{2k}，如定理*3*中所定义，有

$$N_{2k} = \frac{|E|\left(1+\frac{(-q_1)^k-1}{q_1+1}+\frac{(-q_2)^k-1}{q_2+1}-k\frac{(-q_1)^k-(-q_2)^k}{q_1-q_2}\right)+\sum\lambda^k-k(q_1+q_2)\sum\lambda^{k-1}+\sum_{i=2}^{k}(-1)^i a_{k,k-i}\sum\lambda^{k-i}}{2k},$$

其中 $a_{k,\ k-i}=0$，对所有 $i>k$均成立；否则，

$$\begin{aligned} a_{k,k-i} = {} & \binom{k}{i}(q_1+q_2)^i - k\binom{k-2}{i-2}q_1q_2(q_1+q_2)^{i-2} + \frac{k(k-3)}{2}\binom{k-4}{i-4}q_1^2q_2^2(q_1+q_2)^{i-4} \\ & - (k^2-8k+14)\binom{k-6}{i-6}q_1^3q_2^3(q_1+q_2)^{i-6}, \end{aligned}$$

对所有 $2 \le k \le 7$、 $2 \le i \le k$均成立，并且任何含有负数项的二项式系数均定义为0。

证明：展开 将推论2中的公式分组，并合并 λ^{k-i}、 2 ≤的系数

$i \le k$，我们得到

$$
\begin{aligned}
a_{k,k-2} &= \binom{k}{2}(q_1+q_2)^2 - k\binom{k-2}{0}q_1q_2,\\
a_{k,k-3} &= \binom{k}{3}(q_1+q_2)^3 - k\binom{k-2}{1}q_1q_2(q_1+q_2),\\
a_{k,k-4} &= \binom{k}{4}(q_1+q_2)^4 - k\binom{k-2}{2}q_1q_2(q_1+q_2)^2 + \frac{k(k-3)}{2}\binom{k-4}{0}q_1^2q_2^2,\\
a_{k,k-5} &= \binom{k}{5}(q_1+q_2)^5 - k\binom{k-2}{3}q_1q_2(q_1+q_2)^3 + \frac{k(k-3)}{2}\binom{k-4}{1}q_1^2q_2^2(q_1+q_2),\\
a_{k,k-6} &= \binom{k}{6}(q_1+q_2)^6 - k\binom{k-2}{4}q_1q_2(q_1+q_2)^4 + \frac{k(k-3)}{2}\binom{k-4}{2}q_1^2q_2^2(q_1+q_2)^2\\
&\quad - (k^2-8k+14)\binom{k-6}{0}q_1^3q_2^3,\\
a_{k,k-7} &= \binom{k}{7}(q_1+q_2)^7 - k\binom{k-2}{5}q_1q_2(q_1+q_2)^5 + \frac{k(k-3)}{2}\binom{k-4}{3}q_1^2q_2^2(q_1+q_2)^3\\
&\quad - (k^2-8k+14)\binom{k-6}{1}q_1^3q_2^3(q_1+q_2),
\end{aligned}
$$

可用上述公式简洁地表示。 ■

推论 4. 我们得到以下公式，用于计算任意双正则二分图中的环数，公式以 N_{2k}、 $\sum \lambda^k$ 和 N_{2j}、 $1 < j < k$ 表示：

1) 当 $g \ge 4$ 时，

$$
\begin{aligned}
N_4 =& \frac{\sum \lambda^2 - |E| \cdot A_4}{4},\ \textit{where}\ A_4 \triangleq (q_1+q_2+1),\\
N_6 =& -2(q_1+q_2)N_4 + \frac{\sum \lambda^3 - |E| \cdot A_6}{6},\ \textit{where}\ A_6 \triangleq \left((q_1+q_2+1)^2 + q_1q_2\right);
\end{aligned}
$$

2) 当 $g \ge 6$ 时，

$$
\begin{aligned}
N_8 =& -3(q_1+q_2)N_6 + \frac{\sum \lambda^4 - |E| \cdot A_8}{8},\ \textit{where}\ A_8 \triangleq \left((q_1+q_2+1)^3 + q_1q_2(3q_1+3q_2+2)\right),\\
N_{10} =& -4(q_1+q_2)N_8 - 3\left(2(q_1+q_2)^2 + q_1q_2\right)N_6 + \frac{\sum \lambda^5 - |E| \cdot A_{10}}{10},\ \textit{where}\\
& A_{10} \triangleq -1 + \frac{q_1^5+1}{q_1+1} + \frac{q_2^5+1}{q_2+1} - 5\frac{q_1^5-q_2^5}{q_1-q_2} + 5(q_1+q_2)A_8 - a_{5,3}A_6 + a_{5,2}A_4,\\
& a_{5,3} = 10(q_1+q_2)^2 - 5q_1q_2,\ \textit{and}\ a_{5,2} = 10(q_1+q_2)^3 - 15q_1q_2(q_1+q_2);
\end{aligned}
$$

3) 对于 $g \ge 8$，

$$
N_{12} = -5(q_1+q_2)N_{10} - 2\left(5(q_1+q_2)^2 + 2q_1q_2\right)N_8 + \frac{\sum \lambda^6 - |E|A_{12}}{12},
$$

其中

$$A_{12} = -1 - \frac{q_1^6 - 1}{q_1 + 1} - \frac{q_2^6 - 1}{q_2 + 1} + 6\frac{q_1^6 - q_2^6}{q_1 - q_2} + 6(q_1 + q_2)A_{10} - a_{6,4}A_8 + a_{6,3}A_6 - a_{6,2}A_4,$$

$$a_{6,4} = 15(q_1 + q_2)^2 - 6q_1q_2,\ a_{6,3} = 20(q_1 + q_2)^3 - 24q_1q_2(q_1 + q_2),$$

$$a_{6,\ 2} = 15\ (q_1 + q_2)\ ^4 - 36q_1q_2\ (q_1 + q_2)\ ^2 + 9q_1^2q_2^2,$$

$$N_{14} = -6(q_1 + q_2)N_{12} - 5\left(3(q_1 + q_2)^2 + q_1q_2\right)N_{10} - 4(q_1 + q_2)\left(5(q_1 + q_2)^2 + 6q_1q_2\right)N_8 + \frac{\sum \lambda^7 - |E|A_{14}}{14},$$

$$A_{14} = -1 + \frac{q_1^7 + 1}{q_1 + 1} + \frac{q_2^7 + 1}{q_2 + 1} - 7\frac{q_1^7 - q_2^7}{q_1 - q_2} + 7(q_1 + q_2)A_{12} - a_{7,5}A_{10} + a_{7,4}A_8 - a_{7,3}A_6 + a_{7,2}A_4,$$

$$a_{7,5} = 21(q_1 + q_2)^2 - 7q_1q_2, \quad a_{7,4} = 35(q_1 + q_2)^3 - 35q_1q_2(q_1 + q_2),$$

$$a_{7,3} = 35(q_1 + q_2)^4 - 70q_1q_2(q_1 + q_2)^2 + 14q_1^2q_2^2,$$

$$a_{7,2} = 21(q_1 + q_2)^5 - 70q_1q_2(q_1 + q_2)^3 + 42q_1^2q_2^2(q_1 + q_2).$$

推论5。 我们根据 HH^T 的特征值，得到实现某一围长的充要条件如下

$$g \geq 2k \text{ iff } \sum \lambda^j = |E|A_{2j}, \text{ for all } 2 \leq j \leq k,$$

其中， A_{2j} 定义于推论 *4* 中。

证明：推论 *4* 和推论*5* 的证明见附录 *A*。 ■

例2（续）。 对于围长为 6 且提升因子为 $N = n$、 n 为奇数的 (3， n)-基于原型图的 Tanner 图，我们得到如下结果，

$$q_1 = 2, q_2 = n - 1, q_1 + q_2 = n + 1, q_1 + q_2 + 1 = n + 2, q_1q_2 = 2(n - 1), |E| = 3n^2$$

我们回顾一下， HH^T 的非零特征值为 n，重数为 3（$n - 1$）；还有 $3n$，重数为 1。因此，

$$
\begin{aligned}
N_4 &= \frac{3(n-1)n^2+9n^2-3n^2(n+2)}{4}=0,\\
N_6 &= \frac{3(n-1)n^3+27n^3-3n^2\left((n+2)^2+2(n-1)\right)}{6}=n^2(n-1),\\
N_8 &= -3(n+1)n^2(n-1)+\frac{3(n-1)n^4+81n^4-3n^2\left((n+2)^3+2(n-1)(3n+5)\right)}{8}\\
&= \frac{3n^2(n-1)(3n-5)}{4},\\
N_{10} &= -(n+1)3n^2(n-1)(3n-5)-3\left(2(n+1)^2+2(n-1)\right)n^2(n-1)\\
&\quad +\frac{3(n-1)n^5+(3n)^5-3n^2\cdot A_{10}}{10}.
\end{aligned}
$$

我们发现，用这种方法计算 N_{10} 很繁琐，但用我们前面采用的递归方法计算则很容易。这个例子展示了我们的递推公式相对简单，甚至可以手工计算。

例 3。 对于任意 (3，5)-双正则图，我们得到

$$q_1=2, q_2=4, q_1+q_2=6, q_1+q_2=7, q_1q_2=8.$$

Then

$$
\begin{aligned}
&\text{for } g\geq 4, N_4=\frac{\sum\lambda^2-7|E|}{4},\quad N_6=-12N_4+\frac{\sum\lambda^3-57|E|}{6},\ A_4=7,\ A_6=57;\\
&\text{for } g\geq 6, N_8=-18N_6+\frac{\sum\lambda^4-503|E|}{8}, A_8=503;\\
&\text{for } g\geq 6, N_{10}=-24N_8-240N_6+\frac{\sum\lambda^5-4665|E|}{10},\ A_{10}=4665;\\
&\text{for } g\geq 8, N_{12}=-30N_{10}-392N_8+\frac{\sum\lambda^6-44759|E|}{12},\ A_{12}=44759;\\
&\text{for } g\geq 8, N_{14}=-36N_{12}-580N_{10}-5472N_8\frac{\sum\lambda^7-440217|E|}{14},\ A_{14}=440217.
\end{aligned}
$$

□

例 1（续 .). 对于 (3,5) Tanner 码，除最大特征值外的三个互异特征值之和 t

可利用牛顿恒等式求得：

$$\sum_{i=1}^{3}\lambda_i = 15, \sum_{i=1}^{3}\lambda_i^2 = 101, \sum_{i=1}^{3}\lambda_i^3 = 771, \sum_{i=1}^{3}\lambda_i^4 = 15\cdot 771 - 62\cdot 101 + 62\cdot 15 = 6233,$$

$$\sum_{i=1}^{3}\lambda_i^5 = 15\cdot 6233 - 62\cdot 771 + 62\cdot 101 = 51955,$$

$$\sum_{i=1}^{3}\lambda_i^6 = 15\cdot 51955 - 62\cdot 6233 + 62\cdot 771 = 440681,$$

$$\sum_{i=1}^{3}\lambda_i^7 = 15\cdot 440681 - 62\cdot 51955 + 62\cdot 6233 = 3775451$$

^{33} ^{3} ^{3}并且，一般而言，对于 $k \geq 4$，$\sum \lambda_i^k = 15\sum \lambda_i^{k-1} - 62\sum \lambda_i^{k-2} + 62\sum \lambda_i^{k-3}$. 那么 $\sum \lambda^k = 15^k +_{i=1}$ $_{i=1}$ $_{i=1}$ $_{i=1}$ ^{3} ^{3}(N − 1) $\sum \lambda_i^k = 15^k + 30\sum \lambda_i^k$，因为在此示例中有 $N = 31$。此外 $|E| = N(q_1+1)($ $q_2+1)$ $=_{i=1}$ $_{i=1}$31 · 15。由于 $g = 8$，我们得到

$$N_4 = \frac{101\cdot 30 + 15^2 - 7\cdot 31\cdot 15}{4} = 0, \quad N_6 = \frac{771\cdot 30 + 15^3 - 57\cdot 31\cdot 15}{6} = 0,$$

$$N_8 = \frac{6233\cdot 30 + 15^4 - 503\cdot 15\cdot 31}{8} = 465,$$

$$N_{10} = -24N_8 - 240N_6 + \frac{51955\cdot 30 + 15^5 - 4665\cdot 15\cdot 31}{10} = 3720,$$

$$N_{12} = -30\cdot 3720 - 392\cdot 465 + \frac{440681\cdot 30 + 15^6 - 44759\cdot 15\cdot 31}{12} = 22630,$$

$$N_{14} = -36\cdot 22630 - 580\cdot 3720 - 5472\cdot 465 + \frac{3775451\cdot 30 + 15^7 - 440217\cdot 15\cdot 31}{14} = 156240.$$

VI. 结论

本文探讨了 QC-LDPC 码图中的环与相应邻接矩阵特征值之间的新联系。关于特征值及其重数的若干观察使我们得以写出新的公式，用于计算双正则二部图中的环数，具体包括：一个计算简单的递推公式、一个关于 $HH^{\mathsf{T}} - (q_1+q_2)I$ 的特征值幂的函数，以及一个关于 HH^{T}的特征值幂的公式。

附录 A

推论 4 和 5 的证明

证明：首先，

$$\begin{aligned} N_2 &= \frac{|E| - (m+n) - q_1(n-\mu) - q_2(m-\mu) + E_1}{2} \\ &= \frac{|E| - m(1+q_2) - n(1+q_1) + \mu(q_1+q_2) + \sum\lambda - \mu(q_1+q_2)}{2} = 0, \end{aligned}$$

正如预期，因为 $\sum\lambda = Tr(HH^{\mathsf{T}}) = |E| = n(q_1+1) = m(q_2+1)$。此外

$$N_4 = \frac{|E|\left(1 + \frac{q_1^2-1}{q_1+1} + \frac{q_2^2-1}{q_2+1} - 2\frac{q_1^2-q_2^2}{q_1-q_2}\right) + \sum\lambda^2}{4} = \frac{\sum\lambda^2 - |E|(q_1+q_2+1)}{4} = \frac{\sum\lambda^2 - |E|A_4}{4},$$

其中 $A_4 \triangleq (q_1+q_2+1)$。我们得到

$$\sum\lambda^2 = Tr(HH^{\mathsf{T}})^2 = 4N_4 + |E|(q_1+q_2+1) = 4N_4 + |E|A_4,$$

因此，

$$g \geq 6 \text{ iff } \sum\lambda^2 = Tr(HH^{\mathsf{T}})^2 = |E|A_4 = |E|(q_1+q_2+1).$$

继续，

$$\begin{aligned} N_6 =& \frac{|E|\left(1 - \frac{q_1^3+1}{q_1+1} - \frac{q_2^3+1}{q_2+1} + 3\frac{q_1^3-q_2^3}{q_1-q_2}\right) + \sum\lambda^3 - 3(q_1+q_2)\sum\lambda^2}{6} \\ =& -2(q_1+q_2)N_4 + \frac{\sum\lambda^3 - |E|\left((q_1+q_2+1)^2 + q_1q_2\right)}{6} = -2(q_1+q_2)N_4 + \frac{\sum\lambda^3 - |E|A_6}{6} \end{aligned}$$

其中 $A_6 \triangleq \left((q_1+q_2+1)^2 + q_1q_2\right)$. 我们得到

$$\sum\lambda^3 = 6N_6 + 12(q_1+q_2)N_4 + |E|\left((q_1+q_2+1)^2 + q_1q_2\right) = 6N_6 + 12(q_1+q_2)N_4 + |E|A_6.$$

因此，$g \geq 8$ 当且仅当

$$\begin{cases} \sum\lambda^2 = Tr(HH^{\mathsf{T}})^2 = |E|A_4 = |E|(q_1+q_2+1), \\ \sum\lambda^3 = Tr(HH^{\mathsf{T}})^3 = |E|A_6 = |E|\left((q_1+q_2+1)^2 + q_1q_2\right). \end{cases}$$

接下来，

$$N_8 = \frac{|E|\left(1 + \frac{q_1^4-1}{q_1+1} + \frac{q_2^4-1}{q_2+1} - 4\frac{q_1^4-q_2^4}{q_1-q_2}\right) + \sum\lambda^4 - 4(q_1+q_2)\sum\lambda^3 + a_{4,2}\sum\lambda^2}{8},$$

其中 $a_{4,\ 2} = \left(\binom{4}{2}(q_1+q_2)^2 - 4q_1q_2\right)$. 由于 $\sum\lambda^2 = |E|A_4 = |E|(q_1+q_2+1)$，我们可以将其改写为

$$N_8 = \frac{|E|\left(a_{4,2}(q_1+q_2+1) + 1 + \frac{q_1^4-1}{q_1+1} + \frac{q_2^4-1}{q_2+1} - 4\frac{q_1^4-q_2^4}{q_1-q_2}\right) + \sum\lambda^4 - 4(q_1+q_2)\sum\lambda^3}{8}$$

并且，由于 $\sum\lambda^3 = 6N_6 + |E|A_6$,

$$N_8 = -3(q_1+q_2)N_6 + \frac{\sum\lambda^4 - |E|A_8}{8} \Rightarrow \sum\lambda^4 = 8N_8 + 24(q_1+q_2)N_6 + |E|A_8,$$

其中

$$A_8 \triangleq (q_1+q_2+1)^3 + q_1q_2(3q_1+3q_2+2).$$

那么， $g \geq 10$ 当且仅当

$$\begin{cases} \sum\lambda^2 = Tr(HH^{\mathsf{T}})^2 = |E|A_4 = |E|(q_1+q_2+1), \\ \sum\lambda^3 = Tr(HH^{\mathsf{T}})^3 = |E|A_6 = |E|\left((q_1+q_2+1)^2 + q_1q_2\right), \\ \sum\lambda^4 = Tr(HH^{\mathsf{T}})^4 = |E|A_8 = |E|\left((q_1+q_2+1)^3 + q_1q_2(3q_1+3q_2+2)\right). \end{cases}$$

接下来,

$$N_{10} = \frac{|E|\left(1 - \frac{q_1^5+1}{q_1+1} - \frac{q_2^5+1}{q_2+1} + 5\frac{q_1^5-q_2^5}{q_1-q_2}\right) + \sum\lambda^5 - 5(q_1+q_2)\sum\lambda^4 + a_{5,3}\sum\lambda^3 - a_{5,2}\sum\lambda^2}{10},$$

with

$$a_{5,3} = \binom{5}{2}(q_1+q_2)^2 - 5q_1q_2, \quad a_{5,2} = \binom{5}{3}(q_1+q_2)^3 - 15q_1q_2(q_1+q_2).$$

由于 $N_4 = 0$，根据假设，且

$$\sum\lambda^2 = |E|A_4, \quad \sum\lambda^3 = 6N_6 + |E|A_6, \text{ and } \sum\lambda^4 = 8N_8 + 24(q_1+q_2)N_6 + |E|A_8,$$

我们得到

$$\begin{aligned} N_{10} =& -4(q_1+q_2)N_8 - 3\left(2(q_1+q_2)^2 + q_1q_2\right)N_6 + \frac{\sum\lambda^5 - |E|\cdot A_{10}}{10}, \\ \sum\lambda^5 =& 10N_{10} + 40(q_1+q_2)N_8 + 30\left(2(q_1+q_2)^2 + q_1q_2\right)N_6 + |E|\cdot A_{10}, \end{aligned}$$

其中 $A_{10} \triangleq -1 + \frac{q_1^5+1}{q_1+1} + \frac{q_2^5+1}{q_2+1} - 5\frac{q_1^5-q_2^5}{q_1-q_2} + 5(q_1+q_2)A_8 - a_{5,3}A_6 + a_{5,2}A_4$. 因此， $g \geq 12$ 当且仅当

$$\begin{cases} \sum\lambda^2 = Tr(HH^{\mathsf{T}})^2 = |E|A_4 = |E|(q_1+q_2+1), \\ \sum\lambda^3 = Tr(HH^{\mathsf{T}})^3 = |E|A_6 = |E|\left((q_1+q_2+1)^2 + q_1q_2\right), \\ \sum\lambda^4 = Tr(HH^{\mathsf{T}})^4 = |E|A_8 = |E|\left((q_1+q_2+1)^3 + q_1q_2(3q_1+3q_2+2)\right), \\ \sum\lambda^5 = Tr(HH^{\mathsf{T}})^5 = |E|A_{10}. \end{cases}$$

接下来,

$$N_{12} = \frac{|E|\left(1 + \frac{q_1^6-1}{q_1+1} + \frac{q_2^6-1}{q_2+1} - 6\frac{q_1^6-q_2^6}{q_1-q_2}\right) + \sum\lambda^6 - 6(q_1+q_2)\sum\lambda^5 + a_{6,4}\sum\lambda^4 - a_{6,3}\lambda^3 + a_{6,2}\sum\lambda^2}{12},$$

with

$$a_{6,4}=\binom{6}{2}(q_1+q_2)^2-6q_1q_2,\quad a_{6,3}=\binom{6}{3}(q_1+q_2)^3-\binom{6}{1}\binom{4}{1}q_1q_2(q_1+q_2),$$
$$a_{6,2}=\binom{6}{2}(q_1+q_2)^4-\binom{6}{1}\binom{4}{2}q_1q_2(q_1+q_2)^2+9q_1^2q_2^2.$$

等价地,

$$N_{12}=-5(q_1+q_2)N_{10}-2\left(5(q_1+q_2)^2+2q_1q_2\right)N_8+\frac{\sum\lambda^6-|E|A_{12}}{12},$$

其中

$$A_{12}=-1-\frac{q_1^6-1}{q_1+1}-\frac{q_2^6-1}{q_2+1}+6\frac{q_1^6-q_2^6}{q_1-q_2}+6(q_1+q_2)A_{10}-a_{6,4}A_8+a_{6,3}A_6-a_{6,2}A_4.$$

我们得到

$$\sum\lambda^6=12N_{12}+60(q_1+q_2)N_{10}+24\left(5(q_1+q_2)^2+2q_1q_2\right)N_8+|E|A_{12}.$$

最后,

$$\begin{aligned}N_{14}&=\frac{|E|\left(1-\frac{q_1^7+1}{q_1+1}-\frac{q_2^7+1}{q_2+1}+7\frac{q_1^7-q_2^7}{q_1-q_2}\right)+\sum\lambda^7-7(q_1+q_2)\sum\lambda^6+\sum_{i=2}^{5}(-1)^ia_{7,7-i}\sum\lambda^{7-i}}{14}\\&=-6(q_1+q_2)N_{12}-5\left(3(q_1+q_2)^2+q_1q_2\right)N_{10}-4(q_1+q_2)[5(q_1+q_2)^2+6q_1q_2]N_8\\&\quad+\frac{\sum\lambda^7-|E|A_{14}}{14},\end{aligned}$$

其中

$$A_{14}=-1+\frac{q_1^7+1}{q_1+1}+\frac{q_2^7+1}{q_2+1}-7\frac{q_1^7-q_2^7}{q_1-q_2}+7(q_1+q_2)A_{12}-a_{7,5}A_{10}+a_{7,4}A_8-a_{7,3}A_6+a_{7,2}A_4,$$

and

$$a_{7,5}=\binom{7}{2}(q_1+q_2)^2-7q_1q_2,\quad a_{7,4}=\binom{7}{3}(q_1+q_2)^3-7\binom{5}{1}q_1q_2(q_1+q_2),$$
$$a_{7,3}=\binom{7}{4}(q_1+q_2)^4-7\binom{5}{2}q_1q_2(q_1+q_2)^2+14q_1^2q_2^2,$$
$$a_{7,2}=\binom{7}{5}(q_1+q_2)^5-7\binom{5}{3}q_1q_2(q_1+q_2)^3+14q_1^2q_2^2\binom{3}{1}(q_1+q_2).$$

我们得到

$$\begin{aligned}\sum\lambda^7&=14N_{14}+84(q_1+q_2)N_{12}+70\left(3(q_1+q_2)^2-q_1q_2\right)N_{10}\\&\quad-56(q_1+q_2)[5(q_1+q_2)^2-6q_1q_2]N_8+|E|A_{14}.\end{aligned}$$

■

参考文献

[1] Y. Mao 和 A. H. Banihashemi，“短分组长度下优质低密度奇偶校验码的启发式搜索”，载于*IEEE*国际通信会议论文集，2001年，第41–44页。[2] X.-Y. Hu、E. Eleftheriou 和 D. M. Arnold，“规则与不规则渐进式边增长Tanner图”，*IEEE*《信息论汇刊》，第51卷，第1期，第386–398页，2005年1月。[3] H. Xiao 和 A. H. Banihashemi，“利用环枚举估计二元对称信道上低密度奇偶校验码的误码率”，*IEEE*通信汇刊，第57卷，第6期，第1550–1555页，2009年。[4] R. Asvadi、A. H. Banihashemi 和 M. Ahmadian-Attari，“利用循环提升降低低密度奇偶校验码的误码平层”，*IEEE*《信息论汇刊》，第57卷，第4期，第2213–2224页，2011年4月。[5] J. Wang、L. Dolecek 和 R. Wesel，“可分离循环矩阵型低密度奇偶校验码中吸收集的环一致性矩阵方法”，*IEEE*《信息论汇刊》，2013年。[6] M. Battaglioni、M. Baldi 和 G. Cancellieri，“空间耦合低密度奇偶校验卷积码中低重量码字与环之间的联系”，*IEEE*通信汇刊，第66卷，第8期，第3268–3280页，2018年。[7] H. M. Stark 和 A. A. Terras，“有限图及其覆盖的ζ函数”，数学进展，第121卷，第1期，第124–165页，1996年。[8] T. R. Halford 和 K. M. Chugg，“二部图中短环计数算法”，*IEEE*《信息论汇刊》，第52卷，第1期，第287–292页，2005年。[9] G. J. Tee，“分块循环矩阵和交替循环矩阵的特征向量”，《新西兰数学杂志》，第36卷，第8期，第195–211页，2007年。[10] M. Karimi 和A. H. Banihashemi，“准循环原模图低密度奇偶校验码的短环计数”，*IEEE*通信快报，第16卷，第3期，第400–403页，2012年3月。[11] ——，“关于准循环原模图低密度奇偶校验码的围长”，*IEEE*《信息论汇刊》，第59卷，第4542–4552页，2013年。[12] I. F. Blake 和 S. Lin，“双正则二部图中的短环枚举”，*IEEE*《信息论汇刊》，第64卷，第10期，第6526–6535页，2017年。[13] A. Dehghan 和 A. H. Banihashemi，“随机低密度奇偶校验码、随机原模图低密度奇偶校验码及随机准循环低密度奇偶校验码系综的Tanner图环分布”，*IEEE*《信息论汇刊》，第64卷，第6期，第4438–4451页，2018年。[14] ——，“利用二部图的度分布和谱计算环的重数”，*IEEE*《信息论汇刊》，第65卷，第6期，第3778–3789页，2019年。[15] ——，“利用有向边矩阵的谱计算二部图中的短环数量”，*IEEE*《信息论汇刊》，第66卷，第10期，第6037–6047页，2020年。[16] ——，“二部图中的短环计数：快速技术/算法及困难性结果”，*IEEE*通信汇刊，第68卷，第3期，第1378–1390页，2020年。[17] A. Gómez-Fonseca、R. Smarandache 和 D. G. M. Mitchell，“准循环低密度奇偶校验码Tanner图中环计数的高效策略”，*IEEE*《信息论选题领域期刊》，第4卷，第499–513页，2023年。[18] R. Smarandache 和 M. Flanagan，“准循环码的图谱分析”，载于*IEEE*全球电信会议论文集，檀香山，夏威夷州，2009年11月。[19] R. M. Tanner、D. Sridhara、A. Sridharan、T. E. Fuja 和 D. J. Costello, Jr.，“基于循环矩阵的低密度奇偶校验分组码与卷积码”，*IEEE*《信息论汇刊》，第50卷，第12期，第2966–2984页，2004年12月。

[20] R. Smarandache 和 D. G. M. Mitchell，“构造具有所需围长的准循环低密度奇偶校验 Tanner 图的统一框架”，*IEEE*《信息论汇刊》，第 68 卷，第 9 期，第 5802–5822 页，2022 年。