有向图查询的韧性复杂度

Manuel Bodirsky 代数研究所，
德累斯顿工业大学，德国

Žaneta Semanišinová
离散数学与几何研究所，维也纳工业大学，奥地利

摘要

我们证明了合取有向图查询的并（即在签名 $\{R\}$ 上关于有向图的存在正句）的韧性问题存在复杂性二分。具体而言，对于每个合取有向图查询的并 μ，以下问题要么属于 P 类，要么是 NP 完全：给定一个有向多重图 G 和一个自然数 u，能否从 G 中删除 u 条边，使得 $G \models \neg\mu$? 事实上，我们在有向图这一特殊情形下，验证了 [6] 提出的关于所有韧性问题的一个更一般的二分猜想，并证明对于此类查询的并 μ，存在一个可数无限的（“对偶”）赋值结构 Δ_μ：它要么原始正构造 1-in-3-3-SAT，因此根据一般原理，μ 的韧性问题是 NP 完全；要么具有伪循环典范分数多态，因此 μ 的韧性问题属于 P 类。

2012年ACM主题分类 计算理论 →问题、归约与完全性；计算理论 → 复杂性理论与逻辑；计算理论 → 数据库查询处理与优化（理论）

关键词与短语 赋值约束、合取查询的并、韧性、计算复杂性、pp-构造

资助 *Manuel Bodirsky*：作者获得了欧洲研究委员会的资助（POCOCOP项目，ERC协同资助项目101071674）以及德国研究联合会（DFG）的资助（FinHom项目，资助编号467967530）。然而，文中表达的观点和意见仅代表作者本人，不一定反映欧盟或欧洲研究委员会执行局的观点。欧盟和资助机构均不对这些观点和意见承担责任。

Žaneta Semanišinová：作者获得了欧洲研究委员会的资助（POCOCOP项目，ERC协同资助项目101071674）。然而，文中表达的观点和意见仅代表作者本人，并不一定反映欧盟或欧洲研究委员会执行局的观点。欧盟和资助机构均不对此承担责任。本研究全部或部分由奥地利科学基金（FWF）资助，项目编号为10.55776/ESP6949724。

arXiv:2601.05346v1 [math.LO] 8 Jan 2026

1 引言

对于固定的合取查询，或更一般地，对于合取查询的并 μ，韧性问题 是指：给定数据库 $\mathfrak{A}$ 和 $u \in \mathbb{N}$，判断是否可以从 $\mathfrak{A}$ 中至多删除 u 个元组，使得 $\mathfrak{A}$ 不满足 μ。韧性问题是各种形式的反向数据管理中算法挑战的核心；在这些场景中，需要对输入数据采取操作，以便在输出数据中实现预期结果 [18]。该问题的计算复杂性取决于查询 μ。韧性问题总属于 NP 类，而且通常是 NP 完全的；但对于某些查询 μ，该问题可以在多项式时间内解决；部分分类结果可参见 [11, 12, 17, 6] 。

该问题的计算复杂性也取决于我们是在集合语义下考察数据库 $\mathfrak{A}$ （即，将 $\mathfrak{A}$ 视为关系结构），还是在包语义下考察（即， $\mathfrak{A}$ 是一个结构，其中每个元组都带有某种重数）；文献中对这两种情形均有研究（尤其参见 [6, 17] 中关于包语义的结果）。包语义的重要性源于实际应用：包数据库比集合语义更忠实地表示 SQL 数据库。对于某些合取查询 μ，包语义和集合语义下的韧性问题具有不同的复杂性 [17]。

最近，研究者发现了包语义下的韧性问题与值约束满足之间的联系 [6]。这种联系基于以下事实：对于每个连通合取查询的并 μ，包语义下的韧性问题等价于某个模板所对应的值约束满足问题（VCSP），该模板取决于 μ；因此，可以运用为刻画 VCSP 复杂性而发展出的代数工具。为此，本文将专门关注包语义下的韧性问题，并从现在起始终默认韧性问题采用这种语义。

有人猜想，韧性问题表现出复杂性二分，即所有问题要么是 NP 完全的，要么属于 P [17]。这一猜想已在一些特殊情形下得到验证，例如，当 μ 是无自连接的合取查询 [17], ，或当 μ 是由 Berge 无环的合取查询构成的合取查询的并 [6]时。后者的证明基于与有限域 VCSP 的联系，该联系也涵盖正则路径查询（RPQ）的韧性问题，甚至包括双向 RPQ。最近， [1] 也对（单向）RPQ 的韧性进行了研究，作者在其中提出了关于计算困难性的语言理论条件。然而，这一猜想在一般情形下仍未解决。

本文在数据库的签名由单个二元关系符号 R组成这一特殊情形下，证明了复杂性二分猜想，即证明如下结论：

▶**定理 1**。 如果 μ 是定义在二元签名 $\{R\}$上的合取查询的并，那么 μ 的韧性问题属于 *P* 或 *NP* 完全。

关于$\{R\}$ 的合取查询的并，与 [12] 中研究的查询类（采用集合语义）互不可比，因为前者研究任意签名下的查询，而后者研究仅涉及单个二元关系符号且只重复一次的查询。当签名等于$\{R\}$时，该查询表达一个有向图性质，韧性问题可以表述如下：给定一个有向多重图 G 和一个自然数 u，能否从 G 中删除 u 条边，使得 $G \models \neg\mu$? 图论领域也从计算复杂性的角度研究边删除问题，尤其是针对具体性质 [14, Section A1.2]。在 [10] 中，作者一般性地研究一阶逻辑性质的边删除问题；不过，他们只考虑简单无向图

，并从<estyle id='1'>参数化复杂性的角度研究该问题，其中被删除的边数是参数。

我们的贡献范围不仅限于验证有向图韧性问题的复杂性二分猜想：我们还验证了 [6] 中更强猜想的一个变体。该变体提出了一个精确的数学条件，旨在根据使用所谓的 *pp*-构造对一个困难的布尔约束满足问题（约束满足问题）进行模拟，预测 NP-困难性与多项式时间可解性之间的分界。这个条件在单向意义上是正确的：如果该条件成立，相应的韧性问题就是 NP-困难的。 [6] 的作者猜想，如果该条件不成立，那么该韧性问题属于 P 类。

本文中的若干结果与一项更广泛的研究目标相关：通过将包语义下的所有韧性问题建模为 VCSP，并应用值约束满足问题文献中的方法和结果，对这些问题的复杂性进行分类。例如，我们证明二分陈述中的两个条件互不相交（推论 33）；这一结论适用于一般的韧性问题（不要求 P $\neq$ NP）。另一项适用于一般韧性问题的结果是定理 40，它基于 [12] 中 自连接变体 的思路，给出了 pp-构造（因此也给出了多项式时间归约）。我们认为，本文是迈向以下目标的重要一步：对含自连接查询的韧性问题进行复杂性分类，并借助代数与逻辑工具理解韧性问题之间的归约。

2 预备知识

本节介绍第 4 节中出现的相关预备知识，第 4 节将陈述本文的主要定理（定理 34）。由于该定理不仅给出了复杂性二分，还给出了代数二分，因此需要用到值约束满足问题理论中的若干概念。对于主要关注韧性问题本身的复杂性的读者，我们建议只阅读第 2.1–2.4 节，跳过第 2.5–2.8 节，并在本文证明中需要时再回头阅读这些内容。

自然数集记为 $\mathbb{N}$。对于 $k \in \mathbb{N}$，集合 $\{1, \dots, k\}$记为 $[k]$。有理数集合记为 $\mathbb{Q}$， $\mathbb{Q}$ 上的标准严格线性序记为 $<$。实数集合记为 $\mathbb{R}$。我们还需要一个额外的值 ∞；关于 ∞，我们只需知道

- $a < \infty$ 对每个 $a \in \mathbb{R}$，$a + \infty = \infty + a = \infty$ 对所有
- $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$，且 $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ 以及 $a \cdot \infty = \infty \cdot$
- $a = \infty$ 对 $a > 0$。

设 A 为一个集合，且 $k \in \mathbb{N}$。若 $t \in A^k$，则我们默认 $t = (t_1, \dots, t_k)$，其中 $t_1, \dots, t_k \in A$。若 $\ell \in \mathbb{N}$ 且 $f\colon A^\ell \to A$ 是 A 上的一个运算，且 $t^1, \dots, t^\ell \in A^k$，则我们将 $(f(t_1^1, t_1^2, \dots, t_1^\ell) \dots, f(t_k^1, t_k^2, \dots, t_k^\ell))$ 记作 $f(t^1, \dots, t^\ell)$，并称 f 逐分量应用。

2.1 赋值结构

设 C 是一个集合，且 $k \in \mathbb{N}$。一个定义在 C 上、元数为 k 的赋值关系是一个函数 $R\colon C^k \to \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$。我们用 $\mathcal{R}_C^{(k)}$ 表示 C 上所有元数为 k 的赋值关系构成的集合，并定义

$$\mathcal{R}_C := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{R}_C^{(k)}.$$

如果一个赋值关系的取值仅为 $\mathbb{Q}$，则称其为有限值的。通常的关系也称为清晰关系。仅取值于 $\{0,\infty\}$ 的赋值关系 $R \in \mathcal{R}_C^{(k)}$ 将被视为清晰关系 $\{t \in C^k \mid R(t) = 0\}$。一元空关系是指每个元素的取值均为 ∞ 的关系，记为 $\bot$。清晰相等关系是指当一对元素相等时取值为 0，否则取值为 ∞ 的关系，记为 $(=)_0^\infty$。对于 $R \in \mathcal{R}_C^{(k)}$，$R$ 的可行性关系定义为 $\mathrm{Feas}(R) := \{t \in C^k \mid R(t) < \infty\}$。

一个（关系）签名 τ 是由关系符号构成的集合，其中每个符号都配有一个来自 $\mathbb{N}$ 的元数。一个赋值 τ-结构 Γ 由一个集合 C 构成，该集合也称为 Γ 的论域，并且对每个元数为 k 的关系符号 $R \in \tau$，都有一个赋值关系 $R^\Gamma \in \mathcal{R}_C^{(k)}$。本文中的所有赋值结构都具有可数论域。如果上下文已明确赋值结构，我们通常用 R 代替 R^Γ。所有赋值关系的取值都仅为 $\{0, \infty\}$ 的赋值 τ-结构，可以视为经典意义上的关系或清晰 τ-结构。若未特别说明，我们假设关系结构 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{B}$，... 的论域分别记为 A，B，...，赋值结构 Γ，Δ，... 的论域分别记为 C，D，...。

▶ **例 2.** 设 R 是一个二元关系符号。那么，论域为 $\{0,1\}$ 且签名为 $\{R\}$ 的 Γ_{MC}，其中若 $x = 0$ 且 $y = 1$，则 $R^{\Gamma_{\mathrm{MC}}}(x, y) = 0$；否则 $R^{\Gamma_{\mathrm{MC}}}(x, y) = 1$，是一个赋值结构。

若 $\sigma \subseteq \tau$ 和 Γ' 是一个赋值 σ-结构，且对每个 $R \in \sigma$ 都有 $R^{\Gamma'} = R^\Gamma$，那么我们称 Γ' 为 Γ 的一个**约化**，并称 Γ 为 Γ' 的一个**扩张**。

设 τ 是一个关系签名。若一阶公式具有如下形式：$R(x_1, \ldots, x_k)$，其中 $R \in \tau$ 是元数为 k 的关系符号、$x = y$、或 $\bot$，则称该公式为原子公式。我们将原子公式合取推广到赋值情形。原子 τ-表达式是指形如 $R(x_1, \ldots, x_k)$ 的表达式，其中 $R \in \tau \cup \{(=)_0^\infty, \bot\}$，且 $x_1, \ldots, x_k$ 是变量符号（不必彼此不同）。τ- 表达式是形如 $\sum_{i=1}^m \phi_i$ 的表达式 ϕ，其中 $m \in \mathbb{N}$，且对于 $i \in \{1, \ldots, m\}$，ϕ_i 是一个原子 τ-表达式。注意，同一个原子 τ-表达式可能在求和中出现多次。对于所有变量都来自集合 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 的 τ-表达式，我们记作 $\phi(x_1, \ldots, x_n)$。若 Γ 是一个赋值 τ-结构，则 τ-表达式 $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ 以自然方式在 Γ 上定义 $\mathcal{R}_C^{(n)}$ 的一个元素，记作 ϕ^Γ。若 ϕ 是空和，则 ϕ^Γ 为常数 0。

▶ **定义3。** 设 $k \in \mathbb{N}$，设 $R \in \mathcal{R}_C^{(k)}$，并设 α 是 C 的一个置换。那么，如果对于所有 $t \in C^k$，都有 $R(\alpha(t)) = R(t)$，则 α 保持 R。如果 Γ 是一个论域为 C 的赋值结构，那么 Γ 的一个自同构是 C 的一个置换，它保持 Γ 的所有赋值关系。

Γ 的所有自同构组成的集合记作 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$，并在复合运算下构成一个群。

设 A 是一个集合，且 $R \subseteq A^k$。运算 $f\colon A^\ell \to A$ 在集合 A 上保持 R，如果对于每个 $t^1, \ldots, t^\ell \in R$，都有 $f(t^1, \ldots, t^\ell) \in R$。如果 $\mathfrak{A}$ 是一个关系结构，且 f 保持 $\mathfrak{A}$ 的所有关系，那么 f 称为 $\mathfrak{A}$ 的一个**多态射**。$\mathfrak{A}$ 的所有多态射组成的集合记作 $\mathrm{Pol}(\mathfrak{A})$，且在复合运算下封闭。我们用 $\mathrm{Pol}^{(\ell)}(\mathfrak{A})$ 表示 $\mathrm{Pol}(\mathfrak{A})$ 中所有 ℓ 元运算构成的集合，$\ell \in \mathbb{N}$。单目多态射称为**自同态**，$\mathrm{Pol}^{(1)}(\mathfrak{A})$ 也记作 $\mathrm{End}(\mathfrak{A})$。

令 τ 为一个关系签名，令 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 为关系 τ-结构。映射 $h\colon A \to B$ 称为从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的**同态**，如果对于每个元数为 k 的 $R \in \tau$ 以及每个 $t \in R^{\mathfrak{A}}$，$h(t) \in R^{\mathfrak{B}}$。如果存在从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 以及从 $\mathfrak{B}$ 到 $\mathfrak{A}$ 的同态，则称 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ **同态等价**；如果不存在从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 或从 $\mathfrak{B}$ 到 $\mathfrak{A}$ 的同态，则称它们**同态不可比较**。这些概念的推广

到赋值结构上的多态和同态将在第 2.7 节和第 2.8 节中定义。

2.2 值约束满足问题

本节中，我们假设 Γ 是定义在有限签名 τ 上的一个固定值 τ-结构。我们首先定义关系结构的值约束满足问题，然后在注 5 中说明它与更一般性较弱的约束满足问题之间的联系。

▶ 定义 4. 对于 Γ 的值约束满足问题记作 *VCSP(Γ)*，它是这样一个计算问题：给定一个 τ- 表达式 $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ 和一个 $u \in \mathbb{Q}$，判断是否存在 $t \in C^n$ 使得 $\phi^\Gamma(t) \leq u$。我们将 $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ 称为 *VCSP(Γ)* 的一个实例，并将 u 称为阈值。满足 $\phi^\Gamma(t) \leq u$ 的元组 $t \in C^n$ 称为 (ϕ, u) 的一个解。ϕ 的代价（相对于 Γ）定义为

$$\inf_{t \in C^n} \phi^\Gamma(t).$$

在某些情境下，只将给定的 τ-表达式 ϕ 作为 VCSP(Γ) 的输入（而非 ϕ 和阈值 u）会更有利。此时，若元组 $t \in C^n$ 的代价等于 $\phi^\Gamma(t)$，则称其为的解。请注意，一般而言，可能不存在任何解；但对于本文讨论的 VCSP，这种情况绝不会发生，因为它们源自韧性问题。若存在一个元组 $t \in C^n$ 使得 $\phi^\Gamma(t) < \infty$，则称 ϕ 为可满足。

如下所述，对于关系结构，VCSP 特化为 CSP。

▶ 注 5. 若 $\mathfrak{A}$ 是一个关系 τ-结构，则 CSP($\mathfrak{A}$) 是判定 $\mathfrak{A}$中 τ 上的原子公式的合取是否可满足的问题。请注意，对于每个 τ-表达式$\phi(x_1, \ldots, x_n)$，$\phi^{\mathfrak{A}}$ 定义了一个清晰的关系，也可以将其视为定义相同关系的原子公式的合取。因此，最小化 $\phi^{\mathfrak{A}}$ 对应于寻找满足 $\phi^{\mathfrak{A}}(t) = 0$ 的 $t \in A^n$，即满足该合取中所有原子公式的 t。因此，VCSP($\mathfrak{A}$) 和 CSP($\mathfrak{A}$) 本质上是同一个问题。

▶ **例 6.** 赋值结构 Γ_{MC}（见例 2）上的问题 VCSP(Γ_{MC}) 对应于有向最大割问题：给定一个有限有向多重图 (V, E)，找出顶点 V 的一个划分，将其分为两类 A 和 B，使得从 A 到 B 的边数最大化。最大化从 A 到 B 的边数，相当于最小化 A内部、 B内部以及从 B 到 A的边数 e。因此，当我们将 A 对应到 0 的原像，并将 B 对应到 1 的原像时，求解就相当于找到一个赋值映射 $f\colon V \to \{0, 1\}$，使其值最小

$$\sum_{(x,y) \in E} R^{\Gamma_{\mathrm{MC}}}(f(x), f(y)),$$

这可以表述为 VCSP(Γ_{MC}) 的一个实例。反过来，VCSP(Γ_{MC}) 的每个实例都对应于一个有向最大割实例。

▶ **例7**。考虑关系 OIT $= \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$。CSP($\{0, 1\}$; OIT) 就是所谓的 1-in-3-3-SAT 问题，已知该问题是 NP 完全的（参见例如 [4, 例 1.2.2]）。

2.3 合取查询与韧性

如果一阶公式是原子公式的存在量化合取，则称其为原始正。在（关系）签名 τ 上，合取查询是一个原始正

τ句子，而合取查询的并是合取查询的（有限）析取。请注意，每个存在正句子都可以写成合取查询的并。

若 $\mathfrak{A}$ 是一个关系 τ结构，且 μ 是一个定义在 τ 上的合取查询的并，其无量词部分为 $\mu'(v_1,\ldots,v_n)$，则称 $\alpha\colon\{v_1,\ldots,v_n\}\to A$ 见证了 $\mathfrak{A}\models\mu$，当且仅当 $\mathfrak{A}\models\mu'(\alpha(v_1)\ldots,\alpha(v_n))$。给定定义在 τ上的合取查询 μ_1和 μ_2，若对于每个有限关系 τ结构 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{A}\models\mu_1$ 当且仅当 $\mathfrak{A}\models\mu_2$，则称 μ_1与 μ_2 等价。若每个与合取查询 μ 等价的合取查询所含原子数都不少于 μ，则称 μ 是极小的。对于每个合取查询 μ，都存在一个与之等价的极小查询 μ'，它可以通过删除 μ 中的零个或多个原子式 [8]得到。

定义在集合 A 上的元数为 k 的多重集关系是一个元素取自 A^k 的多重集，而关系签名 τ 上的包数据库 $\mathfrak{A}$ 由一个有限论域 A 以及对每个元数为 k的 $R\in\tau$，一个元数为 k的多重集关系 $R^{\mathfrak{A}}$ 组成。若将包数据库 $\mathfrak{A}$ 的关系中元组的重数忽略后得到的关系结构满足合取查询的并 μ，则称 $\mathfrak{A}$ 满足该查询。本文研究包语义下合取查询的并的韧性问题；从现在起，我们将这一问题简称为韧性问题。设 τ 为一个有限关系签名，μ 为定义在 τ上的合取查询的并。μ的韧性问题输入为一个定义在 τ上的包数据库 $\mathfrak{A}$，任务是计算必须从 $\mathfrak{A}$ 的关系中删除的元组数量，使得 $\mathfrak{A}$ 不满足 μ。这个数量称为 $\mathfrak{A}$ 相对于 μ的韧性。照常，可以将其转化为一个判定问题：输入还包含一个自然数 $u\in\mathbb{N}$，问题是韧性是否至多为 u。显然，$\mathfrak{A}$ 不满足 μ 当且仅当其韧性为 0。容易看出，任意合取查询的并的韧性问题都属于 NP。

合取查询 μ 关于关系签名 τ 的典范数据库 是关系τ-结构 $\mathfrak{A}$，其论域由 μ 的变量构成；对于元数为 k的 $R\in\tau$，当且仅当 μ包含合取式 $R(x_1,\ldots,x_k)$时，$(x_1,\ldots,x_k)\in R^{\mathfrak{A}}$；我们用 $\mathfrak{D}_\mu$表示该典范数据库。

▶ 注 8. 为 τ-结构引入的所有术语同样适用于关于 τ的合取查询：根据定义，如果一个查询的典范数据库具有某项性质，那么该查询也具有该性质。

注意，根据上述注释，我们可以讨论查询之间的同态，以及查询之间同态不可比较的情况。注意，如果两个查询不等价且都是极小的，那么它们必定同态不可比较（例如参见 [8]）。

如果一个关系 τ-结构不能写成两个论域非空的关系 τ-结构的不交并，那么它就是连通的 。我们将证明，在对合取查询的韧性问题进行分类时，只需考虑连通查询。

▶ **引理 9** ([6, 引理 8。5])。 设 $\nu_1,\ldots,\nu_k$ 是合取查询，且当 $i\neq j$时，ν_i 不蕴含 ν_j。令 $\nu=(\nu_1\wedge\cdots\wedge\nu_k)$，并假设 ν出现在合取查询的并 μ 中。对于 $i\in\{1,\ldots,k\}$，令 μ_i 为通过将 μ中的 ν 替换为 ν_i 而得到的查询的并。若某个 μ_i 的韧性问题是 *NP*-困难的，则 μ 的韧性问题也是 *NP*-困难的。反过来，如果每个 μ_i的韧性问题都属于 *P* 类，那么 μ 的韧性问题也属于 *P* 类。

通过有限次应用引理 9，我们得出：在对合取查询的并的韧性问题进行复杂性分类时，可以将注意力限制在连通合取查询的并上。

2.4 韧性与 VCSP 的联系

I本节总结韧性问题之间联系的要点
a最初在 [6]中引入的值约束满足问题。

▶ **定义 10**。 设 $\mathfrak{B}$ 是一个关系 τ结构。定义 $\mathfrak{B}_0^1$ 为与 $\mathfrak{B}$ 具有相同论域的赋值 τ结构，使得对于每个 $R \in \tau$， $R^{\mathfrak{B}_0^1}(a) = 0$ 当且仅当 $a \in R^{\mathfrak{B}}$ 且 $R^{\mathfrak{B}_0^1}(a) = 1$否则。

如果 μ 是一个签名为 τ的合取查询的并，那么 μ 的一个对偶 是一个关系τ结构 $\mathfrak{B}$，满足：有限关系 τ结构 $\mathfrak{A}$存在到 $\mathfrak{B}$ 的同态，当且仅当 $\mathfrak{A}$ 不满足 μ。如果 $\mathfrak{B}$ 和 $\mathfrak{B}'$ 都是 μ的对偶，那么根据紧致性 [4, 引理 4.1，7]它们同态等价。

▶ **命题 11** （[6, 命题 8。14]）。 设 μ 是一个签名为 τ的连通合取查询的并。那么，对于 μ的任意对偶 $\mathfrak{B}$， μ 的韧性问题与VCSP（$\mathfrak{B}_0^1$）多项式时间等价。

设 $k \in \mathbb{N}$，令 C 为一个集合， G 为作用在 C上的置换群。 G 的-元组的轨道 是形如 $\{\alpha(t) \mid \alpha \in G\}$ 的集合，其中 $t \in C^k$。称可数集上的置换群 G 是寡态的，如果对于每个 $k \in \mathbb{N}$， G [7]中都只有有限多个 k-元组轨道。从现在起，每当我们说某个结构具有寡形自同构群时，也意味着其论域可数。显然，每个论域有限的赋值结构都具有寡形自同构群。可数关系结构具有寡形自同构群，当且仅当它是 ω-范畴的，也就是说，其一阶理论的所有可数模型都彼此同构 [15]。

关系 τ-结构 $\mathfrak{A}$嵌入 关系 τ-结构 $\mathfrak{B}$，是指存在一个从 A 到 B 的单射映射，该映射保持 $\mathfrak{A}$ 的所有关系及其补关系；相应的映射称为嵌入。关系 τ-结构的年龄 是所有能够嵌入其中的有限关系 τ-结构所构成的类。具有关系签名τ 的关系结构 $\mathfrak{B}$ 称为

- 有限界定 如果 τ 是有限的，并且存在一个全称 τ句子 ϕ，使得有限关系结构 $\mathfrak{A}$ 属于 $\mathfrak{B}$ 的年龄当且仅当 $\mathfrak{A} \models \phi$；齐性的 如果 $\mathfrak{B}$ 的有限子结构之间的每个同构都可以扩展为 $\mathfrak{B}$的自同构。

如果 $\mathfrak{B}$ 是有限界定且齐性的，那么 Aut($\mathfrak{B}$) 是寡态的。

▶**定理 12** ([6, 定理 8。12])。 对于有限关系签名 τ 上的每个连通合取查询的并集 μ， 都存在一个 τ-结构 $\mathfrak{B}_\mu$， 使得以下陈述成立：

1. $\mathfrak{B}_\mu$ 是某个有限界定且齐性的结构的约化 $\mathfrak{B}$。2. 一个可数的 τ-结构 $\mathfrak{A}$ 满足 $\neg\mu$ 当且仅当它嵌入到 $\mathfrak{B}_\mu$中。3. $\mathfrak{B}_\mu$ 是有限界定的。4. *{st yle id='32'>Aut(*$\mathfrak{B}$) 和 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{B}_\mu)$ 都是寡态的。

对于连通合取查询的并 μ，对偶 $\mathfrak{B}_\mu$ 的存在是得到另一个对偶 $\mathfrak{C}_\mu$ 的关键；后者具有下述定义中引入的一种强模型论性质。若 G 是集合 C 上的一个置换群，则 G 表示 G 在空间 C^C 中关于逐点收敛拓扑的闭包。这是唯一一种拓扑，使得 C^C 的闭子集恰好是关系结构的自同态幺半群；例如参见 [4, 命题 4.4。2] 注意， G 可能包含一些非满射运算；但如果 $G = \mathrm{Aut}(\mathfrak{B})$ 对某个关系结构 $\mathfrak{B}$ 成立，那么 G 中的所有运算仍然是从 $\mathfrak{B}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的嵌入，且保持所有一阶公式。

▶**定义 13**。 具有寡形自同构群的关系结构 $\mathfrak{B}$ 若满足$\mathrm{Aut}(\mathfrak{B}) = \mathrm{End}(\mathfrak{B})$，则称为模型完备核 。

对于每个具有寡形自同构群的关系结构 $\mathfrak{B}$ ，都存在一个与 $\mathfrak{B}$ 同态等价的模型完备核 $\mathfrak{C}$ 。该核在同构意义下唯一，称为 $\mathfrak{B}$ [3, 的模型完备核定理 16], [4, 命题 4.7。7]直观地说， $\mathfrak{B}$ 的模型完备核在某种意义上是一个与 $\mathfrak{B}$具有相同 CSP 的“极小”结构。如果 $\mathfrak{B}$ 的论域有限，那么其模型完备核的论域（通常简称为核）也有限。

关系结构 $\mathfrak{A}$ 的盖夫曼图是一个顶点集为 A的无向图，其中 a，$b \in A$ 相邻，当且仅当 $a \neq b$，并且 $\mathfrak{A}$的某个关系中存在一个同时包含 a 和 b的元组。合取查询的盖夫曼图就是该查询的规范数据库的盖夫曼图。

以下是定理 12 针对 $\mathfrak{B}_\mu$ 的模型完备核的一个类比。应将该定理中的陈述视为已知结果；为方便读者，我们提供证明并附上文献出处。

▶**定理 14.** 设 μ 是有限关系签名 τ 上的连通合取查询的并。那么，定理 *12* 中结构 $\mathfrak{B}_\mu$ 的模型完备核 $\mathfrak{C}_\mu$[1] 满足以下性质：

1. $\mathfrak{C}_\mu$ 是有限界定齐性结构 $\mathfrak{B}$的约化。**2.** 可数的 τ-结构 $\mathfrak{A}$ 满足 $\neg\mu$ 当且仅当存在从 $\mathfrak{A}$ 到$\mathfrak{C}_\mu$的同态。**3.** 若对于 ν 中的每个查询 μ，其盖夫曼图 ν 都是完全图，则 $\mathfrak{C}_\mu$ 是齐性的。**4.** $\mathrm{Aut}(\mathfrak{B})$ 和 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_\mu)$ 都是寡态的。

证明。 性质 (1) 可由 [19]中的结果推出；显式出处见 [5, 推论 7.5。15] 性质 (2) 则是因为 $\mathfrak{C}_\mu$ 与 $\mathfrak{B}_\mu$同态等价。

为证明 (3)，假设对于每个属于 μ 的查询 ν， ν 的盖夫曼图都是完全图。根据 [6, 定理 8.13], , 存在一个 μ 的对偶 $\mathfrak{H}$，它是齐性的。根据 [4, 命题 4.7.7], , $\mathfrak{H}$ 的模型完备核也是齐性的。注意， $\mathfrak{C}_\mu$ 与 $\mathfrak{H}$ 同态等价，因为它们都是 μ 的对偶，因此根据唯一性，它就是 $\mathfrak{H}$ 的模型完备核。

对于第 (4) 项，注意，由于 $\mathfrak{B}$ 具有有限关系签名且是齐性的，其自同构群是寡态的。$\mathfrak{C}_\mu$ 的自同构群也是寡态的，因为在取约化时，这一性质显然得以保留。◀

注意，由于 $\mathfrak{C}_\mu$ 在同构意义下唯一，且同态等价具有传递性，因此结构 $\mathfrak{C}_\mu$ 不依赖于对 $\mathfrak{B}_\mu$ 的具体选择。对于连通合取查询的并 μ，令 $\Delta_\mu := (\mathfrak{C}_\mu)^1_0$。在大多数结果中，这将是我们应用关于 $\mathfrak{B}^1_0$ 的结果时所用的赋值结构，其中 $\mathfrak{B}$ 是 μ 的对偶。

2.5 表达能力

本节介绍的表达能力 概念是 VCSP 之间多项式时间构件归约的基础。

▶ **定义 15.** 设 A 为一个集合，且 R、$R' \in \mathcal{R}_A$。我们称 R' 可由 R 通过

[1] 在 [6], 中，符号 $\mathfrak{C}_\mu$ 曾用于表示 μ的另一种对偶，但本文不需要这种对偶。

- 投影 得到，当且仅当 R' 的元数为 k， R 的元数为 $k+n$，并且对所有 $s \in A^k$

$$R'(s) = \inf_{t \in A^n} R(s,t).$$

- 非负缩放 当且仅当存在 $a \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ 使得 $R' = aR$;
- 平移 当且仅当存在 $a \in \mathbb{Q}$ 使得 $R' = R + a$。

若 R 的元数为 k，则包含 R 的所有极小值元组的关系为

$$\mathrm{Opt}(R) := \{t \in \mathrm{Feas}(R) \mid R(t) \leq R(s) \text{ for every } s \in A^k\}.$$

注意，条目 (1) 中的 $\inf_{t \in A^n} R(s,t)$ 可能是无理数或 $-\infty$。若情况如此，则 $\inf_{t \in A^n} R(s,t)$ 不表示一个赋值关系，因为赋值关系的权重必须取自 $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$。然而，如果 R 在寡形自同构群的所有置换下保持不变，那么 R 只取有限多个值，因此这种情况不会发生。

若 $S \subseteq \mathcal{R}_A$，则 S 上的原子表达式是满足 $\tau = S$的原子 τ-表达式。若 S 包含由 S上的原子表达式之和定义的所有赋值关系，我们就称其对原子表达式求和封闭 。

▶ **定义 16**（赋值关系克隆）。 在集合 C 上的一个赋值关系克隆 是 $\mathcal{R}_C$ 的一个子集，并且在构造原子表达式之和、投影、平移、非负数乘，以及Feas和Opt运算下封闭；我们将以这种方式构造的表达式称为pp-表达式。对于论域为 C 的赋值结构 Γ，我们用 $\langle\Gamma\rangle$ 表示包含 Γ 的赋值关系克隆中最小的一个。如果 $R \in \langle\Gamma\rangle$，则称 Γ pp- 表达式 R。

缩写“pp”代表“原始正”（primitive positive），因为赋值结构的 pp-表达式概念是原始正定义的一种推广；原始正定义用于约束满足问题之间的归约。

2.6 分数映射

设 A 和 B 为集合。我们赋予从 B 到 A 的函数所构成的空间 A^B 逐点收敛拓扑，其中 A 取离散拓扑。在此拓扑下，开集基由 $S_{s,\,t} := \{f \in A^B \mid f(s) = t\}$ 给出，其中 $s \in B^k$ 且 $t \in A^k$ 对某个 $k \in \mathbb{N}$ 成立。对于任意拓扑空间 T，我们用$\mathcal{B}(T)$ 表示 T 上的 Borel σ-代数，即幂集$\mathcal{P}(T)$ 中包含所有开集且对可数交和补关系封闭的最小子集。我们用 $[0,1]$ 表示集合$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$。

▶ **定义 17**（分数映射）。 设 A 和 B 为集合。从 B 到 A的分数映射 是一个概率分布（A^B，$\mathcal{B}(A^B)$ ω: $\mathcal{B}(A^B)$ $\to [0,1]$），也就是说，$\omega(A^B) = 1$，并且 ω是可数可加的：若 S_1、S_2、$\cdots \in \mathcal{B}(A^B)$ 两两不交，则

$$\omega\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \omega(S_i).$$

我们常用 ω同时表示整个分数映射以及映射 ω: $\mathcal{B}(A^B) \to [0,1]$。

集合 $[0,1]$ 继承自 $\mathbb{R}$上的标准拓扑。我们也将 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 视为一个拓扑空间，其开集基由所有形如 (a,b) 的开区间组成，其中 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$，此外还包括所有形如$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} \cup \{\infty\}$ 的集合（因此，$\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 按自然顺序排列时，赋予的是其序拓扑）。

（实值）随机变量是一个可测函数 X: $T \to \mathbb{R} \cup \{\}\infty\}$，也就是说，元素 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 在 X 下的原像属于 B(T)。如果 X 是一个实值随机变量，那么

期望值（相对于概率分布 ω）记作 $E_\omega[X]$，并通过勒贝格积分定义

$$E_\omega[X] := \int_T X d\omega.$$

在本文其余部分，我们将只讨论形式为A^B 的拓扑空间 T，其中 A 和 B是集合。

2.7 Pp-构造

本节介绍 pp-构造这一概念，它推广了 pp-表达式，并为 VCSP 之间提供多项式时间归约。我们首先定义分数同态。

▶ **定义 18** (分数同态)。 设 Γ 和 Δ 分别是论域为C 和 D的值 τ-结构。从 Δ 到 Γ 的分数同态是一个从 D 到 C 的分数映射 ω，使得对于每个元数为 k 的 $R \in \tau$ 以及每个元组 $t \in D^k$，由 $f \mapsto R^\Gamma(f(t))$ 给出的随机变量 $X\colon C^D \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$满足 $E_\omega[X]$ 存在，且 $E_\omega[X] \leq R^\Delta(t)$。

关于分数同态的详细介绍，请参阅 [6] 。如果存在从 Γ 到 Δ 以及从 Δ 到 Γ的分数同态，则称两个值τ-结构 Γ 和 Δ 是分数同态等价的。

▶ 注 19. 如果 μ 是带对偶的合取查询的并 $\mathfrak{B}$ 和 $\mathfrak{C}$，那么 $\mathfrak{B}$ 和 $\mathfrak{C}$ 同态等价。因此，$\mathfrak{B}_0^1$ 和 $\mathfrak{C}_0^1$ 分数同态等价，其见证是分数映射，其中相应的同态的概率为 1。

作为定义 pp-构造的下一步，我们定义 pp-幂。

▶ **定义 20** (pp-幂)。 设 Γ 是一个论域为 C 的赋值结构，并设 $d \in \mathbb{N}$。那么，Γ 的（d 次）pp-幂 是一个赋值结构 Δ，其论域为 C^d，并且对于 Δ 的每个元数为 k 的赋值关系 R，在 $\langle\Gamma\rangle$中存在一个元数为 kd的赋值关系 S，使得

$$R((x_1^1, \ldots, x_d^1), \ldots, (x_1^k, \ldots, x_d^k)) = S(x_1^1, \ldots, x_d^1, \ldots, x_1^k, \ldots, x_d^k).$$

现在我们可以定义 pp-构造的概念。

▶ **定义 21** (pp-构造)。 设 Γ、Δ 为赋值结构。如果 Δ 与某个作为 Γ的 *pp*-幂的结构 Δ' 分数同态等价，则 Δ 在 Γ 中具有pp-构造 。

pp-可构造性关系具有传递性：若 Γ_1、Γ_2和 Γ_3 是赋值结构，使得 Γ_1 原始正合取构造 Γ_2，且 Γ_2 原始正合取构造 Γ_3，那么 Γ_1 原始正合取构造 Γ_3 [6, （引理 5）。12]。注意，只要 μ 是连通合取查询的并，且 Δ_μ 原始正合取构造赋值结构 Γ，那么对于 μ的每个对偶 $\mathfrak{B}$，赋值结构 $\mathfrak{B}_0^1$ 原始正合取构造 Γ，因为 Δ_μ 和 $\mathfrak{B}_0^1$ 分数同态等价（注 19）。

引入 pp-构造的动机源于以下引理：pp -构造可导出多项式时间归约。

▶ **引理 22** ([6, 推论 5.10 和 5.11])。 设 Γ 和 Δ 是具有有限签名和寡形自同构群的赋值结构，且 Δ 在 Γ 中有 *pp*-构造。那么存在一个从 $\mathrm{VCSP}(\Delta)$ 到 $\mathrm{VCSP}(\Gamma)$ 的多项式时间归约。特别地，若 $\Delta = (\{0,1\}; \mathrm{OIT})$，则 $\mathrm{VCSP}(\Gamma)$ 是 *NP*-困难。

▶ **例 23.** 回顾例 2 中的赋值结构 Γ_{MC}。已知 Γ_{MC}原始正合取构造了（$\{0,1\}$,OIT） [25, 例 2。18] 根据引理 22，VCSP(Γ_{MC}) 是 NP-困难的。

2.8 分数多态性

现在我们介绍赋值结构的分数多态性，它是关系结构多态射的推广。对于具有有限论域的赋值结构，我们的定义特化为一种成熟的分数多态概念，该概念已用于研究有限论域上赋值结构的 VCSPs 的复杂性（例如参见 [22]）；已知有限论域赋值结构的分数多态性能够通过多项式时间归约刻画其 VCSP 的复杂性 [9, 13]。我们的定义取自 [6]，与 [23, 21, 24]不同，它允许任意概率分布。

设 $\ell \in \mathbb{N}$。一个上的分数运算 A，元数为 ℓ，是从 A^ℓ 到 A的分数映射。集合 A 上所有元数为 ℓ的分数运算构成的集合记为 $\mathcal{F}_A^{(\ell)}$。

▶ **定义 24**。若分数运算 $\omega \in \mathcal{F}_A^{(\ell)}$ 改善赋值关系 $R \in \mathcal{R}_A^{(k)}$，则称其改善该赋值关系，当且仅当对所有 $t^1, \dots, t^\ell \in A^k$

$$E := E_\omega[f \mapsto R(f(t^1, \dots, t^\ell))] \text{ exists, and } \quad E \leq \frac{1}{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} R(t^j). \tag{1}$$

请注意，(1) 的含义是：$R(f(t^1, \dots, t^\ell))$ 的期望值至多为值 $R(t^1) \dots, R(t^\ell)$ 的平均值。

▶ **定义 25**（分数多态）。如果分数运算 ω 改善赋值结构 Γ中的每个赋值关系，那么称 ω 为 Γ的分数多态；Γ的所有分数多态构成的集合记为$\mathrm{fPol}(\Gamma)$。

▶ 备注 26. 赋值 τ-结构 Γ 的元数为 ℓ 的分数多态，也可以看作是从 Γ的某个特定 ℓ 阶 pp-幂（记作 Γ^ℓ）到 Γ的分数同态：Γ^ℓ 的论域为 C^ℓ，并且对于每个元数为 k 的 $R \in \tau$，我们有

$$R^{\Gamma^\ell}((x_1^1, \dots, x_\ell^1), \dots, (x_1^k, \dots, x_\ell^k)) := \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} R^\Gamma(x_i^1, \dots, x_i^k).$$

▶ **例 27.** 设 A 为一个集合，$\pi_i^\ell \in \mathcal{O}_A^{(\ell)}$ 为元数为 ℓ的第 i个投影，其定义为 $\pi_i^\ell(x_1, \dots, x_\ell) = x_i$。元数为 ℓ的分数运算 Id_ℓ满足：对于每个 $i \in \{1, \dots, \ell\}$，$\mathrm{Id}_\ell(\pi_i^\ell) = \frac{1}{\ell}$，它是所有论域为 A的赋值结构的分数多态。

▶ **引理 28** (引理 6.8，见 [6])。设 Γ 为定义在可数论域C上的赋值 τ-结构 Γ。那么，所有 Γ的分数多态都会改进每个赋值关系 $R \in \langle\Gamma\rangle$。

设 $\mathfrak{A}$ 为一个关系结构，G 为作用在 $\mathfrak{A}$ 的论域 A 上的置换群。令 $\ell \geq 2$ 和 $f\colon A^\ell \to A$。若存在 $e_1, \dots, e_\ell \in G$，使得对于所有 $x_1, \dots, x_\ell \in A$，运算 f 相对于 G 是伪循环的，

$$e_1 f(x_1, x_2, \dots, x_\ell) = e_2 f(x_2, \dots, x_\ell, x_1) = \cdots = e_\ell f(x_\ell, x_1, \dots, x_{\ell-1}).$$

运算 f相对于 G是典范的，如果对于所有的 $k \in \mathbb{N}$和 $t^1, \dots, t^\ell \in A^k$，元组 $f(t^1, \dots, t^\ell)$（k元组）相对于 G的轨道仅取决于 $t^1, \dots, t^\ell$相对于 G的轨道。若分数运算 ω 在 C 上的元数为 ℓ，且满足 $\omega(S) = 1$，则称其相对于 G 是伪循环的；其中 S 是所有元数为 ℓ且相对于 G 伪循环的运算所构成的集合。分数运算的典范性定义类似。以下定理是 [6, 定理 7.13]的一个特例。

▶**定理 29**。设 μ 是连通合取查询的并，且 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{C}_\mu$ 的一个有限界定且齐性的扩张（根据定理 *14*，它存在）。如果 Δ_μ 相对于 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$具有典范伪循环分数多态，那么 $\mathrm{VCSP}(\Delta_\mu)$ 和 μ 的韧性问题都属于 *P* 类。

我们针对赋值结构 Δ_μ 提出了 [6, 猜想 8.17] 的一种改编。它取代了 [6] 中使用的结构 Γ_μ（且不考虑所谓的 外生关系，本文不会引入这种关系）。

▶**猜想 30.** 设 μ 是签名 τ 上连通合取查询的并，且 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{C}_\mu$ 的有限约束齐性扩张。那么以下恰有一项成立：

- ($\{0,1\}$; OIT) 在 Δ_μ 中有一个 *pp*-构造，且 $\mathrm{VCSP}(\Delta_\mu)$ 是 *NP* 完全的。
- Δ_μ 有一个元数为 $\ell \geq 2$ 的分数多态射，该多态射相对于 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ 是典范且伪循环的，并且 $\mathrm{VCSP}(\Delta_\mu)$ 属于 *P* 类。

在这个猜想中使用 Δ_μ 而非 $\Gamma_\mu := (\mathfrak{B}_\mu)^1_0$ 的主要原因是推论 33。推论 33 表明，对于 Δ_μ，猜想 30 中蕴含关系的逆命题成立：如果 Δ_μ 有典范且伪循环的分数多态射，那么它就不能原始正合取构造出（$\{0,1\}$; OIT）；另见第3节中的讨论。这两个猜想之间的关系将留待进一步研究；目前我们无法证明，如果 Δ_μ 有典范且伪循环的分数多态射，那么 Γ_μ 也有，反之亦然。

3 猜想 30 两种情形的不相交性

本节证明，猜想 30 中复杂性二分的两种情形互不相交。对于赋值结构 Γ，我们用 Γ^* 表示定义在相同论域上的关系结构，其关系为 $\langle\Gamma\rangle$ 中所有仅取值 0 和 ∞ 的关系。由引理 28 可知，$\mathrm{Aut}(\Gamma) \subseteq \mathrm{Aut}(\Gamma^*)$。

▶**观察 31**。设 μ 是合取查询的并。那么 Δ^*_μ 是模型完备核。

证明。注意，对于每个 $R \in \tau$，结构 Δ^*_μ 都包含 $R^{\mathfrak{C}_\mu} = \mathrm{Opt}(R^{\Delta_\mu})$。特别地，$\mathrm{End}(\Delta^*_\mu) \subseteq \mathrm{End}(\mathfrak{C}_\mu)$ 由引理 28 得出。

$$\begin{aligned}\mathrm{End}(\Delta^*_\mu) \subseteq \mathrm{End}(\mathfrak{C}_\mu) &= \overline{\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_\mu)} && (\mathfrak{C}_\mu \text{ 是模型完备核})\\ &= \overline{\mathrm{Aut}(\Delta_\mu)} \subseteq \overline{\mathrm{Aut}(\Delta^*_\mu)} \subseteq \mathrm{End}(\Delta^*_\mu).\end{aligned}$$

因此，Δ^*_μ 是模型完备核。 ◀

设 G 是集合 C 上的一个置换群。集合 C 上的一个运算 $f\colon C^\ell \to C$，若对于每个 $i \in \{1,\dots,\ell\}$，都存在 e_1、$e_2 \in G$ 以及变量 z_1、…、z_ℓ、z'_1、…、$z'_\ell \in \{x, y\}$，使得 $z_i \neq z'_i$，并且对于所有 x、$y \in C$、e_1，均有 $(f(z_1,\dots,z_n)) = e_2(f(z'_1,\dots,z'_n))$，则称其为关于 G 的伪泰勒运算。定义在 C 上、元数为 ℓ 的分数运算 ω，若 $\omega(T) = 1$，其中 T 是所有关于 G、定义在 C 上且元数为 ℓ 的伪泰勒运算构成的集合，则称其为关于 G 的伪泰勒分数运算。注意，每个关于 G 的伪循环运算都是关于 G 的伪泰勒运算；类似地，伪泰勒分数运算推广了伪循环分数运算。下面的结果并非韧性问题所特有，而是一般适用于具有寡形自同构群的赋值结构的 VCSP。

▶**定理 32**。 设 Γ 是一个具有寡形自同构群的赋值结构，且 Γ^* 是模型完备核，并且 Γ 具有一个关于 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ 的伪循环（或者更一般地，伪泰勒）分数多态 ω 。则 Γ 不对 K_3 进行原始正合取构造。

证明。 反设 Γ 是 K_3的 pp-构造。根据 [25]中的命题 2.22， Γ^*也是 K_3 的 pp-构造。根据 [2] 中的结果（例如，参见 [4]中的定理 10.3.5）， Γ^* 相对于 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$不可能具有伪泰勒多态射，特别是，它不可能相对于 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$具有伪循环多态射。

根据伪循环分数运算的定义，存在一个集合 S ，其中包含 C 上的 ℓ 元数伪循环运算，使得 $\omega(S) = 1$。根据引理 28， ω 也是 Γ^*的分数多态。根据 [25]中的命题 3.22， $\omega(S \cap \mathrm{Pol}^{(\ell)}(\Gamma^*)) = 1$。特别地， $S \cap \mathrm{Pol}^{(\ell)}(\Gamma^*)$ 非空。这与 $\mathrm{Pol}(\Gamma^*)$ 不包含任何伪循环运算相矛盾。当 ω 只是一个伪泰勒运算时，证明类似。◀

▶**推论 33.** 设 μ 是合取查询的并，且 Δ_μ 具有相对于 $\mathrm{Aut}(\Delta_\mu)$ 的伪循环分数多态，或者更一般地，具有伪泰勒分数多态 ω 。那么 Δ_μ 不能原始正合取构造 K_3。

证明。 由观察 31，结构 Δ^*_μ 是模型完备核。现在结论由定理 32 得出。◀

注意，要证明猜想 30，只需证明：只要 Δ_μ 不能原始正合取构造 $(\{0,1\}; \mathrm{OIT})$，它就具有典范伪循环分数多态：这由推论 33（这两种情形已知互不相交）、定理 29（关于典范伪循环分数多态的可处理性结果）和引理 22（基于 pp-构造的困难性条件）得出。

本文采用对偶 $\mathfrak{C}_\mu$ 而非 [6], 中使用的对偶 $\mathfrak{B}_\mu$ ，主要是因为上述定理 32 的证明：我们需要 $\mathfrak{C}_\mu$是模型完备核这一性质，才能推出 Δ^*_μ 是模型完备核，从而能够应用 [2]中的结果。

4 有向图韧性问题的复杂性二分

从现在起， R 表示一个二元关系符号。我们通常将$\{R\}$-结构视为有向图。令

$\mu_\ell := \exists x\ R(x,x)$,$\mu_e := \exists x, y\ R(x, y)$，以及$\mu_c := \exists x, y\ \big(R(x, y) \wedge R(y, x)\big)$.

本文的主要结果是以下定理，它是第 1 节中给出的定理 1 的一个更强版本。

▶**定理 34.** 设 μ 是签名为$\{R\}$的合取查询的并。那么， μ 的韧性问题属于 *P* 类或 *NP* 完全。如果 μ 中的所有合取查询都是极小、连通且两两不等价的，那么以下条件恰有一个成立：

1. μ 等于 μ_ℓ， μ_e，或 μ_c，而 μ 的韧性属于 *P* 类。在这种情况下， Δ_μ 具有一种分数多态射，它相对于 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_\mu)$ 是典范且伪循环的。2. Δ_μ 原始正合取构造 $(\{0,1\}; \mathrm{OIT})$，并且 μ 的韧性问题是 *NP* 完全的。

14 有向图查询韧性的复杂性

我们先概述定理 34 的证明策略。首先注意，不失一般性，可以假设 μ 中的所有查询都是极小的、连通的，且两两不等价。如果 μ 等于 μ_ℓ、μ_e、μ_c，那么引理 35 已证明第 1 项中的性质。否则，我们证明 μ 要么包含一个查询 μ_0，其中含有长度为 ≥ 3的环，要么具有一个没有有向环的有限对偶。在这两种情况下，我们都证明第 2 项成立。

容易看出，μ_ℓ、μ_e 或 μ_c 的韧性问题属于 P 类。在引理 35 中，我们给出了一个更强的代数陈述，对应定理 34 中的第 1 项；这一结论此前基本上已为人所知，但为了方便读者，我们在此给出证明。

▶ **引理 35.** 对于每个 $\mu \in \{\mu_\ell, \mu_e, \mu_c\}$，赋值结构 Δ_μ 关于 $\mathfrak{C}_\mu$ 都具有典范伪循环分数多态。特别地，μ的韧性问题属于 *P* 类。

证明。显然，$\mathfrak{C}_{\mu_e}$ 是一个定义在 1元论域 $\{c\}$ 上的结构，且 $R^{\mathfrak{C}_{\mu_e}} = \emptyset$。注意到$\mathfrak{C}_{\mu_e}$ 是有限界定的。每个元数为 ω 的分数运算 ≥ 2 都是 Δ_{μ_e} 关于 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_{\mu_e})$ 的典范伪循环分数多态。

容易看出，$\mathfrak{C}_{\mu_\ell}$ 具有可数域 C_{μ_ℓ}，并且 $R^{\mathfrak{C}_{\mu_\ell}} = C^2_{\mu_\ell} \setminus \{(c,c) \mid c \in C_{\mu_\ell}\}$。注意，$\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_{\mu_\ell}) = \mathrm{Aut}(\Delta_{\mu_\ell})$ 是作用在 C_{μ_ℓ} 上的全对称群。注意到 $\mathfrak{C}_{\mu_\ell}$ 是有限界定的，因为有限关系 $\{R\}$-结构 $\mathfrak{A}$ 嵌入 $\mathfrak{C}_{\mu_\ell}$ 当且仅当它满足句子 $\forall x, y\big(\neg R(x,x) \wedge (x = y \vee R(x,y))\big)$。令 $f\colon C^2_{\mu_\ell} \to C_{\mu_\ell}$ 为单射，并令 ω 为 C_{μ_ℓ} 上定义的二元分数运算，定义为 $\omega(f) = 1$。容易验证，ω 是 Δ_{μ_ℓ}的分数多态射；该多态射关于 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_{\mu_\ell})$ 是典范且伪循环的。

唯一使引理陈述并非平凡的查询是 $\mu := \mu_c$。下面的证明改编自 [25, Example 5.23] for Δ_μ。我们证明 Δ_μ 关于自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_\mu)$ 具有一个三元典范伪循环分数多态。为便于阅读，我们用 R 表示 $R^{\mathfrak{C}_\mu}$，并用 $\breve{R}$ 表示 $\{(a,b) \mid (b,a) \in R^{\mathfrak{C}_\mu}\}$。

竞赛图是一种无环有向图，其中任意两个不同的顶点 a, b 之间，图中恰有一条边：要么是边 (a,b)，要么是边 (b,a)。注意，$\mathfrak{C}_\mu$ 必须是竞赛图：μ 排除了存在顶点 a, b，使得 (a,b) 和 (b,a) 都是边的可能性。反设存在顶点 a, b，使得 (a,b) 和 (b,a) 都不是边。那么，从 $\mathfrak{C}_\mu$ 中添加边 (a,b) 所得到的图不满足 μ，因此存在一个到 $\mathfrak{C}_\mu$ 的同态。这个同态是 $\mathfrak{C}_\mu$ 的一个自同态，但不是嵌入，这与 $\mathfrak{C}_\mu$ 是模型完备核的假设矛盾。

根据定理 14 的第 (3) 项，结构 $\mathfrak{C}_\mu$ 是齐性的，因此它（同构于）能够嵌入所有有限竞赛图的齐性竞赛图。注意，这意味着 $\mathfrak{C}_\mu$ 是有限界定的：有限关系 $\{R\}$-结构 $\mathfrak{A}$ 能嵌入 $\mathfrak{C}_\mu$ 当且仅当它满足句子

$$\forall x, y\big(\neg R(x,x) \wedge \neg(R(x,y) \wedge R(y,x)) \wedge (x = y \vee R(x,y) \vee R(y,x))\big).$$

赋值结构 $\mathfrak{C}_\mu$ 具有某些典范三元多态射，我们将在下文定义；从某种意义上说，它们模拟了轨道上的多数行为和少数行为。考虑顶点集为 C^3_μ、定义如下的竞赛图 $\mathfrak{T}_{\mathrm{majo}}$。若在 (x_0, x_1, x_2) 与 (y_0, y_1, y_2) 之间有一条边，则

- 对于某个 $i \in \{0,1,2\}$，我们有 $x_i = y_i$，且 (x_{i+1}, y_{i+1}) 在 $\mathfrak{C}_\mu$ 中构成一条边（其中下标按模 3 计算）；或者，对于所有 $i \in \{0,1,2\}$，(x_i, y_i) 在 $\mathfrak{C}_\mu$ 中对于至少两个不同的参数 $i \in \{1,2,3\}$ 构成一条边。

由于 $\mathfrak{C}_\mu$ 是一个竞赛图，因此 $\mathfrak{T}_{\text{majo}}$ 也是一个竞赛图，尤其是 $\mathfrak{T}_{\text{majo}} \models \neg\mu$。于是存在一个从 $\mathfrak{T}_{\text{majo}}$ 到 $\mathfrak{C}_\mu$的同态 f，它必然是单射且为嵌入。[2] 根据 $\mathfrak{C}_\mu$的齐性，Aut($\mathfrak{C}_\mu$) 的 k-元组的轨道由各项组成的配对的轨道决定，因此根据定义显然可知，f 是伪循环的，并且相对于 Aut($\mathfrak{C}_\mu$) 是典范的。

顶点集为 C_μ^3 的竞赛图 $\mathfrak{T}_{\text{mino}}$ 的定义类似：若 (x_0, x_1, x_2) 与 (y_0, y_1, y_2) 之间有一条边，则

- 对于某个 $i \in \{0,1,2\}$，我们有 $x_i = y_i$，且 (y_{i+1}, x_{i+1}) 在 $\mathfrak{C}_\mu$ 中构成一条边（其中下标按模 3 计算）[3]，或者$x_i \neq y_i$对于所有 $i \in \{0,1,2\}$，且 (x_i, y_i) 在 $\mathfrak{C}_\mu$ 中恰好对一个
- 参数或恰好对三个参数 $i \in \{1,2,3\}$ 构成一条边。

与 $\mathfrak{T}_{\text{majo}}$ 的情形类似，我们可以验证 $\mathfrak{T}_{\text{mino}} \models \neg\mu$，因此存在一个从 $\mathfrak{T}_{\text{mino}}$ 到 $\mathfrak{C}_\mu$ 的同态g，它必然是单射且为嵌入。按照与 f 相同的论证，运算 g 是伪循环的，并且相对于自同构群 Aut($\mathfrak{C}_\mu$) 是典范的。

令 ω 为由 $\omega(f) = 2/3$ 和 $\omega(g) = 1/3$定义的三元分数运算。注意，ω 是 C_μ上的伪循环典范三元分数运算。我们证明$\omega \in \text{fPol}(\Delta_\mu)$。设 (x, u)，(y, v)，$(z, w) \in C_\mu^2$。我们想要验证

$$E_\omega\left[h \mapsto R^{\Delta_\mu}\left(h\left(\begin{pmatrix}x\\u\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y\\v\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}\right)\right)\right] \leq \frac{1}{3}(R^{\Delta_\mu}(x,u) + R^{\Delta_\mu}(y,v) + R^{\Delta_\mu}(z,w)),$$

等价地

$$2R^{\Delta_\mu}\left(f\left(\begin{pmatrix}x\\u\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y\\v\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}\right)\right) + R^{\Delta_\mu}\left(g\left(\begin{pmatrix}x\\u\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y\\v\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}\right)\right) \leq R^{\Delta_\mu}(x,u) + R^{\Delta_\mu}(y,v) + R^{\Delta_\mu}(z,w). \tag{2}$$

很容易验证，无论如何将元组 (x, u)、(y, v) 和 (z, w) 分配到集合 R、$\breve{R}$ 和 $\{(a, a) \mid a \in C_\mu\}$ 之间，不等式 (2) 都成立。由此得出，$\omega \in \text{fPol}(\Delta_\mu)$，因此 Δ_μ 具有典范伪循环分数多态。

令 $\mu \in \{\mu_\ell, \mu_e, \mu_c\}$。那么，$\mu$ 的盖夫曼图是完全图，因此根据定理 14，$\mathfrak{C}_\mu$ 是齐性的。在每种情况下，我们还证明了 $\mathfrak{C}_\mu$ 是有限界定的，并且相对于 Aut($\mathfrak{C}_\mu$)，它具有典范伪循环分数多态。因此，根据定理 29，μ 的韧性问题属于 P 类。

◀

5 无自连接查询与自连接变体

无自连接性是数据库理论中的一个基础且常用的概念。

▶**定义 36**（无自连接查询）。若合取查询的并 μ 中每个关系符号最多出现一次，则称其为无自连接 μ。

请注意，这比无自连接合取查询的并这一概念限制更严格。

[2] Simon Knäuer 已在其硕士论文 [16, 命题 5.10]中描述过运算 f。他还描述了一种少数变体，但该变体与我们下文所述的版本不同（我们也会指出两者的区别）。这一区别对于随后定义 Δ_μ的分数多态至关重要。

[3] 在这里，Knäuer 在 [16] 中要求 (x_{i+1}, y_{i+1}) 是一条边，而不是 (y_{i+1}, x_{i+1})。

16 有向图查询韧性的复杂性

▶**引理 37.** 设 μ 是签名为 τ的无自连接合取查询的并，其中包含一个签名为 $\rho \subseteq \tau$的合取查询 ν。设 $\mathfrak{B}$ 是 $\mathfrak{C}_\mu$的 ρ-约化。那么， $\mathfrak{B}$是 ν的对偶，而 Δ_μ 的 ρ-约化等于 $\mathfrak{B}_0^1$。

证明。 显然， $\mathfrak{B} \models \neg\nu$。令 $\mathfrak{A}$ 为一个有限关系 ρ-结构，使得 $\mathfrak{A} \models \neg\nu$。令 $\mathfrak{A}'$为一个 τ-扩张 $\mathfrak{A}$，其中 $R^{\mathfrak{A}'}$对每个 $R \in \tau \setminus \rho$均为空。于是 $\mathfrak{A}' \models \neg\mu$，因此存在到 $\mathfrak{C}_\mu$的同态。同一个映射也是从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$的同态。因此 $\mathfrak{B}$是 ν的对偶。最后一个陈述可由定义直接得出。◀

我们介绍一种构造，用于从无自连接查询得到带有自连接的查询；这种构造对于我们的困难性证明至关重要。

▶定义 *38*。设 ν 是签名 τ上的无自连接合取查询的并，且 $f\colon \tau \to \tau$ 是一个保持元数的映射。那么，将 ν中的每个原子式 $R(x_1, \ldots, x_k)$替换为 $f(R)(x_1, \ldots, x_k)$后得到的查询并记作 $f(\nu)$。若对于所有元数相同的 R、$S \in \tau$，只要 ν 包含一个带有原子式 $R(x_1, \ldots, x_k)$ 和 $S(x_1, \ldots, x_k)$ 的查询，其中变量为 $x_1, \ldots, x_k$，就有 $f(R) \neq f(S)$，则称 f 是 ν-单射的。

文献中常将某个无自连接的 ν 和保持元数的 f 所对应的、形如 $f(\nu)$ 的查询的并称为 ν 的一种自连接变体 [12]。

▶**引理 39**。在签名 σ 上的每个极小合取查询的并 μ，都可以写成 $f(\nu)$，其中 ν 是某个签名为 τ 的无自连接合取查询的并 ν，其签名包含 σ，且存在某个 ν-单射 $f\colon \tau \to \sigma$。

证明。对于每个 $R \in \sigma$，令 n_R 为 μ 中 R 的出现次数，并令 $R_0 := R$。令 $\tau = \bigcup_{R\in\sigma} \{R_0, R_1, \ldots, R_{n_R-1}\}$，其中所有符号 $R_i, i \geq 1$ 都是新符号，且与 R 具有相同的元数。定义 ν 为由 μ 得到的合取查询的并：对于每个 $R \in \sigma$，将 μ 中 R 的各次出现分别替换为 $R_0, \ldots, R_{n_R-1}$（每个符号使用一次）；注意，ν 是无自连接的。令 $f\colon \tau \to \sigma \subseteq \tau$ 定义为 $f(R_0) = \cdots = f(R_{n_R-1}) = R, R \in \sigma$。于是 $f(\nu) = \mu$。此外，f 是 ν-单射，因为 μ 中的查询是极小的，因此每个原子至多出现一次。◀

接下来我们给出本节的主要结果——定理 40。该定理及其证明受到 [12, 引理 21] 的启发；他们的结果是定理 40 的一个特例，因为它只适用于合取查询，而非合取查询的并，并且只给出了一个多项式时间归约，而我们的结果甚至还提供了一个 pp-构造（根据引理 22，这蕴含一个多项式时间归约）。

▶**定理 40**。设 ν 是签名 τ 上的无自连接连通合取查询的并，且设 $f\colon \tau \to \tau$ 是一个保持元数的 ν-单射映射。若 $f(\nu)$ 中的所有查询都是极小且两两不等价的，则 $\Delta_{f(\nu)}$ *pp*-构造 Δ_ν。特别地，ν 的韧性问题可在多项式时间内归约到 $f(\nu)$ 的韧性问题。

证明。 设 V是 ν 的变量有限集，它同时也是 $\mu := f(\nu)$ 的变量集，并设 Q 是构成并集 ν 的合取查询集合。注意，由于ν 中的所有查询都是连通的，μ也如此。此外，由于 μ 中的所有查询两两不等价且均为极小的，因此它们在同态意义下两两不可比较（见第 2.3 节）。

令 D_μ 为 Δ_μ 的论域。令 $D := (D_\mu)^{V\times Q}$，即 D 是 D_μ 的有限幂；使用 $V \times Q$ 作为索引集会比使用集合 $\{1, \ldots, |V \times Q|\}$ 更方便。我们在论域 D 上定义 Δ_μ 的一个 pp-幂 Δ，其签名为 τ。对于每个元数为 k 的 $R \in \tau$ 以及 $(d^1, \ldots, d^k) \in D^k$，如果 $R(x_1, \ldots, x_k)$ 是 ν 中某个查询 ν_0 的一个原子，那么

$$R^\Delta(d^1, \ldots, d^k) := f(R)^{\Delta_\mu}(d^1_{x_1,\nu_0}, \ldots, d^k_{x_k,\nu_0}).$$

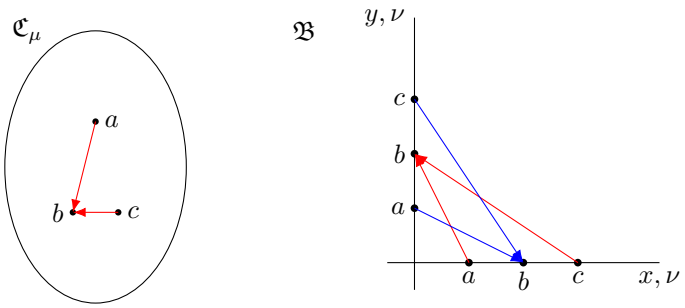

图 1 定理 40 的证明中，结构 $\mathfrak{C}_\mu$ 与 $\mathfrak{B}$ 之间关系的示意图，适用于 $\nu = \exists x, y(R(x, y) \wedge S(y, x))$ 和 $\mu = \exists x, y(R(x, y) \wedge R(y, x))$。$R$ 中的元组以红色表示，S 中的元组以蓝色表示。

其思路是，查询、关系符号和变量的组合能够唯一确定 μ 中的一个原子，因此可以编码来自 τ 的关系符号 R 和 R' 之间的差异，使得 $f(R) = f(R')$。

注意，由于 Δ_μ 中的关系取值为 0-1，因此 Δ 中的关系也如此；因此，对于论域为 D 的关系 τ-结构 $\mathfrak{B}$，$\Delta = \mathfrak{B}_0^1$ 成立，其中对于每个 $R \in \tau$ 和 $(d^1, \dots, d^k) \in D^k$，如果 $R(x_1, \dots, x_k)$ 是 ν 中查询 ν_0 的一个原子，那么

$$\mathfrak{B} \models R(d^1, \dots, d^k) \Leftrightarrow \mathfrak{C}_\mu \models f(R)(d^1_{x_1,\nu_0}, \dots, d^k_{x_k,\nu_0})$$

（关于 $\mathfrak{C}_\mu$ 与 $\mathfrak{B}$ 之间关系的示意图，见图 1。）

断言。 $\mathfrak{B}$ 是 ν 的对偶。

为证明这一点，我们首先论证 $\mathfrak{B} \not\models \nu$。如果 $\alpha\colon V \to D$ 见证了 $\mathfrak{B} \models \nu_0$，其中 ν_0 是 ν 中的一个查询，那么很容易验证，由 $v \mapsto \alpha(v)_{v,\ \nu_0}$ 定义的映射 $\alpha'\colon V \to D_\mu$ 见证了 $\mathfrak{C}_\mu \models f(\nu_0)$，从而得到 $\mathfrak{C}_\mu \models \mu$，这与 $\mathfrak{C}_\mu$ 是 μ 的对偶矛盾。因此，$\mathfrak{B} \not\models \nu$。

剩下要证明的是：若 $\mathfrak{A}$ 是一个有限论域 A 上的关系 τ-结构，且满足 $\mathfrak{A} \not\models \nu$，则 $\mathfrak{A}$ 同态地映射到 $\mathfrak{B}$ 中。为此，我们在论域 $A' = \{a_{v,\nu_0} \mid a \in A, v \in V, \nu_0 \in Q\}$ 上构造一个 $f(\tau)$-结构 $\mathfrak{A}'$。对于每个 $R \in \tau$，如果 $R(x_1, \dots, x_k)$ 是 ν 中某个查询 ν_0 的一个原子，并且 $(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathfrak{A}}$，那么我们将元组 $((a_1)_{x_1,\nu_0}, \dots, (a_k)_{x_k,\nu_0})$ 放入 $f(R)^{\mathfrak{A}'}$ 中。$\mathfrak{A}'$ 的关系中没有其他元组。

我们论证 $\mathfrak{A}' \not\models \mu$。反设存在一个合取查询$\mu_0$，它属于 μ，定义在变量集 $V_0 \subseteq V$ 上，并且存在一个映射 $\beta\colon V_0 \to A'$，证明 $\mathfrak{A}' \models \mu_0$。那么，对于 μ_0中的每个原子 $f(R)(x_1, \dots, x_k)$，都有 $(\beta(x_1) \dots, \beta(x_k)) \in f(R)^{\mathfrak{A}'}$。我们通过令 $\beta_Q(x) := \nu_0$ 以及 $\beta_V(x) := y$ 来定义映射 $\beta_Q\colon V_0 \to Q$ 和 $\beta_V\colon V_0 \to V$，其中 $\nu_0 \in Q$ 和$y \in V$满足：对于某个 $a \in A$，有 $\beta(x) = a_{y,\nu_0}$。回顾一下，μ_0 是连通的。因此，根据该构造，β_Q 是常值的；令 $\nu_0 \in Q$ 为 β_Q的像中唯一的元素。

设 $f(R)(x_1, \dots, x_k)$ 是 μ_0 中的一个原子式。由于元组 $(\beta(x_1) \dots, \beta(x_k))$ 已被放入 $f(R)^{\mathfrak{A}'}$，ν_0包含一个原子式 $R'(\beta_V(x_1) \dots, \beta_V(x_k))$，其中 $R' \in \tau$ 满足 $f(R') = f(R)$。因此，$f(\nu_0)$ 中存在一个原子式 $f(R)(\beta_V(x_1) \dots, \beta_V(x_k))$。于是，$\beta_V$定义了从 μ_0 到 $f(\nu_0)$ 的一个同态。由于 μ 中的查询两两同态不可比较，我们必有 $f(\nu_0) = \mu_0$。此外，由于 $f(R)(x_1, \dots, x_k)$ 是 μ_0 中的一个原子式，对于所有 $p \in \mathbb{N}$，我们必有原子式 $f(R)(\beta_V(x_1) \dots, \beta_V(x_k))$、$f(R)(\beta_V^2(x_1) \dots, \beta_V^2(x_k))$、…、$f(R)(\beta_V^p(x_1) \dots, \beta_V^p(x_k))$ 属于 $f(\nu_0) = \mu_0$。

由于 β_V 是从 μ_0 到 μ_0 的一个同态，且 μ_0 是极小的，因此 β_V 的像等于 V_0。因此，β_V：$V_0 \to V_0$ 是满射。由于 V_0 是一个有限集，这意味着 β_V 是 V_0 的一个置换，其逆为 $\beta_V^{-1} = \beta_V^p$，其中某个 $p \in \mathbb{N}$ 存在。根据上一段，$f(R)(\beta_V^{-1}(x_1) \dots, \beta_V^{-1}(x_k))$ 是 μ_0 中的一个原子式。

设 β': $V \to A$ 是任意一个映射，满足对于每个 $x \in V_0$，都有 $\beta'(x) = a$，其中 $a \in A$ 满足 $\beta(\beta_V^{-1}(x)) = a_{x,\ \nu_0}$。那么，对于 ν_0 中的每个原子 $R(x_1, \dots, x_k)$，$f(R)(x_1, \dots, x_k)$ 都是 μ_0 的一个原子，因此 $f(R)(\beta_V^{-1}(x_1)\dots, \beta_V^{-1}(x_k))$ 也是 μ_0 的一个原子。由于 β 见证了 μ_0 在 $\mathfrak{A}'$ 中成立，

$$(\beta'(x_1)_{x_1,\nu_0}, \dots, \beta'(x_k)_{x_k,\nu_0}) = (\beta(\beta_V^{-1}(x_1)), \dots, \beta(\beta_V^{-1}(x_k))) \in f(R)^{\mathfrak{A}'}.$$

根据 f 的 ν-单射性，ν_0 中不存在满足 $f(R') = f(R)$ 的原子 $R'(x_1, \dots, x_k)$，因此根据 $\mathfrak{A}'$ 的定义，必有 $(\beta'(x_1)\dots, \beta'(x_k)) \in R^{\mathfrak{A}}$。于是，$\beta'$ 见证了 $\mathfrak{A} \models \nu_0$，因此也见证了 $\mathfrak{A} \models \nu$，这就产生了矛盾。由此可得 $\mathfrak{A}' \not\models \mu$。

由于 $\mathfrak{C}_\mu$ 是 μ的对偶，因此存在一个同态 h': $\mathfrak{A}' \to \mathfrak{C}_\mu$。令 h: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ 定义为 $h(a) := (h'(a_{v,\nu_0}))_{v \in V, \nu_0 \in Q}$。我们断言 h 是从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$的一个同态。为此，设 $R \in \tau$的元数为 k，且 $(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathfrak{A}}$。设 ν_0是 ν中的一个查询，含有一个原子 $R(x_1, \dots, x_k)$。那么 $((a_1)_{x_1,\nu_0}, \dots, (a_k)_{x_k,\nu_0}) \in f(R)^{\mathfrak{A}'}$，并且由于 h'是一个同态，$(h'((a_1)_{x_1,\nu_0}) \dots, h'((a_k)_{x_k,\nu_0})) \in f(R)^{\mathfrak{C}_\mu}$。接着，根据 $\mathfrak{B}$的定义，

$$(h(a_1), \dots, h(a_k)) = ((h'((a_1)_{v,\nu_0}))_{v \in V, \nu_0 \in Q}, \dots, (h'((a_k)_{v,\nu_0}))_{v \in V, \nu_0 \in Q}) \in R^{\mathfrak{B}}.$$

由此可知，$\mathfrak{B}$ 是 ν的对偶。

由于 $\mathfrak{B}$ 和 $\mathfrak{C}_\nu$ 都是 ν的对偶，它们同态等价，因此 Δ 和Δ_ν 分数同态等价（见注 19）。由于 Δ 是Δ_μ的 pp-幂，因此 Δ_μ 原始正合取构造 Δ_ν。定理的最后一个结论由引理 22 和命题 11 得出。◀

6 困难性证明

本节旨在介绍若干困难性结果，这些结果将在定理 34 的证明中用到。首先，我们需要定义若干本节将用到的图论概念。设 $\mathfrak{G} = (V;\ E)$是一个有向多重图，且 $k \in \mathbb{N}$。$\mathfrak{G}$中的一条长度为 k 的有向游走，是由 V中的元素组成的序列 $W = (v_0,\ v_1,\ \dots,\ v_k)$，满足对每个 $i \in \{0,\ \dots,\ k-1\}$，都有 $(v_i,\ v_{i+1}) \in E$。若 $v_0 = v_k$，则该游走 W是闭合的。$\mathfrak{G}$ 中一条长度为 k的有向路径，是一条有向游走 $(v_0,\ \dots,\ v_k)$，满足对所有互不相同的 i、$j \in \{0,\ \dots,\ k\}$，都有 $v_i \neq v_j$。$\mathfrak{G}$ 中一条长度为 k的有向环，是一条闭有向游走 $(v_0,\ \dots,\ v_k)$，满足对所有互不相同的i、$j \in \{0,\ \dots,\ k-1\}$，都有 $v_i \neq v_j$。$\mathfrak{G}$ 中一条长度为 k的定向环，是由 V中的元素组成的序列 $(v_0,\ v_1,\ \dots,\ v_k)$，满足对每个 $i \in \{0,\ \dots,\ k-1\}$，都有 $v_k = v_0$，且 $(v_i,\ v_{i+1}) \in E$或 $(v_{i+1},\ v_i) \in E$；并且对每个 $j \in \{0,\ \dots,\ k-1\}$，都有 $j \neq i$、$v_i \neq v_j$。

现在假设 $\mathfrak{G}$ 是无向的。$\mathfrak{G}$ 中的环是指这样一个序列：将其视为有向多重图时，它构成 $\mathfrak{G}$ 中的一个定向环。若 $\mathfrak{G}$ 不包含任何环，并且在将 $\mathfrak{G}$ 中的多条边替换为单条边后所得的图是连通的（参见第 2.3 节），则称 $\mathfrak{G}$ 为一棵树。

6.1 带环定向的查询的困难性

如果签名 τ 中的所有关系符号都是二元的，则称其为 二元。在本节中，我们一般讨论二元签名，而不局限于签名 $\{R\}$。对于任意合取

二元签名 τ 上的查询 μ，令 Multigraph(μ) 表示一个无向多重图，其边关系是规范数据库 $\mathfrak{D}_\mu$ 中所有关系的并（按多重集计）。

本节证明：对于二元签名上的极小连通合取查询 μ，若 Multigraph(μ) 包含长度至少为 3 的环，则其韧性问题是困难的；更一般地，对于包含此类查询的并集，韧性问题同样是困难的。为此，我们先给出一个关于无自连接合取查询的结果，该结果与定理 40 结合后，将为二元签名上的任意查询给出困难性证明。

▶**定理 41**。设 μ 是二元签名τ上的连通无自连接合取查询。若 $\mathrm{Multigraph}(\mu)$ 包含一个长度为 ≥ 3 的环，则 Δ_μ 可 *pp*-构造 $(\{0,1\}, \mathrm{OIT})$。

定理 41 的证明受到 [6,例 8.18] 中一个简单得多的 pp-构造的启发，该构造针对查询 $\mu_\triangle := \exists x,\ y,\ z(R(x,\ y) \wedge S(y,\ z) \wedge T(z,\ x))$。这是定理 41 适用范围内最简单的查询。我们建议先看看这个例子，以此为本证明热身。与一般证明的主要区别在于，$\mu_\triangle$ 是一个盖夫曼图完全的查询，因此具有齐次对偶[4],，这大大简化了构造的第二部分。

定理 41 的证明。令 D 表示 Δ_μ 和 $\mathfrak{C}_\mu$的共同论域。令 V_{all} 为一个可数无限变量集。下文中，我们将简单地用 R 表示 $R^{\mathfrak{C}_\mu}$ 和 R^{Δ_μ}，其中 $R \in \tau$；其含义总能从上下文中明确。为提高可读性，在 pp-表达式中，我们将写作 R^* 而不是 Opt(R)。我们常将 τ 中关系的元素称为边。由于 Multigraph(μ)包含一个长度为 ≥ 3的环，由 $\mathfrak{D}_\mu$所有关系（作为多重集）的并构成边关系的有向多重图包含一个长度为 $r \geq 3$的定向环 C。由于 μ 是无自连接查询，我们不失一般性地假设 C是一个有向环。令 $V = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V_{\mathrm{all}}$为 μ的变量集。令

$$\mu = \exists v_1, \ldots, v_n (R(x,y) \wedge S(y,z) \wedge T(z,w) \wedge \mu_C \wedge \mu'),$$

其中 R、S、T 是互不相同的二元关系符号，而 x、y、z 是 $\{v_1, \ldots, v_n\}$中的互不相同的变量。若 $r = 3$，则 $x = w$，且 μ_C是空合取。若 $r \geq 4$，则$w \notin \{x, y, z\}$，并且 $R(x, y) \wedge S(y, z) \wedge T(z, w) \wedge \mu_C$构成有向环 C。注意，μ'是一个由来自 V 的变量构成的原子合取，其中不包含来自 $\{R, S, T\}$的任何关系符号，也不包含 μ_C。

我们将在 $r \geq 4$ 的情形下讨论；证明可以直接调整，以适用于 $r = 3$ where $z = w$ 的情形。不失一般性，我们可以假设 $(v_1, v_2, v_3, v_4) = (x, y, z, w)$。由于 μ_C 不能包含 v_2 和 v_3，且必然包含 v_1 和 v_4，我们可以假设 $\mu_C = \mu_C(v_1, v_4, v_5, \ldots, v_n)$。令 $\tau_C \subsetneq \tau$ 为 μ_C 的签名。环 C 如图 2 所示。关系 R、S、T 分别用红色、蓝色和绿色的边表示。黑色边表示由 τ_C 中的边组成的环的其余部分。符号来自 $\tau \setminus (\{R, S, T\} \cup \tau_C)$ 的原子式未在图中画出。

令 $\mu^*(v_1, \ldots, v_n)$ 表示公式 $\mu_C \wedge \mu'$。令 ψ^* 表示由 μ^* 得到的 pp表达式：将其中所有 $\wedge$ 替换为 $+$，并将所有符号 R 替换为 R^*。我们还需要以下记号。若 $k, \ell \in \mathbb{N}$、$k \leq \ell$ 和 $u_1, \ldots, u_k \in V_{\mathrm{all}}$，则 $(u_1, \ldots, u_k)^+$ 表示一个

[4] 我们指出，[6, Example 8.18] 中使用的对偶与 $\mathfrak{C}_{\mu_\triangle}$ 中的对偶不同。该处使用的对偶嵌入了每个不满足 $\mu_\triangle$ 的有限关系 $\{R, S, T\}$-结构 $\mathfrak{A}$，而我们的对偶是一个模型完备核；例如，两个顶点上的空结构可以同态地映射到 $\mathfrak{C}_{\mu_\triangle}$，但不能嵌入其中。

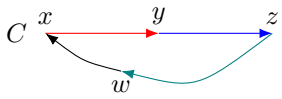

图 2 C环的示意图。

由 V^{ℓ}所有元素组成的元组，其中每个位置 $i \in \{1, \dots, k\}$ 上都是变量 u_i，其余位置上都是新变量，也就是说，这些变量此前从未出现过。元组的长度 ℓ 始终可从上下文中明确得知。若 $\phi(x_1, \dots, x_\ell)$ 是一阶 τ-公式，则我们用 $\phi^+(x_1, \dots, x_k)$ 表示一阶公式 $\exists x_{k+1}, \dots, x_\ell.\, \phi(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_\ell)$。下文中，我们采用如下表述：若原子表达式的取值为 0，则称其成立；若原子表达式不成立，则称其被违反。由于我们只会在 Δ_μ 中计算 pp表达式，因此对于每个定义在 τ 上的 pp表达式 ψ，我们将用 ψ 代替 ψ^{Δ_μ}。ψ 的代价始终指 ψ 在 Δ_μ 中的代价。以下 pp表达式中的所有下确界，均取遍该 pp表达式中出现的变量集合与该 pp表达式的自由变量集合之差。

接下来，我们定义辅助原始正表达式 ψ_R、ψ_S 和 ψ_T，它们将在构造中使用。pp表达式 ψ_R 定义如下：

$$\begin{aligned}\psi_R(x_0, y_0, x_1, y_1) = \inf \big(& R(x_0, y_0) + S(y_0, z_0) + T^*(z_0, w_0) + \psi^*((x_0, y_0, z_0, w_0)^+) \\ & + R^*(x_1, y_0) + S(y_0, z_0) + T(z_0, w_1) + \psi^*((x_1, y_0, z_0, w_1)^+) \\ & + R(x_1, y_1) + S^*(y_1, z_0) + T(z_0, w_1) + \psi^*((x_1, y_1, z_0, w_1)^+) \big).\end{aligned}$$

注意，ψ_R 的代价至少为 3，因为该表达式的每一行都包含一个 μ 的副本，其中有两个原子不是清晰的。

下面我们定义无量词公式 ϕ^0_R 以及 ϕ^1_R 其性质是对于所有 $x_0, y_0, x_1, y_1 \in D$,

$$\mathfrak{C}_\mu \models \mathrm{Opt}(\psi_R)(x_0, y_0, x_1, y_1) \Leftrightarrow (\phi^0_R \vee \phi^1_R)^+(x_0, y_0, x_1, y_1);$$

图 3 展示了 ψ_R、ϕ^0_R 和 ϕ^1_R 的示意图。为避免列出所有变量，我们假设变量 x_0，y_0，x_1，y_1 是 ϕ^0_R 和 ϕ^1_R 的前四项，并用“…”表示其余变量。由于 ϕ^0_R 和 ϕ^1_R 是一阶公式，重复相同的原子并无影响。不过，为了便于与 ψ_R 比较，我们在可能重复上一行中某个原子的位置留出空格。令

$$\begin{aligned}\phi^0_R(x_0, y_0, x_1, y_1, \dots) := & \neg R(x_0, y_0) \quad \wedge S(y_0, z_0) \quad \wedge T(z_0, w_0) \wedge \mu^*((x_0, y_0, z_0, w_0)^+) \\ & \wedge R(x_1, y_0) \qquad\qquad \wedge \neg T(z_0, w_1) \wedge \mu^*((x_1, y_0, z_0, w_1)^+) \\ & \wedge R(x_1, y_1) \quad \wedge S(y_1, z_0) \qquad\qquad \wedge \mu^*((x_1, y_1, z_0, w_1)^+)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\phi^1_R(x_0, y_0, x_1, y_1, \dots) := & R(x_0, y_0) \wedge \neg S(y_0, z_0) \wedge T(z_0, w_0) \wedge \mu^*((x_0, y_0, z_0, w_0)^+) \\ & \wedge R(x_1, y_0) \qquad\qquad \wedge T(z_0, w_1) \wedge \mu^*((x_1, y_0, z_0, w_1)^+) \\ & \wedge \neg R(x_1, y_1) \wedge S(y_1, z_0) \qquad\qquad \wedge \mu^*((x_1, y_1, z_0, w_1)^+).\end{aligned}$$

我们论证 ϕ^0_R 和 ϕ^1_R 在 $\mathfrak{C}_\mu$中可满足。设 $(\phi^0_R)'$ 为从 ϕ^0_R 中省略否定原子并对其所有变量作存在量化后得到的原始正句子。$(\phi^0_R)'$ 的规范数据库不满足 μ，因此映射

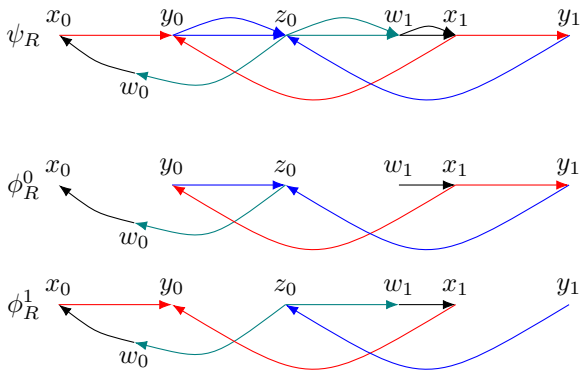

图 3 pp表达式 ψ_R 以及无量词公式 ϕ^0_R 和 ϕ^1_R的示意图 .

同态地映入 $\mathfrak{C}_\mu$。由于 $\mathfrak{C}_\mu \not\models \mu$，规范数据库的像表明 ϕ^0_R在 $\mathfrak{C}_\mu$中可满足；对 ϕ^1_R 的论证类似。注意，在 $\mathfrak{C}_\mu$ 中，任何满足ϕ^0_R 或 ϕ^1_R 的元组都能证明 ψ_R 的代价 3 可以达到。因此，Opt(ψ_R)恰好由实现代价 3 的元组组成。还要注意，要达到 Opt(ψ_R)定义中的下确界，就必须违反 ψ_R中每个 μ 副本的两条非清晰边之一。要实现代价 3，只有两种选择：要么违反 $R(x_0, y_0)$和$T(z_0, w_1)$，要么违反 $S(y_0, z_0)$和 $R(x_1, y_1)$。因此，对所有 x_0，y_0，x_1，$y_1 \in D$，我们有

$$\mathfrak{C}_\mu \models \mathrm{Opt}(\psi_R)(x_0, y_0, x_1, y_1) \Leftrightarrow (\phi^0_R \vee \phi^1_R)^+(x_0, y_0, x_1, y_1)$$

并且，特别是，

$$\mathfrak{C}_\mu \models \mathrm{Opt}(\psi_R)(x_0, y_0, x_1, y_1) \Rightarrow (\neg R(x_0, y_0) \wedge R(x_1, y_1)) \vee (R(x_0, y_0) \wedge \neg R(x_1, y_1)). \quad (3)$$

从这个意义上说，Opt(ψ_R)意味着两个 R-边交替出现。类似地，pp表达式 Opt(ψ_S) 将意味着一条 R-边和一条 S-边交替出现，而 Opt(ψ_T) 将意味着一条 R-边和一条 T-边交替出现。

pp表达式 ψ_S 定义如下：

$$\begin{aligned}\psi_S(x_0, y_0, y_2, z_1) := \inf \big(& R(x_0, y_0) + S^*(y_0, z_0) + T(z_0, w_0) + \psi^*((x_0, y_0, z_0, w_0)^+) \\ & + R^*(x_0, y_1) + S(y_1, z_0) + T(z_0, w_0) + \psi^*((x_0, y_1, z_0, w_0)^+) \\ & + R(x_1, y_1) + S(y_1, z_0) + T^*(z_0, w_1) + \psi^*((x_1, y_1, z_0, w_1)^+) \\ & + R(x_1, y_1) + S^*(y_1, z_1) + T(z_1, w_2) + \psi^*((x_1, y_1, z_1, w_2)^+) \\ & + R^*(x_1, y_2) + S(y_2, z_1) + T(z_1, w_2) + \psi^*((x_1, y_2, z_1, w_2)^+) \big).\end{aligned}$$

注意，ψ_S 的代价至少为 5，因为该表达式的每一行都包含 μ 的一个副本，其中有两个加项不是清晰的。

下面我们定义无量词公式 ϕ^0_S 和 ϕ^1_S，它们具有这样的性质：对于所有 x_0，y_0，y_2，$z_1 \in D$

$$\mathfrak{C}_\mu \models \mathrm{Opt}(\psi_S)(x_0, y_0, y_2, z_1) \Leftrightarrow (\phi^0_S \vee \phi^1_S)^+(x_0, y_0, y_2, z_1);$$

示意图见图 4，其中展示了 ψ_S、ϕ^0_S 和 ϕ^1_S。同样，为避免列出所有变量，我们假设变量 x_0、y_0、y_2、z_1 是 ϕ^0_S 和 ϕ^1_S 的前四个元素，并用

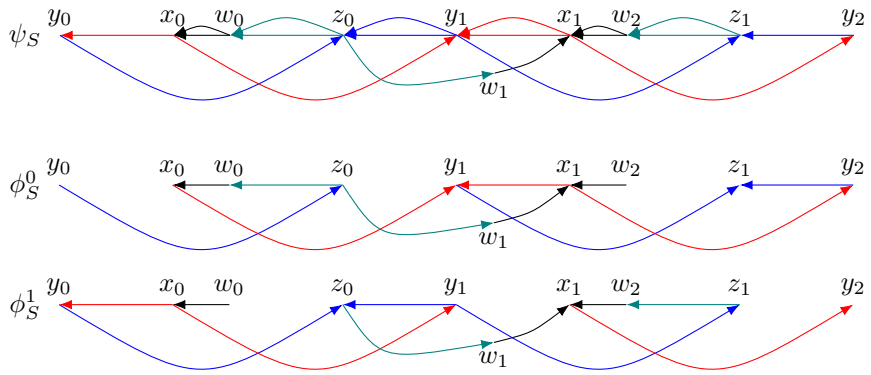

图 4 pp表达式 ψ_S 以及无量词公式 ϕ_S^0 和 ϕ_S^1的示意图。

'…'表示其余变量。令

$$\begin{aligned}\phi_S^0(x_0,y_0,y_2,z_1,\dots) := \neg R(x_0,y_0) \wedge S(y_0,z_0) \quad & \wedge T(z_0,w_0) \wedge \psi^*((x_0,y_0,z_0,w_0)^+)\\ \wedge R(x_0,y_1) \wedge \neg S(y_1,z_0) \quad & \wedge \psi^*((x_0,y_1,z_0,w_0)^+)\\ \wedge R(x_1,y_1) \quad & \wedge T(z_0,w_1) \wedge \psi^*((x_1,y_1,z_0,w_1)^+)\\ \wedge S(y_1,z_1) \quad & \wedge \neg T(z_1,w_2) \wedge \psi^*((x_1,y_1,z_1,w_2)^+)\\ \wedge R(x_1,y_2) \wedge S(y_2,z_1) \quad & \wedge \psi^*((x_1,y_2,z_1,w_2)^+)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\phi_S^1(x_0,y_0,y_2,z_1,\dots) := R(x_0,y_0) \wedge S(y_0,z_0) \quad & \wedge \neg T(z_0,w_0) \wedge \psi^*((x_0,y_0,z_0,w_0)^+)\\ \wedge R(x_0,y_1) \wedge S(y_1,z_0) \quad & \wedge \psi^*((x_0,y_1,z_0,w_0)^+)\\ \wedge \neg R(x_1,y_1) \quad & \wedge T(z_0,w_1) \wedge \psi^*((x_1,y_1,z_0,w_1)^+)\\ \wedge S(y_1,z_1) \quad & \wedge T(z_1,w_2) \wedge \psi^*((x_1,y_1,z_1,w_2)^+)\\ \wedge R(x_1,y_2) \wedge \neg S(y_2,z_1) \quad & \wedge \psi^*((x_1,y_2,z_1,w_2)^+).\end{aligned}$$

注意， ϕ_S^0 和 ϕ_S^1 中的每一个在 $\mathfrak{C}_\mu$中都是可满足的，因为 $\mathfrak{C}_\mu$ 是 μ的对偶。此外，在 $\mathfrak{C}_\mu$ 中满足 ϕ_S^0 或 ϕ_S^1 的每个元组都证明了 ψ_S 可以达到代价 5。因此，Opt(ψ_S)恰好由实现代价 5 的那些元组组成。由于在 ψ_S 中的每个 μ副本中，两个不清晰的边中必有一条需要被违反，因此可以类似于对 ψ_R 的验证，得到对于所有 x_0， y_0， y_2， $z_1 \in D$ ，我们有

$$\mathfrak{C}_\mu \models \mathrm{Opt}(\psi_S)(x_0,y_0,y_2,z_1) \Leftrightarrow (\phi_S^0 \vee \phi_S^1)^+(x_0,y_0,y_2,z_1)$$

并且，特别地，

$$\mathfrak{C}_\mu \models \mathrm{Opt}(\psi_S)(x_0,y_0,y_2,z_1) \Rightarrow (\neg R(x_0,y_0) \wedge S(y_2,z_1)) \vee (R(x_0,y_0) \wedge \neg S(y_2,z_1)). \quad (4)$$

从这个意义上说，Opt(ψ_S)意味着一条 R-边与一条 S-边的交替。

pp表达式 ψ_T 定义如下。

$$\begin{aligned}\psi_T(x_0,y_0,z_1,w_3) := \inf\big(& R(x_0,y_0) + S(y_0,z_0) + T^*(z_0,w_0) + \psi^*((x_0,y_0,z_0,w_0)^+)\\ & + R^*(x_1,y_0) + S(y_0,z_0) + T(z_0,w_1) + \psi^*((x_1,y_0,z_0,w_1)^+)\\ & + R(x_1,y_1) + S^*(y_1,z_0) + T(z_0,w_1) + \psi^*((x_1,y_1,z_0,w_1)^+)\\ & + R(x_1,y_1) + S(y_1,z_1) + T^*(z_1,w_2) + \psi^*((x_1,y_1,z_1,w_2)^+)\\ & + R^*(x_2,y_1) + S(y_1,z_1) + T(z_1,w_3) + \psi^*((x_2,y_1,z_1,w_3)^+)\big)\end{aligned}$$

与 ψ_S 类似， ψ_T 的代价至少为 5。下面我们定义具有如下性质的无量词公式ϕ^0_T 和 ϕ^1_T：对于所有 x_0， y_0， z_1， $w_3 \in D$

$$\mathfrak{C}_\mu \models \mathrm{Opt}(\psi_T)(x_0, y_0, z_1, w_3) \Leftrightarrow (\phi^0_T \vee \phi^1_T)^+(x_0, y_0, z_1, w_3);$$

参见图5对 ψ_T、 ϕ^0_T 和 ϕ^1_T 的示意。再次强调，为避免列出所有变量，我们假设变量 x_0、y_0、 z_1、 w_3 是 ϕ^0_T 和 ϕ^1_T 的前四个条目，并用“...”表示其余变量。令

$$\begin{aligned}\phi^0_T(x_0, y_0, z_1, w_3, \dots) = \neg R(x_0, y_0) \wedge S(y_0, z_0) \quad & \wedge T(z_0, w_0) \wedge \mu^*((x_0, y_0, z_0, w_0)^+)\\ \wedge R(x_1, y_0) \quad & \wedge \neg T(z_0, w_1) \wedge \mu^*((x_1, y_0, z_0, w_1)^+)\\ \wedge R(x_1, y_1) \wedge S(y_1, z_0) \quad & \wedge \mu^*((x_1, y_1, z_0, w_1)^+)\\ \wedge \neg S(y_1, z_1) \quad & \wedge T(z_1, w_2) \wedge \mu^*((x_1, y_1, z_1, w_2)^+)\\ \wedge R(x_2, y_1) \quad & \wedge T(z_1, w_3) \wedge \mu^*((x_2, y_1, z_1, w_3)^+)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\phi^1_T(x_0, y_0, z_1, w_3, \dots) = R(x_0, y_0) \wedge \neg S(y_0, z_0) \quad & \wedge T(z_0, w_0) \wedge \mu^*((x_0, y_0, z_0, w_0)^+)\\ \wedge R(x_1, y_0) \quad & \wedge T(z_0, w_1) \wedge \mu^*((x_1, y_0, z_0, w_1)^+)\\ \wedge \neg R(x_1, y_1) \wedge S(y_1, z_0) \quad & \wedge \mu^*((x_1, y_1, z_0, w_1)^+)\\ \wedge S(y_1, z_1) \quad & \wedge T(z_1, w_2) \wedge \mu^*((x_1, y_1, z_1, w_2)^+)\\ \wedge R(x_2, y_1) \quad & \wedge \neg T(z_1, w_3) \wedge \mu^*((x_2, y_1, z_1, w_3)^+).\end{aligned}$$

ϕ^0_T 和 ϕ^1_T 中的每一个在 $\mathfrak{C}_\mu$ 中都是可满足的，因为 $\mathfrak{C}_\mu$ 是 μ 的对偶。此外，在 $\mathfrak{C}_\mu$ 中满足 ϕ^0_T 或 ϕ^1_T 的每个元组都证明 ψ_T 可以达到代价 5。因此，Opt(ψ_T) 恰好由那些实现代价 5 的元组组成。类似于 ψ_R 和 ψ_S，我们得到对于所有 x_0、 y_0、 z_1、 $w_3 \in D$，都有

$$\mathfrak{C}_\mu \models \mathrm{Opt}(\psi_T)(x_0, y_0, z_1, w_3) \Leftrightarrow (\phi^0_T \vee \phi^1_T)^+(x_0, y_0, z_1, w_3)$$

并且，特别地，

$$\mathfrak{C}_\mu \models \mathrm{Opt}(\psi_T)(x_0, y_0, z_1, w_3) \Rightarrow (\neg R(x_0, y_0) \wedge T(z_1, w_3)) \vee (R(x_0, y_0) \wedge \neg T(z_1, w_3)). \quad (5)$$

在这个意义下，Opt(ψ_T) 表示一个 R-边与一个 T-边的交替。

令 ψ(x_R、 y_R、 x_S、 y_S、 x_T、 y_T) 为该原始正合取构造

$$\begin{aligned}&\inf \big(R(x, y) + S(y, z) + T(z, w) + \psi^*((x, y, z, w)^+) \quad (6)\\ &\quad + \mathrm{Opt}(\psi_R(x_R, y_R, x, y)) + \mathrm{Opt}(\psi_S(x_S, y_S, y, z)) + \mathrm{Opt}(\psi_T(x_T, y_T, z, w))\big). \quad (7)\end{aligned}$$

注意，（7）中的表达式仅取值 0 和 ∞。显然， ψ 的代价至少为 1，因为（6）包含 μ 的一个副本，并且对于每个使代价恰为 1 的元组，原子式 R(x、 y)、 S(y、 z) 和 T(z、 w) 中恰有一个不成立。由（3）、（4）和（5）可知，这意味着原子式 R(x_R、 y_R)、 R(x_S、 y_S) 和 R(x_T、 y_T) 中恰有一个成立。直观地说，这模拟了我们希望通过原始正合取构造的布尔关系 OIT 的行为。

我们断言存在 a'、 b'、 c'、 $d' \in D$，使得 (a'、 b') $\in R$，(c'、 d') $\notin R$，并且

$$(a', b', c', d', c', d'), (c', d', a', b', c', d'), (c', d', c', d', a', b') \in \mathrm{Opt}(\psi).$$

要获得从 ($\{0, 1\}$; OIT) 到 Δ_μ 的二维 pp-幂的同态，需要这些元素。我们通过构造一个有限关系

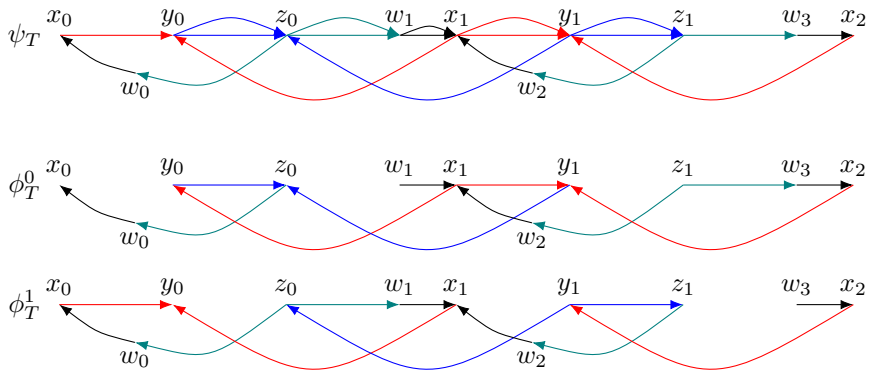

图5 pp表达式 ψ_T 以及无量词公式 ϕ_T^0 和 ϕ_T^1的示意图。

τ-结构 $\mathfrak{A}$，它同态地映射到 $\mathfrak{C}_\mu$，且其论域 A 包含元素a，b，c，d；元素 a'，b'，c'，d' 将分别是 a，b，c，d 在该同态下的像。

首先注意，对于任何具有论域 $A \subseteq V_{\text{all}}$ 的结构 $\mathfrak{A}$，如果对于某个一阶公式$\phi(x_1, \ldots, x_\ell)$、$k \leq \ell$、 u_1、 …、 $u_k \in A$，以及将元组 $(u_1, \ldots, u_k)$ 扩展为ℓ-元组 $(u_1, \ldots, u_k)$ 的某个扩展$^+$，我们有 $\mathfrak{A} \models \phi((u_1, \ldots, u_k)^+)$，那么 $\mathfrak{A} \models \phi^+(u_1, \ldots, u_k)$。令$a$、 b、 c、 d以及 x^Q、y^Q、 z^Q、 w^Q分别为 $Q \in \{R, S, T\}$ 中的不同元素，它们属于 V_{all}。令 A为 V_{all} 的一个有限子集，它由以下元素组成：在下文 $\mathfrak{A}$ 的关系定义中出现的所有元素，以及补全该定义中形如 $(u_1, \ldots, u_k)^+$ 的元组的元素。令 $\mathfrak{A}$为论域为 A 的 τ-结构，其关系由以下条件定义。

（i） $\mathfrak{A} \models S(y^R, z^R) \wedge T(z^R, w^R) \wedge \mu^*((x^R, y^R, z^R, w^R)^+)$；（ii） $\mathfrak{A} \models \phi_R^1((a, b, x^R, y^R)^+)$；（iii） $\mathfrak{A} \models \phi_S^0((c, d, y^R, z^R)^+)$；（iv） $\mathfrak{A} \models \phi_T^0((c, d, z^R, w^R)^+)$；（v） $\mathfrak{A} \models R(x^S, y^S) \wedge T(z^S, w^S) \wedge \mu^*((x^S, y^S, z^S, w^S)^+)$；（vi） $\mathfrak{A} \models \phi_R^0((c, d, x^S, y^S)^+)$；（vii） $\mathfrak{A} \models \phi_S^1((a, b, y^S, z^S)^+)$；（viii） $\mathfrak{A} \models \phi_T^0((c, d, z^S, w^S)^+)$；（ix） $\mathfrak{A} \models R(x^T, y^T) \wedge S(y^T, z^T) \wedge \mu^*((x^T, y^T, z^T, w^T)^+)$；（x） $\mathfrak{A} \models \phi_R^0((c, d, x^T, y^T)^+)$；（xi） $\mathfrak{A} \models \phi_S^0((c, d, y^T, z^T)^+)$；（xii） $\mathfrak{A} \models \phi_T^1((a, b, z^T, w^T)^+)$；

（**xiii**）关系中至多包含由上述条件所强制的元组 $\mathfrak{A}$。注意，这些条件彼此兼容，因此结构 $\mathfrak{A}$ 存在；例如，条件（ii）意味着 $\mathfrak{A} \models R(a, b) \wedge \neg R(x^R, y^R)$，这与在（i）中省略边 $R(x^R, y^R)$ 相兼容。

我们对 $\mathfrak{A}$提供一些直观解释。考虑由 $\mathfrak{A}$ 中出现在条目（i）至（iv）里的元素所诱导的子结构；由于稍后会明白的原因，我们称其为 R-副本。条目（i）与（xiii）表明，我们从 μ 的一个副本中省略一条 R-边，这展示了在 $\mathfrak{C}_\mu$中解释时，表达式（6）的一种最优行为。条目（ii）表明， $\mathfrak{A} \models R(a, b) \wedge \neg R(x^R, y^R)$，并且如果 R-副本是 $\mathfrak{C}_\mu$的子结构，那么(a, b, x^R, y^R)将属于 $\mathsf{Opt}(\psi_R)$。类似地，条目（iii）表明， $\mathfrak{A} \models \neg R(c, d) \wedge S(y^R, z^R)$，并且如果 R-副本

是 $\mathfrak{C}_\mu$的子结构。最后，条目（iv）表明，如果 R-副本是 $\mathfrak{C}_\mu$的子结构，那么 $\mathfrak{A} \models \neg R(c,\ d) \wedge T(z^R,\ w^R)$，并且$(c,\ d,\ z^R,\ w^R)$将属于 Opt$(\psi_T)$。类似地，我们将由（v）至（viii）导出的子结构称为 S-副本，将由（ix）至（xii）导出的子结构称为 T-副本；它们的性质与 R-副本的性质类似，只需作显而易见的相应调整。

令 M 表示论域为 A、边关系为 $R^{\mathfrak{A}}$、$S^{\mathfrak{A}}$、$T^{\mathfrak{A}}$ 和 $Q^{\mathfrak{A}}$（作为多重集合）的并集的有向多重图，其中 $Q \in \tau_C$；来自 $\tau \setminus (\{R, S, T\} \cup \tau_C)$ 的关系符号不包括在内。

断言 1. $\mathfrak{A} \models \neg\mu$.

事实上，我们证明一个更强的命题，即 M 不包含正长度的闭有向游走，这意味着 $\mathfrak{A}$ 不包含环 C 的一个副本。注意，根据构造，R 副本、S 副本和 T 副本满足

$$\neg\big(\exists x, y, z, w, \ldots (R(x,y) \wedge S(y,z) \wedge T(z,w) \wedge \mu_C((x,w)^+))\big),$$

其中“…”表示为补全元组 $(x,w)^+$ 而引入的变量。因此，如果 M 包含闭有向游走，那么它至少包含上述两个副本中的顶点。注意，M 中在多个 ψ 副本中出现的顶点只有 a、b、c 和 d，因此 M 中的任何闭有向游走都必须包含 a、b、c 或 d。不难（但很繁琐）验证，M 中不存在包含 a、b、c 或 d 的闭有向游走；我们以 b 为例说明论证。M 中与 b 相接的所有边都由条目（ii）、（vii）和（xii）蕴含。b 在 M 中唯一的出边由（vii）蕴含（见公式 ϕ^1_R、ϕ^1_S 和 ϕ^1_T），且所有从 b 出发的正长度有向游走都包含在 S 副本中，并且不是闭合的（见图 4）。由此可得，b 不包含在 M 的任何闭有向游走中。对 a、c 和 d 的论证类似。因此，M 中不存在闭有向游走，这意味着 $\mathfrak{A} \models \neg\mu$。

根据断言 1，存在一个从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{C}_\mu$ 的同态 h，因为 $\mathfrak{C}_\mu$ 是 μ 的对偶。令 $a' := h(a)$、$b' := h(b)$、$c' := h(c)$，以及 $d' := h(d)$。

断言 2. $(a',\ b') \in R$ 且 $(c',\ d') \notin R$。

一方面，由于 h 是一个同态，且 $(a,\ b) \in R^{\mathfrak{A}}$（例如，根据（ii）），因此 $(a',\ b') \in R$。另一方面，$(c',\ d') \notin R$：否则，由于 $\mathfrak{A} \models (\phi^0_R)^+(c,\ d,\ x^S,\ y^S)$（条目（vi）），且 h 是一个同态，我们可得

$$\mathfrak{C}_\mu \models \exists z, w (R(c',d') \wedge S(d',z) \wedge T(z,w) \wedge (\mu^*)^+(c',d',z,w)),$$

这与 $\mathfrak{C}_\mu \models \neg\mu$ 矛盾。

断言 3. ψ 的代价为 1，且 $(a',\ b',\ c',\ d',\ c',\ d')$，$(c',\ d',\ a',\ b',\ c',\ d')$，$(c',\ d',\ c',\ d',\ a',\ b') \in$Opt$(\psi)$。

根据条件（ii），我们有 $\mathfrak{A} \models (\phi^1_R)^+(a, b, x^R, y^R)$。注意，由于 h 是一个同态，这意味着 $\psi_R(a', b', h(x^R)\ h(y^R)) \leq 3$。回想一下，$\psi_R$ 的代价至少为 3，因此，$\psi_R(a', b', h(x^R)\ h(y^R)) = 3$ 且 $(a', b', h(x^R)\ h(y^R)) \in$Opt$(\psi_R)$。类似地，我们有

$$\psi_S(c', d', h(y^R), h(z^R)) = 5 \text{ and hence } (c', d', h(y^R), h(z^R)) \in \mathrm{Opt}(\psi_S), \text{ and}$$
$$\psi_T(c', d', h(z^R), h(w^R)) = 5 \text{ and hence } (c', d', h(z^R), h(w^R)) \in \mathrm{Opt}(\psi_T).$$

根据条件（i），且由于 h 是一个同态，

$$R(h(x^R), h(y^R)) + S(h(y^R), h(z^R)) + T(h(z^R), h(w^R)) + \psi^*(h((x^R, y^R, z^R, y^R)^+)) \leq 1, \tag{8}$$

对于按条目（i）补全后的元组 $(x^R, y^R, z^R, y^R)^+$。由于 $\mathfrak{C}_\mu \models \neg\mu$，我们在（8）中得到等号。因此，$\psi(a', b', c', d', c', d') \leq 1$；又由于 ψ 的代价为 ≥ 1，我们得到 ψ 的代价等于 1，并且 $(a', b', c', d', c', d') \in \mathrm{Opt}(\psi)$。类似地，我们可以论证 (c', d', a', b', c', d') 和 (c', d', c', d', a', b') 属于 $\mathrm{Opt}(\psi)$。

由于 ψ 的代价为 1（断言 3），根据 (7) 下方的讨论，$\mathrm{Opt}(\psi)$ 仅包含满足以下条件的元组 $(d_1, \ldots, d_6)$：(d_1, d_2)、(d_3, d_4) 和 (d_5, d_6) 中恰有一个属于 R。令 $\mathfrak{B} = (D^2; \mathrm{OIT}^{\mathfrak{B}})$ 为如下关系结构：

$$\mathrm{OIT}^{\mathfrak{B}}((x, y), (x', y'), (x'', y'')) := \mathrm{Opt}(\psi)(x, y, x', y', x'', y'').$$

注意，$\mathfrak{B}$ 是 Δ_μ 的一个 pp-幂。我们断言，$\mathfrak{B}$ 与 $(\{0, 1\}; \mathrm{OIT})$ 同态等价。定义 $f: D^2 \to \{0, 1\}$，使得当 $(d_1, d_2) \in R$ 时，$f(d_1, d_2) = 1$；否则，$f(d_1, d_2) = 0$。根据 $\mathrm{Opt}(\psi)$ 的性质，f 是从 $\mathfrak{B}$ 到 $(\{0, 1\}; \mathrm{OIT})$ 的同态。反过来，定义 $g: \{0, 1\} \to D^2$，使得 $g(1) = (a', b')$，且 $g(0) = (c', d')$。根据断言 3，g 是从 $(\{0, 1\}; \mathrm{OIT})$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同态。因此，Δ_μ 原始正合取构造 $(\{0, 1\}; \mathrm{OIT})$，这正是我们想要证明的。◀

下面的推论推广了定理 41。

▶**推论 42**。设 μ 是定义在包含合取查询 μ_0的二元签名上的极小连通两两不等价合取查询的并。如果 多重图(μ_0) 包含一个长度为 ≥ 3的环，那么 Δ_μ *pp*-构造($\{0,1\}$；OIT)，且 μ 的韧性问题是 *NP* 完全。

证明。设 μ' 是定义在二元签名τ_1上的无自连接连通合取查询的并，使得对于某个 μ'-单射 f: $\tau_1 \to \tau'$</style>，有 *()*；根据引理 *39*，这样的映射存在。设 是 中的一个合取查询，使得 *()*，并设 $'_0 \subseteq \tau_1$是 μ'_0的签名。

根据定理 40，Δ_μ pp-构造 $\Delta_{\mu'}$。根据引理 37，$\Delta_{\mu'}$ 的 τ'_0-约化等于某个对偶 $\mathfrak{B}$，其中 $\mathfrak{B}$ 是 μ'_0的对偶。由于 $\mathfrak{B}$ 和 $\mathfrak{C}_{\mu'_0}$ 都是 μ'_0的对偶，赋值结构 $\mathfrak{B}^1_0$与 $\Delta_{\mu'_0} = (\mathfrak{C}_{\mu'_0})^1_0$ 分数同态等价（注 19）。因此，$\Delta_{\mu'}$pp-构造 $\Delta_{\mu'_0}$。根据定理 41，$\Delta_{\mu'_0}$ pp-构造 $(\{0,1\}; \mathrm{OIT})$。根据 pp-可构造性的传递性，Δ_μ pp-构造 $(\{0, 1\}; \mathrm{OIT})$。根据引理 22，$\mathrm{VCSP}(\Delta_\mu)$ 是 NP-困难。根据命题 11，μ 的韧性问题是 NP-困难，因此是 NP 完全。◀

6.2 有限无环对偶查询的 NP-困难性

本节证明，对于具有非平凡有限无有向环对偶的查询 μ，其韧性问题是 NP-困难的。我们强调，这个引理的成立关键依赖于我们借助对偶结构 $\mathfrak{C}_\mu$ 和 Δ_μ分析查询 μ 的韧性问题复杂性的方法。

▶**引理 43.** 设 μ 是签名 *{R}* 上的合取查询的并，且 $\mathfrak{C}_\mu$ 的论域有限。假设 $\mathfrak{C}_\mu$ 至少包含一条边，且不包含任何有向环。那么，Δ_μ 可原始正合取构造($\{0,1\}$；OIT)。

证明。令 C 为 $\mathfrak{C}_\mu$的论域。令 k 为 $\mathfrak{C}_\mu$中最长有向路径的长度；该路径存在，因为 $\mathfrak{C}_\mu$ 是有限的，且不包含任何有向环。令 $\phi(x_0, x_1)$ 为 pp表达式

$$\inf_{x_2, \ldots x_k} \big(R(x_0, x_1) + \mathrm{Opt}(R)(x_1, x_2) \cdots + \mathrm{Opt}(R)(x_{k-1}, x_k)\big).$$

令 $(x,y) \in C^2$。则 $\phi^{\Delta_\mu}(x,y) = 0$ 当且仅当 $\mathfrak{C}_\mu$ 中存在一条长度为k 且以边 (x,y) 开始的有向路径。如果 $\phi^{\Delta_\mu}(x,y) \neq 0$，则 $\phi^{\Delta_\mu}(x,y) = 1$ 当且仅当 $\mathfrak{C}_\mu$ 中存在一条长度为 $k-1$ 且从 y开始的有向路径。最后，如果 $\phi^{\Delta_\mu}(x,y) \notin \{0,1\}$，则$\phi^{\Delta_\mu}(x,y) = \infty$。令 Γ 为定义在论域 C 上的赋值 $\{R\}$-结构，其中对于所有 $(x,y) \in C^2$，$R^\Gamma(x,y) = \phi^{\Delta_\mu}(x,y)$。注意，$R^\Gamma \in \Delta_\mu$。

回顾例 2 中的赋值结构 Γ_{MC}。设 $a,b \in C$ 满足：在 $\mathfrak{C}_\mu$ 中存在一条长度为 k、以边 (a,b) 开始的有向路径。定义 $f\colon \{0,1\} \to C$，使得 $f(0) := a$ 且 $f(1) := b$。容易验证，由 $\omega_f(f) = 1$ 定义的 ω_f 是从 Γ_{MC} 到 Γ 的分数同态。定义 $g\colon C \to \{0,1\}$，使得对于每个 $x \in C$，如果从 x 出发存在长度为 k 的有向路径，则 $g(x) = 0$；否则 $g(x) = 1$。我们证明，由 $\omega_g(g) = 1$ 定义的 ω_g 是从 Γ 到Γ_{MC} 的分数同态。设 $(x,y) \in C^2$。注意，如果 $R^\Gamma(x,y) \geq 1$，那么显然 $R^{\Gamma_{\mathrm{MC}}}(g(x)\ g(y)) \leq R^\Gamma(x,y)$。因此，假设 $R^\Gamma(x,y) = 0$。根据 ϕ 的定义，在 $\mathfrak{B}$ 中存在一条长度为 k、以边 (x,y) 开始的有向路径。根据 g 的定义，我们有 $g(x) = 0$。由于 $\mathfrak{C}_\mu$ 中不存在长度为 $k+1$ 的有向路径，且 $\mathfrak{C}_\mu$ 不包含有向环，因此不存在从 y 出发、长度为 k 的有向路径，于是 $g(y) = 1$。因此，$R^{\Gamma_{\mathrm{MC}}}(g(x)\ g(y)) \leq R^\Gamma(x,y)$。由此可得，$\omega_g$ 是从 Γ 到Γ_{MC} 的分数同态。

根据上一段，Γ 与 Γ_{MC}分数同态等价。由于$R^\Gamma \in \langle\Delta_\mu\rangle$，我们有 Δ_μ 原始正合取构造 Γ_{MC}。我们已经在例 23 中提到，Γ_{MC} 原始正合取构造 $(\{0,1\}, \mathrm{OIT})$。根据 pp-可构造性的传递性，Δ_μ 原始正合取构造 $(\{0,1\},\mathrm{OIT})$。◀

7 定理 34 的证明

现在我们可以证明本文的主要结果了。

定理 34 的证明。 由于 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_\mu) = \mathrm{Aut}(\Delta_\mu)$，根据推论 33，条目 (1) 和 (2) 互斥。因此，只需证明条目 (1) 或条目 (2) 成立。不失一般性，我们可以假设 μ 中的所有查询都是两两不等价、极小且连通的（见引理 9）。特别地，μ 中的查询是两两同态不可比较的（见第 2.3 节）。根据这一假设，如果 μ 包含 μ_ℓ 或 μ_e，那么 μ 分别等于 μ_ℓ 或 μ_e，在这种情况下，根据引理 35，条目 (1) 成立。因此，我们可以假设 μ 既不包含 μ_ℓ，也不包含 μ_e。

如果 μ 包含一个合取查询 μ_0，使得 Multigraph(μ_0) 包含长度为≥ 3的环，那么根据推论 42，条目 (2) 成立。假设情况并非如此。那么对于 μ中的每个查询 ν，Multigraph(ν) 要么是一棵树，要么 ν 包含原子式 $R(x,y)$ 和 $R(y,x)$，其中 $x \neq y$是某些变量；在这种情况下，根据 ν 的极小性，$\nu = \mu_c$。注意，对于每个满足 Multigraph(ν) 是一棵树的 ν，都存在到 μ_c的同态，因此只要 μ 包含μ_c，就有 $\mu = \mu_c$。在此情况下，根据引理 35，条目 (1) 成立。因此，假设 $\mu \neq \mu_c$，于是对于 μ中的每个查询 ν，Multigraph(ν) 都是一棵树。那么，根据 [20]，μ 有一个有限对偶（另见 [6,定理 8.7]）。由于 $\mathfrak{C}_\mu$ 是此对偶的模型完备核，它也具有有限论域，因此是一个边关系为 R的有限有向图。注意，$\mathfrak{C}_\mu$ 至少包含一条边，因为 $\mu \neq \mu_e$。容易看出，树的每种定向（尤其是 μ中的每个ν）都同态映射到任意有向环；因此，$\mathfrak{C}_\mu$ 不包含有向环。根据引理 43，Δ_μ 可原始正合取构造 $(\{0,1\}; \mathrm{OIT})$。根据引理 22 和命题 11，μ 的韧性问题是 NP 完全的。因此，条目 (2) 成立。◀

28 有向图查询韧性的复杂性

参考文献

1 Antoine Amarilli、Wolfgang Gatterbauer、Neha Makhija 和 Mikaël Monet。正则路径查询的韧性：迈向复杂性分类。《ACM数据管理会议录》，3(2)，2025年6月。 doi:10.1145/3725245。2 Libor Barto、Michael Kompatscher、Miroslav Olšák、Trung Van Pham 和 Michael Pinsker。寡形克隆中的方程以及 ω-范畴结构的约束满足问题。《数学逻辑杂志》，19(2)：# 1950010，2019年。3 Manuel Bodirsky。可数范畴结构的核。《计算机科学中的逻辑方法》（LMCS），3(1)：1–16，2007年。4 Manuel Bodirsky。无限域约束满足的复杂性。《逻辑讲义》（52）。剑桥大学出版社，2021年。 doi:10.1017/9781107337534。5 Manuel Bodirsky。自同构群，2023年。课程讲义，德累斯顿工业大学， https://wwwpub.zih.tu-dresden.de/~bodirsky/Automorphism-Groups.pdf。6 Manuel Bodirsky、Žaneta Semanišinová 和 Carsten Lutz。通过赋值约束满足问题研究韧性问题的复杂性。载于第39届年度ACM/IEEE计算机科学逻辑研讨会论文集，LICS '24，美国纽约州纽约市，2024年。计算机协会。 doi:10.1145/3661814.3662071。7 Peter J. Cameron。寡形置换群。剑桥大学出版社，剑桥，1990年。8 Ashok K. Chandra 和 Philip M. Merlin。关系数据库中合取查询的最优实现。载于计算理论研讨会（STOC）论文集，第77–90页，1977年。9 David A. Cohen、Martin C. Cooper、Páidí Creed、Peter G. Jeavons 和 Stanislav Živný。离散优化复杂性的代数理论。《SIAM计算杂志》，42(5)：1915–1939，2013年。10 Fedor V. Fomin、Petr A. Golovach 和 Dimitrios M. Thilikos。将图修改为满足一阶逻辑性质的参数化复杂性。《计算系统理论》，64(2)：251–271，2020年。11 Cibele Freire、Wolfgang Gatterbauer、Neil Immerman 和 Alexandra Meliou。无自连接合取查询的韧性与责任度的复杂性。《VLDB基金会会议录》，9(3)：180–191，2015年。网址： http://www.vldb.org/pvldb/vol9/p180-freire.pdf、doi:10.14778/2850583.2850592。12 Cibele Freire、Wolfgang Gatterbauer、Neil Immerman 和 Alexandra Meliou。含自连接的二元合取查询韧性复杂性的新结果。载于第39届 ACM SIGMOD-SIGACT-SIGAI数据库系统原理研讨会论文集，PODS 2020，美国俄勒冈州波特兰，2020年6月14–19日，第271–284页，2020年。 doi:10.1145/3375395.3387647。13 Peter Fulla 和 Stanislav Živný。无限规模加权（关系）克隆的伽罗瓦连接。《TOCT》，8(3)：9:1–9:21，2016年。14 Michael Garey 和 David Johnson。《NP完全性指南》。CSLI出版社，斯坦福，1978年。15 Wilfrid Hodges。《简明模型论》。剑桥大学出版社，剑桥，1997年。16 Simon Knäuer。随机竞赛图上的约束满足，2018年。德累斯顿工业大学代数研究所硕士论文。17 Neha Makhija 和 Wolfgang Gatterbauer。利用整数线性规划（ILP）和线性规划松弛统一处理韧性与因果责任度。《ACM数据管理会议录》，1(4)，2023年12月。 doi:10.1145/3626715。18 Alexandra Meliou、Wolfgang Gatterbauer 和 Dan Suciu。反向数据管理。《VLDB基金会会议录》，4(12)：1490–1493，2011年8月。 doi:10.14778/3402755.3402803。19 Antoine Mottet 和 Michael Pinsker。Ramsey结构上的核。《符号逻辑杂志》，86(1)：352–361，2021年。20 J. Nešetřil 和 C. Tardif。有限结构的对偶定理。《组合理论杂志》B辑，80：80–97，2000年。

21 Friedrich Martin Schneider 和 Caterina Viola。Farkas 引理在无限域上的有限值约束满足问题中的应用。 数学分析与应用杂志，517(1):126591，2023 年。网址：
https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X22006059,
doi:10.1016/j.jmaa.2022.126591。**22** Johan Thapper 和 Stanislav Živný。有限值约束满足问题的复杂性。载于 计算理论研讨会会议论文集（*STOC*），美国加利福尼亚州帕洛阿尔托，*2013* 年 *6* 月 *1—4* 日，第 695—704 页，2013 年。**23** Caterina Viola。 无限域上的值约束满足问题。博士论文，德累斯顿工业大学，2020 年。**24** Caterina Viola 和 Stanislav Zivný。无限域上承诺值约束满足问题的组合基本线性规划与仿射整数规划松弛。 *ACM* 算法汇刊，17(3):21:1–21:23，2021 年。
doi:10.1145/3458041。**25** Žaneta Semanišinová。 具有寡轨道自同构群的结构中的值约束满足。学位论文，德累斯顿工业大学，德国德累斯顿，2025 年。网址：
https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:14-qucosa2-974737。