arXiv:2601.05370v1 [math.AG] 8 Jan 2026

BG的布劳尔群与模空间的 gerbe 结构

ROSE LOPEZ

Abstract. 我们研究由带有一个阶为 N 的自同构的亏格为 g 的曲线构成的 μ_N-丛，并探讨该代数栈的各个分支可能具有哪些对应的 H^2-上同调类。具体而言，我们考察被阶为 N 的自同构取商后为零亏格的曲线，并完全确定这些丛的布劳尔类。关键的技术输入是计算 BG的布劳尔群，其中 G 是一个光滑连通半单线性代数群。

1. Introduction

域 k 的布劳尔群是一个阿贝尔群，它对域 k 上的中心单代数的 Morita 等价类进行分类，群乘法由张量积给出。Grothendieck 在 [Gro66a、Gro66b、Gro68] 中将布劳尔群推广到概形，并确立了其作为概形的上同调不变量的地位。近年来，布劳尔群已推广到代数栈，相关研究也计算了代数栈的布劳尔群，例如 [AM20、Shi19、IJ21、ABJ+24、Ach25、Bis25]。

在 [Ach25 第 5], 节中，作者使用 Leray 谱序列计算有限线性约化群 G 的 BG 的布劳尔群；在 [LS25 第 6], 节中，作者计算有限 ´étale 群概形 G 的 BG 的布劳尔群。我们在以下定理中计算更一般的 G 的 BG 的（上同调）布劳尔群。

定理 1.1. 设 G是代数闭域 k 上的光滑连通半单线性代数群。设 G 是 G 的万有覆盖， B 是 G 的基本群，它们构成正合序列 $1 \to B \to G \to G \to 1$。设 $X(B) := \mathrm{Hom}(B, \mathbb{G}_m)$ 是 B 的特征群。那么

$$H^i(BG, \mathbb{G}_m) = \begin{cases} k^* & i = 0 \\ 0 & i = 1 \\ X(B) & i = 2. \end{cases}$$

对于 $i = 2$，同构 $X(B) \to H^2(BG, \mathbb{G}_m)$ 由 $(\chi : B \to \mathbb{G}_m) \mapsto \chi_*(B\widetilde{G})$给出，其中 χ_*是推前映射 $\chi_* : H^2(BG, B) \to H^2(BG, \mathbb{G}_m)$。

了解 BG 的布劳尔群后，我们也可以理解 BG 上布劳尔–塞韦里簇的类，我们称之为布劳尔-塞韦里代数栈 （见第 3 节）。经典地，域 k 上维数为 n 的布劳尔–塞韦里簇，是定义在域 k 上的簇 X ，在对 k 取代数闭包后与 $\mathbb{P}^n_k$ 同构。它不能与 $\mathbb{P}^n_k$ 同构的障碍，在于 X 上是否存在次数为 1 的线丛；若存在，则它与 $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n_k}(1)$ 同构。更一般地，相对维数为 n 的布劳尔-塞韦里代数栈，是一个光滑适当态射 $\mathscr{X} \to S$ ，它在´的 étale 局部与 $\mathbb{P}^n_S$ 同构。 $\mathscr{X}$ 上存在次数为 1 的线丛，不再能保证 $\mathscr{X}$ 全局同构于 $\mathbb{P}^n_S$，而只能保证存在一个定义在 S 上的秩为 $n+1$ 的向量丛 V，使得 $\mathscr{X} \cong \mathbb{P}V$。

相对维数为 n 的 S 上的布劳尔–塞韦里簇与 S 上的 PGL_{n+1} 主丛之间存在范畴等价。短正合列 $1 \to \mathbb{G}_m \to \mathrm{GL}_{n+1} \to \mathrm{PGL}_{n+1} \to 1$ 将 $H^1(S, \mathrm{PGL}_{n+1})$ 中 X 的类映射为 $\delta([X]) \in H^2(S, \mathbb{G}_m)$，该映像等于 X 上次数为 1 的线丛的 $\mathbb{G}_m$-丛的类。我们称之为布劳尔–塞韦里簇 X 的布劳尔类。当且仅当 X 上存在次数为 1 的线丛时，该类才是平凡的。

我们研究形如 $[\mathbb{P}V/G] \to BG$ 的布劳尔-塞韦里代数栈，并证明以下定理，该定理计算了它们的布劳尔类。

定理 1.2。设 V 是 G的一个表示，其作用通过 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ 给出，且 $B \subseteq G$ 通过特征 $\chi : B \to \mathbb{G}_m$作用。于是得到 G 在 $\mathbb{P}V$上的诱导作用，而 $[\mathbb{P}V/G] \to BG$ 是覆盖 BG的布劳尔-塞韦里栈。设 $\mathscr{G}$ 是 $[\mathbb{P}V/G]$ 上次数为 1 的线丛的 $\mathbb{G}_m$-丛，其定义在

BG上。于是 $\chi_*^{-1}(B\widetilde{G}) = \mathscr{G}$，因此 $\mathscr{G}$的类（即 $[\mathbb{P}V/G] \to BG$ 在 $H^2(BG, \mathbb{G}_m) = X(B)$中的布劳尔类）由 χ^{-1}给出。

最初促使我们研究 BG 上布劳尔群和布劳尔-塞韦里栈的动机，是为了理解带有阶为 N 的自同构的亏格 g 曲线之模叠的 gerbe 结构，现予以说明。

令 $\mathscr{M}_g$ 为亏格 $g > 1$ 光滑曲线的模叠。惯性叠 $I(\mathscr{M}_g)$ 是一个以成对对象 $(X \in \mathscr{M}_g,\ \alpha \in$ 自同构群$(X))$ 为对象的代数栈，其态射是满足 $\phi \circ \alpha' = \alpha \circ \phi$ 的同构 $\phi\colon X' \to X$。惯性 $I(\mathscr{M}_g)$ 是一个不交并

$$I(\mathscr{M}_g) = \coprod_{N \in \mathbb{N}_{>0}} I_N(\mathscr{M}_g),$$

使得对于 $(X,\ \alpha) \in I_N(\mathscr{M}_g),\ \alpha$ 的阶为 N。我们称子叠 $I_N(\mathscr{M}_g)$ 为惯性叠的第 N 个扭曲扇区。

由于 $I_N(\mathscr{M}_g)$ 的每个对象都有一个阶为 N 的自同构，因此这个代数栈是一个 μ_N-丛，并对应于某个类 $[I_N(\mathscr{M}_g)] \in H^2(\mu_N)$。我们考察 $I_N(\mathscr{M}_g)$ 中由那些在阶为 N 的自同构 α 作用下取商后亏格为 0 的曲线所构成的分支，并完全确定这些丛的布劳尔类。对于一个类为 $[\mathscr{G}] \in H^2(S,\ \mu_n)$ 的 μ_N-丛 $\mathscr{G} \to S$，沿包含 $\mu_N \hookrightarrow \mathbb{G}_m$ 的映射将其推出到 $\mathbb{G}_m$，得到 $\mathbb{G}_m$-丛 $\mathscr{G}^{\wedge \mathbb{G}_m} \to S$，其布劳尔类由 $[\mathscr{G}^{\wedge \mathbb{G}_m}] \in H^2(S,\ \mathbb{G}_m)$ 给出。

给定 $I_N(\mathscr{M}_g)$ 的一个对象 (X, α)，我们可以对 X 取 μ_N 通过 α 诱导的作用所得的商，从而得到群为 μ_N 的伽罗瓦覆盖 $\pi\colon X \to C = X/\mu_N$。商曲线 C 在分歧除子不同时可以有许多不同的亏格。沿用 [PT13], 的做法，并采用 [Par91],中的思想来规定 C上允许的亏格和分歧除子次数，我们将 g-$admissibledatum$定义为一个 $N+1$元组 $A = (g', N, d_1, \dots, d_{N-1})$，满足 $g' \le g$和 $N > 1$，并且符合黎曼-胡尔维茨公式

$$2g - 2 = N(2g' - 2) + \sum_i d_i(N - \gcd(i, N)) \tag{1.2.1}$$

以及阿贝尔覆盖的结构方程

$$\sum_i i d_i = 0 \pmod{N}. \tag{1.2.2}$$

将代数栈 $\mathscr{M}_A$ 定义为具有如下对象的代数栈

$$\mathscr{M}_A(S) = \{(f : C \to S, D_1, \dots D_{N-1}, \mathscr{L}, \phi)\}$$

其中 $f\colon C \to S$ 是亏格为 g'的光滑曲线，D_i 是次数为 d_i的不相交除子，也就是说，它们是 $(\mathrm{Sym}_S^{d_i} C \setminus \Delta_{d_i}) \to S$ 的截面，其中 Δ_{d_i} 是大对角线，$\mathscr{L}$是 C 上的线丛，而$\phi\colon \mathscr{L}^{\otimes N} \to \mathscr{O}_C(\sum iD_i)$是一个同构。态射将在第 4 节中定义。

$\mathscr{M}_A$ 中的每个对象都对应于一个 μ_N-覆盖 $X \to C$，其定义在 C 上，是一条亏格为 g 的光滑曲线，并在 D_i 上分歧。反过来，每个 μ_N-覆盖若其覆盖曲线的亏格为 g，则对应于某个 $\mathscr{M}_A$ 中的对象，其中 g 是可容许数据 A。我们将在第 4 节对这一对应关系作简要说明。令 $\mathscr{M}'_A$ 为 $\mathscr{M}_A$ 中满足相应的 X 连通的子叠。下面的定理将 $I_N(\mathscr{M}_g)$ 与 $\mathscr{M}'_A$ 联系起来。

定理 1.3。 [PT13, 2.2，推论 1], [Par91，定理 2.1，命题 2。1] 固定 $g, N > 1$。则$I_N(\mathscr{M}_g) = \coprod_A \mathscr{M}'_A$，其中不交并遍历所有 g-可容许的 $A = (g', N, d_1, \dots, d_{N-1})$。

当 $g' = 0$ 时，要么 $\mathscr{M}'_A = \mathscr{M}_A$，要么 $\mathscr{M}'_A = \emptyset$ [PT13, 2.2，注记 3]。由于本文只研究 $g' = 0$ 的情形，因此只需研究上述定义的 $\mathscr{M}_A$，而其中只有一部分这样的$\mathscr{M}_A$ 会对应于 $I_N(\mathscr{M}_g)$ 的分支。为研究 $\mathscr{M}_A$，我们定义一个模叠 $\mathscr{M}_A$，使其包含 $\mathscr{M}_A$ 作为开子叠；也就是说，我们允许这些除子重合。

当 $g' = 0$, $\overline{\mathscr{M}_A}$可以实现为代数栈 $\mathscr{N}_A$ 上的 μ_N-丛时，其中 $\overline{\mathscr{N}_A}$是 0 属曲线模空间 $B\mathrm{PGL}_2$ 上布劳尔-塞韦里代数栈的复合。利用定理 1.1 和 1.2，以及 Gabber 定理的叠版本 [Gab81, Theorem 2, page 193], （该定理将布劳尔–塞韦里簇的布劳尔群与其基底的布劳尔群联系起来），我们计算 $\mathscr{N}_A$的布劳尔群，并计算 $\mathscr{M}_A$ 在$\mathscr{N}_A$ 的布劳尔群中的类：

定理 1.4。 设 N、d_1、……、$d_{N-1} \in \mathbb{Z}$，使得 $N | d := \sum i d_i$ 且

$$g := \frac{1}{2}\left(-2N + \sum_i i d_i(N - \gcd(i, N)) + 2\right)$$

是一个大于 *1* 的整数。设 $A=(0、N、d_1、\ldots\ldots、d_{N-1})$。如果所有 d_i 都是偶数，则 $\overline{H^2}(\mathscr{N}_A、\mathbb{G}_m)=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$；如果任意 d_i 为奇数，则 $H^2(\mathscr{N}_A、\mathbb{G}_m)=0$。

定理1.5。设 $A=(0,N,d_1,\ldots,d_{N-1})$ 如上所述。则 $[\mathscr{M}_A{}^{\wedge\mathbb{G}_m}]=\overline{[\gamma^*\mathscr{G}_{d/N}]}\in H^2(\mathscr{N}_A,\mathbb{G}_m)$，其中 $\mathscr{G}_{d/N}$ 是 $\mathbb{G}_m$ 上的一个丛，其对应于零亏格曲线上的 d/N 次线丛；$\gamma:\mathscr{N}_A\to B\mathrm{PGL}_2$ 是自然遗忘映射。特别地，若所有 d_i 均为偶数而 d/N 为奇数，则 $\mathscr{M}_A{}^{\wedge\mathbb{G}_m}$非平凡且阶为 *2*；否则，$\mathscr{M}_A{}^{\wedge\mathbb{G}_m}$ 平凡。此外，由于布劳尔群上的限制映射是单射，当除子两两不交时，$\mathscr{M}_A^{\wedge\mathbb{G}_m}$也满足同样的结论。

1.6. **致谢**。作者感谢她的导师 Martin Olsson，感谢他给予的许多有益交流；也感谢 Hannah Larson 让她了解到 [PT13] 和模空间 $\mathscr{M}_A$。作者的部分研究得到 Simons代数、几何与拓扑完美性合作项目的支持。

2. Brauer Group of BG

设 G 是代数闭域 k 上的光滑连通半单线性代数群。根据 [FI73，推论 4.6]，存在 $\sim G$，即 G 的万有覆盖，以及 B，即 G 的基本群。于是 G 也是光滑连通半单线性代数群，B 是有限且可对角化的，因此是有限阿贝尔群，并且我们有正合序列

$$1\to B\to\widetilde{G}\to G\to 1,$$

，其像 B 位于 G 的中心。

Let

$$X(-):(\text{algebraic groups}/k)\to\text{Sets}$$

为 $H\mapsto \mathrm{Hom}(H,\mathbb{G}_m)$，其中 Hom 指代数群同态。

我们可以将 $k^*\subseteq H^0(H,\mathscr{O}_H^*)=H^0(H,\mathbb{G}_m)$ 视为常值函数，并且根据 $f\mapsto f/f(e)$，存在满射 $H^0(H,\mathbb{G}_m)\to X(H)$，由此得到分裂正合序列

$$0\to k^*\to H^0(H,\mathbb{G}_m)\to X(H)\to 0,$$

因此 $H^0(H,\mathbb{G}_m)=k^*\oplus X(H)$（[Ros61，定理 3]，[San81，引理 6.5 (iii)]，[FI73，推论 2.2]）。由于 G 是半单的，$X(G)=0$。

我们有一个 $G\to G$ 的主丛，以及一个 $BG\to BG$ B-丛。给定 B的一个特征 $\chi:B\to\mathbb{G}_m$，我们得到推前映射

$$\chi_*:H^1(G,B)\to H^1(G,\mathbb{G}_m),\quad \chi_*:H^2(BG,B)\to H^2(BG,\mathbb{G}_m).$$

因此我们得到态射

$$X(B)\to H^1(G,\mathbb{G}_m)=\mathrm{Pic}(G),\quad X(B)\to H^2(BG,\mathbb{G}_m)=\mathrm{Br}(BG),$$

分别由 $(\chi:B\to\mathbb{G}_m)\mapsto\chi_*(G)$ 和 $(\chi:B\to\mathbb{G}_m)\mapsto\chi_*(BG)$ 给出。

由 [San81，推论 6.11，注记 6.11.3] 可知，第一个映射是同构，这也利用了 $X(G)=0$ 且 $\mathrm{Pic}(G)=0$这一事实。第二个映射是同构，这正是定理 1.1 的内容；为方便读者，下面将其重新表述。

定理 2.1。设 k 为代数闭域，G为定义在 k 上的光滑连通半单线性代数群，且 G 和 B 如上所述。则

$$H^i(BG,\mathbb{G}_m)=\begin{cases}k^* & i=0\\ 0 & i=1\\ \widehat{B} & i=2.\end{cases}$$

对于 $i=2$，同构 $\widehat{B}\to H^2(BG,\mathbb{G}_m)$ 由 $(\chi:B\to\mathbb{G}_m)\mapsto\chi_*(B\widetilde{G})$给出，其中 χ_* 是推前映射 $\chi_*:H^2(BG,B)\to H^2(BG,\mathbb{G}_m)$。

证明。我们使用由 Spec $k\to BG$ 得到的标准单纯覆盖 $U_\bullet\to BG$ ([Del74, 5.2.1.1]) 的谱序列 $E_1^{p,q}=H^q(U_p,\mathbb{G}_m)\Rightarrow H^{p+q}(BG,\mathbb{G}_m)$。

这里，$U_0=$谱 k，且对于所有 $p\geq 1$，$U_p=U_{p-1}\times_{BG}$谱 k。我们有 $p+1$ 投影映射$U_p\to U_{p-1}$，每个投影映射都投影到除一个 k谱 副本之外的所有副本。对于所有 $p\geq 1$，$U_p\cong G^p$。特别是，$U_1=$谱 $k\times_{BG}$谱 $k\cong G$ 以及 $U_2\cong G\times G$。这两个投影

$$q_1,q_2:\text{Spec } k\times_{BG}\text{Spec } k\to\text{Spec } k$$

都由结构映射 π： $G \to$谱 k给出。这三个投影

$$p_{23}, p_{13}, p_{12} : \operatorname{Spec} k \times_{BG} \operatorname{Spec} k \times_{BG} \operatorname{Spec} k \to \operatorname{Spec} k \times_{BG} \operatorname{Spec} k$$

由.....给出

$$p_2, m, p_1 : G \times G \to G,$$

分别。因此，单纯覆盖 $U_\bullet \to BG$ 可写为

$$U_\bullet : \cdots \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\; G \times G \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\; G \longrightarrow \operatorname{Spec} k.$$

我们可以将函子 $H^q(-, \mathbb{G}_m)$ 应用于 $U_\bullet$，得到

$$H^q(U_\bullet, \mathbb{G}_m) : H^q(\operatorname{Spec} k, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{d^{0,q}} H^q(G, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{d^{1,q}} H^q(G \times G, \mathbb{G}_m) \to \cdots$$

其中，微分 $d^{p,q}$ 由投影映射 $U_{p+1} \to U_p$ 所诱导的映射的交错和给出。复形 $H^q(U_\bullet, \mathbb{G}_m)$ 构成谱序列第一页的各行。

我们列出 E_1 页上的一些低次项:

$$\begin{array}{ccccccc}
q & & & & & & \\
\uparrow & & & & & & \\
0 & \longrightarrow & \cdots & & & & \\
0 & \longrightarrow & \operatorname{Pic}(G) & \longrightarrow & \operatorname{Pic}(G \times G) & \longrightarrow & \cdots \\
k^* & \longrightarrow & H^0(G, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & H^0(G \times G, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & \cdots \\
\hline
 & & & & & & \to p
\end{array}$$

注意，由于 k 是代数闭的，$\mathbf{Br}(k) = \mathbf{Pic}(k) = 0$。另请注意，对所有的 q, $d^{0,q}$ 都是两个 π^* 的交错和： $H^q(\operatorname{Spec} k, \mathbb{G}_m) \to H^q(G, \mathbb{G}_m)$，因此 $d^{0,q} = 0$。

我们先计算底行的上同调，即 $H^p(E^{\bullet,0})$，以得到 E_2页的底行。利用如下事实：对所有的 $p \geq 1$, $H^0(G^p, \mathbb{G}_m) = k^* \oplus X(G^p) = k^*$ 是 G^p 上的常值函数集，我们看到沿任意投影映射 $G^{p+1} \to G^p$ 的拉回都是恒等映射 $k^* \to k^*$。因此，对所有的 $p \geq 1$, $d^{p,0}$都是 $p+2$ 个 $\mathrm{id} : k^* \to k^*$的交错和，所以当 p 为奇数时，它是恒等映射；当 p 为偶数时，它是零映射。例如， $d^{1,0}$： $H^0(G, \mathbb{G}_m) \to H^0(G \times G, \mathbb{G}_m)$ 由 $p_2^* - m^* + p_1^*$给出；由于和中的每一项都是恒等映射，因此它是恒等映射 $k^* \to k^*$。

因此， $H^p(E^{\bullet,0})$ 是以下对象的上同调

$$k^* \xrightarrow{0} k^* \xrightarrow{\mathrm{id}} k^* \xrightarrow{0} \cdots,$$

因此 $H^0(E^{\bullet,0}) = k^*$，并且 $H^p(E^{\bullet,0}) = 0$ 对 $p \geq 1$成立。

接下来，我们计算中间行 $H^p(E^{\bullet,1})$ 的上同调。我们必须理解这三个拉回映射

$$p_1^*, p_2^*, m^* : \operatorname{Pic}(G) = X(B) \to \operatorname{Pic}(G \times G) = X(B \times B).$$

令 $\chi \in X(B)$ ~对应于 $\chi_* G \in \mathbf{Pic}(G)$。记 $\rho : G \to G$ 和 $\rho' : \chi_* G \to G$。那么在 $\mathbf{Pic}(G \times G)$ 中，

$$\begin{aligned}
p_1^*(\chi_* \widetilde{G}) &= \chi_* \widetilde{G} \times_{G, p_1} (G \times G) \\
p_2^*(\chi_* \widetilde{G}) &= \chi_* \widetilde{G} \times_{G, p_2} (G \times G), \\
m^*(\chi_* \widetilde{G}) &= \chi_* \widetilde{G} \times_{G, m} (G \times G)
\end{aligned}$$

~上述每一个都是 $\mathbb{G}_m$ 上的 $G \times G$-主丛，我们可以将其写作 $\chi_* G \times G \to G \times G$，其结构映射如下，

$$\begin{aligned}
p_1^*(\chi_* \widetilde{G}) &= \chi_* \widetilde{G} \times G \to G \times G, \ (x, g) \mapsto (\rho'(x), g), \\
p_2^*(\chi_* \widetilde{G}) &= \chi_* \widetilde{G} \times G \to G \times G, \ (x, g) \mapsto (g, \rho'(x)), \\
m^*(\chi_* \widetilde{G}) &= \chi_* \widetilde{G} \times G \to G \times G, \ (x, g) \mapsto (g, g^{-1} \rho'(x)).
\end{aligned}$$

令 $p_1^* \chi, p_2^* \chi, m^* \chi \in X(B \times B)$ 分别对应于 $p_1^*(\chi_* G)$ $p_2^*(\chi_* G)$ $m^*(\chi_* G)$。~

这些映射如下所示,

$$p_1^*\chi = \chi \circ p_1 : (b_1, b_2) \mapsto \chi(b_1),$$
$$p_2^*\chi = \chi \circ p_2 : (b_1, b_2) \mapsto \chi(b_2),$$
$$m^*\chi = \chi \circ m : (b_1, b_2) \mapsto \chi(b_1 b_2),$$

因为它们分别将 $B \times B$-主丛 $G \times G \to G \times G$ 推出为 $\mathbb{G}_m$-主丛 $p_1^*(\chi_* G)$ $p_2^*(\chi_* G)$ $m^*(\chi_* G)$, 。

于是 $d^{1,1}: X(B) \to X(B \times B)$ 由下式给出

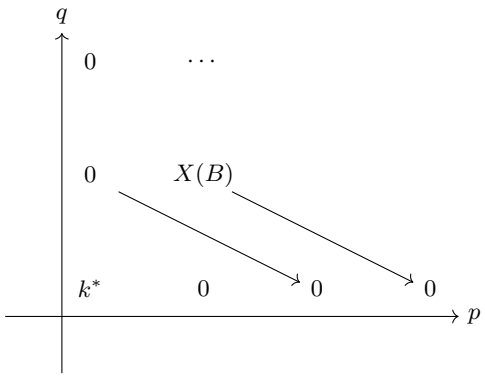
$$d^{1,1} : \chi \mapsto p_2^*\chi - m^*\chi + p_1^*\chi : (b_1, b_2) \mapsto \chi(b_2) - \chi(b_1 b_2) + \chi(b_1) = 0,$$

因为 χ 是一个同态。因此 $H^p(E^{\bullet,1,1})$ 由该序列的上同调给出

$$0 \longrightarrow X(B) \xrightarrow{0} X(B \times B)$$

这给出 $H^0(E^{\bullet,1,1}) = 0$, $H^1(E^{\bullet,1,1}) = X(B)$。

现在我们可以写出 E_2 页,



由此我们可以读出 $H^i(BG, \mathbb{G}_m)$ 对于 $i = 0, 1, 2$。这就完成了第一个结论的证明。

现在我们证明该映射

$$X(B) \to H^2(BG, \mathbb{G}_m),\ \chi \mapsto \chi_*(B\widetilde{G})$$

是一个同构。设 $\mathscr{H} \to BG$ 是一个 $\mathbb{G}_m$-丛。与 $BG \to BG$ 取纤维积, 得到 $\mathscr{H} \times_{BG} B\widetilde{G} \to B\widetilde{G}$, 这是一个位于 $B\widetilde{G}$ 上的 $\mathbb{G}_m$-丛。根据证明的第一部分, $H^2(B\widetilde{G}, \mathbb{G}_m) = 0$, 因为 G 的基本群为 0。因此, 我们的 $\mathbb{G}_m$-丛 $\mathscr{H} \times_{BG} BG \to BG$ 是平凡的, 因而有一个截面。将该截面与到 $\mathscr{H}$ 的投影复合, 得到一个映射 $BG \to \mathscr{H}$。BG 上稳定子群的映射是一个映射 $\chi: B \to \mathbb{G}_m$, 满足 $\chi_*(BG) = \mathscr{H}$。因此该映射是满射。

现在有构于 $\mathscr{H}_2$ $\mathbb{G}_m$ 和 χ_2。B 也就是说, 两个特征, 使得从的同构 χ_1 $\mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$, 定义在 BG 上, 以及一个同构

$$\tau : (\mathscr{H}_1 \to BG) \cong (\mathscr{H}_1 \xrightarrow{\sigma} \mathscr{H}_2 \to BG).$$

由 χ_1 和 χ_2, 我们得到态射 $\phi_1: BG \to \mathscr{H}_1$ 和 $\phi_2: BG \to \mathscr{H}_2$, 它们在稳定子群上的态射分别为 χ_1 和 χ_2。这定义了 $\phi_1 \times \phi_2: BG \to \mathscr{H}_1 \times_{BG} \mathscr{H}_2$。

我们有如下范畴等价,

$$\mathscr{H}_1 \times_{BG} \mathscr{H}_2 \to \mathscr{H}_1 \times B\mathbb{G}_m,$$

其中, 一个等价由如下映射给出

$$\left(h_1 : S \to \mathscr{H}_1, h_2 : S \to \mathscr{H}_2, \alpha : (S \xrightarrow{h_1} \mathscr{H}_1 \to BG) \cong (S \xrightarrow{h_2} \mathscr{H}_2 \to BG)\right)$$

到 $(h_1, \underline{\mathrm{Isom}}_{\mathscr{H}_2}(\sigma \circ h_1, h_2))$, 其中 $\underline{\mathrm{Isom}}_{\mathscr{H}_2}(\sigma \circ h_1, h_2) : (\mathrm{Sch}/S)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Sets}$ 是一个 $\mathbb{G}_m$-主丛, 定义如下:

$$(f : S' \to S) \mapsto \left\{\eta : \left(S' \xrightarrow{f} S \xrightarrow{h_1} \mathscr{H}_1 \xrightarrow{\sigma} \mathscr{H}_2\right) \cong \left(S' \xrightarrow{f} S \xrightarrow{h_2} \mathscr{H}_2\right) \middle| (\mathscr{H}_2 \to BG) \circ \eta = f^*(\alpha \circ h_1^* \tau^{-1})\right\},$$

其中 $\alpha \circ h_1^* \tau^{-1}$ 是以下映射的复合

$$\left(S \xrightarrow{h_1} \mathscr{H}_1 \xrightarrow{\sigma} \mathscr{H}_2 \to BG\right) \xrightarrow{h_1^* \tau^{-1}} \left(S \xrightarrow{h_1} \mathscr{H}_1 \to BG\right) \xrightarrow{\alpha} \left(S \xrightarrow{h_2} \mathscr{H}_2 \to BG\right).$$

$\mathbb{G}_m$-主丛 $\underline{\mathrm{Isom}}_{\mathscr{H}_2}(\sigma \circ h_1,\ h_2)$ 可以看作 h_1 与 h_2之间的同构扭子，其在 BG 中的像由 α给出。

$\mathscr{H}_1 \times_{BG} \mathscr{H}_2$ 中的态射是一对

$$(\beta_1, \beta_2) : (h_1, h_2, \alpha) \to (h_1', h_2', \alpha'),$$

其中 $\beta_1 : h_1 \to h_1'$ 和 $\beta_2 : h_2 \to h_2'$ 是同构，且满足图表

$$\begin{array}{ccc} \overline{h_1} & \xrightarrow{\alpha} & \overline{h_2} \\ {\scriptstyle \overline{\beta_1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\beta_2}} \\ \overline{h_1'} & \xrightarrow{\alpha'} & \overline{h_2'} \end{array} \tag{2.1.1}$$

交换，其中横线表示与适当的映射复合到 BG。

$\mathscr{H}_1 \times_{BG} \mathscr{H}_2$ 中的态射（β_1，β_2）被映射到 $\mathscr{H}_1 \times B\mathbb{G}_m$中的（$\beta_1$，$\gamma$），其中

$$\gamma : \underline{\mathrm{Isom}}_{\mathscr{H}_2}(\sigma \circ h_1, h_2) \to \underline{\mathrm{Isom}}_{\mathscr{H}_2}(\sigma \circ h_1', h_2')$$

由.....给出

$$(\eta : f^*(\sigma \circ h_1) \cong f^* h_2) \mapsto \eta' := f^* \beta_2 \circ \eta \circ f^*(\sigma \circ \beta_1)^{-1}.$$

注意

$$\begin{aligned} \overline{\eta'} &= f^* \overline{\beta_2} \circ \overline{\eta} \circ f^*(\overline{\sigma \circ \beta})^{-1} \\ &= f^* \overline{\beta_2} \circ f^*(\alpha \circ h_1^* \tau^{-1}) \circ f^*(\overline{\sigma \circ \beta})^{-1} \\ &= f^* \overline{\beta_2} \circ f^* \alpha \circ f^* h_1^* \tau^{-1} \circ f^*(\overline{\sigma \circ \beta})^{-1} \\ &= f^* \overline{\beta_2} \circ f^* \alpha \circ f^* \overline{\beta_1}^{-1} \circ f^* h_1'^* \tau^{-1} \\ &= f^* \alpha' \circ f^* h_1'^* \tau^{-1} \end{aligned}$$

由于图表 2.1.1 的交换 图表 2.1.1 的性，以及函子性。 $\tau_\circ$

我们证明该映射是全忠实且本质满的。令 (h_1, h_2, α)、$(h_1', h_2', \alpha') \in \mathscr{H}_1 \times_{BG} \mathscr{H}_2$。给定一个态射 $\beta : h_1 \to h_1'$，以及 $\gamma : \mathrm{Isom}_{\mathscr{H}_2}(\sigma \circ h_1, h_2) \to \mathrm{Isom}_{\mathscr{H}_2}(\sigma \circ h_1', h_2')$，我们可以令$\beta_1 = \beta$，并如下在局部构造 β_2。取一个覆盖 $f : S' \to S$，其中 $\mathrm{Isom}_{\mathscr{H}_2}(\sigma \circ h_1, h_2)$ 有一个截面 $\eta : f^*(\sigma \circ h_1) \to f^* h_2$。我们可以在局部通过 $\gamma(\eta) \circ f^*(\sigma \circ \beta) \circ \eta^{-1}$ 定义 β_2。由关于 $\mathscr{H}_2$ 的下降，存在唯一的态射 $\beta_2 : h_2 \to h_2'$。因此，该映射是全忠实的。

对于本质满射性，设 $(h : S \to \mathscr{H}_1, T : S \to B\mathbb{G}_m) \in \mathscr{H}_1 \times B\mathbb{G}_m$。设 $f : S' \to S$ 是S的一个覆盖，使得 T变成平凡挠子，$T|_{S'} = S' \times \mathbb{G}_m$。那么 $\left(f^* h, f^*(\sigma \circ h)\ f^* h^* \tau : f^* h \to f^*(\sigma \circ h)\right)$映射到 $(f^* h, S' \times \mathbb{G}_m)$，因为 $\mathrm{Isom}_{\mathscr{H}_2}(f^*(\sigma \circ h)\ f^*(\sigma \circ h))$ 有一个截面，即恒等映射。

现在我们可以使用，注释得到价以及映射 $\phi_1 \times \phi_2 : B \widetilde{\ } \to \widetilde{\ }$映射 $BG \to \mathscr{H}_1 \times B\mathbb{G}_m$。根据证明第一部分中的计算，$H^1(BG, \mathbb{G}_m) = 0$，因此该$\widetilde{\ }$映射由某个 $\phi : BG \to \mathscr{H}_1$ 和一个平凡挠子 $BG \times \mathbb{G}_m$给出。由于其像由平凡挠子构成，这说明 $\mathrm{Isom}_{\mathscr{H}_2}(\sigma \circ \phi_1, \phi_2)$ 在 $B\widetilde{G}$ 上有一个截面，例如 $\eta : (B\widetilde{G} \xrightarrow{\phi_1} \mathscr{H}_1 \xrightarrow{\sigma} \mathscr{H}_2) \to (B\widetilde{G} \xrightarrow{\phi_2} \mathscr{H}_2)$。

$\widetilde{\ }$回顾一下，χ_1，$\chi_2 : B \to \mathbb{G}_m$ 分别描述了 ϕ_1 上的稳定子映射 $BG \to \mathscr{H}_1$ 以及ϕ_2 上的稳定子映射 $BG \to \mathscr{H}_2$，它们分别位于 BG 上。令 $b \in B$ 和 $T : S \to BG$，并将 $b : T \cong T$ 视为 BG上的$\widetilde{\ }BG$中的一个同构。则 $\chi_1(b) : \phi_1(T) \to \phi_1(T)$和 $\chi_2(b) : \phi_2(T) \to \phi_2(T)$分别是 BG上的 $\mathscr{H}_1$和$\mathscr{H}_2$ 中的同构。下图交换，

$$\begin{array}{ccccc} \phi_1(T) & \xrightarrow{\sigma} & (\sigma \circ \phi_1)(T) & \xrightarrow{\eta} & \phi_2(T) \\ {\scriptstyle \chi_1(b)}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \chi_2(b)} \\ \phi_1(T) & \xrightarrow{\sigma} & (\sigma \circ \phi_1)(T) & \xrightarrow{\eta} & \phi_2(T), \end{array}$$

具有 η 和 σ 同构。于是，由于 $\mathbb{G}_m$ 是阿贝尔的，我们得出 $\chi_1(b) = \chi_2(b)$，因此我们的映射 $X(B) \to H^2(BG,\ \mathbb{G}_m)$ 是单射。□

注 2.2. 也可以形式上利用谱序列来确定同构$X(B) \to H^2(BG, \mathbb{G}_m)$，但我们已经直接证明了所给映射是一个同构。

3. Brauer-Severi stacks over BG

定义 3.1。设 S 为一个代数栈。相对维数为 的布劳尔-塞韦里栈 n 在 S 上是一个光滑、真态射 $\pi: \mathscr{X} \to S$，其相对维数为 n，并且存在一个 ´étale 覆盖$S' \to S$，使得 $\mathscr{X}_{S'} \cong \mathbb{P}^n_{S'}$。

注 3.2。一个光滑、真态射 $\pi: \mathscr{X} \to S$，对于每个几何点 $s:$ 谱 $k \to S$，$\mathscr{X}_s \cong \mathbb{P}^n_k$，都是布劳尔-塞韦里栈。

下面两个命题分别从一般情形以及由向量丛参数化的情形，为理解布劳尔-塞韦里栈提供了等价的观点。

命题 3.3。相对维数为 n、在 S 上的布劳尔-塞韦里栈与 S上的PGL_{n+1}-主丛之间存在范畴等价。

证明。给定一个布劳尔-塞韦里栈 $\pi: \mathscr{X} \to S$，我们定义 S 上的 PGL_{n+1}-主丛 $I_{\mathscr{X}}$ 为

$$I_{\mathscr{X}}(T \to S) = \{\text{isomorphisms } \sigma : \mathscr{X} \times_S T \cong \mathbb{P}^n_T\},$$

其中 $\alpha \in \mathrm{PGL}_{n+1}(T) = \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_T)$ 通过与 σ 复合作用。该等价通过将 $\pi: \mathscr{X} \to S$ 送至 $I_{\mathscr{X}}$ 给出，而布劳尔-塞韦里栈之间的同构 $\phi: \mathscr{X} \to \mathscr{X}'$ 被送至 $\phi_*: I_{\mathscr{X}} \to I_{\mathscr{X}'}$，其定义为

$$(\sigma : \mathscr{X} \times_S T \cong \mathbb{P}^n_T) \mapsto (\sigma \circ (\phi^{-1} \times \mathrm{id}) : \mathscr{X}' \times_S T \cong \mathscr{X} \times_S T \cong \mathbb{P}^n_T). \qquad \square$$

例 3.4。对于 $n = 1$，这就是说，亏格为 0 的曲线的模叠 $\mathscr{M}_0$ 同构于 $B\mathrm{PGL}_2$。

命题 3.5。S 上的秩为 $n+1$ 的向量丛、S 上的 GL_{n+1}-主丛，以及相对维数为 n 且附带一个次数为 *1* 的线丛 S 的布劳尔-塞韦里栈，这三者范畴等价。

*Pr*证明。给定 S 上的秩为 $n+1$ 的向量丛 V，我们定义 S 上的 GL_{n+1}-主丛 I_V 为 e

$$I_V(T \to S) = \{\text{isomorphisms } \sigma : V|_T \cong \mathscr{O}_T^{\oplus n+1}\},$$

其中 $\alpha \in \mathrm{GL}_{n+1}(T) =$ 自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathscr{O}_T^{\oplus n+1})$ 通过与 σ复合来作用。这些等价分别通过将 V映至 I_V，以及将 V映至 $(\mathbb{P}V, \mathscr{O}_{\mathbb{P}V}(1))$ 给出。□

定义3.6。$\pi: \mathscr{X} \to S$ 在 $H^1(S, \mathrm{PGL}_{n+1})$ 中的类在由短正合列导出的微分下的像

$$1 \to \mathbb{G}_m \to \mathrm{GL}_{n+1} \to \mathrm{PGL}_{n+1} \to 1$$

是类 $\delta([\mathscr{X}]) \in H^2(S, \mathbb{G}_m)$，我们称之为布劳尔-塞韦里代数栈 的布劳尔类。

命题3.7。布劳尔-塞韦里代数栈 $\mathscr{X} \to S$ 的布劳尔类由以下在 S 上的 $\mathbb{G}_m$-丛的类 $[\mathscr{G}] =\delta([\mathscr{X}]) \in H^2(S, \mathbb{G}_m)$ 给出，

$$\mathscr{G}(T \to S) = \{\textit{degree 1 line bundles on } \mathscr{X} \times_S T\}.$$

中的态射 $\mathscr{G}$ 是线丛的同构。特别地，$\mathscr{G}$ 是平凡丛，当且仅当 f $\mathscr{X} \cong \mathbb{P}V$ 对于某个 向量丛 V 在 S上。

证明。类 $\delta([\mathscr{X}])$ 是一个 $\mathbb{G}_m$-丛

$$\delta(I_{\mathscr{X}})(T \to S) = \{(P, \epsilon : P^{\wedge \mathrm{PGL}_{n+1}} \cong I_{\mathscr{X}}|_T\},$$

其中 P是 T上的一个 $\mathrm{GL}_{n+1}|_T$-主丛，而 ϵ是 P到 PGL_{n+1}的推出与 $I_{\mathscr{X}}|_T$之间的一个同构。$\delta(I_{\mathscr{X}})$ 中的态射是与到 $I_{\mathscr{X}}$的同构相容的 GL_{n+1}-主丛同构。由命题 3.5 可知，一个 $\mathrm{GL}_{n+1}|_T$-主丛连同其 PGL_{n+1}-推出到 $I_{\mathscr{X}}$的一个同构，这些数据等价于一个 T上的秩为 $n+1$的向量丛 V连同一个同构 $\mathbb{P}V \cong \mathscr{X} \times_S T$的数据；而这又等价于一个布劳尔–塞韦里簇 $Y \to T$连同其上的一个次数为 1 的线丛以及一个同构 $Y \cong \mathscr{X} \times_S T$的数据，这又等价于一个 $\mathscr{X} \times_S T$上的次数为 1 的线丛的数据。

此外，$\mathscr{G}$是平凡的，当且仅当 $[\mathscr{G}] = \delta([\mathscr{X}]) = 0$，当且仅当存在一个位于$S$ 上的 GL_{n+1} 主丛，其向 PGL_{n+1} 的推出为 $I_{\mathscr{X}} = [\mathscr{X}]$，当且仅当存在一个 S 上的向量丛 V，使得$\mathscr{X} \cong \mathbb{P}V$。□

3.8. 从此处开始，我们只考虑 BG 上的、形如 $[\mathbb{P}V/G] \to BG$的布劳尔-塞韦里代数栈，其中 G 如第2节所述，且 V 是万有覆盖 G的一个表示。我们将使用定理 2.1 来描述它们的布劳尔类。设 V 是 G 的一个表示，它通过 ρ （在左侧）作用： $G \to \mathrm{GL}(V)$，且 $B \subseteq G$ 通过一个特征 χ： $B \to \mathbb{G}_m$. 作用。由于 B 通过一个特征作用，我们得到 G 在$(V \setminus \{0\})/\mathbb{G}_m$上的诱导作用。为了函子性地理解 V和$(V \setminus \{0\})/\mathbb{G}_m$，我们引入 $\mathbb{A}_V$ 和 $\mathbb{P}V$ 来表示它们。

令 $\mathbb{A}_V$ 表示函子

$$\mathbb{A}_V : (\mathrm{Sch}/\mathrm{Spec}\ k)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Sets}$$

$$(T \to \mathrm{Spec}\ k) \mapsto \mathrm{Hom}_k(V \otimes_k \mathscr{O}_T, \mathscr{O}_T)$$

我们有 $\mathbb{A}_V(k)$ = 同态集$_k(V,\ k) = V^\vee$，以及 $\mathbb{A}_V =$ 谱 $(\mathrm{Sym}^\bullet_k V)$。事实上，

$$\begin{aligned}(\mathrm{Spec}\ (\mathrm{Sym}^\bullet_k V))(T) &= \mathrm{Hom}(\mathrm{Sym}^\bullet_k V, \Gamma(T, \mathscr{O}_T)) \\ &= \mathrm{Hom}(\mathrm{Sym}^\bullet_k V \otimes_k \mathscr{O}_T, \mathscr{O}_T) \\ &= \mathrm{Hom}(V \otimes_k \mathscr{O}_T, \mathscr{O}_T) \\ &= \mathbb{A}_V(T).\end{aligned}$$

在 $\mathbb{A}_V(k)$ 中，0 表示零映射 $V \to k$。更一般地，在 $\mathbb{A}_V(T)$ 中，0 表示那些$V \otimes_k \mathscr{O}_T \to \mathscr{O}_T$ 非满射的映射。

~ ~在 k-点上，由 G 对 V 的作用所诱导的 G 对 $V^\vee$ 的作用，是通过与作用映射复合~给出的，并使 $V^\vee$ 上的作用成为右作用。具体而言，对于 $g \in G$ 和$f\colon V \to k$ 在 $V^\vee$ 中，$g \cdot f\colon V \to k$，其作用由 $v \mapsto f(g \cdot v)$ 给出。对于 $b \in B$，$b \cdot f\colon V \to k$ 由$v \mapsto f(b \cdot v) = f(\chi(b)v) = \chi(b)f(b)$ 给出，因此 B也通过 χ作用于 $V^\vee$。

~**注3.9**。如果只考虑左作用，那么我们可以改为与逆作用映射复合，将 G 对 $V^\vee$ 的作用变为左作用。具体来说，$g \cdot f\colon V \to k$ 由 $v \mapsto f(g^{-1} \cdot v)$ 给出。在这种情况下，B 通过 χ^{-1}作用。

~ G 的作用在 $\mathbb{A}_V$ 上也具有函子性。具体来说，$g \cdot (f\colon V \otimes_k \mathscr{O}_T \to \mathscr{O}_T)$ 是由 f 与以下内容复合而成的

$$(v \mapsto g \cdot v) \otimes \mathrm{id} : V \otimes_k \mathscr{O}_T \to V \otimes_k \mathscr{O}_T.$$

令 $\mathbb{P}V$ 表示函子

$$\mathbb{P}V : (\mathrm{Sch}/\mathrm{Spec}\ k)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Sets}$$

$$(T \to \mathrm{Spec}\ k) \mapsto \{V \otimes_k \mathscr{O}_T \twoheadrightarrow \mathscr{L}\}/\sim$$

其中，两个满射 $(V \otimes_k \mathscr{O}_T \twoheadrightarrow \mathscr{L}_1)$ 和 $(V \otimes_k \mathscr{O}_T \twoheadrightarrow \mathscr{L}_2)$ 等价，当且仅当存在一个同构 $s\colon \mathscr{L}_1 \to \mathscr{L}_2$，使图表

$$\begin{array}{ccc} V \otimes_k \mathscr{O}_T & \longrightarrow & \mathscr{L}_1 \\ & \searrow & \downarrow s \\ & & \mathscr{L}_2 \end{array}$$

交换。

注意，$\mathbb{P}V$ 是该函子的层化 tor

$$(\mathbb{P}V)^{\mathrm{pre}} : (\mathrm{Sch}/\mathrm{Spec}\ k)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Sets}$$

$$(T \to \mathrm{Spec}\ k) \mapsto \{V \otimes_k \mathscr{O}_T \twoheadrightarrow \mathscr{O}_T\}/\sim$$

具有相同的等价关系。也就是说，$\mathbb{P}V \cong (\mathbb{A}_V \setminus \{0\})/\mathbb{G}_m$。

{3.1}的作用上的作用类似地由与 V上的作用复合给出。由于 B 通过一个~特征作用，B 在商上平凡作用，因此 G 的作用下降为 G 在 $\mathbb{P}V$上的作用。

考虑代数栈商 $[\mathbb{P}V/G] \to BG$，它是 BG上的布劳尔-塞韦里栈，因为沿 $\mathrm{Spec}\ k \to BG$ 拉回得到 $\mathbb{P}V \to \mathrm{Spec}\ k$。$[\mathbb{P}V/G]$ 的布劳尔类由 $[\mathbb{P}V/G]$ 在 BG上的次数为 1 的线丛的 $\mathbb{G}_m$-丛$\mathscr{G}$ 给出，

$$\mathscr{G}(S \to BG) = \{\text{degree 1 line bundles on } S \times_{BG} [\mathbb{P}V/G] =: \mathbb{P}_S\}. \tag{3.9.1}$$

引理 3.10. 纤维积 $\mathbb{P}_S := S \times_{BG} [\mathbb{P}V/G]$ 由 $T \times^G \mathbb{P}V := (T \times \mathbb{P}V)/G$给出，其中$T \to S$是与 $S \to BG$ 对应的 G-主丛，且 G 通过 $g \cdot (t, v) = (g \cdot t, g \cdot v)$作用于 $T \times \mathbb{P}V$。

证明. 纤维积 $\mathbb{P}_S$ 的对象可描述为如下元组

$$(S' \to S,\ T' \to S',\ \varphi : T' \to \mathbb{P}V,\ \sigma : T \times_S S' \cong T')$$

其中， S' 是一个 S-概形， $T' \to S'$ 是一个 G-主丛， φ 是一个 G-等变态射，而 σ 是 S'上的 G-主丛的一个同构。

两个元组（$S' \to S$， $T' \to S'$， φ， σ）$\to$（$S'' \to S$， $T'' \to S''$， φ''， σ''）之间的态射由一对（s， t）给出，其中 s： $S' \to S''$是 S-概形的一个态射，而 t： $T' \to T''$是一个 G-等变态射，并且满足以下图表可交换，

$$\begin{array}{ccc} T' & \xrightarrow{\quad t \quad} & T'' \\ & {\scriptstyle\varphi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\varphi''} & \\ & \mathbb{P}V, & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} T \times_S S' & \xrightarrow{\ \sigma\ } & T' \\ {\scriptstyle \mathrm{id}\times s}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t} \\ T \times_S S'' & \xrightarrow{\ \sigma''\ } & T''. \end{array}$$

注意，由于第二个相容条件， t 完全由 $t = \sigma'' \circ (\mathrm{id} \times s) \circ \sigma^{-1}$确定。

我们可以看到，这些数据等价于一个代数栈，其对象由以下各对给出

$$(S' \to S, \phi : T \times_S S' \to \mathbb{P}V)$$

其中， S' 是一个 S-概形， ϕ 是一个 G-等变态射；两个元组（$S' \to S$， ϕ）与（$S'' \to S$， ϕ''）之间的态射是 S-概形的态射 s ： $S' \to S''$ ，使得图表交换，

$$\begin{array}{ccc} T \times_S S' & \xrightarrow{\quad \mathrm{id}\times s \quad} & T \times_S S'' \\ & {\scriptstyle\phi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\phi''} & \\ & \mathbb{P}V. & \end{array}$$

事实上，通过将（$S' \to S$， $T' \to S'$， φ， σ）映到（$S' \to S$， $\varphi \circ \sigma$），即可得到一个等价；对于态射，则将（s， t）$\mapsto s$。

这是全忠实的，因为如上所述， t 由其他数据确定；这是本质满的，因为（$S' \to S$， $T \times_S S' \to S'$， ϕ，id）$\mapsto$（$S' \to S$， ϕ）。

现在我们定义 $T \times^G \mathbb{P}V$ 与 $\mathbb{P}_S$之间的一个等价。

首先，考虑 G-主丛 $T \times \mathbb{P}V \to T \times^G \mathbb{P}V$。按照上文所述的 G 在 $T \times \mathbb{P}V$ 上的作用，得到从 $T \times \mathbb{P}V$ 到 T 和 $\mathbb{P}V$的两个投影映射，它们都是 G-等变态射。将 $T \times \mathbb{P}V \to T$ 对 G 取商，得到以下笛卡尔方块，

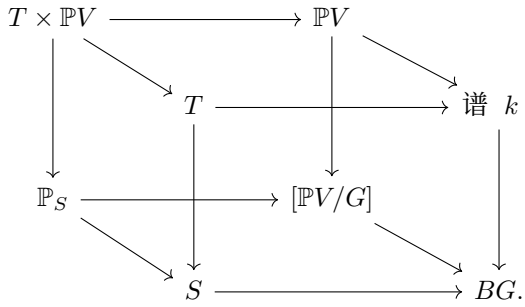
$$\begin{array}{ccc} T \times \mathbb{P}V & \longrightarrow & T \\ \downarrow & & \downarrow \\ T \times^G \mathbb{P}V & \longrightarrow & S. \end{array}$$

给定一个态射 $S' \to T \times^G \mathbb{P}V$，与到 S 的映射复合，得到 s： $S' \to S$。由于上述交换方块的交换性，纤维积 $S' \times_{T \times^G \mathbb{P}V} (T \times \mathbb{P}V)$ 由 $T \times_S S'$ 给出，并得到一个 G-等变映射 $T \times_S S' \to T \times \mathbb{P}V \to \mathbb{P}V$。事实上，由于 $T \times_S S' \to T$ 和 $T \times \mathbb{P}V \to T$ 都是 G-等变的，$T \times_S S' \to T \times \mathbb{P}V$ 是 G-等变的，因此到 ϕ 的复合 $T \times_S S' \to \mathbb{P}V$ 也是如此。

反之，给定 s： $S' \to S$ 和 ϕ： $T \times_S S' \to \mathbb{P}V$，取 $\mathrm{pr}_1 \times \phi$： $T \times_S S' \to T \times \mathbb{P}V$ 关于 G 作用的商，得到 $S' \to T \times^G \mathbb{P}V$。显然，这些彼此互为逆映射。□

注 3.11. 可以将 G-等变态射的范畴视为输入和输出的有序对 (t, v)，它在等价关系 $(g \cdot t, g \cdot v) \sim (t, v)$ 下定义良好，这与 $T \times^G \mathbb{P}V$ 的局部描述一致。

注 3.12. 下列交换图也可用于证明引理 3.10,



引理 3.13。 $\mathbb{A}_V \setminus \{0\} \to \mathbb{P}V$是一个 $\mathbb{G}_m$-主丛，对应于 $\mathbb{P}V$ 上的线丛 $\mathscr{O}_{\mathbb{P}V}(1)$，也就是说,

$$\mathbb{A}_V \setminus \{0\} = \mathrm{Tot}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}V}(1)) \setminus \{0\} := \underline{\mathrm{Spec}}_{\mathbb{P}V}(\mathrm{Sym}_k^\bullet \mathscr{O}_{\mathbb{P}V}(-1)) \setminus \{0\}.$$

证明。 映射 $\mathbb{A}_V \setminus \{0\} \to \mathbb{P}V$由下式给出

$$(V \otimes_k \mathscr{O}_T \twoheadrightarrow \mathscr{O}_T) \mapsto [V \otimes_k \mathscr{O}_T \twoheadrightarrow \mathscr{O}_T]$$

$\mathbb{A}_V \setminus \{0\}$ 在点 f 上的对象： $T \to \mathbb{P}V$，对应于从泛商 $V \otimes_k \mathscr{O}_{\mathbb{P}V} \twoheadrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}V}(1)$ 拉回的 φ： $V \otimes_k \mathscr{O}_T \twoheadrightarrow \mathscr{L}$，由下式给出

$$(\mathbb{A}_V \setminus \{0\})(T \to \mathbb{P}V) = \left\{ \phi : V \otimes_k \mathscr{O}_T \twoheadrightarrow \mathscr{O}_T | \exists s : \begin{array}{ccc} V \otimes_k \mathscr{O}_T & \xrightarrow{\phi} & \mathscr{O}_T \\ & \searrow^{\varphi} & \downarrow s \\ & & \mathscr{L} \end{array} \text{ commutes} \right\}.$$

这些数据等价于同构的集合 $\{s : \mathscr{O}_T \cong \mathscr{L}\}$。

一点 f 上的 $\mathrm{Tot}(\setminus\{0\}(1))\mathscr{O}_{\mathbb{P}V}$ $T \to \mathbb{P}V$ 的对象由以下给出:

$$\left(\underline{\text{谱}}_{\mathbb{P}V} \quad (\mathrm{Sym}_k^\bullet \mathscr{O}_{\mathbb{P}V}(-1)) \setminus \{0\}\right)(T \to \mathbb{P}V) = \{\mathrm{Sym}^\bullet \mathscr{L}^\vee \twoheadrightarrow \mathscr{O}_T\} \cong \{\mathscr{L}^\vee \twoheadrightarrow \mathscr{O}_T\} \cong \{\mathscr{O}_T \cong \mathscr{L}\}.$$

因此 $\mathbb{A}_V \setminus \{0\} = \mathrm{Tot}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}V}(1)) \setminus \{0\}$。 □

定理 3.14。 设 $G, \widetilde{G}, B, V, \chi$ 如第 *3.8* 节所述，且 $\mathscr{G}$ 如公式 *3.9.1* 所述。则 $\chi_*^{-1}(B\widetilde{G}) = \mathscr{G}$，因此根据定理 *2.1*， $\mathscr{G}$ 在 $H^2(BG, \mathbb{G}_m) = X(B)$ 中的类由 χ^{-1} 给出。

~证明。 我们定义一个在 BG 上的叠态射 $BG \to \mathscr{G}$，并证明其在稳定子群上的态射由 χ^{-1} 给出。给定一个对应于 $\widetilde{G}$-主丛 $\widetilde{T} \to S$ 的 $S \to B\widetilde{G}$，我们必须将其赋给 $\mathbb{P}_S = T \times^G \mathbb{P}V$ 上一个次数为 1 的线丛，其中 T 是 $\widetilde{T}$ 在 BG 中的像。设其在 $\mathscr{G}$ 中的像为对应于 $\mathbb{G}_m$-主丛的线丛

$$\widetilde{T} \times^{\widetilde{G}} \mathbb{A}_V \setminus \{0\} \to T \times^G \mathbb{P}V = \widetilde{T} \times^{\widetilde{G}} \mathbb{P}V.$$

注意，此映射出现在笛卡尔图中

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{T} \times^{\widetilde{G}} (\mathbb{A}_V \setminus \{0\}) & \longrightarrow & [\mathbb{A}_V \setminus \{0\}/\widetilde{G}] & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ T \times^G \mathbb{P}V = \widetilde{T} \times^{\widetilde{G}} \mathbb{P}V & \longrightarrow & [\mathbb{P}V/\widetilde{G}] & \longrightarrow & [\mathbb{P}V/G] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S & \longrightarrow & B\widetilde{G} & \longrightarrow & BG. \end{array}$$

~ ~ ~一个 G-主丛之间的态射 b： $T \to T'$，若它们到 G 的推出相同，则映射为态射

$$\widetilde{T} \times^{\widetilde{G}} (\mathbb{A}_V \setminus \{0\}) \to \widetilde{T'} \times^{\widetilde{G}} (\mathbb{A}_V \setminus \{0\}),$$

我们在覆盖上将其描述为

$$\widetilde{T} \times (\mathbb{A}_V \setminus \{0\}) \to \widetilde{T}' \times (\mathbb{A}_V \setminus \{0\}), \quad (t, v) \mapsto (b \cdot t, v).$$

对 $\widetilde{G}$-作用取商后，该映射为 $[(t, v)] \mapsto [(b \cdot t, v)] = [(t, b^{-1} \cdot v)] = [(t, \chi(b)^{-1} v)]$。

因此， $B\widetilde{G} \to \mathscr{G}$ 上 BG 的自同构群之间的态射由 χ^{-1} 给出，所以$\chi_*^{-1}(B\widetilde{G}) = \mathscr{G}$。□

~ ~更一般地，设 $V_1, \ldots, V_r$ 是 G 的表示，其作用由 $\rho_i \colon G \to \mathrm{GL}(V_i)$ 给出，并且 B 通过特征 χ_i 作用，其中 $i = 1, \ldots, r$。同样，该作用下降到 $\mathbb{P}V_i$。考虑

$$[(\mathbb{P}V_1 \times \cdots \times \mathbb{P}V_r)/G] \to BG,$$

以及 $\mathbb{G}_m$ 上的 BG-丛，

$$\mathscr{G}^{a_1,\ldots,a_r}(S \to BG) = \left\{ \begin{array}{c} \mathscr{L} \text{ on } S \times_{BG} [\mathbb{P}V_1 \times \cdots \mathbb{P}V_r/G] = \mathbb{P}_S \text{ such that} \\ \forall s : \operatorname{Spec} \overline{k} \to S,\ \mathscr{L}|_{\mathbb{P}_s} \cong \mathscr{O}(a_1, \ldots, a_r) \end{array} \right\}.$$

这里， $\mathscr{O}(a_1, \ldots, , a_r)$ 是 $\mathbb{P}V_1 \times \cdots \times \mathbb{P}V_r$ 上的线丛，由 $\mathbb{P}V_i$ 上的 $a_i(\mathscr{O})$ 的拉回的张量积给出。为简化记号，我们将在 $\mathbb{P}_S$ 上将这样的线丛记为 $\mathscr{O}(a_1, \ldots, a_r)$。

推论 3.15。 设 $\psi = \sum_{i=1}^r a_i \chi_i^{-1}$。那么 $\psi_*(B\widetilde{G}) = \mathscr{G}^{a_1,\ldots,a_r}$，因此 $\mathscr{G}^{a_1,\ldots,a_r}$ 的类由$\curvearrowright \psi \in B$给出。

证明。 利用定理 3.14 的结果，我们只需证明 $\mathscr{G}^{a_1,\ldots,a_r}$ 是 $\mathbb{G}_m$-丛 $\mathscr{G}^{a_1}, \ldots, \mathscr{G}^{a_r}$ 的乘积（将在下文定义），且每个 $\mathscr{G}^{a_i}$ 都是乘积 $a_i\mathscr{G}_i$，其中 $\mathscr{G}_i$ 是 $\mathbb{G}_m$-丛

$$\mathscr{G}_i(S \to BG) = \{\mathscr{O}(1) \text{ on } S \times_{BG} [\mathbb{P}V_i/G]\}.$$

如定理 3.14 所述。

令 $\mathscr{G}^{a_i}$ 为 BG 上的如下 $\mathbb{G}_m$-丛，

$$\mathscr{G}^{a_i}(S \to BG) = \{\mathscr{O}(a_i) \text{ on } S \times_{BG} [\mathbb{P}V_i/G]\}.$$

注意

$$[\mathbb{P}V_1 \times \cdots \times \mathbb{P}V_r/G] \cong [\mathbb{P}V_1/G] \times_{BG} \cdots \times_{BG} [\mathbb{P}V_r/G],$$

并令 $p_i \colon [\mathbb{P}V_1 \times \cdots \times \mathbb{P}V_r/G] \to [\mathbb{P}V_i/G]$ 为投影映射。为证明 $\mathscr{G}^{a_1,\ldots,a_r} \cong \mathscr{G}^{a_1} \cdots \mathscr{G}^{a_r}$，我们定义一个丛态射

$$\mathscr{G}^{a_1} \times \cdots \times \mathscr{G}^{a_r} \to \mathscr{G}^{a_1,\ldots,a_r}$$

使得 t th稳定子上的映射是乘积映射 $\mathbb{G}_m \times \cdots \times \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$。该映射定义为

$$(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_r) \mapsto p_1^*\mathscr{L}_1 \otimes \cdots \otimes p_r^*\mathscr{L}_r.$$

类似地，为了证明 $\mathscr{G}^{a_i} \cong a_i\mathscr{G}_i$，我们定义一个态射 $\mathscr{G}_i \times \cdots \times \mathscr{G}_i \to \mathscr{G}^{a_i}$，其中包含 a_i 个 $\mathscr{G}_i$，使得稳定子上的映射是乘积映射。该映射定义为

$$(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_{a_i}) \mapsto \mathscr{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{L}_{a_i}.$$ □

~**例 3.16.** 设 $G = \mathrm{PGL}_2$, , 则 G =SL_2, 且 $B = \mu_2$。设 V为 G的标准表示，则 $V = k^{\oplus 2}$，且 SL_2 通过 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax + By \\ Cx + Dy \end{pmatrix}$作用。于是 μ_2 通过标准特征作用，该作用下降为 PGL_2 在 $\mathbb{P}V$上的作用。商 $[\mathbb{P}V/\mathrm{PGL}_2] \to B\mathrm{PGL}_2$ 是属零曲线模空间上的泛曲线（见命题 4.5，(2)）。设 $\mathscr{G}$ 为 $[\mathbb{P}V/\mathrm{PGL}_2]$ 上次数为 1 的线丛的 $\mathbb{G}_m$-丛，其底空间为 $B\mathrm{PGL}_2$,

$$\mathscr{G}(S \to B\mathrm{PGL}_2) = \{\text{degree 1 line bundles on } S \times_{B\mathrm{PGL}_2} [\mathbb{P}V/\mathrm{PGL}_2] =: \mathbb{P}_S\},$$

我们将其识别为 $B\mathrm{GL}_2$。定理 3.14 确认 $\chi_*(B\mathrm{SL}_2) = \mathscr{G} \cong B\mathrm{GL}_2$, , 其中 $\chi \colon \mu_2 \to \mathbb{G}_m$ 是标准特征（此处为 $\chi = \chi^{-1}$ ）。请注意， $B\mathrm{GL}_2$ 确实是一个非平凡的丛，因为在非代数闭域上存在没有次数为 1 的线丛的亏格 0 曲线。

例 3.17. 接下来最简单、值得理解的情形是如上所述的 G =PGL_2, , 以及 V =$\mathrm{Sym}^d(k^{\oplus 2})$ =$H^0(\mathbb{P}k^{\oplus 2}, \mathscr{O}(d))$ $\cong$ $k^{\oplus d+1}$。我们可以将 $\mathbb{P}V$ 视为参数化 $\mathbb{P}k^{\oplus 2} \cong \mathbb{P}^1$上的次数为 d 的除子的空间；这些除子来自两个变量的齐次次数为 d 的多项式的零点，其中系数属于 $d+1$ ，因此多项式在相差一个非零标量的意义下唯一。 μ_2 在 V 上的作用由其在 $k^{\oplus 2}$ 上的作用诱导，具体为 $(-1)^d$。

该作用下降为 PGL_2 在 $\mathbb{P}V$ 上的作用，而商 $[\mathbb{P}V/\mathrm{PGL}_2] \to B\mathrm{PGL}_2$, 是亏格为 0 的曲线上的次数为 d 的除子的模（参见命题 4.5 (4)）。令 $\mathscr{G}_d$ 为 $\mathbb{G}_m$上 $[\mathbb{P}V/\mathrm{PGL}_2]$ 的次数为 1 的线丛丛，位于 $B\mathrm{PGL}_2$,之上

$$\begin{aligned}\mathscr{G}_d(S \to B\mathrm{PGL}_2) &= \{\mathrm{PGL}\ S \times_{B\mathrm{PGL}_2} [\mathbb{P}\text{上的次数为 1 的线丛} \quad]\} \\ &\cong \{\mathrm{PGL}\ d \text{ 上的 } S \times_{B\mathrm{PGL}_2} [\mathbb{P}k^{\oplus 2}/\text{线丛}_2]\}\mathrm{PGL}\cong d\{\text{上的} \\ &\quad \text{次数为 1 的线丛}\end{aligned}$$

对于第一个同构，注意到 $S \times_{B\mathrm{PGL}_2} [\mathbb{P}\mathrm{PGL}^d(k^{\oplus 2})/\mathrm{PGL}_2] = \mathrm{PGL}^d_{\mathbb{P}_S/S}$，其中 $\mathbb{P}_S = S \times_{B\mathrm{PGL}_2} [\mathbb{P}k^{\oplus 2}/\mathrm{PGL}_2]$。因此 $[\mathscr{G}_d] = d[\mathscr{G}] = [d] \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，其中 $\mathscr{G}$ 与前面的例子相同。对于 d 为偶数的情形， $\mathscr{G}_d$ 是平凡丛，对应于 μ_2的平凡特征；对于 d 为奇数的情形， $\mathscr{G}_d$ 是非平凡丛，对应于 μ_2的标准特征。这等价于这样的说法：亏格为 0 的曲线可能没有奇数次除子，但总有一个偶数次除子，它等于典范除子的某个幂。

我们以记录 Gabber 定理结束本节，该定理同样适用于代数栈。虽然证明本质上与此前给出的证明相同，但我们未能找到将该陈述推广到代数栈的参考文献，因此在此纳入该定理，并概述其证明。

定理 3.18。*(*[Gab81，第 2 个定理，第 193], 推广到代数栈*)* 设 S 为一个代数栈， $\pi\colon \mathscr{X} \to S$ 一个布劳尔-塞韦里栈。以下序列是正合的，

$$H^0_{\text{ét}}(S,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(S,\mathbb{G}_m)_{\text{tors}} \xrightarrow{\pi^*} H^2(\mathscr{X},\mathbb{G}_m)_{\text{tors}} \longrightarrow 0,$$

其中第一个映射发送 $1 \mapsto -\delta([\mathscr{X}])$。

证明。 Gabber 使用 Leray 谱序列 $E^{p,}{}_2{}^q = H^p(S,\ R^q\pi_*\mathbb{G}_m) \Rightarrow H^{p+q}(X,\ \mathbb{G}_m)$ 得到定理中的正合序列。 Gabber 证明中的计算 $\pi_*\mathbb{G}_m = \mathbb{G}_m$、 $R^1\pi_*\mathbb{G}_m = \mathbb{Z}$ 和 $R^2\pi_*\mathbb{G}_m = 0$适用于布劳尔-塞韦里栈，因为这些计算是在 ´etale 局部进行的。□

4. The Moduli Spaces $\mathscr{M}_A$

令 $A = (g,\ N,\ d_1,\ \ldots\ldots,\ d_{N-1})$ 为一个 $N+1$ 元组，满足 $N|d := \sum id_i$ 且

$$\widetilde{g} := \frac{1}{2}\left(N(2g-2) + \sum_i d_i(N - \gcd(i,N)) + 2\right)$$

是一个大于 1 的整数。因此，根据引言中的定义，它是某个 $\widetilde{g} > 1$ 的 $\widetilde{g}$-可容许数据。定义代数栈 $\mathscr{M}_A$ 为其对象为

$$\mathscr{M}_A(S) = \{(f : C \to S, D_1, \ldots D_{N-1}, \mathscr{L}, \phi)\}$$

其中 $f : C \to S$ 是一条光滑的亏格为 g 的曲线， D_i 是次数为 d_i 的不相交除子， $\to S$ 是 (Sym $^{d_i}_{C/S}\backslash\Delta_{d_i}$) 的截面，其中 Δ_{d_i} 是大对角线， $\mathscr{L}$ 是 C 上的线丛，且 $\phi\colon \mathscr{L}^{\otimes N} \to \mathscr{O}_C(\sum iD_i)$ 是一个同构。

一个态射

$$(\sigma,\tau) : (f : C \to S, D_i, \mathscr{L}, \phi) \to (f' : C' \to S, D'_i, \mathscr{L}', \phi')$$

是由一对同构 $\sigma : C \to C'$ 和 $\tau : \sigma^*\mathscr{L}' \to \mathscr{L}$ 构成的，满足 $\sigma^*(D'_i) = D_i$ ，且以下图表交换:

$$\begin{array}{ccc} \sigma^*(\mathscr{L}'^{\otimes N}) & \xrightarrow{\sigma^*(\phi')} & \sigma^*\mathscr{O}_{C'}(\sum iD'_i) \\ \downarrow{\scriptstyle \tau^{\otimes N}} & & \downarrow \\ \mathscr{L}^{\otimes N} & \xrightarrow{\phi} & \mathscr{O}_C(\sum iD_i). \end{array}$$

按照 [Par91], , 我们粗略地解释 μ_N-覆盖 $\pi\colon X \to C$ 与 $\mathscr{M}_A$ 的对象（C、 D_i、 $\mathscr{L}$、 ϕ）之间的对应关系。

对于任意群为 G 的光滑完备簇的阿贝尔覆盖 $\pi : X \to Y$，令 D 为 π 分歧处 Y 的轨迹。那么 $R := \pi^{-1}(D)$ 是 X 上由非平凡子群 G 稳定的点所构成的轨迹。对于 R 的闭点 T，令 $H \leq G$ 为其稳定子。令 $\mathscr{O}_{X,\ T}$ 为其局部环，极大理想为 $\mathfrak{m}$。由于 H 固定 T，我们得到 H 在余切空间 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 上的忠实表示 ψ 。现在，我们可以根据 D 的位置将其分解为互不相交的分支 $D_{H,\ \psi}$ ，其中

$\pi^{-1}(D_{H,\ \psi})$ 的稳定子为 H，表示为 ψ。由于 π 是伽罗瓦的，π 的同一纤维中的所有点都具有相同的稳定子群 H 和表示 ψ。

当 X 和 Y 是曲线时，$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 的维数为 1。因此，H 的任何表示都是 H 的一个特征。此外，如果 G 还是 N 阶循环群，则有一个双射

$$\{1,\ldots,N-1\}\to\{(H,\psi):\langle 1\rangle\neq H<G=\mu_N,\ \psi\in\widehat{H}\}$$

由 $m\mapsto\left(\langle\zeta_N^m\rangle\subseteq\mu_N,\psi:\ \zeta_N^m\mapsto\zeta_N^{\gcd(m,N)}\right)$ 给出。因此，我们可以将除子 $D_1,\ \ldots D_{N-1}$ 标记出来。此外，结构层的推前 $\pi_*\mathscr{O}_X$ 可以分解为特征层 $\pi_*\mathscr{O}_X=\oplus_{i=0}^{N-1}\mathscr{L}_i^{-1}$，其中 $\mathscr{L}_i^{-1}$ 是满足以下条件的线丛：μ_N 通过 ζ_N^i 作用于 $\mathscr{L}_i^{-1}$，并且有一个同构 $\mathscr{L}_1^{\otimes N}\cong\mathscr{O}_Y(\sum iD_i)$。

反过来，给定 $(C,\ D_1,\ \ldots\ldots,\ D_{N-1},\ \mathscr{L},\ \phi)$，覆盖 X 由 $X=\text{谱}_C(\mathscr{O}_C\oplus\mathscr{L}_1^{-1}\oplus\cdots\oplus\mathscr{L}_{N-1}^{-1})$ 给出，其中 $\mathscr{L}_1=\mathscr{L}$ 以及其余的 $\mathscr{L}_i$ 由一个涉及除子的公式确定，而 $\mathscr{O}_C\oplus\mathscr{L}_1^{-1}\oplus\cdots\oplus\mathscr{L}_{N-1}^{-1}$ 的代数结构由 ϕ确定。利用 [Par91]中的一般理论，文献 [PT13], 详细讨论了曲线的μ_N-覆盖。

给定一个 $\tilde{g}$-可容许数据 $(g,\ N,\ d_i,\ \ldots\ldots,\ d_{N-1})$，判断相应的覆盖曲线是否连通的条件如下。令 k 为 N 与所有满足$d_i\neq 0$的 i 的最大公约数。那么，当且仅当 $\mathscr{L}^{\otimes N/k}\otimes\mathscr{O}_C(-\sum\frac{i}{k}D_i)$ 在 C ([PT13，第 2.11]条备注)的 Picard 群中恰好具有k 阶时，覆盖曲线才是连通的。注意，如果 C 的亏格为 0，那么这个线丛的阶总是 1；因此，当 $k=1$时，所有覆盖都是连通的，且 $\mathscr{M}_A'=\mathscr{M}_A$；当 $k>1$时，所有覆盖都是不连通的，且 $\mathscr{M}_A'=\emptyset$。

因此，要研究带有 $g=0$ 的 $\mathscr{M}_A'$，只需研究带有 $k=1$ 的 $\mathscr{M}_A$，其中 k 如上所定义。然而，关于 k 的这一条件不会影响我们对 $\mathscr{M}_A$ 的研究，因此我们忽略它。

令 $\overline{\mathscr{M}_A}$ 为对象如下的代数栈

$$\overline{\mathscr{M}_A}(S)=\{(f:C\to S,D_1,\ldots D_{N-1},\mathscr{L},\phi)\}$$

其中 $f\colon C\to S$ 是一条光滑的亏格为 g 的曲线，D_i 是次数为 d_i 的除子，即 $\text{Sym}^{d_i}_{C/S}\to S$ 的截面；$\mathscr{L}$ 是 C 上的线丛，而 $\phi\colon\mathscr{L}^{\otimes N}\to\mathscr{O}_C(\sum iD_i)$ 是一个同构。也就是说，这些除子不再要求彼此不相交。态射的定义与 $\mathscr{M}_A$ 中的相同。

接下来我们定义一个代数栈 $\mathscr{N}_A$，并证明它是 $\mathscr{M}_A$ 的 μ_N-刚化。首先，我们介绍一些关于 Picard 栈和 Picard 概形的背景知识。

4.1. Picard 栈和 Picard 概形。 令 S 为一个概形，并令 $f:X\to S$ 为平坦且真的态射。Picard 栈（[Art74，附录]）是代数栈 $\mathscr{P}ic_{X/S}$，其对象为二元组（$T\to S,\ \mathscr{L}$），其中 T 是一个 S-概形，$\mathscr{L}$ 是 $X_T=X\times_S T$ 上的线丛。态射是二元组（$t,\ \sigma$）：（$T\to S,\ \mathscr{L}$）$\to$（$T'\to S,\ \mathscr{L}'$），其中 $t\colon T\to T'$ 是 S-概形的态射，且 $\sigma\colon t_X^*\mathscr{L}'\to\mathscr{L}$ 是线丛的一个同构，其中 $t_X:X_T\to X_{T'}$。

设 $g\colon X\to X'$ 是一个 S-态射，且 $g_T\colon X_T\to X'_T$。定义

$$g^*:\mathscr{P}ic_{X'/S}\to\mathscr{P}ic_{X/S}$$

为 $(T\to S,\ \mathscr{L})\mapsto(T\to S,\ g_T^*\mathscr{L})$。

现在我们按照 [Kle05] 的做法，定义相对 Picard 函子和 Picard 概形。设 $f\colon X\to S$ 是分离且有限型的。

相对 Picard 函子为

$$\text{Pic}^{\text{pre}}_{X/S}:(\text{Sch}/S)\to\text{Groups}$$

$$(T\to S)\mapsto\text{Pic}(X_T)/\text{Pic}(T).$$

在某些情况下, 它是可表的，但一般而言并非如此。用 $\text{Pic}^{X/S}$ 表示其 fppf 层化 .

那么，$\text{Pic}^{X/S}(T\to S)$ 的一个对象可由一对 $(T'\to T,\mathscr{L}')$ 表示，其中 $T'\to T$ 是一个 fppf 覆盖，$\mathscr{L}'$ 是 $X_{T'}$ 上的一个线丛，并且存在一个 fppf 覆盖 $T''\to T'\times_T T'$，使得 $\mathscr{L}'$ 在两个投影下拉回到 T'' 后同构。我们将这类对象称为 上线丛的同构类。如果存在一个 fppf 覆盖 $T'\to T'_1\times_T T'_2$，使得 $(T'_1\to T,\mathscr{L}'_1)$ 和 $(T'_2\to T,\mathscr{L}'_2)$ 在拉回到 $X_{T'}$ 后，$\mathscr{L}'_1$ 和 $\mathscr{L}'_2$ 同构，则称这两个表示等价。

令 $g\colon$ 如上所述的 $X\to X'$，并定义

$$g^*:\text{Pic}_{X'/S}\to\text{Pic}_{X/S}$$

by $(T'\to T,\mathscr{L}')\mapsto(T'\to T,g_{T'}^*\mathscr{L}')$.

现在假设 $f_*\mathscr{O}_X = \mathscr{O}_S$ 和 f 是平坦、真且 0 维上上同调平坦的，也就是说， $f_*\mathscr{O}_X$ 的构造与基变换交换。当 $f_*\mathscr{O}_X \cong \mathscr{O}_S$ 普遍成立且 f 在 étale 局部有截面 $'$时， $'$的 étale 层化与 fppf 层化相同。特别地，当 f光滑时， f 有一个 étale 局部截面。我们有一个态射 $[-]$: $\mathscr{P}ic_{X/S} \to \mathrm{Pic}^{X/S}$，它将 X_T上的线丛 $\mathscr{L}$映为一对 $(T \to T,\ \mathscr{L})$，记作 $[\mathscr{L}]$。

引理 4.2。设 f: $X \to S$ 是平坦且真，并且 $f_*\mathscr{O}_X = \mathscr{O}_S$ 普遍成立。那么$[-]$: $\mathscr{P}ic_{X/S} \to \mathrm{Pic}^{X/S}$ 将 *Picard* 栈实现为 *Picard* 概形上的一个 $\mathbb{G}_m$-丛。

证明。由关于 $\mathscr{P}ic_{X/S}$ 的下降可知，对于任意 fppf 覆盖 $T' \to T$，范畴 $\mathscr{P}ic_{X/S}(T)$ 等价于 $\mathscr{P}ic_{X/S}(T' \to T)$，后者的对象是形如 $(\mathscr{L}',\ \sigma\colon \mathrm{pr}_1^*\mathscr{L}' \cong \mathrm{pr}_2^*\mathscr{L}')$ 的配对，其中 $\mathscr{L}'$ 是 $X_{T'}$ 上的线丛， σ 是 $X_{T'\times_T T'}$ 上满足余循环条件的线丛同构。

给定 $(T' \to T, \mathscr{L}') \in \mathrm{Pic}^{X/S}(T)$，存在某个 fppf 覆盖 $T'' \to T' \times_T T'$，使得 $\mathscr{L}'$ 到 T'' 的两个拉回同构。设 $(T' \times_T T'' \to T'', \mathscr{L}'')$ 表示 $(T' \to T, \mathscr{L}')$ 到 T'' 的拉回。 $\mathscr{L}''$ 到 $(T' \times_T T'') \times_{T''} (T' \times_T T'')$ 的两个拉回相同，因此由下降可得 $X_{T''}$ 上的一个线丛$\mathscr{L}$。给定 $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2 \in \mathscr{P}ic_{X/S}(T)$，使得 $(T \to T, \mathscr{L}_1)$ 和 $(T \to T, \mathscr{L}_2)$ 在 $\mathrm{Pic}^{X/S}(T)$ 中等价，则存在一个 fppf 覆盖 $T' \to T$，使得 $\mathscr{L}_1|_{T'} \cong \mathscr{L}_2|_{T'}$。由于 $f_*\mathscr{O}_X = \mathscr{O}_S$ 普遍成立，$H^0(X_T, \mathscr{O}_{X_T}^\times) = \mathscr{O}_T^\times$，而 $\mathscr{L} \in \mathscr{P}ic_{X/S}(T)$ 在 $[\mathscr{L}]$ 上的自同构由 $\mathbb{G}_{m,T}$ 给出。□

令 $\mathscr{P}ic^d_{X/S}$ 为 $\mathscr{P}ic_{X/S}$ 的开闭子叠，其对象由相对次数为 d 的线丛构成；类似地，令 $\mathrm{Pic}^d_{X/S}$ 为 $\mathrm{Pic}^{X/S}$ 的开闭子概形，其对象由相对次数为 d 的线丛同构类构成。我们再次得到一个 $\mathbb{G}_m$-丛 $[-]: \mathscr{P}ic^d_{X/S} \to \mathrm{Pic}^d_{X/S}$。

下文中，我们用单个符号 ℓ 表示 $\mathrm{Pic}^{X/S}(T)$ 的元素 $(T' \to T,\ \mathscr{L}')$。 ℓ^N 表示元素 $(T' \to T,\ \mathscr{L}'^{\otimes N})$。

4.3. **的刚化**。定义代数栈 $\overline{\mathscr{N}_A}$，其对象为

$$\overline{\mathscr{N}_A}(S) = \left\{ (f: C \to S, D_1, \ldots, D_{N-1}, \ell) \middle| \ell^N = \left[\mathscr{O}_C \left(\sum_i i D_i \right) \right] \right\}$$

其中 $f\colon C \to S$ 和 D_i 如 $\mathscr{M}_A$ 的定义所述，且 $\ell \in \mathrm{Pic}^{d/N}_{C/S}(S)$。

一个态射

$$\sigma : (f: C \to S, D_i, \ell) \to (f': C' \to S, D_i', \ell')$$

是一个 S-概形的同构 $\sigma : C \to C'$，满足 $\sigma^*(D_i') = D_i$ 和 $\sigma^*\ell' = \ell$。

我们有一个自然态射 $\mathscr{M}_A \to \overline{\mathscr{N}_A}$，其定义为

$$(f: C \to S, D_i, \mathscr{L}, \phi) \mapsto (f: C \to S, D_i, [\mathscr{L}]).$$

命题 4.4。 $\mathscr{M}_A \to \overline{\mathscr{N}_A}$是一个 μ_N-丛，因此 $\mathscr{N}_A$是 $\overline{\mathscr{M}_A}$的 μ_N-刚性化。

证明。设 $(f\colon C \to S,\ D_i,\ \ell) \in \overline{\mathscr{N}_A}(S)$。那么 ℓ是一个二元组 $(S' \to S,\ \mathscr{L}')$，存在一个 fppf 覆盖 $S_1 \to S' \times_S S'$，使得 $\mathscr{L}'$ 的拉回彼此一致。此外， $\ell^N = [\mathscr{O}_C(\sum_i iD_i)]$ 意味着存在一个 fppf 覆盖 $S_2 \to S' \times_S S = S'$，使得 $\mathscr{L}'^{\otimes N}$与 $\mathscr{O}_C(\sum_i iD_i)$的拉回彼此一致。取 S_1 和 S_2的一个共同覆盖，记作 $S'' = S_1 \times_S S_2$，我们得到 $C_{S''}$上的一个线丛 $\mathscr{L}$，它是 $\mathscr{L}'$的拉回，以及一个同构 $\phi\colon \mathscr{L}^{\otimes N} \to \mathscr{O}_{C_{S''}}(\sum_i iD_i)$。

设 $(f\colon C \to S,\ D_i,\ \mathscr{L}_1,\ \phi_1)$ 和 $(f\colon C \to S,\ D_i,\ \mathscr{L}_2,\ \phi_2)$ 是 $\mathscr{M}_A(S)$ 在 $\overline{(f\colon C \to S,\ D_i,\ [\mathscr{L}_1] = [\mathscr{L}_2])} \in \mathscr{N}_A(S)$ 上的两个元素。于是存在一个 fppf 覆盖 $S' \to S$，使得 $\mathscr{L}_1|_{S'} \cong \mathscr{L}_2|_{S'}$。取一个同构，例如 ϕ。那么 $\phi_2 \circ \phi$ 与 ϕ_1 相差一个 $s \in \mathbb{G}_m(S')$ 的乘法；并且在 fppf 局部上，我们可以取 s 的 N 次根，再与 ϕ 复合，从而在 fppf 局部上，$\mathscr{M}_A(S)$ 中的元素彼此同构。

最后，$(f\colon C \to S,\ D_i,\ \mathscr{L},\ \phi)$ 在 $(f\colon C \to S,\ D_i,\ [\mathscr{L}])$ 上的自同构由 $\mu_{N,\ S}$ 给出，因为它们由满足 $\tau\colon \mathscr{L} \cong \mathscr{L}$ 且 $\tau^{\otimes N} = \mathrm{id}$ 的对 $(\mathrm{id}\ \tau)$ 构成。□

我们还将 $\mathscr{N}_A$ 定义为由 $\mathscr{N}_A$ 中具有不相交除子的对象和态射构成的代数栈，如 $\mathscr{M}_A$所述。于是 $\mathscr{M}_A \to \mathscr{N}_A$ 也是一个 μ_N-丛，并且 $\mathscr{M}_A \times_{\mathscr{N}_A} \mathscr{N}_A \cong \overline{\mathscr{M}_A}$。

令 $\mathscr{C}_g$ 为亏格 g 的泛曲线，并考虑代数栈 $\mathrm{Pic}^{d/N}_{\mathscr{C}_g/\mathscr{M}_g}$，其对象为

$$\mathrm{Pic}^{d/N}_{\mathscr{C}_g/\mathscr{M}_g}(S) = \left\{ \left(f: C \to S, \ell \in \mathrm{Pic}^{d/N}_{C/S}(S) \right) \right\},$$

以及态射 $\sigma\colon (f\colon C\to S,\ \ell)\to(f\colon C'\to S,\ \ell')$，由同构 $\sigma\colon C\to C'$ 给出，使得$\sigma^*\ell'=\ell$。

我们有一个自然映射 $\mathscr{N}_A\to \mathrm{Pic}^{d/N}_{\mathscr{C}_g/\mathscr{M}_g}$，由 $(f\colon C\to S,\ D_i,\ \ell)\mapsto(f\colon C\to S,\ \ell)$ 给出。另请注意，

$$\overline{\mathscr{N}_A}=\left(\mathrm{Sym}^{d_1}_{\mathscr{C}_g/\mathscr{M}_g}\times_{\mathscr{M}_g}\cdots\times_{\mathscr{M}_g}\mathrm{Sym}^{d_{N-1}}_{\mathscr{C}_g/\mathscr{M}_g}\right)\times_{\mathrm{Pic}^d_{\mathscr{C}_g/\mathscr{M}_g}}\mathrm{Pic}^{d/N}_{\mathscr{C}_g/\mathscr{M}_g},$$

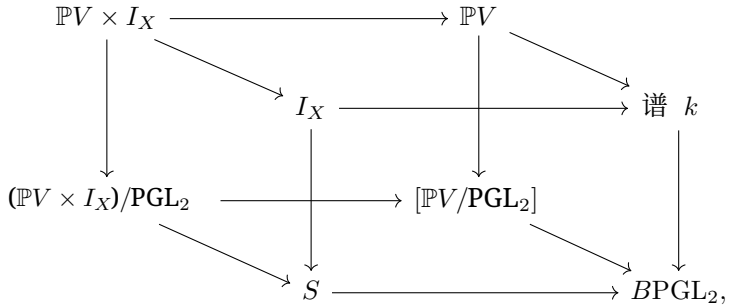
其中，纤维积取自如下映射：该映射将 $(f\colon C\to S,\ \{D_i\})$ 送到 $(f\colon C\to S,\ [\mathscr{O}_C(\sum_i iD_i)])$；以及将 $(f\colon C\to S,\ \ell)$ 送到 $(f\colon C\to S,\ \ell^N)$ 的映射。映射 $\mathscr{N}_A\to\mathrm{Pic}^{d/N}_{\mathscr{C}_g/\mathscr{M}_g}$是到第二个因子的投影。

命题 4.5. 当 $g=0$ 时，我们可以作如下简化。

(1) $\mathscr{M}_0=B\mathrm{PGL}_2$。*(2)* $\mathscr{C}_0=[\mathbb{P}V/\mathrm{PGL}_2]$ 是亏格为 *0* 的泛曲线，其中 $V=k^{\oplus 2}$，且PGL_2 通过 SL_2 在 V 上的标准表示作用于 $\mathbb{P}V$。*(3)* 对所有 d，$\mathrm{Pic}^d_{\mathscr{C}_0/\mathscr{M}_0}\cong B\mathrm{PGL}_2$。*(4)* $\mathrm{Sym}^d_{\mathscr{C}_0/\mathscr{M}_0}=[\mathbb{P}\mathrm{Sym}^dV/\mathrm{PGL}_2]$ 是亏格为 *0* 的曲线上次数为 d 的除子的模。*(5)* $\mathrm{Sym}^{d_1}_{\mathscr{C}_0/\mathscr{M}_0}\times_{B\mathrm{PGL}_2}\cdots\times_{B\mathrm{PGL}_2}\mathrm{Sym}^{d_{N-1}}_{\mathscr{C}_0/\mathscr{M}_0}=[(\mathbb{P}\mathrm{Sym}^{d_1}V\times\cdots\times\mathbb{P}\mathrm{Sym}^{d_{N-1}}V)/\mathrm{PGL}_2]$。

证明。(1) 是例 3.4，是命题 3.3 的一个特殊情形。

对于 (2)，令 V 为 SL_2，的标准表示，因此 $V=k^{\oplus 2}$，且 SL_2 通过 $\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Ax+By\\Cx+Dy\end{pmatrix}$ 作用，如例 3.16 所示。于是 μ_2 通过标准特征作用，该作用下降为 PGL_2 在 $\mathbb{P}V$ 上的作用。令 $f\colon X\to S$ 为一条亏格为 0 的曲线，并令 $S\to B\mathrm{PGL}_2$ 为主丛$I_X\colon (T\to S)\mapsto\{\sigma\colon X\times_S T\cong\mathbb{P}V_T=\mathbb{P}^1_T\}$。由于图表的交换性



我们希望证明 $(\mathbb{P}V\times I_X)/\mathrm{PGL}_2\cong X$。事实上，映射 $(x,\sigma)\in\mathbb{P}V\times I_X$ 到 $\sigma^{-1}(x)$ 给出了一个同构，而该同构下降为商上的一个同构。

对于 (3)，我们有 $\mathrm{Pic}_{\mathscr{C}_0/\mathscr{M}_0}\cong\mathbb{Z}\times\mathscr{M}_0$；对于每个 d，$\mathrm{Pic}^d_{\mathscr{C}_0/\mathscr{M}_0}\cong\mathscr{M}_0$由 $\mathbb{P}V$ 上的类 $\mathscr{O}(d)$ 表示。

对于 (4) 和 (5)，我们利用如下事实：对于两个 SL_2 表示 V_1 和 V_2，它们分别下降为 PGL_2 在 $\mathbb{P}V_1$ 和 $\mathbb{P}V_2$ 上的作用，有 $[(\mathbb{P}V_1\times\mathbb{P}V_2)/\mathrm{PGL}_2]\cong[\mathbb{P}V_1/\mathrm{PGL}_2]\times_{B\mathrm{PGL}_2}[\mathbb{P}V_2/\mathrm{PGL}_2]$。取笛卡尔图 $\mathbb{P}V_1\times\mathbb{P}V_2$ 的 PGL_2 商即可看出这一点。假设结论 (4) 成立，则结论 (5) 随之成立。对于 (4)，我们可以将 $\mathbb{P}\mathrm{Sym}^dV$ 看作次数为 d 的二元多项式在相差一个非零标量的意义下构成的空间，而该多项式的零点轨迹是在 $\mathbb{P}V$ 上的一个次数为 d 的除子。因此，$\mathbb{P}V\cong\mathbb{P}\mathrm{Sym}^1V$ 和 $\mathbb{P}\mathrm{Sym}^dV=(\mathbb{P}V\times\cdots\times\mathbb{P}V)/S_d$。设 $f\colon X\to S$ 是一条亏格为 0 的曲线。利用与证明 (2) 中类似的论证，我们得到

$$((\mathbb{P}V\times\cdots\times\mathbb{P}V)/S_d\times I_X)/\mathrm{PGL}_2=(X\times_S\cdots\times_S X)/S_d,$$

这表明 $[\mathbb{P}\mathrm{Sym}^dV/\mathrm{PGL}_2]$ 是亏格为 0 的曲线上次数为 d 的除子的模。或者，

$$\begin{aligned}\mathrm{Sym}^d_{\mathscr{C}_0/\mathscr{M}_0}&=(\mathscr{C}_0\times_{\mathscr{M}_0}\cdots\times_{\mathscr{M}_0}\mathscr{C}_0)/S_d=[(\mathbb{P}V\times\cdots\times\mathbb{P}V)/\mathrm{PGL}_2]/S_d\\&=[((\mathbb{P}V\times\cdots\times\mathbb{P}V)/S_d)/\mathrm{PGL}_2]=[\mathbb{P}\mathrm{Sym}^dV/\mathrm{PGL}_2].\end{aligned}$$

□

由该命题可知，当 $g=0$ 时，

$$\overline{\mathscr{N}_A}=[(\mathbb{P}\mathrm{Sym}^{d_1}V\times\cdots\times\mathbb{P}\mathrm{Sym}^{d_{N-1}}V)/\mathrm{PGL}_2]\to\mathrm{Pic}^{d/N}_{\mathscr{C}_0/\mathscr{M}_0}=B\mathrm{PGL}_2$$

是布劳尔-塞韦里代数栈的复合。事实上，写作

$$\mathscr{X}_i := [\mathbb{P}\mathrm{Sym}^{d_1}V/\mathrm{PGL}_2] \times_{B\mathrm{PGL}_2} \cdots \times_{B\mathrm{PGL}_2} [\mathbb{P}\mathrm{Sym}^{d_i}V/\mathrm{PGL}_2],$$

并且我们通过 γ 进行分解

$$\gamma : \overline{\mathscr{N}_A} = \mathscr{X}_{N-1} \xrightarrow{\gamma_{N-1}} \cdots \xrightarrow{\gamma_2} \mathscr{X}_1 \xrightarrow{\gamma_1} B\mathrm{PGL}_2, \tag{4.5.1}$$

其中每个 γ_i 都是到前 $i-1$ 个因子的投影。于是 $\mathscr{X}_i = \mathscr{X}_{i-1} \times_{B\mathrm{PGL}_2} [\mathbb{P}\mathrm{Sym}^{d_i}V/\mathrm{PGL}_2]$，因此 $\mathscr{X}_i \to \mathscr{X}_{i-1}$ 是一个布劳尔-塞韦里栈，由 $[\mathbb{P}\mathrm{Sym}^{d_i}V/\mathrm{PGL}_2] \to B\mathrm{PGL}_2$的拉回给出。

5. Proof of Theorems 1.4 and 1.5

设 $A=(0,\ N,\ d_1,\ \ldots,\ d_{N-1})$ 如第 4 节所述。由 $\gamma\colon \mathscr{N}_A \to B\mathrm{PGL}_2$ 作为布劳尔-塞韦里代数栈复合的分解 4.5.1，可得到 $\gamma^*\colon H^2(B\mathrm{PGL}_2,\ \mathbb{G}_m) \to H^2(\mathscr{N}_A,\ \mathbb{G}_m)$ 的分解，它是 $\gamma_i^*\colon H^2(\overline{\mathscr{X}_{i-1}},\ \mathbb{G}_m) \to H^2(\mathscr{X}_i,\ \mathbb{G}_m)$ 的复合；根据 Gabber 定理（3.18），这些映射都是满射，并且 $\delta([\mathscr{X}_i]) \mapsto 0$。

回顾一下，$\mathscr{X}_i = \mathscr{X}_{i-1} \times_{B\mathrm{PGL}_2} [\mathbb{P}\mathrm{Sym}^{d_i}V/\mathrm{PGL}_2]$ 是布劳尔-塞韦里代数栈，由 $[\mathbb{P}\mathrm{Sym}^{d_i}V/\mathrm{PGL}_2] \to B\mathrm{PGL}_2$ 到 $\mathscr{X}_i$ 的拉回给出。我们有

$$\delta([[\mathbb{P}\mathrm{Sym}^{d_i}V/\mathrm{PGL}_2]]) \in H^2(B\mathrm{PGL}_2, \mathbb{G}_m) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

由 $[d_i] \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 给出，根据例 3.17，因此 $\delta([\mathscr{X}_i]) \in H^2(\mathscr{X}_{i-1},\ \mathbb{G}_m)$ 只是 $[d_i]$ 在.....下的像

$$H^2(B\mathrm{PGL}_2, \mathbb{G}_m) \twoheadrightarrow H^2(\mathscr{X}_{i-1}, \mathbb{G}_m).$$

因此，在 $H^2(BG,\ \mathbb{G}_m) \twoheadrightarrow H^2(\mathscr{X}_i,\ \mathbb{G}_m)$ 下，$[d_i] \mapsto 0$；而在 γ^* 下：$H^2(BPGL_2,\ \mathbb{G}_m) \twoheadrightarrow H^2(\mathscr{N}_A,\ \mathbb{G}_m)$，并且对所有 $i=1,\ \ldots\ldots,\ N-1,\ [d_i] \mapsto 0$。那么，如果所有 d_i 都是偶数，$H^2(\overline{\mathscr{N}_A},\ \mathbb{G}_m) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$；如果任意一个 d_i 是奇数，$H^2(\overline{\mathscr{N}_A},\ \mathbb{G}_m) = 0$。

至此，定理 1.4 的证明完成。 □

现在，由于 $H^2(\overline{\mathscr{N}_A},\ \mathbb{G}_m)$ 根据 d_i 的奇偶性只能取 0 或 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，所以 $\mathscr{M}_A$ 的布劳尔类要么是平凡的，要么是阶为 2 的非平凡类。现在我们来精确计算 $\mathscr{M}_A$ 的布劳尔类，从而也确定 $\mathscr{M}_A$ 的布劳尔类。

我们考虑以下图表

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_{\overline{\mathscr{N}_A}} & \xrightarrow{\gamma'} & \mathbb{P} \\ {\scriptstyle\pi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ \overline{\mathscr{N}_A} & \xrightarrow{\gamma} & B\mathrm{PGL}_2, \end{array}$$

其中 $\mathbb{P} := [\mathbb{P}V/\mathrm{PGL}_2]$ 是亏格为 0 的泛曲线，如例 3.16 所示。

考虑 $\mathbb{G}_m$-丛 over $B\mathrm{PGL}_2$,

$$\mathscr{G}_{d/N}(S \to B\mathrm{PGL}_2) = \{\text{degree } d/N \text{ line bundles on } S \times_{B\mathrm{PGL}_2} \mathbb{P}\}.$$

我们有 $[\mathscr{G}_{d/N}] = [d/N] \in H^2(B\mathrm{PGL}_2,\ \mathbb{G}_m) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

我们将证明 $[\mathscr{M}_A]^{\wedge\mathbb{G}_m} = [\gamma^*\mathscr{G}_{d/N}]$，其中 $[\mathscr{M}_A]^{\wedge\mathbb{G}_m}$ 是 $\mathscr{M}_A$的布劳尔类，也就是 $[\mathscr{M}_A]$在由包含映射 $\mu_N \to \mathbb{G}_m$诱导的映射 $H^2(\mathscr{N}_A,\ \mu_N) \to H^2(\mathscr{N}_A,\ \mathbb{G}_m)$下的像；而$\gamma^*\mathscr{G}_{d/N}$ 是由纤维积 $\mathscr{G}_{d/N} \times_{B\mathrm{PGL}_2} \mathscr{N}_A$给出的、位于 $\mathscr{N}_A$ 上的 $\mathbb{G}_m$-丛。特别地，

$$\gamma^*\mathscr{G}_{d/N}(S \to \overline{\mathscr{N}_A}) = \{\text{degree } d/N \text{ line bundles on } S \times_{B\mathrm{PGL}_2} \mathbb{P}\}.$$

我们定义一个叠态射 $\mathscr{M}_A \to \gamma^*\overline{\mathscr{G}_{d/N}}$ 如下:

$$(f : C \to S, D_i, \mathscr{L}, \phi) \mapsto ((f : C \to S, D_i, [\mathscr{L}]), \mathscr{L}).$$

我们可以将 $S \times_{B\mathrm{PGL}_2} \mathbb{P}$ 与曲线 C等同，因此，要给出 $\gamma^*\mathscr{G}_{d/N}$的一个对象，我们必须给出 C上的一个次数为d/N 的线丛，即 $\mathscr{L}$。态射上的映射是恒等映射，因此稳定子上的映射是包含映射 $\mu_N \to \mathbb{G}_m$，所以确实有 $[\mathscr{M}_A]^{\wedge\mathbb{G}_m} = [\gamma^*\mathscr{G}_{d/N}]$。

若 d/N 为偶数，则 $\mathscr{G}_{d/N}$ 是 $B\mathrm{PGL}_2$，上的平凡丛；若 d/N 为奇数，则它是非平凡的，与 $B\mathrm{GL}_2$ 同构。结合对 $H^2(\mathscr{N}_A, \mathbb{G}_m)$ 的计算，即得所需结果。最后，考虑开限制映射

$$\mathrm{res} : H^2(\overline{\mathscr{N}_A}, \mathbb{G}_m) \to H^2(\mathscr{N}_A, \mathbb{G}_m),$$

它将 $[\mathscr{M}_A{}^{\wedge\mathbb{G}_m}] \mapsto [\mathscr{M}_A^{\wedge\mathbb{G}_m}]$ 映射至。由于 Brauer 群上限制映射的单射性，我们对 $[\mathscr{M}_A^{\wedge\mathbb{G}_m}]$. □ 得到相同的结果

备注 5.1. 当 d 为偶数时，实际上我们可以写出 $\mathscr{M}_A$ 作为 μ_N-丛在 $\mathscr{N}_A$ 上的类，而不只是它向 $\mathbb{G}_m$ 推出的类。不过，正如引言中所述，由于限制映射在 $H^2(\mu_N)$ 上不是单射，这不足以计算我们所关注的开子叠 $\mathscr{M}_A$ 的 μ_N-类。

我们所关注的丛 $\mathscr{M}_A \to \mathscr{N}_A$ 可改写如下，

$$\overline{\mathscr{M}_A}(f : S \to \overline{\mathscr{N}_A}) = \{\mathscr{L}, \phi : \mathscr{L}^{\otimes N} \cong f'^*\mathscr{O}(\mathscr{D})\},$$

其中 $\mathscr{L}$ 是 $\mathbb{P}_S$ 上的线丛（我们已将其与 C 认同），$\mathscr{D} = \sum_i \mathscr{D}_i$ 是 $\mathbb{P}_{\mathscr{N}_A}$ 上泛除子的和，而 $f' : \mathbb{P}_S \to \mathbb{P}_{\mathscr{N}_A}$。

沿用推论 3.15 中的记号，考虑 $\mathbb{G}_m$-丛在 $B\mathrm{PGL}_2$，上，

$$\mathscr{G}_d(S \to B\mathrm{PGL}_2) = \{\mathscr{O}(d) \text{ on } S \times_{B\mathrm{PGL}_2} \mathbb{P}\},$$

$$\mathscr{G}^{1,\dots,N-1}_{d_1,\dots,d_{N-1}}(S \to B\mathrm{PGL}_2) = \left\{\mathscr{O}(1,\dots,N-1) \text{ on } S \times_{B\mathrm{PGL}_2} \overline{\mathscr{N}_A}\right\}.$$

我们有

$$[\mathscr{G}_d] = [d] \in H^2(B\mathrm{PGL}_2, \mathbb{G}_m) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

$$\left[\mathscr{G}^{1,\dots,N-1}_{d_1,\dots,d_{N-1}}\right] = \left[\sum id_i\right] = [d] \in H^2(B\mathrm{PGL}_2, \mathbb{G}_m) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

根据推论 3.15 和例 3.17。由此，我们可以得出 $\mathscr{G}_d \cong \mathscr{G}^{1,\dots,d_1 \dots d_{N-1},,}_{N-1}$，而该同构源于这样一个事实：只要存在这样的线丛，

$$\mathscr{O}(\mathscr{D}) \cong \gamma'^*\mathscr{O}(d) \otimes \pi'^*\mathscr{O}(1,\dots,N-1).$$

$\mathscr{O}(d)$ 在 $\mathbb{P}$ 上存在，当且仅当 $\mathscr{O}(1,\dots,N-1)$ 在 $\mathscr{N}_A$ 上存在；将它们拉回到 $\mathscr{G}_d$ 后，两者都存在。如果 d 是偶数，则 $\mathscr{G}_d$ 的类是平凡的，这意味着 $\mathscr{O}(d)$ 在 $\mathbb{P}$ 上存在，且 $\mathscr{O}(1,\dots,N-1)$ 在 $\mathscr{N}_A$ 上存在。

因此，如果 d 是偶数，我们有 $\overline{\mathscr{M}_A} \cong \mathscr{M}' \otimes \mathscr{M}''$，其中

$$\mathscr{M}'(f : S \to \overline{\mathscr{N}_A}) = \{\mathscr{L}', \phi' : \mathscr{L}'^{\otimes N} \cong f'^*\pi'^*\mathscr{O}(1,\dots,N-1)\},$$

$$\mathscr{M}''(f : S \to \overline{\mathscr{N}_A}) = \{\mathscr{L}'', \phi'' : \mathscr{L}''^{\otimes N} \cong f'^*\gamma'^*\mathscr{O}(d)\}.$$

首先，注意到 $\mathscr{M}'$ 同构于 $\mathscr{N}_A$ 上 $\mathscr{O}(1,\dots,N-1)$ 的 N 次根的 μ_N-丛，

$$\sqrt[N]{\mathscr{O}(1,\dots,N-1)}\left(f : S \to \overline{\mathscr{N}_A}\right) = \{L, \phi : L^{\otimes N} \cong f^*\mathscr{O}(1,\dots,N-1) \text{ on } S\}.$$

映射由将 (L, ϕ) 送到 $(\pi^*L, \pi^*\phi)$ 给出。由正合序列 $1 \to \mu_N \to \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m \to 1$，我们得到

$$H^1(\overline{\mathscr{N}_A}, \mathbb{G}_m) \to H^2(\overline{\mathscr{N}_A}, \mu_N) \to H^2(\overline{\mathscr{N}_A}, \mathbb{G}_m),$$

因此，第一个映射将线丛 $\mathscr{O}(1,\dots,N-1)$ 送到 $\mathscr{M}'$，所以在第二个映射下，$\mathscr{M}' \mapsto 0$.因此，$[\mathscr{M}']^{\wedge\mathbb{G}_m} = [B\mathbb{G}_m] \in H^2(\mathscr{N}_A, \mathbb{G}_m)$，从而 $[\mathscr{M}'']^{\wedge\mathbb{G}_m} = [\mathscr{M}_A]^{\wedge\mathbb{G}_m}$。

接下来，同一个正合序列给出

$$0 = H^1(B\mathrm{PGL}_2, \mathbb{G}_m) \to H^2(B\mathrm{PGL}_2, \mu_N) \to H^2(B\mathrm{PGL}_2, \mathbb{G}_m) \to H^2(B\mathrm{PGL}_2, \mathbb{G}_m)$$

其中 $H^2(B\mathrm{PGL}_2, \mathbb{G}_m) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。最右侧的映射将 $[\mathscr{G}_{d/N}] \mapsto [\mathscr{G}_d] = 0$ 送到，因此 $\mathscr{G}_{d/N}$ 的类来自 $B\mathrm{PGL}_2$，上一个 μ_N-丛的推出，可描述如下，

$$\mathscr{H}(f : S \to B\mathrm{PGL}_2) = \{\mathscr{L}, \phi : \mathscr{L}^{\otimes N} \cong f'^*\mathscr{O}(d) \text{ on } S \times_{B\mathrm{PGL}_2} \mathbb{P}\}.$$

由此可见，$\mathscr{M}'' = \gamma^*\mathscr{H}$，并且

$$\overline{\mathscr{M}_A} \cong \mathscr{M}' \otimes \mathscr{M}'' \cong \sqrt[N]{\mathscr{O}(1,\dots,N-1)} \otimes \gamma^*\mathscr{H}.$$

此外，这证实了

$$[\overline{\mathscr{M}_A}]^{\wedge\mathbb{G}_m} = [\mathscr{M}'']^{\wedge\mathbb{G}_m} = [\gamma^*\mathscr{H}]^{\wedge\mathbb{G}_m} = \gamma^*[\mathscr{G}_{d/N}].$$

References

[ABJ+24] Niven Achenjang、Deewang Bhamidipati、Aashraya Jha、Caleb Ji 和 Rose Lopez。$\mathscr{Y}_0(2)$ 的 Brauer群。https://arxiv.org/abs/2311.18132，2024年。[Ach25] Niven Achenjang。关于驯性代数栈的 Brauer 群。https://arxiv.org/abs/2410.06217，2025年。[AM20] Benjamin Antieau 和 Lennart Meier。椭圆曲线模叠的 Brauer群。*Algebra Number Theory* 14 9 2295 2333, 2020，（）：–。[Art74] M. Artin。万有变形与代数栈。*Inventiones mathematicae*，27：165–190，1974年。[Bis25] Martin Bishop。驯性栈曲线及其 μ_r -丛的 Brauer 群。https://arxiv.org/abs/2507.08780 2025，。[Del74] Pierre Deligne。Th´eorie de hodge：III。*Publications Mathématiques de l'IHÉS*，44：5–77，1974年。[FI73] R. Fossum 和 B. Iversen。关于代数纤维空间的 Picard 群。*Journal of Pure and Applied Algebra*，3 3 269( )：–280，1973年。[Gab81] Ofer Gabber。关于阿祖玛雅代数的一些定理。载于 Michel Kervaire 和 Manuel Ojanguren（编），*Groupe de Brauer* 129 1981，第–209页，柏林、海德堡，。施普林格柏林海德堡。[Gro66a] Alexander Grothendieck。Le groupe de Brauer：I。Alg`èbres d'Azumaya et interpr´étations diverses。载于*Séminaire Bourbaki : années 1964/65 1965/66, exposés 277-312*，S´éminaire Bourbaki 第9号。法国数学学会，1966年。报告：290。[Gro66b] Alexander Grothendieck。Le groupe de Brauer：II。Th´eories cohomologiques。载于，，Seminaire Bourbaki，第号。法国数学学会，。报告：297。[Gro68] Alexander Grothendieck。Le groupe de Brauer。III。Exemples et compl´ements。载于，*Séminaire Bourbaki : années 1964/65 1965/66 exposés 277-312* 9 1966，*Dix exposés sur la cohomologie des schémas* 3 *Adv. Stud. Pure Math.* 88 188 1968，第卷，的，第–页。北荷兰出版社，阿姆斯特丹，。[IJ21] Jaya Iyer 和 Roy Joshua。代数栈与 git-商的 Brauer 群，2021年。[Kle05] Steven L. Kleiman。Picard 概形。https://arxiv.org/abs/math/0504020，2005年。[LS25] Daniel Loughran 和 Tim Santens。Malle猜想与代数栈的 Brauer 群。https://arxiv.org/abs/2412.04196 2025，。[Par91] Rita Pardini。代数簇的阿贝尔覆盖。*Journal für die reine und angewandte Mathematik*，417：191–214，1991年。[PT13] N. Pagani 和 O. Tommasi。亏格为3的曲线的模的奥比折上同调。*Manuscripta Mathematica*，142 3 4 409 437，2013（–）：–，二月。[Ros61] Maxwell Rosenlicht。环面代数群。*Proceedings of the American Mathematical Society*，12(6)：984–988，1961年。[San81] Jean-Jacques Sansuc。数域上线性代数群的布劳尔群与算术。´，1981：12–80，1981年。*Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*Shi[Minseon Shin。代数闭域中特征2的椭圆曲线模叠的Brauer 群。19]，223(5)：1966–1999，2019年。