arXiv:2601.05377v1 [math.AP] 8 Jan 2026

FitzHugh–Nagumo系统中相位波的扩散同步

Montie Avery* Paul Carter† Björn de Rijk‡ Arnd Scheel§

2026年1月12日

摘要

我们分析多时间尺度反应扩散系统中弛豫振荡的同步。将同步理解为收敛到频率同步波列解，我们首次解决了相位波这一情形。这些波是近乎相位同步的弛豫振荡，其特征是在长度为 ε^{-1} 的准稳态平台之间由快速过渡层隔开，其中 $\varepsilon \ll 1$ 为时间尺度分离参数。通过布洛赫波特征函数分析追踪调制的衰减，我们发现相互作用强度极弱，量级为 $\varepsilon^{8/3}$。这种微弱的层间相互作用以及许多技术难点，源于特征函数在准稳态平台两端的折叠点处反复散射。我们将一种新颖的几何去奇异化方法与Lin方法、指数三分解和Riccati 变换相结合，以刻画这一现象。我们的谱稳定性分析不仅表明FitzHugh–Nagumo系统中的所有相位波都具有扩散同步性，还识别出潜在的有限波长不稳定性，并在一种系统变体中实现了这种不稳定性。

关键词：FitzHugh–Nagumo系统、弛豫振荡、相位波、扩散谱稳定性、几何去奇异化、Lin方法、同步

AMS学科分类：35B10, 35B25, 35B35, 35K57, 35P15

目录

1 引言 **2**

1.1 同步现象.2 1.2 FitzHugh–Nagumo系统中的波列.7 1.3 主要结果及其后果：相位波列的谱稳定性.11 1.4 大尺度刚性与中间尺度不稳定性.15 1.5 论文概要.17 1.6 致谢.17

2 证明的设置与策略 **17**

2.1 存在性分析概述.17 2.2 谱问题设定.23 2.3 定理 1.2 的证明.24

*埃默里大学数学系，佐治亚州亚特兰大市道曼大道400号，佐治亚州30322，美国， msavery@emory.edu

†加州大学欧文分校数学系，罗兰楼340室，欧文，加利福尼亚州92697，美国， pacarter@uci.edu

‡卡尔斯鲁厄理工学院数学系，Englerstraße 2号，76131卡尔斯鲁厄，德国，bjoern.rijk@kit.edu§明尼苏达大学数学学院，Church东南街206号，明尼阿波利斯，明尼苏达州55455，美国， scheel@umn.edu

3 区域 $R_1(\mu)$ **26**
3.1 约化变分问题 .273.2 临界流形左、右分支上的特征值问题 . . . . . 313.3 求解远离折叠点处的特征值问题 .343.4 求解折叠点附近的特征值问题 .383.5 主公式的推导 .413.6 主公式分析 .493.7 命题 2.4 的证明 .55

4 折叠点附近的特征值问题 55
4.1 设置与局部坐标 .554.2 简化系统.594.3 中心-不稳定 XY-动力学的吹胀分析 .624.4 中心-不稳定 (X, Y)-动力学的温和估计，其中 $\Re(\lambda) \geq \varepsilon^{1/5}$ .834.5 命题 3.6 和 3.7 的证明 .85

5 区域 $R_2(\mu, \varpi, \varrho)$ **87**
5.1 快子系统 .885.2 区域 $R_{2,1}(\mu, \varpi, \varrho)$ .905.3 区域 $R_{2,2}(\mu, \varpi, \varrho)$ .925.4 命题 2.5 的证明 .93

A 区域 $R_{3,\ \varepsilon}(\varrho)$ 93B 指数二分性与三分性 94C 艾里函数的性质$\mathrm{Ai}(s)$ 95D 谱的数值延拓 96E 直接数值模拟 98

1 引言

振子的集体行为一直是非线性动力学中诸多问题的核心，其应用包括机械系统中的同步 [50], 神经病理学中的同步 [52, 59], 社会科学中的同步 [40], 电网中的同步 [39], 或化学实验中的同步 [33]。这里的同步首先意味着，振子集合中的任意振子的时间行为都具有一个共同的周期，即所有振子的集体行为均为频率同步。在更强的同步形式中，所有个体振子会同时经历振荡中的某个特定固定相位，即它们实现了相位同步。预测同步及其失败情况，可以解释观测结果、指导治疗方法，并从更理论的角度加深我们对秩序与混沌之间集体行为的理解。我们的结果涉及弛豫振荡器中的频率同步及可能的去同步。我们将在 §1.1 中首先介绍与我们研究结果相关的同步问题背景。随后，我们将在 §1.2 中建立具有波列解的 FitzHugh–Nagumo系统，并在 §1.3 和 §1.4中陈述主要的稳定性结果及其含义。

1.1 同步的现象学

同步模型。 对振子的最简单描述，是通过圆 $\Phi \in S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$上的微分方程 $\Phi_t = g(\Phi)$ 对振荡的相位 Φ 进行建模，由此得到著名的 Kuramoto模型 [1, 70], ，其中从同步状态到解锁状态的过渡

如今在动力学极限下已得到充分理解 [24]。更现实的模型还包括惯性 [25]或振幅 [78]。朗道振子是霍普夫分岔附近的通用标准形，以最简单的形式纳入了振幅。在空间扩展的振荡系统中，它导出了复 Ginzburg–Landau 方程这一调制方程 [4, 74]。本文关注的是通常更具代表性和相关性的振子模型，它们描述了多时间尺度系统中的弛豫振荡。具体而言，我们感兴趣的是 FitzHugh–Nagumo系统，或与之密切相关的范德波尔方程。与相位振子或朗道振子相比，这些模型提供了更现实的相位重置曲线，也就是说，振荡对外部刺激的响应高度敏感地取决于振荡的相位。多时间尺度结构——快速弛豫发生在 $\mathcal{O}(1)$ 时间尺度上，而慢适应发生在 $\mathcal{O}(1/\varepsilon)$ 时间尺度上，其中 $\varepsilon > 0$ 是一个小参数——也内在地出现在包括生态系统动力学 [67], 神经科学 [79], 心律失常 [91], 化学反应 [45], 乃至流体流动和湍流 [12]在内的应用中。从这一广泛的现象学视角出发，本文将探讨两个问题：

(i) 同步的时间尺度是什么?

(ii) 同步何时以及如何失效?

我们在连续分布的振子这一背景下探讨这些问题：通过定义在直线上的反应扩散系统对其进行建模，重点关注振荡态下的 FitzHugh–Nagumo系统；见下文 §1.2。空间连续的设定避免了空间离散性所导致的额外复杂效应。此外，描述 FitzHugh–Nagumo系统空间均匀解的常微分方程的平面动力学，揭示了多时间尺度弛豫的关键特征，从而使该方程及其变体成为上述许多应用中的首选模型。事实上，关于 FitzHugh–Nagumo方程的时空动力学，人们已经了解了许多内容，包括行波前沿的存在性、稳定性和分岔结果[34, 73], 脉冲 [17, 20, 21, 46, 55, 62], 以及周期波列 [42, 53, 54, 71, 89]。我们在此关注这些在空间和时间上均为周期性的波列；在这种空间连续的设定下，它们以行波的形式传播。波列的集体动力学是频率同步的——也就是说，空间中的所有点都以相同的频率振荡——而振荡的相位具有恒定的空间梯度；见图1。因此，同步对应于从接近波列的初始条件（即已经几乎同步）或更广泛的初始条件出发，收敛到这些频率同步的波列之一。我们将重点关注前一种局部问题，它将问题 (i) 和 (ii) 转化为振荡稳定性问题：波列是否可能不稳定（ii），以及当波列稳定时，收敛到波列的速率是多少（i）？ 我们的工作受到图2所示频率同步中颇为显著差异的启发：该图展示了在同一个方程中仅改变波长就会导致同步时间尺度产生差异；此外，相关模型中同步可能失效，这一点如图8所示。

有效扩散率与稳定性。 对于单个振子或由少量同步振子组成的群体，稳定性和收敛速率由线性化方程的弗洛凯指数 λ 的实部决定：实部为正会导致不稳定性和去同步，实部为负 $\Re(\lambda) = -\eta$ 则意味着同步的指数收敛速率 η 。扰动同步态通常会导致集体振荡发生相位偏移，这是因为存在与时间平移相关的平凡弗洛凯指数 $\lambda = 0$ 。在大型甚至中等规模的系统中，最接近虚轴的弗洛凯指数源于振子间相位响应的调制。换言之，振子的相位可能在系统中以非均匀的方式受到扰动，而时间动力学只能缓慢地消除由此产生的相位失配。大型空间扩展系统中振子相位调制的动力学，可用长波调制理论[38]来描述。在这一情形下，相位动力学可用黏性程函方程近似描述。通过波数 $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 和频率 $\omega \in \mathbb{R}$ 对波列解 $u(x,\ t) = u_{\mathrm{wt}}($ $lx - \omega t)$的相位进行调制，

$$u_{\mathrm{wt}}(\ell x - \omega t + \Phi(x,t)) \sim u_{\mathrm{wt}}(\ell x - \omega t) + \Phi(x,t) \cdot u'_{\mathrm{wt}}(\ell x - \omega t),$$

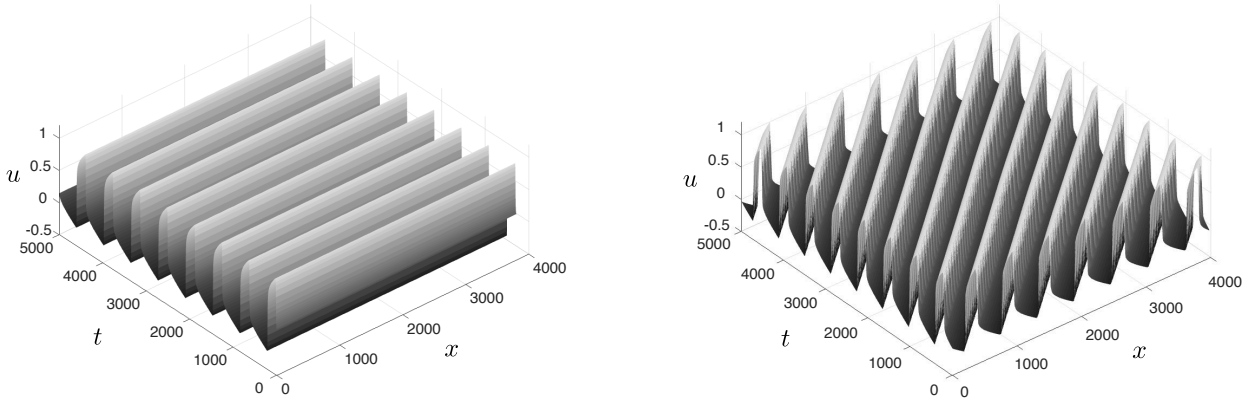


图 1：波形的时空图 $u(x,\ t)$ 对应于数值求得的空间均匀振荡（左）和行波列（右），见（1.1），其中 $a = 0.2,\ \gamma = 1,\ \varepsilon = 0.001$。

在长波极限下可得

$$\Phi_t + d_2\Phi_x^2 = d_{\text{eff}}\Phi_{xx},$$

其中，$d_{\text{eff}} > 0$ 是有效扩散率，系数 $d_2 \in \mathbb{R}$ 编码了非线性色散。此时，波列解的形式为 $\Phi(x,\ t) = \ell_* x - \omega_* t$，其中 $\omega_* = d_2\ell_*^2$。可以证明，波列的小振幅扰动遵循线性化方程的解，即一个对流扩散方程

$$\Phi_t + 2d_2\ell_*\Phi_x = d_{\text{eff}}\Phi_{xx}.$$

也就是说，对于 $t \to \infty$，解可以用热方程的解很好地近似，并以群速度 $2d_2\ell_*$平流。同步时间尺度对应于扩散方程中的衰减速率；对于大型系统，这一速率为

$$\|\Phi(\cdot,t)\|_{L^\infty} \sim (d_{\text{eff}}t)^{-1/2}\|\Phi(\cdot,0)\|_{L^1}, \qquad t > 0.$$

因此，我们将 $T_{\text{eff}} = 1/d_{\text{eff}}$ 称为 同步时间尺度，从而说明了下文将如何回答问题 (i)。图 3中的直接数值模拟展示了有效扩散行为，尤其显示出扩散波形 $\Phi(x,\ t) \cdot u'_{\text{wt}}(\ell_* x - \omega t)$的出现。

第二个问题在我们看来，是关于同步态的谱不稳定性。简单地二分来看，这种潜在的不稳定性要么由 (A) 有效扩散率 d_{eff} 的符号变化引起，即相位近似存在病态性；要么由 (B) 相位近似无法观测到的有限波长模态引起。

粗略地说，对于相位波列，我们用慢时间尺度参数 ε 回答上述问题 (i) 和 (ii) 如下：

(i) 在 FitzHugh–Nagumo 及其变体中，$d_{\text{eff}} \sim \varepsilon^{2/3}$ 以及 $T_{\text{sync}} \sim \varepsilon^{-2/3}$，见定理 1.2 ；

（ii）在 FitzHugh–Nagumo 中，没有不稳定性，见定理 1.2；在 FitzHugh–Nagumo系统的变体中，$d_{\text{eff}} > 0$，但在调制波数 $k \sim \varepsilon^{1/6}$ 处可能出现振荡型图灵不稳定性，见 §1.4。

就上述二分法而言，(ii) 中的不稳定性始终属于 (B) 型，也就是说，并非由 d_{eff} 符号改变所致。因此，在固定弛豫振荡中的小参数ε 进行相位约化时，这种不稳定性并不可见；相反，它是由中性模态在有限波数（固定 ε 时）处的不稳定性引起的。我们发现，(ii) 中对于一致稳定的有效扩散率 $d_{\text{eff}} > 0$ 而言所表现出的刚性，颇为引人注目。这与复 Ginzburg–Landau 方程这一广为人知的例子截然不同：在该方程中，占主导地位的不稳定机制是 d_{eff} 的符号改变，这种现象被称为侧带不稳定性或 Benjamin–Feir 不稳定性。侧带不稳定性在从相干时空动力学（最终达到相位同步）

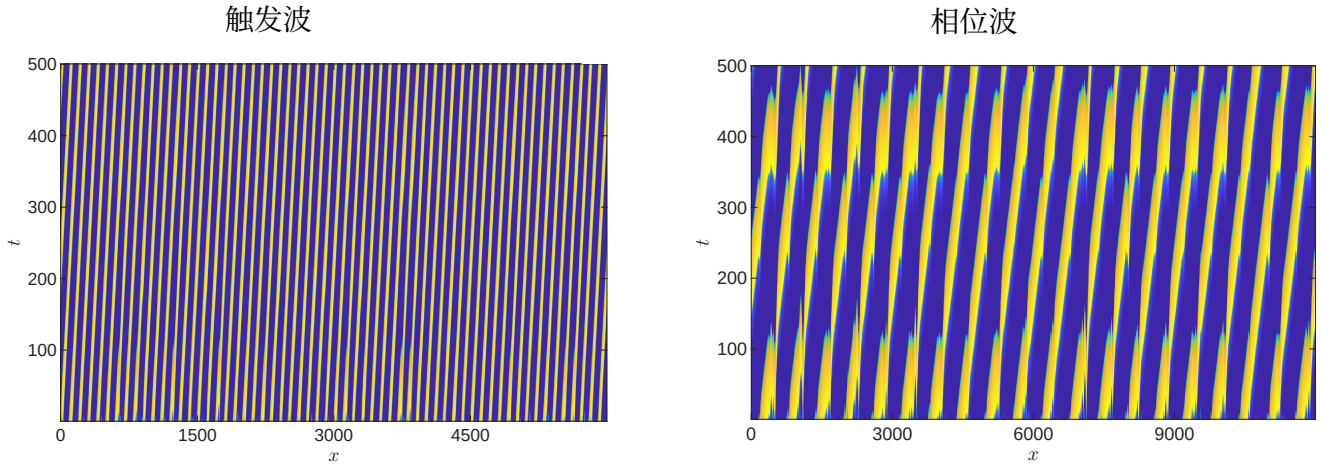


图2：与相位波随机扰动的微弱弛豫（右）相比，触发波扰动的快速衰减（左）示意图；实现细节请参见附录 E 。

向各种形式的时空混沌过渡的过程中发挥着格外重要的作用 [4, 29]。然而，对于具有相位梯度的频率同步态，也就是说，对于波列解，在某些参数区域中，复 Ginzburg–Landau 方程会在侧带不稳定性出现之前发生有限波长不稳定性 [93], ，这与我们在此观察到的潜在不稳定性颇为相似。

通过过渡层相互作用实现同步。FitzHugh–Nagumo型或van der Pol型振子中的弛豫振荡由状态之间两次快速切换组成，其振幅缓慢变化。在空间均匀振荡中，快速切换由慢演化到达慢流形的折叠点所触发。慢穿越折叠点会对振荡周期中的领先阶 $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$部分产生特征性的 $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1/3})$-修正；振荡周期的领先阶部分源于沿慢支漂移所耗费的最长时间；见图4。对空间均匀振荡进行空间调制时，快速切换的时刻会随空间变化：对于波列，切换沿着特征线$\omega(\ell)t = \ell x$发生，其中 $\omega(0)$为空间均匀振荡的频率；见图 1。色散，即 ω 对空间波数 ℓ 的依赖，被调制方程中的系数 d_2 所编码，可以被视为反映了这些快速切换之间的相互作用。当 ℓ 增大时，也就是对于空间间距更小的过渡层，沿慢流形的漂移会被层间相互作用触发的提前过渡截断，而不是由振荡相位到达其最终状态所引起。因此，较大 ℓ 对应的周期波列被称为触发波，而较小 ℓ 对应的波则被称为相位波；有关FitzHugh–Nagumo系统中这些波的示意图，请见图5。

触发波与可激发区域中的波有关[15]。在不存在空间均匀振荡的情况下，振荡行为由激发脉冲及其相互作用所组织；每个激发脉冲都由前沿处的快速跃迁和后沿处的第二次弛豫组成。在这一可激发区域，或者更一般地说，在触发波区域内，层之间的相互作用通过扰动分析已得到相当充分的理解；参见[83] ，其中讨论了在固定 ε 下的大间距情形，以及 [42, 71] ，其中讨论了 $\mathcal{O}$（ε^{-1}）间距情形和远离慢流形折叠点的层。在这两种情形中，过渡层的位置都自然地与线性化中的零特征值相关联，因而对应于一个“软模”，从而导出有效的约化描述。

相比之下，相位波中的过渡层并不具有这样一个自然的零特征值；在分析修正的FitzHugh–Nagumo系统[13]中的脉冲稳定性时，人们注意到了这一事实。因此，尽管稳定性分析具有一个与平移相关的特征性中性模态，但它并不具有分别与两个不同过渡层的平移相关联的独立模态，而且似乎没有明显的方法将动力学表示为约化的弱相互作用动力学。我们的主要结果是，

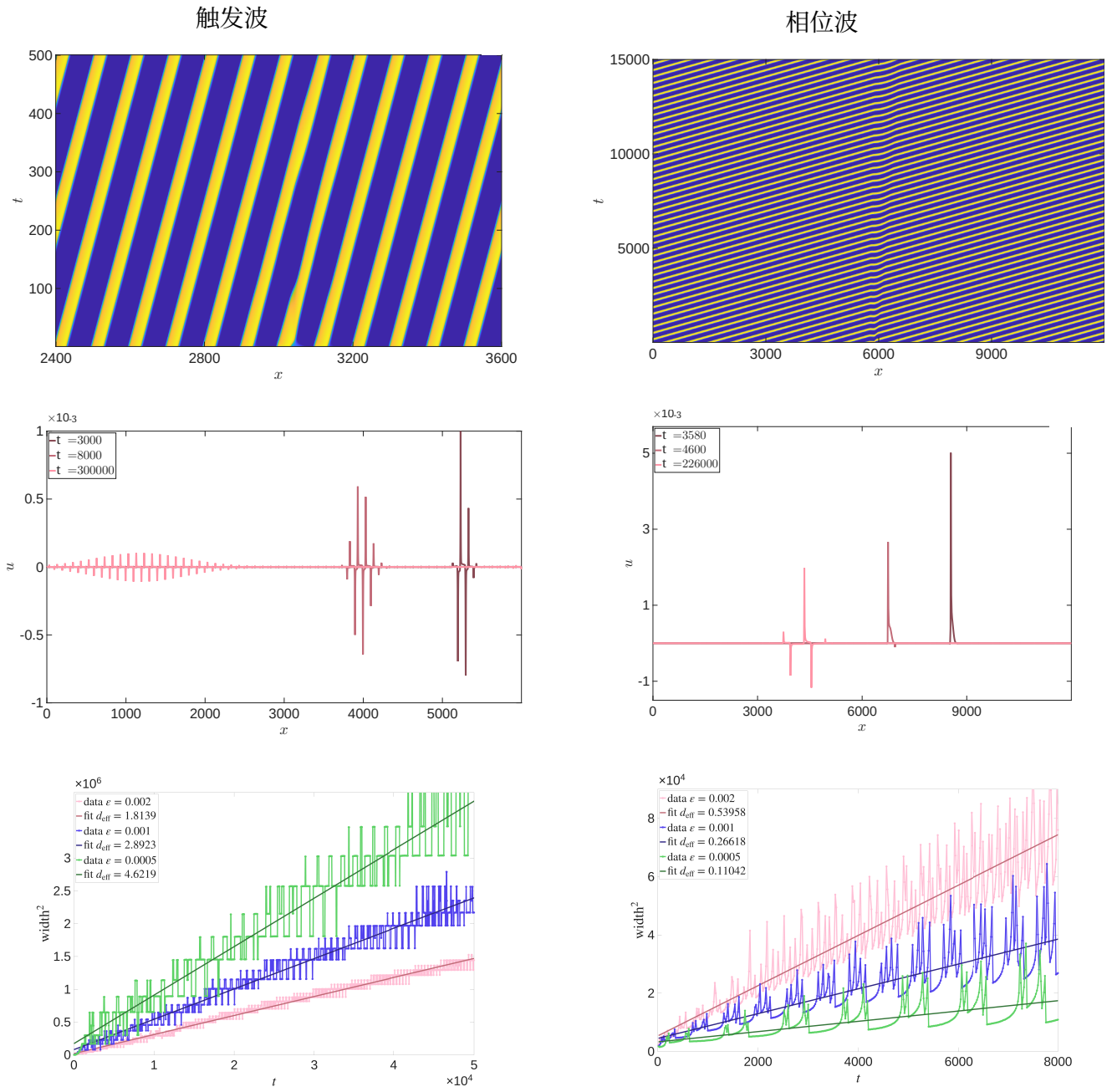


图3：第一分量中触发波（左列）和相位波（右列）的局域扰动，由 $10^{-2}\exp(-x^2/100)$ 引起。上： u 分量的时空图（左侧仅显示部分区域）显示，触发波情形下扰动迅速弛豫，仅在 $t = 200$ 之前可见；而相位波情形下则存在持续缺陷，可见至 $t = 15000$（注意空间和时间绘图范围不同）。中：扰动剖面的快照，即从解中减去最接近的理想周期波列。界面附近的扰动经调制且幅度较大。它们以群速度缓慢向左传播，随着宽度增大，振幅逐渐衰减（同样，触发波情形下衰减较快，相位波情形下较慢）。下：衰减是扩散性的，这里通过绘制扰动超过 10^{-5} 的区域宽度平方随时间的变化来说明。数据及斜率为 $4d_{\mathrm{eff}}$ 的线性拟合表明，随着 ε 减小，触发情形下 $d_{\mathrm{eff}} \sim 1/\varepsilon$ 增大，而相位波情形下 $d_{\mathrm{eff}} \sim \varepsilon^{2/3}$ 减小；实现细节见附录 E 。

特别是刻画了 d_{eff}，从过渡层相互作用的角度来看，可以认为它首次对经过折叠点后产生的快速过渡层之间的相互作用进行了定量刻画。

定量而言，假设相距 $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ 的层的调制会在 $\varepsilon^{-\beta}$时间尺度上弛豫。将空间尺度为 ε^{-1} 的调制代入有效扩散程函近似方程 $\Phi_t + d_2\Phi_x^2 = d_{\text{eff}}\Phi_{xx}$，即可预测这一时间尺度，从而预测远长于先前定义的同步时间尺度 $(d_{\text{eff}}\varepsilon^2)^{-1} = \varepsilon^{-2}T_{\text{sync}}$上的层动力学。令 $\varepsilon^{-\beta} = (d_{\text{eff}}\varepsilon^2)^{-1}$相等，也能对我们的结果以及关于 [42] 中触发波的类似结果作出比较性解释：

- 触发波： $d_{\text{有效}} \sim \varepsilon^{-1} \longrightarrow$ 层相互作用强度 ε^{β}，弛豫时间尺度 $\varepsilon^{-\beta}$, $\beta = 1$;
- 相位波： $d_{\text{有效}} \sim \varepsilon^{2/3} \longrightarrow$ 层相互作用强度 ε^{β}，弛豫时间尺度 $\varepsilon^{-\beta}$, $\beta = 8/3$。

关于触发波和相位波附近弛豫过程的示意图，请参见图 3 。我们指出，触发波的弛豫时间尺度也表现为脉冲稳定性中的一个弱相互作用特征值，其阶为 ε [19, 57, 94]。

总之，我们的结果表明，相位波过渡层之间的相互作用极其微弱，这与关于可激发介质中过渡层的大量研究结果形成鲜明对比。图 2 中的直接数值模拟展示了这些预测如何体现为随机扰动作用下相位波极其缓慢的同步，与触发波的快速同步形成对照。另一方面，我们认为，此处发展的数学技巧将有助于研究具有折叠动力学的奇异摄动谱稳定性问题，其适用范围远超本文关注的特定情形。

缺陷介导的频率同步。除了这些关于稳定性和同步的自然问题外，我们的研究还受到缺陷介导同步现象的强烈推动。这种同步的一个简单直观例子是“起搏器”的存在，例如以不同频率振荡的局域区域，而这种振荡随后会在介质中传播 [68, 90]。因此，相干态以有限速度而非仅通过扩散传播；对于大小为 L 的系统，同步在时间 $T \sim L$ 后即可实现，而非 $T \sim L^2$。相干态并非相位同步，而是频率同步：相位呈现恒定梯度，同时信息从起搏器向外传播。因此，恒定梯度态对应于一个波列，它在时间和空间上均具有周期性，并以刚性方式传播。在没有外部起搏器时，自组织起搏器（如螺旋波[85] 和源 [36, 84] ）也能产生类似效果，在玻璃态中围绕各个起搏器形成频率同步域。

另一种类似的频率同步机制与所观测到的振荡区域的增长有关；这种增长或由外部猝灭 [49] 引起，或再次以自组织的方式通过入侵前沿传播振荡不稳定性而产生[95]。后者曾以 FitzHugh–Nagumo系统为例进行研究，见 [8, 22]；另见图7。这类入侵前沿会在其尾迹中产生波列，即频率同步态；这是因为它们的群速度小于前沿界面的传播速度 [84]。

1.2 FitzHugh–Nagumo系统中的波列

我们在振荡区域中介绍 FitzHugh–Nagumo系统，并给出相位波和触发波的存在性结果。

振荡区域。 我们考虑FitzHugh–Nagumo系统

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + f(u) - w, \\ w_t &= \varepsilon(u - \gamma w - a), \end{aligned} \qquad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0,\ (u, w) \in \mathbb{R}^2, \tag{1.1}$$

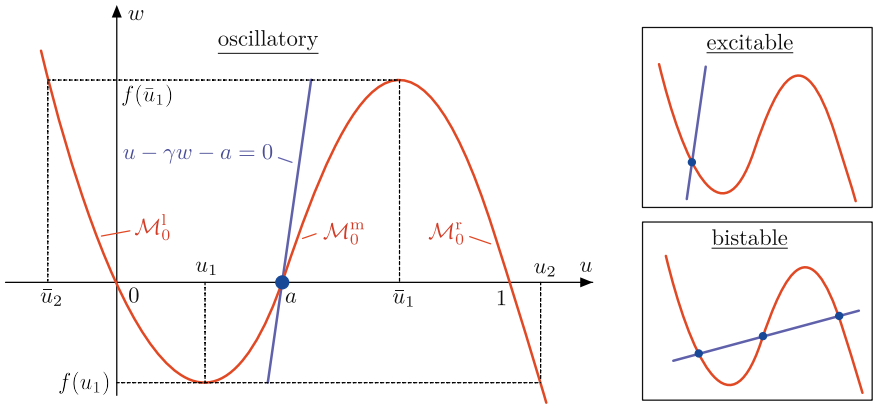


图4：左侧示意图展示了临界流形 $\mathcal{M}_0$ 的左、中、右分支 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{l}}, \mathcal{M}_0^{\mathrm{m}}, \mathcal{M}_0^{\mathrm{r}}$，折叠点的位置 $(u,w) = (u_1, f(u_1))$ 和 $(u,w) = (\bar{u}_1, f(\bar{u}_1))$，以及零流线 $u-\gamma w-a=0$；条件为 $0<a<1/2$ 和 $0<\gamma<\gamma_*(a)$。这些条件确保 (1.3) 处于振荡区域并呈现弛豫振荡。特别地，它们排除了平衡点位于临界流形外侧分支 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{l}}, \mathcal{M}_0^{\mathrm{r}}$ 上的构型，例如右上和右下插图分别展示的可激发区域和双稳态区域。

其中 c 立方非线性 $f(u) = u(u-a)(1-u)$，参数 $0<\varepsilon\ll 1$、$0<a<\frac{1}{2}$ 和

$$0<\gamma<\gamma_*(a) := 9\left(1+2a-2a^2+(1-2a)\sqrt{a^2-a+1}\right)^{-1}. \tag{1.2}$$

支配与 x 无关解的平面系统，

$$\begin{aligned} u_t &= f(u)-w, \\ w_t &= \varepsilon(u-\gamma w-a), \end{aligned} \tag{1.3}$$

其行为与经典范德波尔方程十分相似，具有一个不稳定平衡点 $(u,w) = (a,0)$ 以及大振幅弛豫振荡；当 $\varepsilon>0$ 足够小时，这些振荡以 (1.3) 中的周期轨道形式出现。构造周期轨道的几何方法中的关键特征是S形临界慢流形 $\mathcal{M}_0 = \{(u,w)\in\mathbb{R}^2 : w = f(u)\}$。三次函数 $w=f(u)$ 在以下位置取得局部最小值：

$$u_1 = \frac{1}{3}\left(1+a-\sqrt{1-a+a^2}\right) \tag{1.4}$$

并在处取得局部最大值

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{3}\left(1+a+\sqrt{1-a+a^2}\right), \tag{1.5}$$

分裂为三个正规双曲分支 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{l}}, \mathcal{M}_0^{\mathrm{m}}, \mathcal{M}_0^{\mathrm{r}}$，以及两个折叠点 $(u_1, f(u_1)), (\bar{u}_1, f(\bar{u}_1))$；见图 4。零流线 $u-\gamma w-a=0$ 与三次函数 $w=f(u)$ 在（a，0）点相交，该点位于（u，w）平面中，而（1.2）保证它与右、左分支 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{l}}, \mathcal{M}_0^{\mathrm{r}}$ 均无交点，否则会产生稳定平衡点；另见图 4。随后，可以将临界流形左、右分支 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{l}}, \mathcal{M}_0^{\mathrm{r}}$ 上的部分与快轨道拼接，构造弛豫振荡；这些快轨道从各折叠点出发，并在点 $(u_2, f(u_1))$ 和 $(\bar{u}_2, f(\bar{u}_1))$ 跳跃至对侧的正规双曲分支，且

$$u_2 = \frac{1}{3}\left(1+a+2\sqrt{1-a+a^2}\right), \qquad \bar{u}_2 = \frac{1}{3}\left(1+a-2\sqrt{1-a+a^2}\right), \tag{1.6}$$

见图 4。因此，我们将参数区域 $0<a<\frac{1}{2}, 0<\gamma<\gamma_*(a)$ 称为 (1.3) 呈现这种振荡行为时的振荡区域。

周期波列。除（1.3) 中的1.1) 中的空间均匀振荡外，偏微分方程（1.1) 还存在振幅较大的空间周期波列，例如可用其波速作为参数。这些波列是如下相关行波方程的解。变换到 $(u, w)(\xi, t) = (u,w)(x - ct, t)$ 这一波速为 c 的共动参考系中，我们将（1.1）改写为

$$\begin{aligned} u_t &= u_{\xi\xi} + f(u) - w + cu_\xi, \\ w_t &= \varepsilon(u - \gamma w - a) + cw_\xi, \end{aligned} \qquad \xi \in \mathbb{R},\ t \geq 0,\ (u, w) \in \mathbb{R}^2, \tag{1.7}$$

其中 $\xi = x - ct$。平稳解 $(u,\ w)(x,\ t) = (u,\ w)(\xi)$ 满足行波常微分方程

$$\begin{aligned} 0 &= u_{\xi\xi} + f(u) - w + cu_\xi, \\ 0 &= \varepsilon(u - \gamma w - a) + cw_\xi, \end{aligned} \tag{1.8}$$

它在 令 $v = u_\xi$ 后，可写成一个奇异摄动一阶系统

$$\begin{aligned} u_\xi &= v, \\ v_\xi &= -cv - f(u) + w, \\ w_\xi &= -\frac{\varepsilon}{c}(u - \gamma w - a). \end{aligned} \tag{1.9}$$

因此，波列对应于（1.9）中的周期轨道。对每个 $0 < a < \frac{1}{2}$，$0 < \gamma < \gamma_*(a)$以及每个充分小的 $\varepsilon > 0$，（1.9）都存在一族由波速 c [22, 89]参数化的波列。这一族自然分为两个子族，即 $c < c_*(a)$ 对应的触发波，以及 $c > c_*(a)$对应的相位波，其中

$$c_*(a) := \sqrt{\frac{1 - a + a^2}{2}} > 0.$$

触发波和相位波的区别在于，其快速跃迁相对于三次函数 $w = f(u)$局部极值处折叠点的位置。对于触发波，快速跳跃发生在远离折叠点的位置；而对于相位波，快速跳跃发生在折叠点附近；参见图 5。在这两种情况下，周期（或空间波长）都是波速 c的递增函数。此外，随着 c 增大，相位波的振幅基本保持不变，而触发波的振幅则随 c增大。

触发波族的存在性已在 [89]，中确立，而相位波族则在较近时期于 [22] 中构造出来。从技术角度看，相位波的构造要微妙得多，因为三次函数 $w = f(u)$ 的极值附近会失去正规双曲性，因此需要运用几何去奇异化技术才能完成构造。以下定理总结了触发波和相位波的存在性结果。

定理 *1.1.* *[22,* 定理 *1.1]* 固定 $0 < a < \frac{1}{2}$、$0 < \gamma < \gamma_*(a)$ 和 $c > 0$。那么，对于所有充分小的 $\varepsilon > 0$，系统 *(1.9)* 存在一个周期轨道 $\Gamma_\varepsilon(c)$，其周期为 $L_\varepsilon(c)$。函数 $L_\varepsilon(c)$ 关于 c 单调递增，并且满足 $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon L_\varepsilon(c) = L_0(c)$，其中 $L_0(c)$ 是一个单调递增函数。对于固定的 $c < c_*(a)$，当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，$\Gamma_\varepsilon(c)$ 是一个触发波；而对于固定的 $c > c_*(a)$，当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，$\Gamma_\varepsilon(c)$ 是一个相位波。

图5展示了在波速参数 c 和周期 L_ε 下，对行波方程（1.8）中的波列进行数值延拓的结果，其中 $a = 0.2$、$\gamma = 1$、$\varepsilon = 0.001$固定。我们看到，周期L_ε 随 c单调增加，这反映了以速度 c传播的共动坐标系中的负群速度 $c_g - c = -L\frac{dc}{dL}$。换言之，表观相速度 ω/ℓ 始终大于描述扰动传播速度的群速度 $d\omega/d\ell$；见 [22, 注1.6]。图5还展示了在 $c = 2 > c_*(a) \approx 0.648$ 下获得的相位波列剖面，以及在 $c = 0.4 < c_*(a)$ 下获得的触发波剖面。我们注意到，在触发波与相位波的过渡附近，$\omega(\ell)$ 的凹性似乎发生了变化（见图5左下图）。对速度与周期之间关系的考察 [22, §4.4] 表明，在触发波族内，$\omega''(\ell)$ 的符号会发生变化；其发生时的速度与触发波—相波跃迁时的速度较为接近，但实际上在 ε 中相差 $\mathcal{O}(1)$。

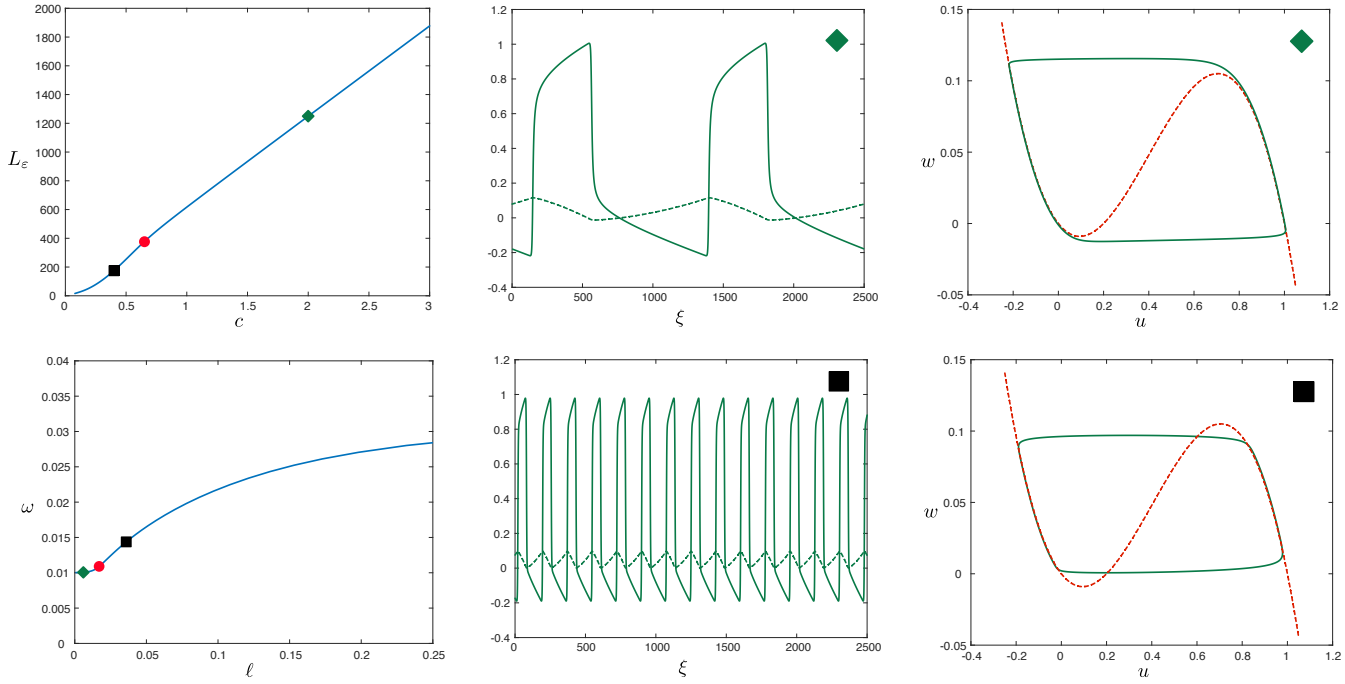


图5：左列：（上图）对固定参数 $a = 0.2$, $\gamma = 1$, $\varepsilon = 0.001$ ω ℓ $= \ell c$ ℓ ℓ — 时，对（1.8）进行数值延拓得到的速度-周期关系。（下图）时间频率 () :()的图，其中：$= \frac{2\pi}{L_\varepsilon}$ 为空间波数。在奇异极限下，标记从触发波过渡到相位波的值 $c_*(a)$ 在两幅图中均以红圈标出。中列：相位波在 $c = 2$ （上图）以及触发波在 $c = 0.4$ （下图）的波形 u （实线）和 w （虚线），分别在左侧图中以绿色菱形和黑色方块标出。请注意，空间周期随速度 c 变化，因此在相同的空间尺度下绘图时，较慢的触发波间距远小于相位波。右列：中列图中相位波列和触发波列的相空间图（绿色实线），以及三次零流线 $w = f(u)$ （红色虚线）。

1.3 主要结果及后果：相位波列的谱稳定性

我们的主要结果确立了相位波列线性化的谱性质，这些性质意味着相位波附近的频率同步、同步时间尺度以及去同步的可能性。

相位波列附近的稳定性与有效扩散率——主要结果。 非周期轨道 Γ_ε 定理 1.1 对应于一个平稳的、 L_ε周期波列解 $\phi_\varepsilon(\xi) = (u_\varepsilon(\xi)\ w_\varepsilon(\xi))$ 对 (1.7) 进行线性化1.7) 得到关于该解的 L_ε周期微分算子

$$\mathcal{L}_\varepsilon \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\xi\xi} + f'(u_\varepsilon)u - w + cu_\xi \\ \varepsilon(u - \gamma w) + cw_\xi \end{pmatrix},$$

作用于 $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) \times L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$，其区域为 $H^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) \times H^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$。 $\mathcal{L}_\varepsilon$ 的谱由弗洛凯–布洛赫理论刻画 [48, 80]。令 $e_\rho(\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\rho\xi}$，其中 $\rho \in \mathbb{R}$，并定义布洛赫算子族

$$\mathcal{L}_{\rho,\varepsilon} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = e_\rho^{-1}\mathcal{L}_\varepsilon \left(e_\rho \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \big(\partial_\xi + \mathrm{i}\rho\big)^2 + c\big(\partial_\xi + \mathrm{i}\rho\big) + f'(u_\varepsilon) & -1 \\ \varepsilon & c\big(\partial_\xi + \mathrm{i}\rho\big) - \varepsilon\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix},$$

作用于 $L^2(\mathbb{R}/L_\varepsilon\mathbb{Z},\mathbb{C}) \times L^2(\mathbb{R}/L_\varepsilon\mathbb{Z},\mathbb{C})$，其区域为 $H^2(\mathbb{R}/L_\varepsilon\mathbb{Z},\mathbb{C}) \times H^1(\mathbb{R}/L_\varepsilon\mathbb{Z},\mathbb{C})$。由于 $\mathcal{L}_{\rho,\varepsilon}$ 根据 Rellich–Kondrachov 定理具有紧预解式，其谱仅由代数重数有限的孤立特征值组成。随后，弗洛凯–布洛赫理论断言， $\mathcal{L}_\varepsilon$ 的谱由以下集合的并给出

$$\Sigma\left(\mathcal{L}_\varepsilon\right) = \bigcup_{\rho \in \left[-\frac{\pi}{L_\varepsilon}, \frac{\pi}{L_\varepsilon}\right)} \Sigma(\mathcal{L}_{\rho,\varepsilon}).$$

因此， $\lambda \in \mathbb{C}$ 属于 $\mathcal{L}_\varepsilon$ 的谱，当且仅当存在 $\rho \in \mathbb{R}$ 使得特征值问题

$$\mathcal{L}_{\rho,\varepsilon} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

存在非平凡解 $(u,w)^\top \in H^2(\mathbb{R}/L_\varepsilon\mathbb{Z},\mathbb{C}) \times H^1(\mathbb{R}/L_\varepsilon\mathbb{Z},\mathbb{C})$。

我们的主要结果表明，除原点处 $\mathcal{L}_{0,\varepsilon}$ 的简单平移特征值外， $\mathcal{L}_\varepsilon$ 的谱均局限于左半平面，且在原点的小邻域之外，与虚轴保持一致的正距离。此外，我们证明，原点附近的临界谱由一个隐式超越方程确定，该方程称为主公式，它将 λ 与弗洛凯–布洛赫频率变量 ρ 联系起来。该方程的首阶系数可用 a、 c 和 γ 完全显式地表示。在 $\lambda = 0$ 的一个邻域内，主公式的解构成一条光滑曲线 $\lambda_\varepsilon(\rho)$，称为临界谱曲线 或线性色散关系；该曲线在 $\rho = 0$ 处与原点二次相切。根据 [38, §4],，我们发现，一阶导数 $\mathrm{i}\lambda_\varepsilon'(0) = c_g - c$ 给出速度为 c 的共动参考系中的群速度，而二阶导数 $\lambda_\varepsilon''(0) = -d_{\mathrm{eff}}$ 给出有效扩散率。

定理 *1.2*（主要结果）。设 $0 < a < \frac{1}{2}$、 $0 < \gamma < \gamma_*(a)$ 以及 $c > c_*(a)$。任意固定足够小的 $\delta > 0$。那么，存在常数 C、 $\mu > 0$，使得对于所有充分小的 $\varepsilon > 0$，关于定理 *1.1* 中建立的 L_ε-周期波列 $\phi_\varepsilon(\xi) = (u_\varepsilon(\xi)\ w_\varepsilon(\xi))$ 对方程 *(1.7)* 的线性化 $\mathcal{L}_\varepsilon$ 满足以下性质：

(i) 谱稳定性： 我们有 $\Sigma(\mathcal{L}_\varepsilon) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re(\lambda) < 0\} \cup \{0\}$。此外，存在 $\eta(\varepsilon) > 0$，使得任意满足 $|\lambda| \geq \mu\varepsilon^{1/6}$ 的 $\lambda \in \Sigma(\mathcal{L}_\varepsilon)$ 都满足 $\Re(\lambda) \leq -\eta(\varepsilon)$。

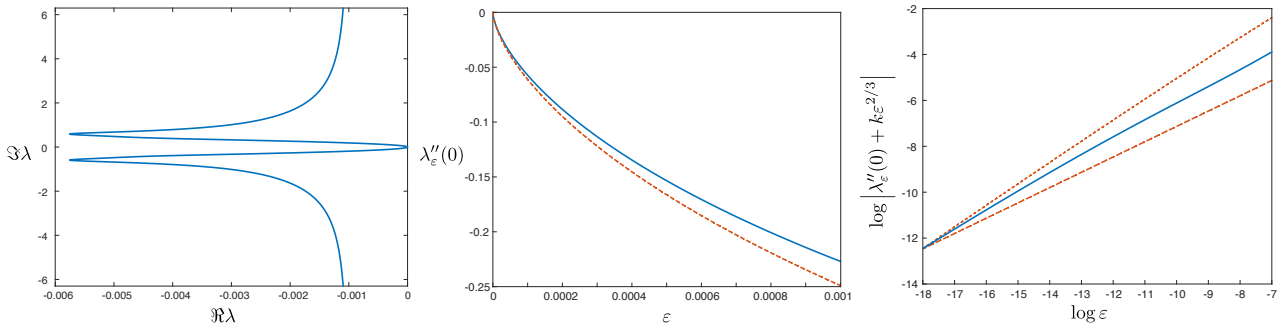


图 6：左：定理 1.2 中的临界谱曲线 $\lambda_\varepsilon(\rho)$，对应于固定的 $a=0.2,\gamma=1,\varepsilon=0.001,c=2$，与图 5 所示的相位波列相关。图中绘制的是 $\Im(\lambda_\varepsilon(\rho))$ 随 $\Re(\lambda_\varepsilon(\rho))$ 的变化。中间和右侧：对于 $a=0.2,\gamma=1,c=2$，数值延拓系数 $\lambda_\varepsilon''(0)=-d_{\text{eff}}$ 随 ε 的变化：中间图显示了 $\lambda_\varepsilon''(0)$ 的数值计算表达式（取值范围为 $\varepsilon\in(10^{-8},10^{-3})$，蓝色），以及首阶解析表达式 $-k\varepsilon^{2/3}$（红色虚线），其中 $k=2\kappa c^3/L_0$。右图为这两个表达式之差的双对数图（蓝色）。图中还显示了斜率为 $2/3$ 的直线（红色虚线），以及形式为 $\log\varepsilon+\log|\log\varepsilon|$ 的曲线（红色点线），这表明两个表达式之间的误差为 $\mathcal{O}(\varepsilon|\log\varepsilon|)$ 阶。关于这些计算的具体方法，请参阅附录 D。

(ii) 主公式：点 $\lambda\in\mathbb{C}$ 满足 $|\Im(\lambda)|\le\mu$ 和 $|\Re(\lambda)|\le\mu\varepsilon^{1/6}$，当且仅当其满足公式时，属于谱 $\Sigma(\mathcal{L}_\varepsilon)$

$$\mathrm{e}^{\left(\frac{\lambda}{c}-\mathrm{i}\rho\right)L_\varepsilon}=\left(1+\Upsilon_{\text{lf}}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon^{\frac16}}\right)\frac{u_1-u_2+\mathcal{E}_{\text{lf},\varepsilon}(\lambda)}{u_2-\gamma f(u_1)-a}\right)\left(1+\Upsilon_{\text{uf}}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon^{\frac16}}\right)\frac{\bar u_1-\bar u_2+\mathcal{E}_{\text{uf},\varepsilon}(\lambda)}{\bar u_2-\gamma f(\bar u_1)-a}\right)+\mathcal{E}_\varepsilon(\lambda)\quad(1.11)$$

对于某个 $\rho\in\mathbb{R}$，其中余项满足

$$|\mathcal{E}_{\text{lf},\varepsilon}(\lambda)|,|\mathcal{E}_{\text{uf},\varepsilon}(\lambda)|\le\delta,\qquad|\mathcal{E}_\varepsilon(\lambda)|\le C\left(\varepsilon^{\frac13}+|\lambda\log|\lambda||\right)$$

并且 $\Upsilon_{\text{lf}},\Upsilon_{\text{uf}}:\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是显式的整函数，定义见下文的 (1.12)。在这种情况下，λ 是布洛赫算子 $\mathcal{L}_{\rho,\varepsilon}$的特征值。特别地，0 是 $\mathcal{L}_{0,\varepsilon}$的代数单重特征值。

(iii) 临界谱曲线：在 $(0,0)$附近，满足 $(\lambda,\rho)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ 的集合 (1.11) 由一条光滑曲线给出 λ_ε：$I_\varepsilon\to\mathbb{C}$ 其中 $\lambda_\varepsilon(0)=0$，其中 $I_\varepsilon\subset\mathbb{R}$ 是 0的一个邻域。群速度$c_{\text{g}}=\mathrm{i}\lambda_\varepsilon'(0)+c$ 和有效扩散率 $d_{\text{eff}}=-\lambda_\varepsilon''(0)>0$ 满足以下估计

$$|c_{\text{g}}|\le\delta,\qquad\left|d_{\text{eff}}-\frac{2\kappa c^3}{L_0}\varepsilon^{\frac23}\right|\le\delta\varepsilon^{\frac23},$$

其中系数 $\kappa>0$ 的显式表达式为 (3.81)，而 $L_0=\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon L_\varepsilon=L_{\text{r}}+L_{\text{l}}$ 由下文的 (2.7)和 (2.8)给出。

我们对特征值问题（1.10）进行分析的完整设置与策略，以及由此得出的定理 1.2 的证明，均在 §2 中给出。图 6 展示了这一结果，给出了临界谱曲线 $\lambda_\varepsilon(\rho)$ 在固定的小 $\varepsilon>0$ 下的典型形状，以及 $\lambda_\varepsilon''(0)$ 对 ε 的依赖关系；计算详情见附录 D 。现在我们概述定理 1.2 的若干推论。

比较：触发波。 关于触发波的结果 [42] 表述略有不同，但在许多方面等同于定理 1.2。如前所述，触发波情形下的分析要简单得多，因为这些波不会经过临界流形上的折叠点。通过令[42]，$\gamma=0$中的计算可进一步简化，不过我们认为，经过适当修改后，其中给出的论证对非零 γ 也成立。将其改写为 FitzHugh–Nagumo 系统的表述（1.1）后，[42] 中证明了：对于固定的 $0<a<\frac12$，$0<\gamma<\gamma_*(a)$、$\delta>0$以及 $0<c<c_*(a)$ (而不是相位波的$c\ge c_*(a)$)，只要 $\varepsilon>0$ 足够小，算子 $\mathcal{L}_\varepsilon$ 满足

(i) 谱稳定性：有 $\Sigma(\mathcal{L}_\varepsilon) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \Re(\lambda) < 0\} \cup \{0\}$；

(ii) 临界谱：存在一个包含 0 的开区间 $I_\varepsilon \subset \mathbb{R}$ 和一条光滑曲线 $\lambda_\varepsilon \colon I_\varepsilon \to \mathbb{C}$，使得对于所有 $\rho \in I_\varepsilon$，$\lambda_\varepsilon(\rho)$ 都是 $\mathcal{L}_{\rho,\varepsilon}$ 的特征值。特别地，$\lambda_\varepsilon(0) = 0$ 是 $\mathcal{L}_{0,\varepsilon}$ 的代数单重特征值。此外，群速度 $c_{\mathrm{g}} = \mathrm{i}\lambda_\varepsilon'(0) + c$ 和有效扩散率 $d_{\mathrm{eff}} = -\lambda_\varepsilon''(0) > 0$ 满足以下估计

$$|c_{\mathrm{g}} - c| \le \delta, \qquad \left|d_{\mathrm{eff}} - k\,\varepsilon^{-1}\right| \le \delta\varepsilon^{-1},$$

其中，系数 $k > 0$ 仅取决于 a, γ 和 c。

特别是，有效扩散率 ε^{-1} 与定理 1.2中相位波的 -扩散率相比大得多。此外，静止坐标系中的群速度在首阶上与相速度一致。

比较：空间均匀弛豫振荡。极限情形 $c \to \infty$（定理 1.2未涵盖此情形）对应于空间均匀振荡附近的波；见图 1。可采用基于本文所发展的技术的方法，分析与定理 1.2 中所述类似的频率同步性质，以及与下文 §1.4 中示例类似的不稳定性案例。有关经过调整的分析及相关现象的详情，请参阅 [7]；关于仅含两个耦合振子的情形，可参阅 [11]，其中讨论了相关观察结果。

后果：相位波列的非线性稳定性。定理 1.2 中确立的扩散谱稳定性，足以保证严格抛物型反应扩散系统中的波列具有非线性稳定性 [47, 60, 61, 86, 88]。对于具有退化扩散的系统，例如（1.7），还面临额外挑战：为了获得谱映射估计，必须控制高频模态。因此，现有针对一般反应扩散系统的结果并不能直接保证这类系统中的波列具有非线性稳定性。尽管如此，我们在姊妹论文 [8,§2.6], 中证明，谱稳定性结果（定理 1.2）足以确保定理 1.1 中的相位波列对于空间局域扰动具有非线性稳定性，并以时间尺度 $d^{-1/2}$ eff 实现渐近扩散衰减。随后，这一结果被推广至完全非局域扰动 [3]。不过请注意，[3, 8] 中的估计仅对固定的 $\varepsilon > 0$ 适用，也就是说，常数在 ε上并不一致。

后果：通过前沿实现频率同步。在偏微分方程 (1.1) 的振荡区域 $0 < a < \frac{1}{2}, 0 < \gamma < \gamma_*(a)$ 中，对不稳定的均匀静止态 $(u, w) = (a, 0)$ 的扰动可能产生大振幅空间图样，并向这一不稳定态扩展；见图 7。入侵的空间图样从定理 1.1 的波列族中选出，该波列族以波速 $c > 0$ 为参数。选定的波速由扩展过程前沿端部的入侵前沿决定。边缘稳定性猜想 [9, 32, 95]，（目前尚未针对任何图样形成前沿得到严格验证）指出，选定的前沿应在某个最优加权空间中达到边缘谱稳定。根据边缘稳定谱位于点谱还是本质谱，前沿被归类为推动型或拉式。在 [22], 中，构造了 (1.1) 的推动型和拉式图案形成入侵前沿，它们是行波，连接不稳定的静止态 $(u, w) = (a, 0)$ 与尾迹中的定理 1.1 周期波列。在拉式情形下，相应的波列可以是触发波或相位波，具体取决于参数 a 的选择；而在推动型情形下，所有选定的波列都是相位波。由定理 1.2 保证的相关波列的扩散谱稳定性，是推动型和拉式图案形成前沿非线性稳定性论证的关键要素，详见 [6, 8], ，因此也是解决 (1.1) 中图样形成前沿边缘稳定性猜想的重要一步。

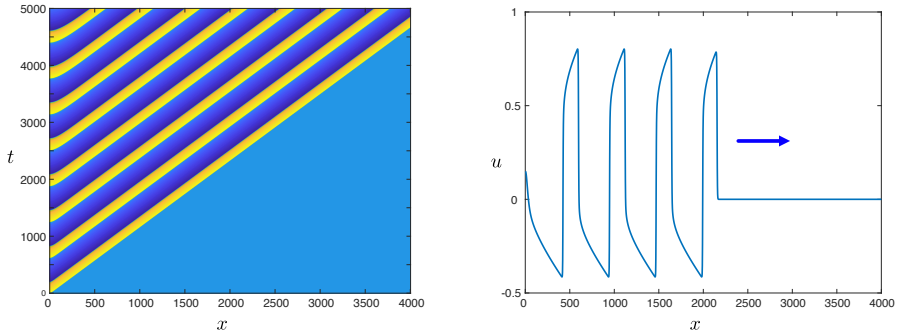


图 7：（左）通过直接数值模拟得到的 u剖面时空图，该剖面对应于（1.1）中的推式图案形成入侵前沿；该前沿选出一个相位波列。参数取值为 $a = 0.2$，$\gamma = 1$，$\varepsilon = 0.001$。（右）时刻u的 $t = 2500$剖面快照。

技术方法。 在奇异摄动偏微分方程的背景下，分析谱的一种常见方法是使用 Evans函数 [43], ，它可以根据底层解 [2, 31] 的几何奇异摄动结构，分解或因式分解为慢变量和快变量部分。该方法已用于证明奇异摄动反应扩散系统中行波脉冲和前沿的稳定性或不稳定性，例如 FitzHugh–Nagumo、Gray–Scott 和 Gierer–Meinhardt 系统等 [37, 63, 96]。在这些情形中，人们通常最关注点谱中一个或多个孤立特征值的位置，例如可通过绕数论证加以研究。对于波列，研究者曾使用 Evans函数技术确定以 Floquet–Bloch频率变量为参数的谱曲线，见 [48]；随后又在奇异摄动情形下对 FitzHugh–Nagumo 和 Gierer–Meinhardt 系统以及更一般的反应扩散模型进行了研究，见 [30, 31, 42, 92] 。如前所述，这些后续研究聚焦于触发波或周期性脉冲/尖峰图案，从而避开了折叠点处双曲性丧失所带来的挑战。

相位波情形涉及在双曲性丧失的情况下展开临界 Floquet–Bloch 谱曲线，这一组合带来了独特的挑战。据我们所知，我们在此作出的贡献是首次对这一情形进行分析。为证明定理1.2，我们采用基于 Lin方法 [72], 的方法，直接构造分段连续势特征函数。随后，利用 Melnikov理论进行匹配，得到一个将谱参数λ 与 Floquet–Bloch频率 ρ联系起来的约化代数方程。这一策略已成功用于慢快反应扩散系统中波列的谱稳定性分析 [30], ；在这类系统中，指数三分解用于区分慢行为与快行为，并将 Fredholm性质从约化特征值问题传递到完整系统。然而，在当前情形下，由于轨道经过非双曲折叠点，无法使用一致的指数三分解，因此出现了新的挑战。为克服这些困难，我们采用几何去奇异化（即吹起）技术[69]。受先前关于 FitzHugh–Nagumo系统中行波脉冲解稳定性的研究启发 [19], ，我们通过将特征值问题与存在性问题一同吹起，发展了这些技术的一种新颖应用，其中包括在吹起变换中引入λ ，并在多个标度区间内分析由此得到的特征值问题。我们将这一构造与 Lin方法交织起来，同时采用 Riccati 变换 [31] ，在临界流形的双曲部分沿波列将慢动力学与快动力学分离，从而能够在定理1.2中精确刻画临界谱。尤其是，与以往对行波脉冲的分析 [19, 56], 不同，我们必须追踪沿波列中心空间中的动力学，并求解一系列边值问题，以推导约化代数方程（1.11），该方程完整描述了原点附近临界谱的性质。这一构造及其与慢穿越折叠分岔相关特征标度的相互作用，带来了定理 $\varepsilon^{1/6}$1.2(ii)中临界谱区域出乎意料的标度，以及定理 $\varepsilon^{2/3}$1.2(iii)中有效扩散率的标度。

我们预期，这些工具可广泛应用于奇异摄动特征值问题，尤其适用于研究那些因以下因素而发生双曲性丧失的系统中行波的稳定性：

折叠点及其他非双曲奇点。在反应扩散系统行波的研究中，这类奇点十分常见；折叠奇点不仅与弛豫振荡有关，也与鸭解和混合模态振荡等复杂的时空振荡现象相关。 [10, 18,51, 64, 98]，以及扩散诱导不稳定性 [16]。此外，近期研究 [58, 97] 凸显了折叠奇点在组织奇异图灵分岔处产生的空间周期波方面所起的作用。据我们所知，这几类解的谱稳定性和非线性稳定性尚未得到解析研究；我们相信，本文提出的方法为研究这些问题及相关问题提供了一个框架。

1.4 大尺度下的刚性与中间尺度不稳定性

我们的谱分析指出， $\lambda \sim \varepsilon^{1/6}$ 这一范围可能是不稳定性的来源。定理 1.2(iii)表明，与 0 相接触的临界谱具有扩散性；这是根据临界谱曲线 $\lambda_\varepsilon(\rho)$ 的主阶描述得出的，该曲线是主公式 (1.11) 的一个解。根据 §3.6 中对 $\rho = 0$ 附近这条曲线的分析，我们预计，对于具有弛豫振荡的反应扩散系统， $d_{\text{eff}} = -\lambda_\varepsilon''(0) > 0$ 在更一般的情形下也成立。负号 $\lambda_\varepsilon''(0) < 0$，以及 (1.11) 中源自缓慢穿越折叠点的 $\varepsilon^{1/6}$ 缩放，表明 $|\lambda| \ll \varepsilon^{1/6}$ 时不会出现不稳定性。另一方面，结合标准的斯图姆–刘维尔论证，对 $|\lambda| \gg \varepsilon^{1/6}$ 的主公式 (1.11) 分析排除了 $|\lambda| \gg \varepsilon^{1/6}$ 时存在不稳定谱的可能；参见命题 3.11、§5 和附录 A。然而，我们发现，当 $\lambda/\varepsilon^{1/6}$ 处于中间尺度时，(1.11) 的左右两侧可以达到平衡，从而产生潜在的不稳定性。

为了研究这一可能 性，我们注意到，整函数 $\Upsilon_{\text{lf}}, \Upsilon_{\text{uf}} \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 在 (1.11) 中由下式给出 y

$$\begin{aligned} \Upsilon_{\text{lf}}(z) &:= \frac{z^2}{\theta_{\text{lf}} c^3 \operatorname{Ai}'(-\Omega_0)^2} \int_{-\Omega_0}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{z^2}{\theta_{\text{lf}} c^3}(s+\Omega_0)} \left(s\operatorname{Ai}(s)^2 - \operatorname{Ai}'(s)^2 \right) \mathrm{d}s, \\ \Upsilon_{\text{uf}}(z) &:= \frac{z^2}{\theta_{\text{uf}} c^3 \operatorname{Ai}'(-\Omega_0)^2} \int_{-\Omega_0}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{z^2}{\theta_{\text{uf}} c^3}(s+\Omega_0)} \left(s\operatorname{Ai}(s)^2 - \operatorname{Ai}'(s)^2 \right) \mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{1.12}$$

其中 $-\Omega_0 < 0$ 表示艾里函数 $\operatorname{Ai}(z)$ 的最大零点 (见附录 C)，并且

$$\begin{aligned} \theta_{\text{lf}} &:= -\frac{(a^2 - a + 1)^{1/6}(u_1 - \gamma f(u_1) - a)^{1/3}}{c} > 0, \\ \theta_{\text{uf}} &:= \frac{(a^2 - a + 1)^{1/6}(\bar{u}_1 - \gamma f(\bar{u}_1) - a)^{1/3}}{c} > 0. \end{aligned}$$

在振荡参数区域 $0 < a < \frac{1}{2}$, $0 < \gamma < \gamma_*(a)$ 在(1.1) 中，我们有 $\theta_{\text{uf}} > \theta_{\text{lf}}$，这排除了中间区域 $|\lambda| \sim \varepsilon^{1/6}$ 内存在不稳定谱的可能性；见命题 3.10的证明。

这些观察促使我们考虑以下具有修正非线性项的 FitzHugh–Nagumo型系统

$$\begin{aligned} u_t &= u_{\xi\xi} + F(u, w), \\ w_t &= \varepsilon(u - \gamma w - a), \end{aligned} \qquad F(u, w) = \frac{u(u-a)\left(\frac{3}{2} - u\right)}{\frac{2}{5} + u - a} - w\left(\tfrac{5}{4} - r(u-a)\right), \tag{1.13}$$

以及参数 $a = 0.25, \gamma = 0.01, \varepsilon = 0.002$，和 $r = 0.998$；零等倾线见图 8 。与 FitzHugh–Nagumo系统类似，(1.13) 存在一族波列解，它们经过非双曲折叠点附近，呈现出弛豫振荡的特征。非线性项的选取方式使得相应的量 $\theta_{\text{uf}}, \theta_{\text{lf}}$满足上述条件 $\theta_{\text{uf}} < \theta_{\text{lf}}$，从而使 (1.13) 的波列解可能发生不稳定性。考察 (1.11)，我们预计区域 $|\rho| \sim |\lambda| \sim \varepsilon^{1/6}$ 与不稳定性有关。图 8 展示了数值计算得到的 (1.13) 的波列解，以及相应的不稳定临界谱曲线；对于 Floquet–Bloch频率参数 ρ 的一段中间取值范围，该曲线穿入右半平面。

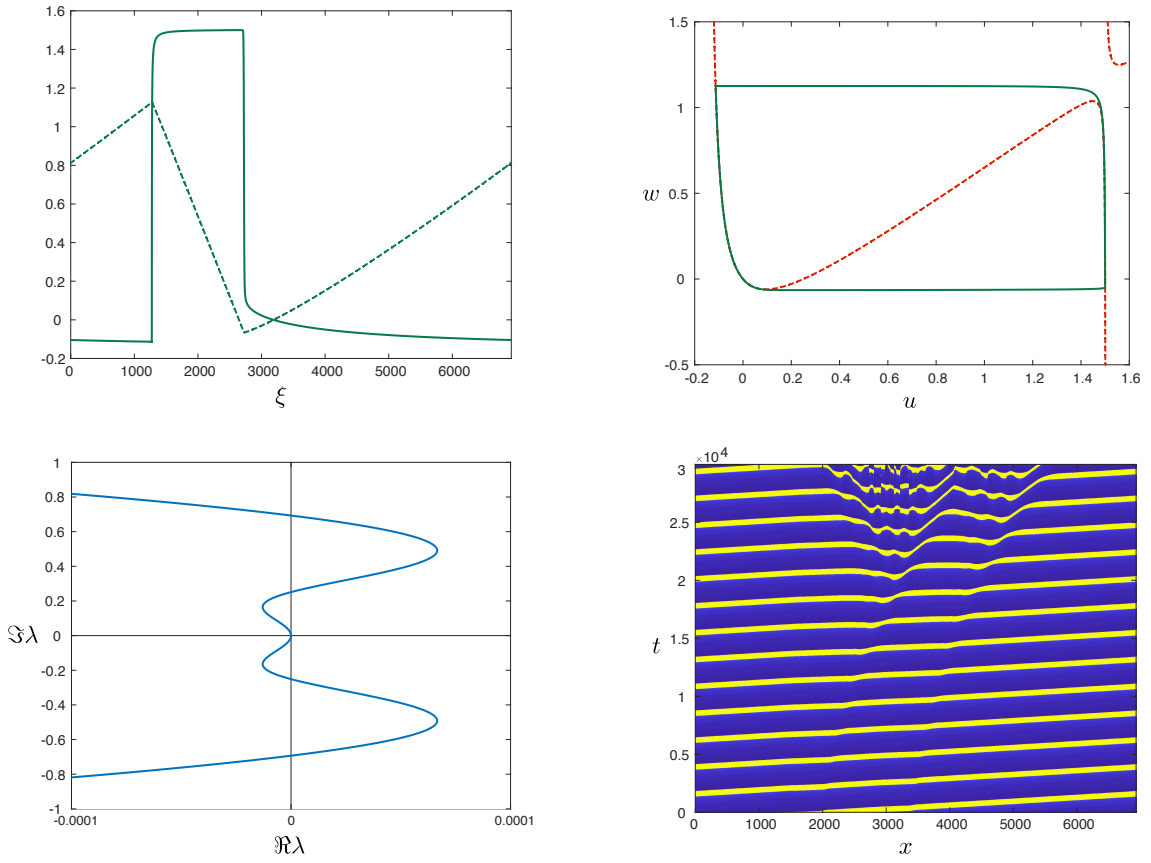


图 8：（左上）展示了方程 (1.13) 的波列解的 u（实线）和 w（虚线）波形，其波速为 $c = 3$，参数为 $a = 0.25$、$\gamma = 0.01$、$\varepsilon = 0.002$ 和 $r = 0.998$。（右上）左侧面板中的波列在 (u, w) 空间中的图像（绿色实线），以及零流线 $F(u, w) = 0$（红色虚线）。（左下）对与左上面板所示行波列相关的临界谱曲线 $\lambda_\varepsilon(\rho)$ 进行数值延拓的结果（与图 6 对照）。绘制的是 $\Im(\lambda_\varepsilon(\rho))$ 随 $\Re(\lambda_\varepsilon(\rho))$ 的变化。（右下）以 $c = 3$ 处的（不稳定）波列加上小噪声作为初始条件，得到的方程 (1.13) 解的 u 分量的时空图。

1.5 论文概要

本文余下部分将证明定理 1.2。在 §2 中，我们介绍分析特征值问题 (1.10) 的框架，并给出定理 1.2 的证明。该证明结合了三个技术命题，分别涉及 (1.10) 在 λ 复平面不同区域内的行为。对小 λ的情形（这是最微妙的情况）的分析见 §3。这项分析的关键在于对折叠点附近将存在性问题与特征值问题耦合后得到的系统进行几何去奇异化，详见 §4。中等 $|\lambda|$ 情形见 §5，而大 $|\lambda|$ 情形则见附录 A。附录 B 和 C 分别介绍指数二分性与三分性，以及艾里函数。最后，附录 D 和 E 详细说明引言中所述数值延拓的实现和直接数值模拟。

1.6 致谢

作者谨此感谢美国国家科学基金会通过以下资助项目提供的支持：DMS-2510541 和 DMS-2202714（M. Avery）、DMS-2238127（P. Carter），以及 DMS-2506837 和 DMS-2205663（A. Scheel）。B. de Rijk 的研究工作由德国科学基金会（DFG）通过项目编号 491897824 和项目编号 258734477（SFB 1173）资助。

作者感谢卡尔斯鲁厄理工学院的“波现象”协同研究中心在 2022年8月 接待 M. Avery 和 P. Carter，使他们得以开展本项目的相关工作；也感谢位于美国罗得岛州普罗维登斯的数学计算与实验研究所在 2023年1月 通过 Collaborate@ICERM 项目接待全体作者；还感谢莱顿大学数学研究所在 2024年7月 接待 M. Avery、P. Carter 和 B. de Rijk，使他们得以开展本项目的相关工作。

2 证明的设置与策略

我们对特征值问题（1.10）的分析依赖于行波方程（1.9）的快慢结构；该结构已用于定理1.1 的证明，参见 [22], ，其中利用几何奇异摄动理论构造了相位波列。我们在 §2.1中简要概述这一构造，并推导波列与其奇异极限之间距离的逐点估计。在 §2.2中，我们介绍谱问题（1.10）的分析设置与策略。基于这一策略，我们在 §2.3 中将定理1.2 的证明分解为三个命题，这些命题将在后续各节中证明。

2.1 存在性分析概述

相位波列的构造基于对行波方程（1.9）进行的快慢分析，为方便起见，我们在此重述该方程

$$\begin{aligned} u_\xi &= v, \\ v_\xi &= -cv - f(u) + w, \\ w_\xi &= -\frac{\varepsilon}{c}(u - \gamma w - a). \end{aligned} \tag{2.1}$$

我们将 (2.1) 称为快系统。对 $y = \varepsilon\xi$ 进行重标度，可得到等价的慢系统

$$\begin{aligned} \varepsilon u_y &= v, \\ \varepsilon v_y &= -cv - f(u) + w, \\ w_y &= -\frac{1}{c}(u - \gamma w - a). \end{aligned} \tag{2.2}$$

为构造相位波列，我们分别分析极限 2.1) 和 (2.2；通过拼接极限系统中的轨道，我们得到一条奇异周期轨道，并且可以证明，当 $\varepsilon > 0$ 足够小时，它会扰动为完整系统的一个实际周期解。

2.1.1 慢子系统

令 $\varepsilon = 0$ 满足（2.2），可得

$$\begin{aligned} 0 &= v, \\ 0 &= -cv - f(u) + w, \\ w_y &= -\frac{1}{c}(u - \gamma w - a), \end{aligned}$$

此时流被限制在集合 $\mathcal{M}_0 = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : v = 0, w = f(u)\}$ 上，该集合称为临界流形。在 $f'(u) = 0$ 的点之外， $\mathcal{M}_0$ 上的约化流为

$$cf'(u)u_y = \gamma f(u) + a - u. \tag{2.3}$$

回顾第 §1 节， u_1 和 $\bar{u}_2$分别由（1.4）和（1.5）给出，表示三次函数 $w = f(u)$的局部最小值和最大值，在这两点处 $f'(u) = 0$。因此，临界流形分解为三个正规双曲分支

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0^{\mathrm{l}} &:= \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : v = 0, w = f(u), u \in (-\infty, u_1)\} \\ \mathcal{M}_0^{\mathrm{m}} &:= \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : v = 0, w = f(u), u \in (u_1, \bar{u}_1)\} \\ \mathcal{M}_0^{\mathrm{r}} &:= \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : v = 0, w = f(u), u \in (\bar{u}_1, \infty)\} \end{aligned}$$

以及两个折叠点$(u_1, 0, f(u_1))$和$(\bar{u}_1, 0, f(\bar{u}_1))$；见图4。我们分别称其为下折叠点和上折叠点。在参数区域 $0 < \gamma < \gamma_*(a)$中， （2.3）的流在左分支上向上 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{l}}$ ，在右分支上向下 $\mathcal{M}_{0}^{\mathrm{r}}$。在左分支 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{l}}$ 上， w变量的动力学为

$$w_y = -\frac{1}{c}\left(f_{\mathrm{l}}^{-1}(w) - \gamma w - a\right), \tag{2.4}$$

其中， $u = f^{-1}{}_{\mathrm{l}}(w)$ 表示三次方程 $f(u) = w$ 的最小根。类似地，右分支上 w 变量的动力学 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{r}}$ 由下式给出

$$w_y = -\frac{1}{c}\left(f_{\mathrm{r}}^{-1}(w) - \gamma w - a\right),$$

其中， $u = f_{\mathrm{r}}^{-1}(w)$ 表示 $f(u) = w$ 的最大根。

2.1.2 层问题

通过在 $\varepsilon = 0$ 中令2.1，即可得到层问题

$$\begin{aligned} u_\xi &= v, \\ v_\xi &= -cv - f(u) + w. \end{aligned} \tag{2.5}$$

此处 $w \in \mathbb{R}$ 作为一个参数。该系统存在一个由临界流形$\mathcal{M}_0$给出的平衡态族。我们重点关注系统在 $w = f(u_1)$时的行为，即包含左下折叠点的层。层问题（2.5）存在两个不动点： $(u_1,0)$，对应于非双曲折叠点；另一个是位于 $(u_2,0)$处的鞍型不动点，其中 u_2 由（1.6）给出；另见图 4。当$w = f(u_1)$时， （2.5）是一个 Fisher–KPP 型方程；对于 $c \geq c_*(a)$的取值，该方程存在一个行波前沿解

解 $\phi_{\mathrm{f}}(\xi) = (u_{\mathrm{f}}(\xi)\ v_{\mathrm{f}}(\xi))$ 源自双曲鞍点 $(u_2, 0)$ 与非双曲折叠点 $(u_1, 0)$ 之间的异宿连接，其中 $u_{\mathrm{f}}(\xi)$ 单调递减 [5, 22]。在折叠点 $(u_1, 0)$ 处对（2.5）在$w = f(u_1)$处进行线性化，得到特征值 0 和 $-c$，相应的特征向量分别为 $(1, 0)^\top$ 和 $(-1,c)^\top$。当 $c > c_*(a)$ 时，前沿 ϕ_{f}沿着与零特征值相关的中心流形趋近于 $(u_1, 0)$，且呈代数衰减；而在临界情形下，当 $c = c_*(a)$ 时，该不动点沿其强稳定流形趋近，且呈指数衰减。

根据对称性，对于 $w = f(\bar{u}_1)$，类似的结果也成立。特别地，(2.5) 同样有两个不动点：$(\bar{u}_1,0)$，对应于非双曲折叠点；另一个是位于 $(\bar{u}_2, 0)$ 的鞍型不动点，其中 $\bar{u}_2$ 由 (1.6) 给出。注意，

$$\bar{u}_1 - \bar{u}_2 = u_2 - u_1 = \sqrt{1 - a + a^2}. \tag{2.6}$$

对于 $w = f(\bar{u}_1)$，存在一个单调行波后沿解 $\phi_{\mathrm{b}}(\xi) = (u_{\mathrm{b}}(\xi)\ v_{\mathrm{b}}(\xi))$，它由平衡点 $\bar{u}_2$ 和 $\bar{u}_1$ 之间的异宿连接产生，其中 $u_{\mathrm{b}}(\xi)$ 单调递增。同样，对于$c > c_*(a)$， ϕ_{b} 沿中心流形以代数衰减的方式趋近于 $(\bar{u}_1,0)$。

在 $c > c_*(a)$ 的情形下，对于 $w = f(u_1)\ f(\bar{u}_1)$，上述 (2.5) 的前沿解和后沿解分别满足以下逐点估计。

命题 2.1。令 $0 < a < \frac{1}{2}$ 并取 $c > c^*(a)$。那么，存在常数 C、 υ、 $\omega > 0$ ，使得 t

$$\begin{aligned} &|u_{\mathrm{f}}(\xi) - u_2|, |v_{\mathrm{f}}(\xi)|, |u_{\mathrm{b}}(\xi) - \bar{u}_2|, |v_{\mathrm{b}}(\xi)| \le C\mathrm{e}^{\upsilon\xi}, && \xi \le 0, \\ &\left|u_{\mathrm{f}}(\xi) - u_1 - \frac{\omega}{1+\xi}\right|, |v_{\mathrm{f}}(\xi)|, \left|u_{\mathrm{b}}(\xi) - \bar{u}_1 + \frac{\omega}{1+\xi}\right|, |v_{\mathrm{b}}(\xi)| \le \frac{C}{1+\xi^2} && \xi \ge 0. \end{aligned}$$

此外， u_{f} 单调递减， u_{b} 单调递增 $g.$

2.1.3 奇异周期轨道的构造

显然，方程（2.4）可通过分离变量法求解，得到一个解 $w_{\mathrm{l}}(y)$ ，其初值为 $w_{\mathrm{l}}(0) = f(u_1)$，且满足 $w_{\mathrm{l}}(L_{\mathrm{l}}) = f(\bar{u}_2)$ 当

$$L_{\mathrm{l}} = \int_{f(u_1)}^{f(\bar{u}_2)} \frac{-c}{f_{\mathrm{l}}^{-1}(w) - \gamma w - a}\mathrm{d}w = \int_{u_1}^{\bar{u}_2} \frac{-cf'(u)}{u - \gamma f(u) - a}\mathrm{d}u. \tag{2.7}$$

因此，对于 $y > 0$ ， $u_{\mathrm{l}}(y) = f^{-1}\mathrm{l}(w_{\mathrm{l}}(y))$ 是方程（2.3）的解，并满足 $u_{\mathrm{l}}(0) = u_1$ 且 $u_{\mathrm{l}}(L_{\mathrm{l}}) = \bar{u}_2$。因此，轨道 $(u_{\mathrm{l}}(y)\ 0, f(u_{\mathrm{l}}(y))$ 位于临界流形 $\mathcal{M}_0$ 的左分支上，并连接折叠点 $(u_1, 0, f(u_1))$ 与点 $(\bar{u}_2, 0, f(\bar{u}_2))$。类似地，方程（2.3）存在一个解 $u_{\mathrm{r}}(y)$，其边界值为 $u_{\mathrm{r}}(0) = \bar{u}_1$ 和 $u_{\mathrm{r}}(L_{\mathrm{r}}) = u_2$，其中我们有

$$L_{\mathrm{r}} = \int_{f(\bar{u}_1)}^{f(u_2)} \frac{-c}{f_{\mathrm{r}}^{-1}(w) - \gamma w - a}\mathrm{d}w = \int_{\bar{u}_1}^{u_2} \frac{-cf'(u)}{u - \gamma f(u) - a}\mathrm{d}u. \tag{2.8}$$

轨道 $(u_{\mathrm{r}}(y)\ 0, f(u_{\mathrm{r}}(y))$ 将折叠点 $(\bar{u}_1, 0, f(\bar{u}_1))$ 与 $\mathcal{M}_0$右分支上的点 $(u_2, 0, f(u_2))$ 连接起来。我们通过将 $\mathcal{M}_0$ 的左、右分支上的这些轨道段与前沿解和后沿解 $(u_{\mathrm{f}}(\xi)\ v_{\mathrm{f}}(\xi)\ f(u_1))$ 和 $(u_{\mathrm{b}}(\xi)\ v_{\mathrm{b}}(\xi)\ f(\bar{u}_1))$ 首尾连接，定义奇异周期轨道 $\Gamma_0(c)$；见图 9。

2.1.4 附近周期轨道的存在性与逐点估计

在 [22] 中证明了，奇异周期轨道 $\Gamma_0(c)$ 在充分小的 $\Gamma_\varepsilon(c)$ 下会扰动为一个邻近的周期解2.1的 $\varepsilon > 0$。证明基于不动点论证，并使用了由几何奇异摄动理论的结果推出的估计。在接下来的谱稳定性分析中，我们需要关于该解更详细的逐点估计，其中一部分依赖于周期轨道经过非双曲折叠点附近时的特性。

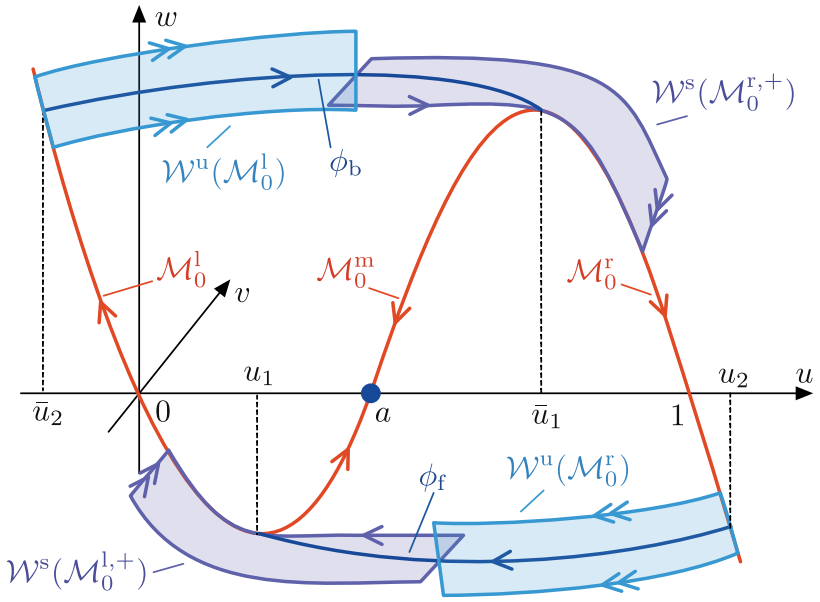


图 9：所示为奇异流形 $\mathcal{M}_0$ 的快速前周期轨道 $\Gamma_0(c)$，由临界沿解和后沿解 $\phi_{\mathrm{f},\ \mathrm{b}}$拼接而成。cal

因此，我们在此简要回顾这一构造方面。

远离折叠点时，流形 $\mathcal{M}^{\mathrm{l}}_{,0}{}^{\mathrm{r}}$ 是正规双曲的鞍型临界流形。因此，根据几何奇异摄动理论的标准结果 [44], ，对于任意 $k > 0$，这些临界流形（的紧子部分）及其稳定流形和不稳定流形 $\mathcal{W}^{\mathrm{s},\mathrm{u}}(\mathcal{M}^{\mathrm{l}}_{,0}{}^{\mathrm{r}})$，在足够小的 $\varepsilon > 0$ 下都会摄动为局部不变流形 $\mathcal{M}^{\mathrm{l}}_{,\varepsilon}{}^{\mathrm{r}}$和 $\mathcal{W}^{\mathrm{s},\mathrm{u}}(\mathcal{M}^{\mathrm{l}}_{,\varepsilon}{}^{\mathrm{r}})$，并且在$C^k$ 意义下与其奇异对应物 $\mathcal{O}(\varepsilon)$-接近。在 [22], 中，奇异周期轨道 $\Gamma_0(c)$的持续存在依赖于流形 $\mathcal{W}^{\mathrm{u}}(\mathcal{M}^{\mathrm{r}}_{\varepsilon})$与 $\mathcal{W}^{\mathrm{s}}(\mathcal{M}^{\mathrm{l}}_{\varepsilon})$沿前沿 ϕ_{f} 的横截相交，以及 $\mathcal{W}^{\mathrm{u}}(\mathcal{M}^{\mathrm{l}}_{\varepsilon})$与 $\mathcal{W}^{\mathrm{s}}(\mathcal{M}^{\mathrm{r}}_{\varepsilon})$沿后沿 ϕ_{b}的横截相交。然而，几何奇异摄动理论的标准结果并不能保证这种横截性，因为这些流形沿轨道 $\phi_{\mathrm{f}}, \phi_{\mathrm{b}}$ 的交点发生在层 $w = f(u_1)$ $f(\bar{u}_1)$中；在这些层中，流形 $\mathcal{M}^{\mathrm{l}}_0$在下折叠点处失去双曲性，而$\mathcal{M}^{\mathrm{r}}_0$ 在上折叠点处失去双曲性，并且摄动后的稳定流形 $\mathcal{W}^{\mathrm{s}}(\mathcal{M}^{\mathrm{r}}_{,\varepsilon}{}^{\mathrm{l}})$在 $\phi_{\mathrm{f}}, \phi_{\mathrm{b}}$附近没有良好定义。

为完成这一构造，需要控制折叠点附近受扰动的流，这就需要采用几何去奇异化技术。这些方法在接下来的谱稳定性分析中也将发挥重要作用。我们考虑下折叠点 (u, v, w) $=(u_1, 0, f(u_1))$ 附近的流；上折叠点的情况类似。根据 [22, §4], ，对于任意 $k > 0$，都存在原点邻域 $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$和一个 C^k-坐标变换 $\mathcal{N}_\varepsilon$: $\mathcal{V} \to \mathbb{R}^3$，使得映射 $U = (u_1, 0, f(u_1))^\top + \mathcal{N}_\varepsilon(V)$ 将 (2.1) 变换为如下系统

$$\begin{aligned} x_\zeta &= g_1(x, y; \varepsilon), \\ y_\zeta &= \varepsilon g_2(x, y; \varepsilon), \\ z_\zeta &= z g_3(x, y, z; \varepsilon) \end{aligned} \tag{2.9}$$

在折叠点的一个邻域内，其中

$$\begin{aligned} g_1(x, y; \varepsilon) &= -x^2 + y + \mathcal{O}(xy, y^2, x^3, \varepsilon), \\ g_2(x, y; \varepsilon) &= 1 + \mathcal{O}(x, y, \varepsilon), \\ g_3(x, y, z; \varepsilon) &= -\frac{c}{\theta_{\mathrm{lf}}} + \mathcal{O}(x, y, z, \varepsilon). \end{aligned}$$

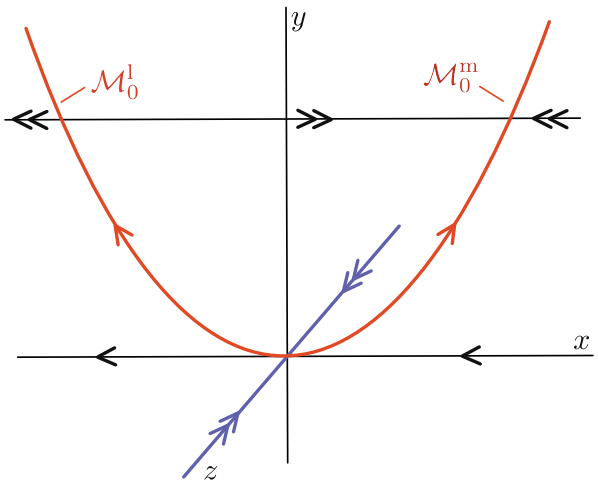


图10：展示的是奇异极限 xyz附近下折叠点局部 xyz坐标中的动力学（2.9） $\varepsilon = 0$。

此处，行波坐标已重新缩放为 $\zeta = \theta_{\mathrm{lf}}\xi$，其中正的常数 θ_{lf} 由下式给出

$$\theta_{\mathrm{lf}} := -\frac{(a^2 - a + 1)^{1/6}(u_1 - \gamma f(u_1) - a)^{1/3}}{c} > 0.$$

这个坐标变换明确区分了折叠点附近二维中心流形上的流，以及双曲 z方向上强烈吸引的动力学；更多关于坐标变换 $\mathcal{N}_\varepsilon$的细节请参见 §4 。我们指出，在上折叠点附近也存在类似的坐标变换，并采用相应的重标度

$$\theta_{\mathrm{uf}} := \frac{(a^2 - a + 1)^{1/6}(\bar{u}_1 - \gamma f(\bar{u}_1) - a)^{1/3}}{c} > 0.$$

在上述变换后的系统（2.9）中，临界流形 $\mathcal{M}_0$ 由条件 $z = 0$和 $g_1(x,\ y;\ 0) = 0$确定，其形状为以原点 $(x,\ y) = (0,\ 0)$ 为中心的（近似）开口向上的抛物线，位于子空间 $z = 0$中；抛物线的左、右分支分别表示 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{l}}$和$\mathcal{M}_0^{\mathrm{m}}$；参见图 10。在子空间 $z = 0$中，我们将临界流形的以下延拓定义为 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{l}}$：

$$\mathcal{M}_0^{\mathrm{l},+} := \mathcal{M}_0^{\mathrm{l}} \cup \{(x, y, z) : y = z = 0, x \geq 0\} \tag{2.10}$$

也就是说，我们将正 x轴附加到 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{l}}$上。远离折叠点时，根据上述标准几何奇异摄动理论，流形 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{l}}$ 发生扰动，形成局部不变慢流形 $\mathcal{M}_\varepsilon^{\mathrm{l}}$，它与 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{l}}$的距离为 $C^k - \mathcal{O}(\varepsilon)$。利用吹胀去奇异化技术，文献[20, § 4] 证明，扩展流形 $\mathcal{M}^{\mathrm{l}}{}_0{}^+$ 发生扰动，形成局部不变流形 $\mathcal{M}^{\mathrm{l}}{}_\varepsilon{}^+$；该流形在$C^0$ 中与 $\mathcal{M}^{\mathrm{l}}{}_0{}^+$ 的距离为 $\mathcal{O}(\varepsilon^{2/3})$，并在 C^1 中与 $\mathcal{M}^{\mathrm{l}}{}_0{}^+$ 的距离为 $\mathcal{O}(\varepsilon^{1/3})$。 $\mathcal{M}^{\mathrm{l}}{}_0{}^+$ 的强稳定纤维族 $\mathcal{W}^{\mathrm{s}}(\mathcal{M}^{\mathrm{l}}{}_0{}^+)$也发生扰动，形成二维局部不变流形 $\mathcal{W}^{\mathrm{s}}(\mathcal{M}^{\mathrm{l}}{}_\varepsilon{}^+)$；类似地，该流形在 C^0中与 $\mathcal{W}^{\mathrm{s}}(\mathcal{M}^{\mathrm{l}}{}_0{}^+)$的距离为 $\mathcal{O}(\varepsilon^{2/3})$，并在 C^1 中与 $\mathcal{W}^{\mathrm{s}}(\mathcal{M}^{\mathrm{l}}{}_0{}^+)$的距离为 $\mathcal{O}(\varepsilon^{1/3})$。按照 [22], ，随后可以利用$\mathcal{W}^{\mathrm{u}}(\mathcal{M}_\varepsilon^{\mathrm{r}})$与扩展流形 $\mathcal{W}^{\mathrm{s}}(\mathcal{M}^{\mathrm{l}}{}_\varepsilon{}^+)$的横截交（上折叠点附近的扩展流形 $\mathcal{M}^{\mathrm{r}}{}_\varepsilon{}^+$也可作类似处理）完成存在性论证；参见图 11。

我们有如下结论。

命题 2.2。 设 $0 < a < \frac{1}{2}$。固定$c > c_*(a)$ 和 $0 < \gamma < \gamma_*(a)$。那么，存在一个常数 $C \geq 1$使得，只要 $0 < \varepsilon \ll 1$， (1.9) 就存在一个周期轨道 $\Gamma_\varepsilon(c)$ ， 它对应于一个平稳解

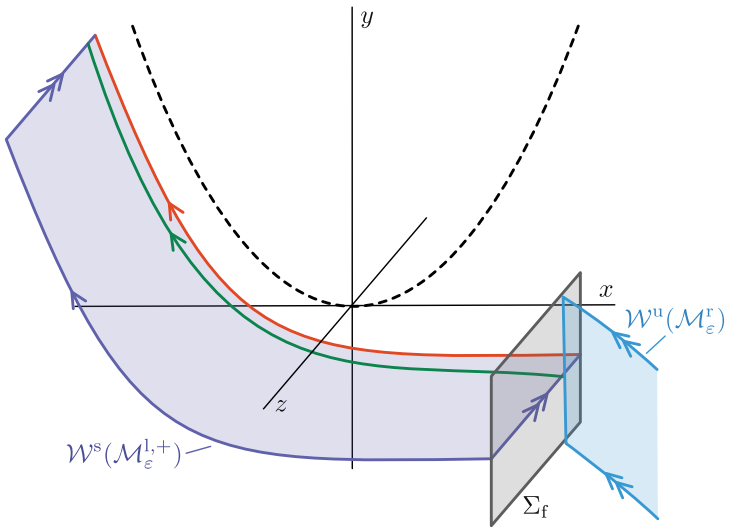


图 11：展示了 处下折叠点附近（2.9）的动力学，以及流形 $\mathcal{W}^{\mathrm{u}}(\mathcal{M}_\varepsilon^{\mathrm{r}})$ 和 $\mathcal{W}^{\mathrm{s}}(\mathcal{M}^{\mathrm{l},+}_\varepsilon)$。上折叠点附近的行为类似。通过对折叠点附近的横截面 Σ_{f} 所对应的庞加莱映射应用不动点论证，可得与行波列解相对应的周期轨道的存在性 [22] 。

$(u_\varepsilon, w_\varepsilon)(\xi)$ (1.7) 周期为 $L_\varepsilon = L_{\mathrm{l},\varepsilon} + L_{\mathrm{r},\varepsilon}$ 其中

$$|\varepsilon L_{\mathrm{r},\varepsilon} - L_{\mathrm{r}}|, |\varepsilon L_{\mathrm{l},\varepsilon} - L_{\mathrm{l}}| \leq C\varepsilon^{\frac{1}{3}}. \tag{2.11}$$

此外，存在一个连续映射 $\delta_0\colon\ [0,\infty) \to [0,\infty)$，满足 $\delta_0(0) = 0$，使得对于 $0 < \varepsilon \ll \nu \ll 1$，下列逐点估计成立

$$\begin{aligned}
|u_\varepsilon(\xi) - u_{\mathrm{f}}(\xi)|, \left|u_\varepsilon'(\xi) - u_{\mathrm{f}}'(\xi)\right|, |w_\varepsilon(\xi) - f(u_1)| &\leq C_\nu\varepsilon^{\frac{2}{3}}, && \xi \in \left[\frac{\log(\varepsilon)}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right],\\
|u_\varepsilon(L_{\mathrm{l},\varepsilon} + \xi) - u_{\mathrm{b}}(\xi)|, \left|u_\varepsilon'(L_{\mathrm{l},\varepsilon} + \xi) - u_{\mathrm{b}}'(\xi)\right|, |w_\varepsilon(\xi) - f(\bar{u}_1)| &\leq C_\nu\varepsilon^{\frac{2}{3}}, && \xi \in \left[\frac{\log(\varepsilon)}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right],\\
|u_\varepsilon(\xi) - u_{\mathrm{l}}(\varepsilon\xi)|, \left|u_\varepsilon'(\xi)\right| &\leq C_\nu\varepsilon^{\frac{2}{3}}, && \xi \in \left[\frac{\nu}{\varepsilon}, L_{\mathrm{l},\varepsilon} + \frac{\log(\varepsilon)}{\nu}\right],\\
|u_\varepsilon(L_{\mathrm{l},\varepsilon} + \xi) - u_{\mathrm{r}}(\varepsilon\xi)|, \left|u_\varepsilon'(L_{\mathrm{l},\varepsilon} + \xi)\right| &\leq C_\nu\varepsilon^{\frac{2}{3}}, && \xi \in \left[\frac{\nu}{\varepsilon}, L_{\mathrm{r},\varepsilon} + \frac{\log(\varepsilon)}{\nu}\right],\\
|u_\varepsilon(\xi) - u_1|, \left|u_\varepsilon'(\xi)\right|, |w_\varepsilon(\xi) - f(u_1)| &\leq \delta_0(\nu), && \xi \in \left[\frac{1}{\nu}, \frac{\nu}{\varepsilon}\right],\\
|u_\varepsilon(L_{\mathrm{l},\varepsilon} + \xi) - \bar{u}_1|, \left|u_\varepsilon'(L_{\mathrm{l},\varepsilon} + \xi)\right|, |w_\varepsilon(L_{\mathrm{l},\varepsilon} + \xi) - f(\bar{u}_1)| &\leq \delta_0(\nu), && \xi \in \left[\frac{1}{\nu}, \frac{\nu}{\varepsilon}\right],\\
|u_\varepsilon(\xi) - u_{\mathrm{l}}(\varepsilon\xi)|, |u_\varepsilon(L_{\mathrm{l},\varepsilon} + \xi) - u_{\mathrm{r}}(\varepsilon\xi)| &\leq \delta_0(\nu), && \xi \in \left[\frac{1}{\nu}, \frac{\nu}{\varepsilon}\right],
\end{aligned} \tag{2.12}$$

其中 $C_\nu \geq 1$ 是一个与 ε无关的常数。

证明。 存在性结果和估计（2.11）直接由 [22, 定理 1。1] 得出。接下来需要得到逐点估计（2.12）。为此，我们回到相位波列的存在性构造 [22, 命题 4。3] 。这些波列是在三维行波方程（1.9）中构造的，利用几何奇异摄动理论和不动点论证，获得一个靠近上述奇异轨道的周期轨道。[22, 命题 4。3] 中的分析表明，扰动周期轨道与奇异轨道相差 $\mathcal{O}(\varepsilon^{2/3})$ 阶。然而，要验证逐点估计（2.12），还需要稍加仔细处理。

周期轨道是回归映射在一个与前沿横截的截面 Σ_{f} 上的不动点，前沿为（$u_{\mathrm{f}}(\xi)$ $v_{\mathrm{f}}(\xi)$ $f(u_1)$）。不失一般性，假设该交点发生在 $\xi=0$，因此（$u_{\mathrm{f}}(0)$ $v_{\mathrm{f}}(0)$ $f(u_1)$） $\in\Sigma_{\mathrm{f}}$。在此截面内，不稳定流形 $\mathcal{W}^{\mathrm{u}}(M_{\mathrm{r}\varepsilon})$ 与轨线 $M^{\mathrm{l}}{}_{,\varepsilon}{}^{+}$ 的稳定流形 $\mathcal{W}^{\mathrm{s}}(M^{\mathrm{l}}{}_{,\varepsilon}{}^{+})$ 横截相交；该轨线是慢流形 $M_{\mathrm{l}\varepsilon}$ 穿过折叠点后的延拓。交点为（u,v,w），满足 $|(u,v,w)-(u_{\mathrm{f}}(0)\ v_{\mathrm{f}}(0)\ f(u_1))|\le C\varepsilon^{2/3}$。该映射的不动点对应于周期轨道，与此交点的距离呈指数级小（关于 ε^{-1}）。因此，根据正则摄动论证，对于任意 $\nu>0$, $|u_\varepsilon(\xi)-u_{\mathrm{f}}(\xi)|\le C_\nu\varepsilon^{2/3}$，当 $\xi\in\left[-\frac{1}{\nu},\frac{1}{\nu}\right]$时均成立。取足够小的 $\nu>0$，即可确保周期轨道在 $\xi=1/\nu$ 时位于左下折叠点（u,v,w）$=(u_1,0,f(u_1))$ 的一个小邻域内。为将区间左侧延伸至 $\xi=\log(\varepsilon)\,\nu$，我们采用标准角点估计（例如参见 [19, 定理 4.5]）。沿后沿也可采用类似论证，由此完成前两项估计的证明。

取 $\nu>0$ 足够小，可以确保在 $\xi=\frac{\nu}{\varepsilon}$ 处，波列与 $\mathcal{M}^{\mathrm{l}}_{\varepsilon}$ 上的某一点呈指数级接近，且该点位于左下折叠点的一个小邻域之外，也就是 $\mathcal{M}^{\mathrm{l}}_{\varepsilon}$ 正规双曲的区域内。因此，根据标准的几何奇异摄动理论，可得第三个估计。需要注意的是，较弱的 $\varepsilon^{2/3}$ 估计（而非 ε）源于以下事实：由第一个估计可知，从 $\mathcal{M}^{\mathrm{l}}_{\varepsilon}$ 沿后沿跳跃的点在 $\xi=L_{\mathrm{l},\,\varepsilon}+\log(\varepsilon)/\nu$ 处出现，其位置与奇异轨道的距离为 $\mathcal{O}(\varepsilon^{2/3})$。关于经过 $\mathcal{M}^{\mathrm{r}}_{\varepsilon}$ 附近的第四个估计也可类似得到。

在前三个估计中取 $\nu>0$ 足够小。根据构造，在区间 $\xi\in\left[\frac{1}{\nu},\frac{\nu}{\varepsilon}\right]$上，波列位于左下折叠点 $(u,\ v)=(u_1,\ 0)$ 的一个小邻域内；对于右上折叠点 $(u,\ v)=(\bar{u}_1,\ 0)$ 也类似。由此可得第五和第六个估计。最后一个待证的估计涉及波列在折叠点附近与约化慢解 $u_{\mathrm{l}}(\varepsilon\xi)$ $u_{\mathrm{r}}(\varepsilon\xi)$ 的接近程度。为此，我们证明

$$|u_{\mathrm{l}}(y)-u_1|,|u_{\mathrm{r}}(y)-u_1|\le\delta_0(\nu)$$

对于 $y\in(0,\ \nu]$ 然后使用第五个估计。我们重点讨论 $u_{\mathrm{l}}(y)$；关于 $u_{\mathrm{r}}(y)$ 的论证类似。回想一下，$u_{\mathrm{l}}(y)$ 是满足以下条件的解：2.3)，且满足 $u_{\mathrm{l}}(0)=u_1,\ u_{\mathrm{l}}(L_{\mathrm{l}})=\bar{u}_{2}$。通过分离变量法求解（2.3），可得在 $y=0$附近，

$$u_{\mathrm{l}}(y)=u_1-\sqrt{\frac{2(a-u_1-\gamma f(u_1))y}{cf''(u_1)}}+\mathcal{O}(\sqrt{y})$$

由此即可得到结论。 □

2.2 谱问题的设置

令 $\rho\in\mathbb{R}$。设 $(u,\ w)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\rho\xi}(\check{}u,\ \check{}w)$，Floquet–Bloch特征值问题（1.10）可改写为关于 $\check{}\Psi=(\check{}u,\ \check{}u_\xi,\ \check{}w)$的一阶边值问题，其形式如下：

$$\check{\Psi}_\xi=\check{A}(\xi;\varepsilon,\lambda)\check{\Psi},\qquad \check{A}(\xi;\varepsilon,\lambda)=\begin{pmatrix}0&1&0\\ \lambda-f'(u_\varepsilon(\xi))&-c&1\\ -\frac{\varepsilon}{c}&0&\frac{1}{c}(\varepsilon\gamma+\lambda)\end{pmatrix}\tag{2.13}$$

$$\check{\Psi}(L_\varepsilon)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho L_\varepsilon}\check{\Psi}(0).\tag{2.14}$$

为保留存在性问题（1.9）中明确的快慢结构，我们进行重标度，以从第三个分量的方程中消去与 ε 无关的 λ 项。在新坐标 $\Psi(\xi)=\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{c}\xi}\check{}\Psi(\xi)$ 下，边值问题（2.13）-（2.14）转化为快慢特征值问题

$$\Psi_\xi=A(\xi;\varepsilon,\lambda)\Psi,\qquad A(\xi;\varepsilon,\lambda)=\begin{pmatrix}A_{\mathrm{f}}(\xi;\varepsilon,\lambda)&B_0\\ \varepsilon B_1&\varepsilon A_s\end{pmatrix},\tag{2.15}$$

并辅以 Floquet 边界条件

$$\Psi(L_\varepsilon) = \mathrm{e}^{\left(\mathrm{i}\rho - \frac{\lambda}{c}\right)L_\varepsilon}\Psi(0), \tag{2.16}$$

其中我们记

$$A_{\mathrm{f}}(\xi;\varepsilon,\lambda) = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{c} & 1 \\ \lambda - f'(u_\varepsilon(\xi)) & -c - \frac{\lambda}{c} \end{pmatrix}, \qquad B_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad B_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{c} & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_s = \frac{\gamma}{c}.$$

我们注意到，在这种表述中，谱参数 λ 既出现在矩阵 $A(\xi;\varepsilon,\lambda)$ 中，也出现在边界条件中，而 Floquet 参数 ρ 仅出现在边界条件中。

我们分析特征值问题 (2.15)-(2.16) 的方法是多方面的。为了证明定理 1.2，我们必须排除开右半平面内存在谱的可能性，但由于平移不变性，$\mathcal{L}_{0,\varepsilon}$ 在原点处的一个简单特征值除外。为此，受 [19], 启发，我们定义复平面的三个主要区域

$$\begin{aligned} R_1(\mu) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \mu\} \\ R_2(\mu,\varpi,\varrho) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re(\lambda) \geq -\varpi, \mu \leq |\lambda| \leq \varrho\} \\ R_{3,\varepsilon}(\varrho) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re(\lambda) \geq -\tfrac{3}{4}\varepsilon\gamma, |\Im(\lambda)| > \varrho\}, \end{aligned} \tag{2.17}$$

其中 $0 < \varpi \ll \mu \ll 1 \ll \varrho$ 是 ε无关的常数，因此这三个集合的并集覆盖闭右半平面；见图 12。由于虚轴附近存在本质谱，每个区域都面临独特的挑战，需要采用不同的方法来排除满足 $\Re(\lambda) \geq 0$ 的谱；而对于 $R_1(\mu)$，则需详细描述包含平移特征值 $\lambda = 0$的谱的临界曲线的性质，并证明其满足定理1.2 (iii)中的扩散型谱稳定性条件。

在下文 §2.3 中，我们给出定理 1.2 的证明，该证明基于三个技术命题，用以描述特征值问题 (2.15)-(2.16) 在三个区域 (2.17) 中各自的行为。首先，我们排除区域 $R_{3\varepsilon}(\varrho)$ 中的谱，这决定了 $\varrho > 0$。然后，我们在球 $R_1(\mu)$ 中进行谱分析，由此确定 μ。如上所述，由于波的平移不变性，当 $\rho = 0$ 时，波列的谱必然经过 $\lambda = 0$。因此，对于区域$R_1(\mu)$，需要进行细致的估计：必须在 $\rho = 0$ 处仔细展开满足 $\lambda_\varepsilon(0) = 0$ 的临界谱曲线 $\lambda_\varepsilon(\rho)$，以排除小 $|\lambda|$时出现不稳定性的可能；数值计算示例见图 6。最后，给定 $\mu\varrho > 0$，我们证明 $R_2(\mu,\varpi,\varrho)$ 中的所有谱都必须位于开左半平面。本文其余部分将用于证明这些命题。

2.3 定理1.2的证明

按照 §2.2 中概述的策略，我们首先排除线性化$\mathcal{L}_\varepsilon$ 在区域 $R_{3,\varepsilon}(\varrho)$ 中存在谱的可能性，其中 $\varrho > 0$ 是一个足够大的、与 ε无关的常数。我们利用 $\mathcal{L}_\varepsilon$可写成主对角扩散-对流算子与余项算子之和：前者与ε 无关，并生成一个强连续半群；后者依赖于 ε，且满足一个与 ε无关的估计。因此，标准的预解式估计表明，当 $\Re(\lambda) > \varrho_1$时， $\mathcal{L}_\varepsilon - \lambda$ 可逆，其中 $\varrho_1 > 0$ 是一个足够大的、与 ε无关的常数。半平面 $\{\lambda \in \mathbb{C} : \Re(\lambda) > \varrho_1\}$覆盖了区域 $R_{3,\varepsilon}(\varrho)$ 的很大一部分。在$R_{3,\varepsilon}(\varrho)$ 的剩余部分（其特征是虚部较大而实部有界），我们仿照[8] 中的做法，对特征值问题进行重新缩放。我们发现，当 $|\Im(\lambda)| > \varrho_2$且 $\Re(\lambda) \in [-\frac{3}{4}\varepsilon\gamma, \varrho_1]$时，重缩放后的线性算子 $\mathcal{L}_\varepsilon - \lambda$ 可通过 Neumann级数展开求逆，其中 $\varrho_2 > 0$是一个足够大的、与 ε无关的常数。总之，我们得到以下结果，其证明见附录 A。

命题 2.3。 设 $0 < a < \frac{1}{2}$。取定$_-$ $0 < \gamma < \gamma_*(a)$ 和 $c > c_*(a)$。存在一个常数 $\varrho > 0$，使得在 $0 < \varepsilon \ll 1$ 成立时，关于 $\phi_\varepsilon(\xi)$ 的 (1.7) 线性化 $\mathcal{L}_\varepsilon$ 在区域$R_{3,\varepsilon}(\varrho)$内没有谱。

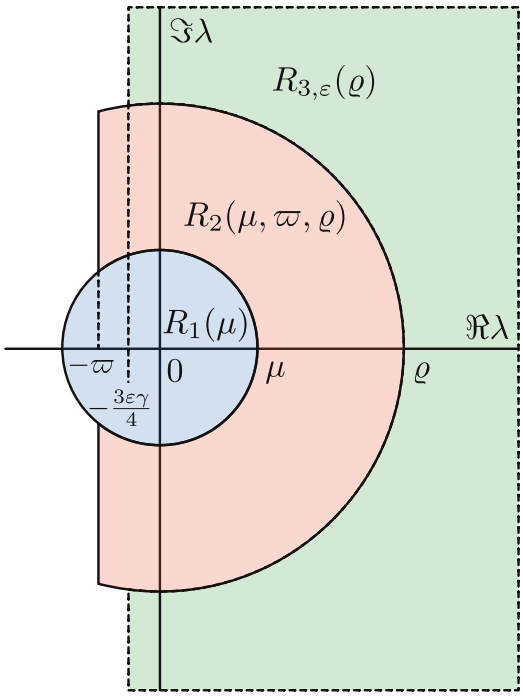


图 12：展示了复平面中的区域 $R_1(\mu)$ $R_2(\mu,\ \varpi,\ \varrho)$，以及 $R_{3,\ \varepsilon}(\rho)$ (2.17)，在这些区域中分析特征值问题（2.13）-（2.14）。

接下来，对于足够小的 $\mu>0$，我们考察小球 $R_1(\mu)$ 内的谱，以下命题将对其进行描述。

命题 *2.4*。设 $0<a<\frac{1}{2}$，$0<\gamma_-<\gamma_*(a)$，且 $c>c_*(a)$。固定 $\delta>0$。存在 $\mu>0$，使得在 $0<\varepsilon\ll 1$ 的条件下，*(1.7)* 关于 $\phi_\varepsilon(\xi)$ 的线性化 $\mathcal{L}_\varepsilon$ 在 $R_1(\mu)\setminus\{0\}$ 中不具有实部非负的谱。此外，当且仅当点 $\lambda\in R_1(\mu)$ 满足某个 $\rho\in\mathbb{R}$ 对应的主公式 *(1.11)* 时，具有 $|\Re(\lambda)|\le\mu\varepsilon^{1/6}$ 的点属于谱 $\Sigma(\mathcal{L}_\varepsilon)$。在这种情况下，$\lambda=\lambda_\varepsilon(\rho)$ 是布洛赫算子 $\mathcal{L}_{\rho,\varepsilon}$ 的特征值。最后，在 *(0, 0)* 附近，满足 *(1.11)* 的 (λ,ρ) 集合 $\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ 由一条光滑曲线 $\lambda_\varepsilon\colon I_\varepsilon\to\mathbb{C}$ 给出，其中 $I_\varepsilon\subset\mathbb{R}$ 是一个包含 *0* 的区间。成立

$$\lambda_\varepsilon(0)=\Re(\lambda_\varepsilon'(0))=0,\qquad \lambda_\varepsilon''(0)\in\mathbb{R},\qquad \left|\lambda_\varepsilon'(0)-\mathrm{i}c\right|\le\delta,\qquad \left|\lambda_\varepsilon''(0)+\frac{2\kappa c^3}{L_0}\varepsilon^{\frac{2}{3}}\right|\le\delta\varepsilon^{\frac{2}{3}},\tag{2.18}$$

其中，$\kappa>0$ 由(3.81) 给出，而 $L_0=L_{\mathrm{r}}+L_{\mathrm{l}}>0$ 由(2.7) 和(2.8)定义。

命题 2.4 的证明将在 §3 中给出。在区域 $R_1(\mu)$ 内，由于平移不变性，谱必然包含一条与原点二次相切的曲线（见图 6）。二次系数中出现的 $\varepsilon^{2/3}$-标度源于与非双曲折叠点的相互作用；数值结果也证实了这一标度，见图 6。为证明命题 2.4，我们的策略是推导出这条临界谱曲线的公式，从而排除区域 $R_1(\mu)$ 内实部非负的任何谱，原点处的平移特征值除外。为此，我们利用指数三分解和 Lin方法求解特征值问题 (2.16)，沿着 $[0,L_\varepsilon]$ 的子区间构造可能的特征函数，然后将这些解拼接起来。在波列经过非双曲折叠点附近的区域，需要采用膨胀去奇异化方法来求解 (2.16)。这一过程得到一个隐式超越方程——主公式 (1.11)，另见命题 3.8——它将 λ 与 Floquet 参数 ρ 以及系统参数 (c,a,γ,ε) 联系起来。要描述主公式在球 $R_1(\mu)$ 内的行为，需要采用若干不同的标度区间；我们进一步将该区域划分为四个子区域，其中包含相关的谱信息。特别要强调的是，尽管命题 2.4 保证定理 1.1 中的相位波列不含不稳定谱

在区域 $R_1(\mu)$内，我们的分析表明，非线性项稍有变化的其他系统中也可能出现不稳定机制；见 §1.4。

最后，固定 ϱ 如命题 2.3 中所述，并固定 μ 如命题 2.4 中所述，我们得到关于区域 $R_2(\mu,\ \varpi,\ \varrho)$内谱的如下结论。

命题 *2.5*。设 $0<a<\frac{1}{2}$。固定 $0<\gamma<\gamma_*(a)$ 和 $c>c_*(a)$。固定 ϱ，如命题 *2.3* 中所述，并固定 μ，如命题 *2.4* 中所述。那么，只要 $0<\varepsilon\ll\varpi\ll 1$，*(1.7)* 关于 $\phi_\varepsilon(\xi)$ 的线性化 $\mathcal{L}_\varepsilon$ 在紧集 $R_2(\mu,\varpi,\varrho)$ 内不具有实部非负的谱。

命题 2.5 的证明将在 §5中给出。该证明依赖于将区域$R_2(\mu,\ \varpi,\ \varrho)$ 进一步分解为两部分：一部分满足 $|\Re(\lambda)|\le\varpi$，另一部分则是其补集。在第一部分中，采用 Riccati 变换，在特征值问题中实现慢动力学与快动力学的分离；而在补集区域中，则通过指数二分性实现这种分离。慢快分解表明，不可能出现实部非负的特征值，因为沿前沿 ϕ_{f} 和后沿 ϕ_{b} 的快约化特征值问题属于 Fisher–KPP 型，因此在 $R_2(\mu,\ \varpi,\ \varrho)$内没有特征值。

现在我们可以完成定理1.2的证明。

定理*1.2*的证明。 断言 (i)-(iii) 可由命题 2.3、2.4和 2.5立即得出。关于 (ii) 平移特征值代数单重性的断言 $\lambda=0$ 可由波列所对应的 (1.9) 中周期轨道的双曲性推出；参见 [22,§4。4]。

□

3 区域 $R_1(\mu)$

为证明命题 2.4，我们通过在平移区间 $\mathcal{I}=\left[\xi^0_{\varepsilon,\nu},\xi^L_{\varepsilon,\nu}\right]:=\left[\frac{\nu}{\varepsilon},L_\varepsilon+\frac{\nu}{\varepsilon}\right]$ 的四个子区间上构造解，直接求解特征值问题 (2.15)，并采用修正后的 Floquet 边界条件

$$\Psi\left(\xi^L_{\varepsilon,\nu}\right)=\mathrm{e}^{\left(\mathrm{i}\rho-\frac{\lambda}{c}\right)L_\varepsilon}\Psi\left(\xi^0_{\varepsilon,\nu}\right). \tag{3.1}$$

我们注意到，平移边值问题 (2.15)/(3.1) 的解与原问题 (2.15)-(2.16) 的解一一对应。事实上，若 $\Psi(\xi)$ 是 (2.15)/(3.1) 的一个解，则令 $\Psi(\xi)=\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}\rho-\lambda/c)L_\varepsilon}\Psi(L_\varepsilon+\xi)$，对于 $\xi\in[0,\xi^0_{\varepsilon,\nu}]$，即可得到 (2.15)-(2.16) 在 $[0,L_\varepsilon]$ 上的一个解。类似地，边值问题 (2.15)-(2.16) 的任意解都给出 (2.15)/(3.1) 的一个解。引入平移的原因是，事实证明，在波列经过左下方折叠点后，沿慢流形 $\mathcal{M}^{\mathrm{l}}_\varepsilon$ 施加 Floquet 边界条件最为方便。

我们回顾一下，波列周期由 $L_\varepsilon=L_{\mathrm{l},\varepsilon}+L_{\mathrm{r},\varepsilon}$ 给出，其中 $L_{\mathrm{l},\varepsilon}$ 表示沿左慢流形 $\mathcal{M}^{\mathrm{l}}_\varepsilon$ 所经历的时间，而 $L_{\mathrm{r},\varepsilon}$ 表示沿右慢流形 $\mathcal{M}^{\mathrm{r}}_\varepsilon$ 所经历的时间，因此 $\xi=L_{\mathrm{r},\varepsilon}$ 出现在后沿 ϕ_{b} 上，而 $\xi=L_{\mathrm{l},\varepsilon}+L_{\mathrm{r},\varepsilon}$ 与 $\xi=0$ 相对应，出现在前沿 ϕ_{f} 上。我们将区间 $\mathcal{I}$ 分成四个子区间

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\mathrm{l}}&=\left[\xi^{\mathrm{out},0}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu},\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right]:=\left[\tfrac{\nu}{\varepsilon},L_{\mathrm{l},\varepsilon}+\tfrac{1}{\nu}\right],\\
\mathcal{I}_{\mathrm{uf}}&=\left[\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu},\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right]:=\left[L_{\mathrm{l},\varepsilon}+\tfrac{1}{\nu},L_{\mathrm{l},\varepsilon}+\tfrac{\nu}{\varepsilon}\right],\\
\mathcal{I}_{\mathrm{r}}&=\left[\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu},\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right]:=\left[L_{\mathrm{l},\varepsilon}+\tfrac{\nu}{\varepsilon},L_{\mathrm{l},\varepsilon}+L_{\mathrm{r},\varepsilon}+\tfrac{1}{\nu}\right],\\
\mathcal{I}_{\mathrm{lf}}&=\left[\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu},\xi^{\mathrm{out},L}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right]:=\left[L_{\mathrm{l},\varepsilon}+L_{\mathrm{r},\varepsilon}+\tfrac{1}{\nu},L_{\mathrm{l},\varepsilon}+L_{\mathrm{r},\varepsilon}+\tfrac{\nu}{\varepsilon}\right],
\end{aligned}$$

对于 $0<\varepsilon\ll\nu\ll 1$，使得区间$\mathcal{I}_{\mathrm{l,\ r}}$ 描述远离非双曲折叠点处的波列解，而区间 $\mathcal{I}_{\mathrm{lf}}$ 和 $\mathcal{I}_{\mathrm{uf}}$ 分别描述经过下折点和上折叠点附近的情形；见图13。注意到

$$\xi^{\mathrm{out},L}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}=\xi^L_{\varepsilon,\nu}=\xi^0_{\varepsilon,\nu}+L_\varepsilon=\xi^{\mathrm{out},0}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}+L_\varepsilon.$$

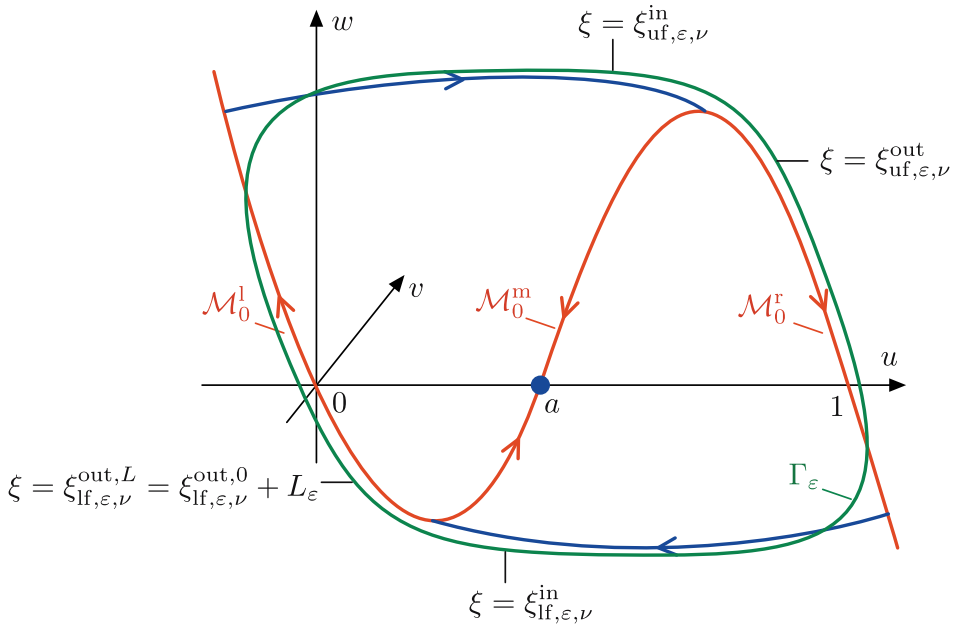


图13：图中展示了在区域 $R_1(\mu)$ 内使用 Lin方法的设置：沿四个区间$\mathcal{I}_{\mathrm{l}}, \mathcal{I}_{\mathrm{uf}}, \mathcal{I}_{\mathrm{r}}, \mathcal{I}_{\mathrm{lf}}$构造解，并在上折叠点附近的端点$\xi = \xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}$和$\xi = \xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf}},_{\varepsilon,\nu}$处进行匹配；在下折叠点附近的$\xi = \xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf}},_{\varepsilon,\nu}$处也进行匹配。最后，在下折叠点附近的 $\xi = \xi^{\mathrm{out}},^{L}_{\nu} = \xi^{\mathrm{out}}_{\varepsilon}\mathrm{lf}_{\varepsilon},0\,\mathrm{lf}$, $_{\nu} + L_\varepsilon$ 处施加 Floquet 边界条件 (3.1)。

求解特征值问题（2.15）相当于在这四个区间上分别求解边值问题，在各区间的端点处匹配所得的解，并应用 Floquet 条件（3.1）。消去所有自由变量后得到一个隐式方程，我们称之为“主公式”。该公式将 λ、ε和 Floquet 参数 ρ 联系起来，其解对应于区域 $\mathcal{L}_\varepsilon$ 中的线性化 R_1（μ）的谱。随后，我们将区域 R_1（μ）划分为若干较小的子区域，以获得原点处临界谱曲线的首阶表达式，并排除 R_1（μ）中位于右半平面部分存在谱的可能性。

我们从 §3.1-3.2 中关于沿快速跳跃以及慢流形附近存在指数三分解的一些预备结果开始 $\mathcal{M}^{\mathrm{l}}, _{\varepsilon}{}^{\mathrm{r}}$。这使我们能够在 §、$_{\mathrm{r}}$ （“折叠点之间”）上的区间3.3中求解由此得到的边值问题。随后，我们在 §、$_{\mathrm{uf}}$ （“折叠点附近”）上的区间3.4中处理边值问题；这些区间的分析需要运用爆破去奇异化技术，在研究存在性问题的同时跟踪线性化问题，相关技术细节见 §4。在 §3.5-3.6中，我们求解整体边值问题（2.15）以及 Floquet 条件（3.1），并推导临界谱曲线的表达式，分析其在原点附近的行为，从而在 §2.4中完成命题 3.7的证明。

3.1 约化变分问题

变分方程　　层问题（2.5）关于前沿和后沿解的变分方程为

$$\Psi_\xi = \widehat{A}_i(\xi)\Psi, \qquad \widehat{A}_i(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f'(u_i(\xi)) & -c \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

$\widehat{\ }$　　$\widehat{\ }$对于 $i = \mathrm{f},\ \mathrm{b}$。根据命题 2.1，系数矩阵 A_{f}（ξ）和 A_{b}（ξ）以指数速度收敛于渐近矩阵

$$\widehat{A}_{\mathrm{f},-\infty} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f'(u_2) & -c \end{pmatrix}, \qquad \widehat{A}_{\mathrm{b},-\infty} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f'(\bar{u}_2) & -c \end{pmatrix},$$

分别地，当 $\xi \to -\infty$ 时。此外， $A_{\mathrm{f}}(\xi)$ 和 $A_{\mathrm{b}}(\xi)$ 以代数速度收敛于渐近矩阵

$$\widehat{A}_{\infty} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

分别为 $\xi \to \infty$。双曲矩阵 $A_{\mathrm{f},-\infty}$ 和 $A_{\mathrm{b},-\infty}$ 各有一个正特征值和一个负特征值。因此，[76, 引理 3.4] 表明指数二分性的存在性。

命题 3.1. 存在 $K, \alpha > 0$，使得对于每个 $\nu > 0$，都存在常数 $C_\nu > 0$，使系统 (3.2) 在 $(-\infty, \frac{1}{\nu}]$ 上具有指数二分性，其常数为 $C_\nu, \alpha > 0$。相关投影 $P_i(\xi)$ 的秩为1，并满足

$$\ker(\widehat{P}_i(\xi)) = \mathrm{Sp}\left\{ \begin{pmatrix} u_i'(\xi) \\ v_i'(\xi) \end{pmatrix} \right\},$$

and

$$\left\| \widehat{P}_i(\xi) - \widehat{\mathcal{P}}_{i,-\infty} \right\| \le K\mathrm{e}^{\alpha\xi}, \qquad \xi \le 0,$$
$$\left\| \widehat{P}_i(\xi) - \widehat{\mathcal{P}}_{\infty} \right\| \le \frac{K}{1+\xi}, \qquad \xi \in \left[0, \frac{1}{\nu}\right],$$

其中，$\mathcal{P}_{i,-\infty}$ 是到 $A_{i,-\infty}$ 关于 $i = \mathrm{f},\mathrm{b}$ 的稳定特征子空间上的谱投影；而 $\mathcal{P}_{\infty}$ 是 A_{∞} 的稳定特征子空间上的谱投影。

证明。令 $i \in \{\mathrm{f}, \mathrm{b}\}$。首先，命题 2.1 给出常数 $C, \upsilon > 0$ 使得

$$\left\| \widehat{A}_i(-\xi) - \widehat{A}_{i,-\infty} \right\| \le C\mathrm{e}^{-\upsilon\xi}, \qquad \left\| \widehat{A}_i(\xi) - \widehat{A}_{\infty} \right\| \le \frac{C}{1+\xi}, \tag{3.3}$$

当 $\xi \ge 0$ 时。注意到 $f'(u_2)\ f'(\bar{u}_2) < 0$ 且 $c > c_*(a) > 0$，我们发现 $A_{i,-\infty}$ 是双曲的，具有一个正特征值和一个负特征值。因此，存在一个常数 $\kappa_0 \in (0, c)$，使得对任意 $\kappa \in [0, \kappa_0]$，常系数系统

$$\Psi_\xi = \left(\widehat{A}_{i,-\infty} + \kappa I_2 \right) \Psi, \tag{3.4}$$

在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性，且其秩一投影为 $\mathcal{P}_{i,-\infty}$。另一方面，由于 A_{∞} 的特征值为 0 和 $-c$，常系数系统

$$\Psi_\xi = \left(\widehat{A}_{\infty} + \kappa_0 I_2 \right) \Psi,$$

在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性，且其秩一投影为 $\mathcal{P}_{\infty}$。
因此，根据估计（3.3）和 [76, 引理 3。4] 加权变分问题

$$\Psi_\xi = \left(\widehat{A}_i(\xi) + \kappa_0 I_2 \right) \Psi, \tag{3.5}$$

在 $(-\infty, 0]$ 和 $[0, \infty)$ 上均具有指数二分性，其对应的秩一投影为 $P_{i,\pm}(\pm\xi)$；参见附录 B。由命题 2.1，方程 (3.5) 的解 $(u_i'(\xi)\ v_i'(\xi))^\top \mathrm{e}^{\kappa_0\xi}$ 在 $\xi \to -\infty$ 时指数衰减，在 $\xi \to \infty$ 时指数增长。因此，$(u_i'(0) v_i'(0))$ 必须张成 $P_{i,-}(0)$ 的核，且不能属于 $\widehat{P}_{i,+}(0)$ 的值域。由此得出 $\ker(\widehat{P}_{i,-}(0)) \cap \widehat{P}_{i,+}(0)[\mathbb{C}^2] = \{0\}$，根据 [76, 命题 2.1]，这意味着 (3.5) 在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性，其投影为 $P_i(\xi)$。结合

对 (3.3) 进行估计，结合 [76, 引理 3.4] 及其证明，可推知存在常数 $K, \alpha_0 > 0$ 使得

$$\left\| \widehat{P}_i(-\xi) - \widehat{\mathcal{P}}_{i,-\infty} \right\| \leq K \mathrm{e}^{-\alpha_0 \xi}, \qquad \left\| \widehat{P}_i(\xi) - \widehat{\mathcal{P}}_{\infty} \right\| \leq \frac{K}{1+\xi},$$

对于 $\xi \geq 0$。

另一方面，由估计 (3.3) 和 [76, 引理 3.4]，(3.4) 的指数二分性$\kappa = 0$ 可延续为无权变分问题 (3 2 $-\infty$ 0] .) 在 (上的指数二分性，其常数为 $C_1, \alpha_1 > 0$，相应的秩一投影为 Q_i,–(ξ)。根据命题 2.1，(3.2) 的指数衰减解 $(u_i'(\xi)\ v_i'(\xi))^\top$ 必定张成 $\widehat{Q}_i$,–(ξ) 的核，其中 $\xi \leq 0$。另一方面，Q_i,–(0) 的值域可以自由选为任意一个与 ker(Q_i, –(0)) 互补的子空间，参见 [81, 引理 1.2(ii)]。回想一下，ker($\widehat{P}_i$(0)) = ker($\widehat{Q}_i$,–(0))，我们选择 $\widehat{Q}_i$,–(0) $[\mathbb{C}^2] = \widehat{P}_i(0)[\mathbb{C}^2]$。由于无权问题 (3.2) 与加权问题 (3.5) 在子空间上的作用相同，因此对所有 $\xi \leq 0$，有 $P_i(\xi) = Q_i$,–(ξ)。根据 [27, 第 13] 页，(3.2) 在 $(-\infty, 0]$ 上的指数二分性可扩展为在 $(-\infty, \frac{1}{\nu}]$ 上的指数二分性，其常数为 $C_\nu, \alpha_1 > 0$，投影为$-\widehat{P}_i(\xi)$。取$\alpha = \min\{\alpha_0, \alpha_1\}$，结论即得。

□

我们考虑约化变分问题

$$\Psi_\xi = \widetilde{A}_i(\xi)\Psi, \qquad \widetilde{A}_i(\xi) = \begin{pmatrix} \widehat{A}_i(\xi) & B_0 \\ 0_{1\times 2} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

对于 $i = \mathrm{f}、\mathrm{b}$，该问题通过令 $\varepsilon = \lambda = 0$ 并在特征值问题（2.15）中将 $u_\varepsilon(\xi)$ 替换为 $u_i(\xi)$ 得到。

记 $\mathcal{T}_i(\xi, y)$ 为系统（3.2）的演化，则上三角系统（3.6）的演化 $\mathcal{T}_i$ (ξ, y) 可表示为

$$\widetilde{\mathcal{T}}_i(\xi, y) = \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{T}}_i(\xi, y) & \displaystyle\int_y^\xi \widehat{\mathcal{T}}_i(\xi, z) B_0 \mathrm{d}z \\ 0_{1\times 2} & 1 \end{pmatrix}.$$

因此，命题 3.1中建立的系统（3.2）的指数二分性，直接推出系统（3.6）具有指数三分性。

命题 3.2。存在 $\widetilde{\alpha} > 0$ 使得对每个 $\nu > 0$，都存在一个常数 $C_\nu > 0$，使系统 (3.6) 在区间 $(-\infty, \frac{1}{\nu}]$ 上具有指数三分性，其常数为 $\widetilde{C}_\nu, \widetilde{\alpha} > 0$。相关投影为

$$\widetilde{P}^{\mathrm{s}}_{i,\nu}(\xi) = \begin{pmatrix} \widehat{P}_i(\xi) & -\displaystyle\int_{-\infty}^\xi \widehat{\mathcal{T}}^{\mathrm{s}}_i(\xi, y) B_0 \mathrm{d}y \\ 0_{1\times 2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{P}^{\mathrm{u}}_{i,\nu}(\xi) = \begin{pmatrix} I_2 - \widehat{P}_i(\xi) & -\displaystyle\int_{\frac{1}{\nu}}^\xi \widehat{\mathcal{T}}^{\mathrm{u}}_i(\xi, y) B_0 \mathrm{d}y \\ 0_{1\times 2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{P}^{\mathrm{c}}_{i,\nu}(\xi) = I_3 - \widetilde{P}^{\mathrm{s}}_{i,\nu}(\xi) - \widetilde{P}^{\mathrm{u}}_{i,\nu}(\xi),$$

其中 $\widehat{\mathcal{T}}^j_i(\xi, z)$、$j = u$、$s$、$i = \mathrm{f}、\mathrm{b}$ 表示在命题 *3.1*所建立的指数二分性下，（3.2）的（不）稳定演化。投影的秩为 1，并满足

$$\left\| \widetilde{P}^j_{i,\nu}(\xi) - \widetilde{\mathcal{P}}^j_{i,-\infty} \right\| \leq \widetilde{C}_\nu \mathrm{e}^{\widetilde{\alpha}\xi}, \tag{3.7}$$

对于 $\xi \leq 0$，$i = \mathrm{f}、\mathrm{b}$ 和 $j = \mathrm{s}、\mathrm{u}、\mathrm{c}$，其中 $\mathcal{P}^{\mathrm{s}}_{i,-\infty}$、$\mathcal{P}^{\mathrm{u}}_{i,-\infty}$ 和 $\mathcal{P}^{\mathrm{c}}_{i,-\infty}$ 分别是渐近矩阵在其稳定、不稳定和中心特征子空间上的谱投影

$$\widetilde{A}_{i,-\infty} = \begin{pmatrix} \widehat{A}_{i,-\infty} & B_0 \\ 0_{1\times 2} & 0 \end{pmatrix},$$

分别投影到稳定、不稳定和中心特征子空间上。最后，我们有

$$\widetilde{P}^{\mathrm{u}}_{i,\nu}(\xi)[\mathbb{C}^3] = \mathrm{Sp}\left\{\Phi_i(\xi)\right\}, \qquad \widetilde{P}^{\mathrm{c}}_{i,\nu}(\xi)[\mathbb{C}^3] = \mathrm{Sp}\left\{\Psi_{i,\nu}(\xi)\right\}, \tag{3.8}$$

其中我们记

$$\Phi_i(\xi) = \begin{pmatrix} u_i'(\xi) \\ v_i'(\xi) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \Psi_{i,\nu}(\xi) = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_{\frac{1}{\nu}}^{\xi} \widehat{\mathcal{T}}_i^{\mathrm{u}}(\xi,y)B_0\mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{\xi} \widehat{\mathcal{T}}_i^{\mathrm{s}}(\xi,y)B_0\mathrm{d}y \\ 1 \end{pmatrix},$$

对于 $\xi \in (-\infty, \frac{1}{\nu}]$ 和 $i = \mathrm{f}$、b。

~ ~ ~证明。令 $i \in \{\mathrm{f}、\mathrm{b}\}$。利用命题 3.1，容易验证 $P_{\mathrm{s}i,\ \nu}(\xi)$、$P_{\mathrm{u}i,\ \nu}(\xi)$ 和 $P_{\mathrm{c}i,\ \nu}(\xi)$ 是满足（3.8）的投影。我们计算

$$\widetilde{P}^{\mathrm{s}}_{i,\nu}(\xi)\widetilde{\mathcal{T}}_i(\xi,y) = \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{T}}_i^{\mathrm{s}}(\xi,y) & -\displaystyle\int_{-\infty}^{y} \widehat{\mathcal{T}}_i^{\mathrm{s}}(\xi,z)B_0\mathrm{d}z \\ 0_{1\times 2} & 0 \end{pmatrix} = \widetilde{\mathcal{T}}_i(\xi,y)\widetilde{P}^{\mathrm{s}}_{i,\nu}(y),$$

$$\widetilde{P}^{\mathrm{u}}_{i,\nu}(\xi)\widetilde{\mathcal{T}}_i(\xi,y) = \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{T}}_i^{\mathrm{u}}(\xi,y) & -\displaystyle\int_{\frac{1}{\nu}}^{y} \widehat{\mathcal{T}}_i^{\mathrm{u}}(\xi,z)B_0\mathrm{d}z \\ 0_{1\times 2} & 0 \end{pmatrix} = \widetilde{\mathcal{T}}_i(\xi,y)\widetilde{P}^{\mathrm{u}}_{i,\nu}(y),$$

$$\widetilde{P}^{\mathrm{c}}_{i,\nu}(\xi)\widetilde{\mathcal{T}}_i(\xi,y) = \begin{pmatrix} 0_{2\times 2} & \displaystyle\int_{-\infty}^{\xi} \widehat{\mathcal{T}}_i^{\mathrm{s}}(\xi,z)B_0\mathrm{d}z + \int_{\frac{1}{\nu}}^{\xi} \widehat{\mathcal{T}}_i^{\mathrm{u}}(\xi,z)B_0\mathrm{d}z \\ 0_{1\times 2} & 1 \end{pmatrix} = \widetilde{\mathcal{T}}_i(\xi,y)\widetilde{P}^{\mathrm{c}}_{i,\nu}(y).$$

借助命题 3.1 我们得到估计

$$\begin{aligned} \left\| \int_{-\infty}^{y} \widehat{\mathcal{T}}_i^{\mathrm{s}}(\xi,z)B_0\mathrm{d}z \right\| &\le C_\nu \int_{-\infty}^{y} \mathrm{e}^{-\alpha(\xi-z)}\mathrm{d}z = \frac{C_\nu}{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha(\xi-y)}, && y \le \xi \le \frac{1}{\nu}, \\ \left\| \int_{\frac{1}{\nu}}^{y} \widehat{\mathcal{T}}_i^{\mathrm{u}}(\xi,z)B_0\mathrm{d}z \right\| &\le C_\nu \int_{y}^{\infty} \mathrm{e}^{\alpha(\xi-z)}\mathrm{d}z = \frac{C_\nu}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha(\xi-y)}, && \xi \le y \le \frac{1}{\nu}. \end{aligned}$$

因此，系统（3.6）在 $(-\infty, \frac{1}{\nu}]$ 上具有指数三分性，其常数为 $\frac{2C_\nu}{\alpha}, \alpha > 0$，投影为 $\widetilde{P}^{j}_{i\ ,\nu}(\xi)$，$j = \mathrm{s}$、$\mathrm{u}$、$\mathrm{c}$。

显然，加权系统

$$\Psi_\xi = \left(\widetilde{A}_i(\xi) + \frac{\alpha}{2}I_3\right)\Psi,$$

在 $(-\infty, \frac{1}{\nu}]$ 上具有指数二分性，其常数为 $\frac{2C_\nu}{\alpha}, \frac{\alpha}{2} > 0$，投影为 $\widetilde{P}_{\mathrm{s}i,\nu}(\xi)$。类似地，加权系统

$$\Psi_\xi = \left(\widetilde{A}_i(\xi) - \frac{\alpha}{2}I_3\right)\Psi,$$

在 $(-\infty, \frac{1}{\nu}]$ 上具有指数二分性，其常数为 $\frac{2C_\nu}{\alpha}, \frac{\alpha}{2} > 0$，投影为 $I_3 - \widetilde{P}_{\mathrm{u}i,\nu}(\xi)$。因此，通过~结合估计（3.3）与 [76, 引理 3.4] 及其证明，我们推知存在常数 $M_\nu, \alpha_0 > 0$使得

$$\left\| \widetilde{P}^{j}_{i,\nu}(\xi) - \widetilde{\mathcal{P}}^{j}_{i,-\infty} \right\| \le \widetilde{M}_\nu \mathrm{e}^{\alpha_0\xi},$$

对于 $\xi \le 0$和 $j = s,\ c$。因此，取 $\widetilde{C}_\nu = \max\{\widetilde{M}_\nu, \frac{2C_\nu}{\alpha}\}$和 $\widetilde{\alpha} = \min\{\alpha,\ \alpha_0\}$即可得到所需结果。 □

3.2 沿临界流形左、右分支的特征值问题

我们针对临界流形的左分支和右分支上的特征值问题（2.15）建立指数三分解；见附录 B。首先，我们证明快速 (2×2)-子系统

$$\Psi_\xi = A_{\mathrm{f}}(\xi;\varepsilon,\lambda)\Psi \tag{3.9}$$

（2.15）利用其系数矩阵缓慢变化且逐点双曲这一性质，可知该系统沿这些分支具有指数二分性。因此，我们可以借助 Riccati 变换 [23, 31], 对完整特征值问题（2.15）进行对角化，从而得到所需的指数三分性。借助 Riccati 变换进行显式对角化，使我们能够确定该三分性的一维中心方向上的标量动力学的主阶行为。总之，我们得到以下结果。

命题 *3.3.* 若 $0<\varepsilon,|\lambda|\ll\nu\ll 1$，则系统 *(2.15)* 在 $I_{\mathrm{l}}=[\frac{\nu}{\varepsilon},L_{\mathrm{l},\varepsilon}+\log(\varepsilon)_\nu]$ 上以及在 $I_{\mathrm{r}}=[L_{\mathrm{l},\varepsilon}+\frac{\nu}{\varepsilon},L_{\mathrm{l},\varepsilon}+L_{\mathrm{r},\varepsilon}+\log(\varepsilon)_\nu^{-}]$ 上具有指数三分性，其常数 $C_\nu,\vartheta_\nu>0$ 与 λ 和 ε 无关，投影为 $P^j l_{\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi)$ 和 $P^j r_{\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi)$，分别对应 $j=s$、u、c。投影的秩为 *1*，且满足

$$\left\|P^j_{i,\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi)-\mathcal{P}^j_{\varepsilon,\lambda}(\xi)\right\|\le C_\nu\varepsilon^{\frac{2}{3}}, \tag{3.10}$$

对于 $\xi\in I_i$，$i=l,r$ 和 $j=s,u,c$，其中 $\mathcal{P}^{\mathrm{s}}_{\varepsilon,\lambda}(\xi)$ $\mathcal{P}^{\mathrm{u}}_{\varepsilon,\lambda}(\xi)$ 和 $\mathcal{P}^{\mathrm{c}}_{\varepsilon,\lambda}(\xi)$ 分别是将 *(2.15)* 的系数矩阵 $A(\xi;\varepsilon,\lambda)$ 投影到其稳定、不稳定和中心特征子空间上的谱投影。最后，指数三分性下的中心演化 $\mathcal{T}c_{i,\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi,\zeta)$，$i=l,r$ 满足

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle \mathbf{e}_3,\mathcal{T}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{l},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\frac{\nu}{\varepsilon},L_{\mathrm{l},\varepsilon}+\frac{\log(\varepsilon)}{\nu}\right)\mathbf{e}_i\right\rangle\right| &\le C_\nu\varepsilon, \qquad i=1,2,\\
\left|\left\langle \mathbf{e}_3,\mathcal{T}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{l},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\frac{\nu}{\varepsilon},L_{\mathrm{l},\varepsilon}+\frac{\log(\varepsilon)}{\nu}\right)\mathbf{e}_3\right\rangle-\frac{u_{\mathrm{l}}(\nu)-\gamma f(u_{\mathrm{l}}(\nu))-a}{\bar u_2-\gamma f(\bar u_2)-a}\right| &\le C_\nu\left(|\lambda|+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\right),
\end{aligned} \tag{3.11}$$

and

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle \mathbf{e}_3,\mathcal{T}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(L_{\mathrm{l},\varepsilon}+\frac{\nu}{\varepsilon},L_{\mathrm{l},\varepsilon}+L_{\mathrm{r},\varepsilon}+\frac{\log(\varepsilon)}{\nu}\right)\mathbf{e}_i\right\rangle\right| &\le C_\nu\varepsilon, \qquad i=1,2\\
\left|\left\langle \mathbf{e}_3,\mathcal{T}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(L_{\mathrm{l},\varepsilon}+\frac{\nu}{\varepsilon},L_{\mathrm{l},\varepsilon}+L_{\mathrm{r},\varepsilon}+\frac{\log(\varepsilon)}{\nu}\right)\mathbf{e}_3\right\rangle-\frac{u_{\mathrm{r}}(\nu)-\gamma f(u_{\mathrm{r}}(\nu))-a}{u_2-\gamma f(u_2)-a}\right| &\le C_\nu\left(|\lambda|+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\right),
\end{aligned}$$

其中 $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ 表示 $\mathbb{C}^3$ 的标准单位基。

证明。 在此证明中， $C_\nu\ge 1$ 表示一个与 ε、 λ 和 ξ 无关的常数，必要时可取更大。

我们仅证明 $\xi\in I_{\mathrm{l}}$ 的情形，即沿临界流形的左分支。对于 $\xi\in I_{\mathrm{r}}$ 的论证，即沿临界流形的右分支的论证，类似。我们的目标是通过 Riccati 变换对分块系统（2.15）进行对角化，参见 [31, 定理 5。1]。为此，我们利用粗糙性技巧，为快子系统（3.9）建立指数二分性。根据命题 2.2 ，有

$$\|A_{\mathrm{f}}(\xi;\varepsilon,\lambda)-A_{\mathrm{l}}(\varepsilon\xi)\|\le C_\nu\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}}+|\lambda|\right), \tag{3.12}$$

对于 $\xi\in I_{\mathrm{l}}$，其中我们记

$$A_{\mathrm{l}}(y)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -f'(u_{\mathrm{l}}(y)) & -c\end{pmatrix}.$$

对于每个 $y\in[\nu,L_{\mathrm{l}}+1]$，均有 $f'(u_{\mathrm{l}}(y))\le -1/C_\nu$。因此，存在一个常数 $\vartheta_\nu>0$，使矩阵 $A_{\mathrm{l}}(y)$ 是双曲的，具有一个正特征值和一个负特征值，二者与

虚轴的距离，对于每个 $y \in [\nu, L_1+1]$。因此，若 $0<\varepsilon,\ |\lambda| \ll \nu \ll 1$，估计式（3.12）意味着$A_{\mathrm{f}}(\xi;\ \varepsilon,\ \lambda)$也是双曲的，具有一个正特征值和一个负特征值，二者与虚轴的距离为 $\geq 4\vartheta_\nu$，对于每个 $\xi \in I_{\mathrm{l}}$。

根据 [27,命题 6.1] ，慢变系统

$$\Psi_\xi = A_{\mathrm{l}}(\varepsilon\xi)\Psi,$$

在 $[\frac{\nu}{\varepsilon}, \frac{L_1+1}{\varepsilon}]$上具有指数二分性，且其 ~~$\varepsilon$~~无关常数 $C_\nu,\ 4\vartheta_\nu > 0$。回顾估计式（2.11）和（3.12），可知粗糙性结果（参见 [27, 命题 5.1], ）保证系统（3.9）在 I_{l}上具有指数二分性，且其 λ和 ε无关常数 $C_\nu,\ 3\vartheta_\nu > 0$，前提是$0<\varepsilon,\ |\lambda| \ll \nu \ll 1$。

根据 [31, 定理 5.1] ，存在连续矩阵函数$U_{\varepsilon,\ \lambda,\ \nu}\colon\ I_{\mathrm{l}} \to \mathbb{C}^{2\times 1}$ 以及 $S_{\varepsilon,\ \lambda,\ \nu}\colon\ I_{\mathrm{l}} \to \mathbb{C}^{1\times 2}$使得，若 $\Psi(\xi)$是方程（2.15）的一个解，则

$$\Phi(\xi) = H_{\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi)\Psi(\xi), \qquad H_{\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi) = \begin{pmatrix} I_2 - \varepsilon U_{\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi)S_{\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi) & U_{\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi) \\ -\varepsilon S_{\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi) & 1 \end{pmatrix},$$

满足块对角系统

$$\Phi_\xi = \begin{pmatrix} A_{\mathrm{f}}(\xi;\varepsilon,\lambda) - \varepsilon U_{\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi)B_1 & 0_{2\times 1} \\ 0_{1\times 2} & \varepsilon A_s + \varepsilon B_1 U_{\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi) \end{pmatrix}\Phi,$$

对于 $\xi \in I_{\mathrm{l}}$。此外，$U_{\varepsilon\ ,\lambda,\nu}$ 和$S_{\varepsilon,\ \lambda,\ \nu}$均由与 λ和 ε无关的常数所界。因此，演 n

$$\mathcal{T}_{\mathrm{s},\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi,z) = \exp\left(\varepsilon\left(\frac{\gamma}{c}(\xi-z) + \int_z^\xi B_1 U_{\varepsilon,\lambda,\nu}(y)\mathrm{d}y\right)\right), \tag{3.13}$$

标量慢子系统的

$$\Psi_\xi = \varepsilon\left(A_s + B_1 U_{\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi)\right)\Psi,$$

在 $I_{\mathrm{l}} \times I_{\mathrm{l}}$ 上由一个与 ε和 λ无关的常数所界。此外，根据粗糙性， [27, 定理 5。1], (3.9）的指数二分性传递为快子系统的指数二分性

$$\Psi_\xi = \left(A_{\mathrm{f}}(\xi;\varepsilon,\lambda) - \varepsilon U_{\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi)B_0\right)\Psi,$$

在 I_{l}上，由与 λ和 ε无关的常数 $C_\nu,\ 2\vartheta_\nu > 0$以及投影$Q_{\mathrm{l},\ \varepsilon,\ \lambda,\ \nu}(\xi)$所界。由此可得

$$\begin{aligned}
P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{l},\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi) &= H_{\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi)\begin{pmatrix} Q_{\mathrm{l},\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi) & 0_{2\times 1} \\ 0_{1\times 2} & 0 \end{pmatrix} H_{\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi)^{-1}, \\
P^{\mathrm{u}}_{\mathrm{l},\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi) &= H_{\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi)\begin{pmatrix} I_2 - Q_{\mathrm{l},\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi) & 0_{2\times 1} \\ 0_{1\times 2} & 0 \end{pmatrix} H_{\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi)^{-1}, \\
P^{\mathrm{c}}_{\mathrm{l},\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi) &= H_{\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi)\begin{pmatrix} 0_{2\times 2} & 0_{2\times 1} \\ 0_{1\times 2} & 1 \end{pmatrix} H_{\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi)^{-1},
\end{aligned}$$

是特征值问题（2.15）在 I_{l} 上的指数三分性的投影，其对应的常数 $C_\nu,\ 2\vartheta_\nu > 0$与 λ和 ε无关；这里我们利用矩阵函数$H_{\varepsilon,\ \lambda,\ \nu}(\xi)$及其逆函数

$$H_{\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi)^{-1} = \begin{pmatrix} I_2 & -U_{\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi) \\ \varepsilon S_{\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi) & 1 - \varepsilon S_{\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi)U_{\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi) \end{pmatrix},$$

在 I_{l}上由与 λ和 ε无关的常数界定。

为证明估计（3.10），我们考虑正权特征值问题

$$\Psi_\xi = (A(\xi;\varepsilon,\lambda) + \vartheta_\nu I_3)\,\Psi. \tag{3.14}$$

显然，(3.14) 在 I_1 上具有指数二分性，其常数 λ 和 ε 与 C_ν 无关，$\vartheta_\nu > 0$ 且投影为 $P_{\mathrm{sl}\,\varepsilon,\,\lambda,\,\nu}(\xi)$。首先注意，系数矩阵 $A(\xi;\ \varepsilon,\ \lambda) + \vartheta_\nu I_3$ 是双曲的，有两个正特征值和一个负特征值；对每个 $\geq \vartheta_\nu$，这些特征值与虚轴的距离均为 $\xi \in I_1$。其次，命题2.2 给出

$$\|\partial_\xi A(\xi;\varepsilon,\lambda)\| \leq C_\nu \varepsilon^{\frac{2}{3}},$$

对于 $\xi \in I_1$。因此，逐字沿用 [30, 命题 A.3] 的证明，可得到 3.10) 中的估计 $j = s$。类似地，考虑负权特征值问题（权重为 $-\vartheta_\nu$) 中的估计3.10)，可得 $j = u$。最后，利用三角不等式，便可由 3.10) 中关于 $j = c$ 的估计，以及关于 $j = s$ 和 $j = u$ 的估计，直接得到

所有这些 剩下的就是证明（3.11）。首先，我们注意到

$$\begin{pmatrix} A_1(y) & B_0 \\ 0_{1\times 2} & 0 \end{pmatrix}$$

到其中心特征子空间的谱投影为

$$\mathcal{Q}^{\mathrm{c}}(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (f'(u_1(y)))^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

对于 $y \in [\nu, L_1 + 1]$。因此，根据估计（3.12），我们有

$$\left\|\mathcal{P}^{\mathrm{c}}_{\varepsilon,\lambda}(\xi) - \mathcal{Q}^{\mathrm{c}}(\varepsilon\xi)\right\| \leq C_\nu \left(\varepsilon^{\frac{2}{3}} + |\lambda|\right), \tag{3.15}$$

对于 $\xi \in I_1$。接下来，我们计算

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{\mathrm{c}}_{1,\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi,z) &= H_{\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi) \begin{pmatrix} 0_{2\times 2} & 0_{2\times 1} \\ 0_{1\times 2} & \mathcal{T}_{\mathrm{s},\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi,z) \end{pmatrix} H_{\varepsilon,\lambda,\nu}(z)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon U_{\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi)\mathcal{T}_{\mathrm{s},\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi,z)S_{\varepsilon,\lambda,\nu}(z) & U_{\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi)\mathcal{T}_{\mathrm{s},\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi,z)\left(1 - \varepsilon S_{\varepsilon,\lambda,\nu}(z)U_{\varepsilon,\lambda,\nu}(z)\right) \\ \varepsilon\mathcal{T}_{\mathrm{s},\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi,z)S_{\varepsilon,\lambda,\nu}(z) & \mathcal{T}_{\mathrm{s},\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi,z)\left(1 - \varepsilon S_{\varepsilon,\lambda,\nu}(z)U_{\varepsilon,\lambda,\nu}(z)\right) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

对于 $\xi, z \in I_1$。首先，回想一下，$S_{\varepsilon,\lambda,\nu}$, $U_{\varepsilon,\lambda,\nu}$ 和 $\mathcal{T}_{\mathrm{s},\varepsilon,\lambda,\nu}$ 分别在 I_1、I_1 和 $I_1 \times I_1$,上有界，且其界与 ε 和 λ 无关，由（3.16）可直接得到（3.11）中的第一个估计。其次，在（3.16）中令 $z = \xi$，注意到 $\mathcal{T}_{\mathrm{cl}\,\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi,\xi) = P_{\mathrm{cl}\,\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi)$，并应用估计（3.10）和（3.15），可得

$$\left\|U_{\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi) - \begin{pmatrix} (f'(u_1(\varepsilon\xi)))^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}\right\| \leq C_\nu \left(\varepsilon^{\frac{2}{3}} + |\lambda|\right), \tag{3.17}$$

对于 $\xi \in I_1$，这里回顾一下：$S_{\varepsilon,\ \lambda,\ \nu}$ 以及 $U_{\varepsilon,\ \lambda,\ \nu}$ 在 I_1 上有界，其界由 ε-和 λ-无关的常数给出。因此，借助（2.11）、（3.13）和（3.17），我们对其进行近似

$$\left|\mathcal{T}_{\mathrm{s},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\frac{\nu}{\varepsilon}, L_{1,\varepsilon} + \frac{\log(\varepsilon)}{\nu}\right) - \exp\left(-\frac{\gamma}{c}(L_1 - \nu) + \int_\nu^{L_1} \frac{1}{cf'(u_1(y))}\mathrm{d}y\right)\right| \leq C_\nu \left(|\lambda| + \varepsilon^{\frac{1}{3}}\right), \tag{3.18}$$

已知 $0 < \varepsilon,\ |\lambda| \ll \nu \ll 1$。接下来，我们使用（2.3）并回顾 $u_1(L_1) = \bar{u}_2$ 和 $u_1(0) = u_1$ 来计算

$$\begin{aligned} -\frac{\gamma}{c}(L_1 - \nu) + \int_\nu^{L_1} \frac{1}{cf'(u_1(y))}\mathrm{d}y &= -\int_\nu^{L_1} \frac{\gamma f'(u_1(y))u_1'(y)}{\gamma f(u_1(y)) + a - u_1(y)}\mathrm{d}y + \int_\nu^{L_1} \frac{u_1'(y)}{\gamma f(u_1(y)) + a - u_1(y)}\mathrm{d}y \\ &= -\int_{u_1(\nu)}^{u_1(L_1)} \frac{\gamma f'(u) - 1}{\gamma f(u) + a - u}\mathrm{d}u = \log\left(\frac{u_1(\nu) - \gamma f(u_1(\nu)) - a}{\bar{u}_2 - \gamma f(\bar{u}_2) - a}\right), \end{aligned} \tag{3.19}$$

已知 $0<\nu\ll 1$，注意到 $u_1-\gamma f(u_1)-a, u_2-\gamma f(u_2)-a\neq 0$ 与 $0<\gamma<\gamma_*(a)$ 相同。最后，结合（3.16）、（3.18）和（3.19），我们得到（3.11）中的第二个不等式。回顾一下，$S_{\varepsilon,\lambda,\nu}$, $U_{\varepsilon,\lambda,\nu}$ 和 $\mathcal{T}_{\mathrm{s},\varepsilon,\lambda,\nu}$ 分别在 I_{l}、I_{l} 和 $I_{\mathrm{l}}\times I_{\mathrm{l}}$, 上有界，且其界为与 ε 和 λ 无关的常数。 □

3.3 求解远离折叠点处的特征值问题

这里，我们在区间上构造特征值问题 (2.15) 的一个解 s

$$\mathcal{I}_{\mathrm{r}}=\left[\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu},\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right]=\left[L_{\mathrm{l},\varepsilon}+\frac{\nu}{\varepsilon},L_{\mathrm{l},\varepsilon}+L_{\mathrm{r},\varepsilon}+\frac{1}{\nu}\right]=\left[L_{\mathrm{l},\varepsilon}+\frac{\nu}{\varepsilon},L_{\varepsilon}+\frac{1}{\nu}\right],$$
$$\mathcal{I}_{\mathrm{l}}=\left[\xi^{\mathrm{out},0}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu},\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right]=\left[\frac{\nu}{\varepsilon},L_{\mathrm{l},\varepsilon}+\frac{1}{\nu}\right]$$

，并借助 Lin方法远离折叠点进行构造。我们利用命题 3.2 和 3.3中建立的指数三分解，分别表示沿前沿或后沿以及沿临界流形右分支或左分支的 (2.15) 的解。关于沿前沿和临界流形右分支的特征值问题，结果如下。

命题 3.4. 给定 $0<\varepsilon,|\lambda|\ll\nu\ll 1$，对每个

$$\gamma_{\mathrm{r}}\in P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)[\mathbb{C}^3],\quad \textit{and}\quad \alpha_{\mathrm{f}},\beta_{\mathrm{f}}\in\mathbb{C},$$

存在唯一解 $\psi\colon \mathcal{I}_{\mathrm{r}}\to\mathbb{C}^3$ 满足特征值问题 (2.15)，并满足边界条件

$$P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)=\gamma_{\mathrm{r}},\tag{3.20}$$
$$\widetilde{P}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{f},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)=\beta_{\mathrm{f}}\Psi_{\mathrm{f},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right),\qquad \widetilde{P}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{f},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)=\alpha_{\mathrm{f}}\Phi_{\mathrm{f}}\left(\tfrac{1}{\nu}\right).\tag{3.21}$$

此外，存在与 ε 和 λ 无关的常数 $C_\nu,\vartheta_\nu>0$，使得解 ψ 满足以下估计

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{P}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{f},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\right\|&\le C_\nu\left(\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}}+|\lambda|\right)\left(|\alpha_{\mathrm{f}}|+|\beta_{\mathrm{f}}|\right)+\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}\|\gamma_{\mathrm{r}}\|\right),\\
\left\|P^{\mathrm{u}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\right\|&\le C_\nu\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}\left(|\alpha_{\mathrm{f}}|+|\beta_{\mathrm{f}}|+\|\gamma_{\mathrm{r}}\|\right),\\
\left\|P^{\mathrm{c}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\right\|&\le C_\nu\left(|\beta_{\mathrm{f}}|+\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}}+|\lambda|\right)|\alpha_{\mathrm{f}}|+\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}\|\gamma_{\mathrm{r}}\|\right),
\end{aligned}\tag{3.22}$$

and

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle\mathbf{e}_3,P^{\mathrm{c}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\right\rangle-\frac{u_{\mathrm{r}}(\nu)-\gamma f(u_{\mathrm{r}}(\nu))-a}{u_2-\gamma f(u_2)-a}\left(\beta_{\mathrm{f}}+\frac{\varepsilon}{c}\left(u_{\mathrm{f}}(\tfrac{1}{\nu})-u_2\right)\alpha_{\mathrm{f}}\right)\right|\\
&\quad\le C_\nu\left(\left(\varepsilon^{\frac{1}{3}}+|\lambda|\right)\left(|\beta_{\mathrm{f}}|+\varepsilon|\alpha_{\mathrm{f}}|\right)+\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}\|\gamma_{\mathrm{r}}\|\right),
\end{aligned}\tag{3.23}$$

其中 $\mathbf{e}_3=(0,0,1)^\top$ 是第三标准基向量。

证明。 在此证明中，$C_\nu\ge 1$ 表示一个与 ε、λ 和 ξ 无关的常数，必要时可取更大值。此外，我们引入简写记号 $l_{\varepsilon,\nu}=\log(\varepsilon)\,\nu$。

我们希望通过将特征值问题（2.15）视为约化变分问题（3.6）的扰动，并使用常数变易公式，来表示 ψ 在 $[L_\varepsilon+l_{\varepsilon,\nu},L_\varepsilon+\frac{1}{\nu}]=[L_\varepsilon+l_{\varepsilon,\nu},\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}]$ 上的解。因此，我们确定扰动矩阵

$$A(\xi;\varepsilon,\lambda)-\widetilde{A}_{\mathrm{f}}(\xi-L_\varepsilon)=\varepsilon\mathcal{B}_0+B_{\mathrm{f}}(\xi;\varepsilon,\lambda),$$

其中我们记

$$\mathcal{B}_0 = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \qquad B_{\mathrm{f}}(\xi;\varepsilon,\lambda) = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{c} & 0 & 0 \\ \lambda - f'(u_\varepsilon(\xi)) + f'(u_{\mathrm{f}}(\xi - L_\varepsilon)) & -\frac{\lambda}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

根据命题 3.2任意解 ψ对 (2.15)，若满足初始条件 (3.21)，则对 $\xi \in [L_\varepsilon + l_{\varepsilon,\nu}, \xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}]$必须满足常数变易公式

$$\begin{aligned} \psi(\xi) = {} & \alpha_{\mathrm{f}}\Phi_{\mathrm{f}}\left(\xi - L_\varepsilon\right) + \beta_{\mathrm{f}}\Psi_{\mathrm{f},\nu}(\xi - L_\varepsilon) + \widetilde{\mathcal{T}}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{f},\nu}(\xi - L_\varepsilon, l_{\varepsilon,\nu})\gamma_{\mathrm{f}} \\ & + \int_{\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}}^{\xi} \widetilde{\mathcal{T}}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{f},\nu}(\xi - L_\varepsilon, y - L_\varepsilon)\left(\varepsilon\mathcal{B}_0 + B_{\mathrm{f}}(y;\varepsilon,\lambda)\right)\psi(y)\mathrm{d}y \\ & + \int_{L_\varepsilon + l_{\varepsilon,\nu}}^{\xi} \widetilde{\mathcal{T}}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{f},\nu}(\xi - L_\varepsilon, y - L_\varepsilon)\left(\varepsilon\mathcal{B}_0 + B_{\mathrm{f}}(y;\varepsilon,\lambda)\right)\psi(y)\mathrm{d}y \\ & + \varepsilon\int_{\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}}^{\xi} \widetilde{\mathcal{T}}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{f},\nu}(\xi - L_\varepsilon, y - L_\varepsilon)\mathcal{B}_0\psi(y)\mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{3.24}$$

对于某个 $\gamma_{\mathrm{f}} \in \widetilde{P}_{\mathrm{sf}\,\nu}(l_{\varepsilon,\ \nu})[\mathbb{C}^3]$，其中我们利用了 $\widetilde{P}_{\mathrm{cf}\,\nu}(y - L_\varepsilon)B_{\mathrm{f}}(y;\ \varepsilon,\ \lambda) = 0$对任意 $y \in [L_\varepsilon + l_{\varepsilon,\nu}, \xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}]$成立。注意，命题 2.2 给出

$$\|B_{\mathrm{f}}(\xi;\varepsilon,\lambda)\| \le C_\nu\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}} + |\lambda|\right), \tag{3.25}$$

对于 $\xi \in [L_\varepsilon + l_{\varepsilon,\nu}, \xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}]$。因此，借助估计 (3.24) 和命题 3.25，对 (3.2) 右端进行估计后，我们发现解 ψ关于 α_{f}呈线性，β_{f}并且 γ_{f}，只要 $0 < \varepsilon,\ |\lambda| \ll \nu \ll 1$，它就满足以下估计

$$\sup_{\xi\in\left[L_\varepsilon + l_{\varepsilon,\nu}, \xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right]} \|\psi(\xi)\| \le C_\nu\left(|\alpha_{\mathrm{f}}| + |\beta_{\mathrm{f}}| + \|\gamma_{\mathrm{f}}\|\right), \tag{3.26}$$

and

$$\sup_{\xi\in\left[L_\varepsilon + l_{\varepsilon,\nu}, \xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right]} \|\psi(\xi) - \alpha_{\mathrm{f}}\Phi_{\mathrm{f}}(\xi - L_\varepsilon)\| \le C_\nu\left(|\beta_{\mathrm{f}}| + \|\gamma_{\mathrm{f}}\| + \left(\varepsilon^{\frac{2}{3}} + |\lambda|\right)|\alpha_{\mathrm{f}}|\right). \tag{3.27}$$

接下来，我们借助命题 ψ中 $[\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}, L_\varepsilon + l_{\varepsilon,\nu}]$建立的指数三分性来表示3.3。我们发现，任何满足初始条件（ψ）且满足（2.15）的解都必须满足（3.20）

$$\psi(\xi) = \mathcal{T}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{r},\ \varepsilon,\ \lambda,\ \nu}(\xi,\ L_\varepsilon + l_{\varepsilon,\nu})\,\alpha_{\mathrm{r}} + \mathcal{T}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi, \xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\beta_{\mathrm{r}} + \mathcal{T}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi, \xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\gamma_{\mathrm{r}}, \quad \xi \in \left[\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}, L_\varepsilon + l_{\varepsilon,\nu}\right], \tag{3.28}$$

对于某些 $\alpha_{\mathrm{r}} \in P_{\mathrm{ur}\,\varepsilon,\ \lambda,\ \nu}(L_\varepsilon + l_{\varepsilon,\ \nu})[\mathbb{C}^3]$ 以及 $\beta_{\mathrm{r}} \in P_{\mathrm{cr}\,\varepsilon,\ \lambda,\ \nu}(L_\varepsilon + l_{\varepsilon,\ \nu})[\mathbb{C}^3]$。

下一步是在匹配点 $\xi = L_\varepsilon + l_{\varepsilon,\nu}$ 处令（3.24）和（3.28）的右端相等，从而得到 α_{r}、β_{r} 和 γ_{f} 的唯一表达式。我们通过应用互补秩一投影 $P_{\mathrm{ur}\,\varepsilon,\lambda,\nu}(L_\varepsilon + l_{\varepsilon,\nu})$、$P_{\mathrm{sr}\,\varepsilon,\lambda,\nu}(L_\varepsilon + l_{\varepsilon,\nu})$ 和 $P_{\mathrm{cr}\,\varepsilon,\lambda,\nu}(L_\varepsilon + l_{\varepsilon,\nu})$ 推导匹配条件。不过，我们首先证明，在 $\xi = L_\varepsilon + l_{\varepsilon,\nu}$ 处，这些投影与命题 3.2 中建立的约化变分问题（3.6）的指数三分性投影接近。由命题 2.1 和 2.2 可得

$$\left\|A(L_\varepsilon + l_{\varepsilon,\nu};\varepsilon,\lambda) - \widetilde{A}_{\mathrm{f},-\infty}\right\| \le C_\nu\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}} + |\lambda|\right),$$

给定 $0 < \varepsilon,\ |\lambda| \ll \nu \ll 1$。显然，同样的界也适用于相应的谱投影

$$\left\|\mathcal{P}^j_{\varepsilon,\lambda}(L_\varepsilon + l_{\varepsilon,\nu}) - \widetilde{\mathcal{P}}^j_{\mathrm{f},-\infty}\right\| \le C_\nu\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}} + |\lambda|\right),$$

对于 $j=\mathrm{s}$、u、c。因此，结合后者与估计式（3.7）和（3.10），可得

$$\left\|P^{j}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}(L_\varepsilon+l_{\varepsilon,\nu})-\widetilde{P}^{j}_{\mathrm{f},\nu}(l_{\varepsilon,\nu})\right\|\leq C_\nu\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}}+|\lambda|\right), \tag{3.29}$$

对于 $j=\mathrm{s}$、u、c，只要满足 $0<\varepsilon$、$|\lambda|\ll\nu\ll 1$。

现在将投影 $P_{\mathrm{sr}\,\varepsilon、\lambda、\nu}\left(L_\varepsilon+l_{\varepsilon、\nu}\right)$ 应用于（3.24）和（3.28），令右端相等，并利用命题 3.2 和 3.3 以及估计式（2.11）、（3.25）、（3.26）和（3.29），得到匹配条件

$$\gamma_{\mathrm{f}}=\mathcal{F}_1(\alpha_{\mathrm{f}},\beta_{\mathrm{f}},\gamma_{\mathrm{f}},\gamma_{\mathrm{r}}), \tag{3.30}$$

其中线性映射 $\mathcal{F}_1$ 满足

$$\|\mathcal{F}_1(\alpha_{\mathrm{f}},\beta_{\mathrm{f}},\gamma_{\mathrm{f}},\gamma_{\mathrm{r}})\|\leq C_\nu\left(\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}}+|\lambda|\right)(|\alpha_{\mathrm{f}}|+|\beta_{\mathrm{f}}|+\|\gamma_{\mathrm{f}}\|)+\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}\|\gamma_{\mathrm{r}}\|\right),$$

对于某个与 ε 和 λ 无关的常数 $\vartheta_\nu>0$，只要满足 $0<\varepsilon$、$|\lambda|\ll\nu\ll 1$。类似地，应用投影 $P_{\mathrm{ur}\,\varepsilon、\lambda、\nu}\left(L_\varepsilon+l_{\varepsilon、\nu}\right)$，可得

$$\alpha_{\mathrm{r}}=\mathcal{F}_2(\alpha_{\mathrm{f}},\beta_{\mathrm{f}},\gamma_{\mathrm{f}}), \tag{3.31}$$

其中线性映射 $\mathcal{F}_2$ 满足

$$\|\mathcal{F}_2(\alpha_{\mathrm{f}},\beta_{\mathrm{f}},\gamma_{\mathrm{f}})\|\leq C_\nu\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}}+|\lambda|\right)(|\alpha_{\mathrm{f}}|+|\beta_{\mathrm{f}}|+\|\gamma_{\mathrm{f}}\|),$$

只要满足 $0<\varepsilon$、$|\lambda|\ll\nu\ll 1$。最后，应用投影 $P_{\mathrm{cr}\,\varepsilon、\lambda、\nu}\left(L_\varepsilon+l_{\varepsilon、\nu}\right)$，得到

$$\beta_{\mathrm{r}}=\mathcal{F}_3(\alpha_{\mathrm{f}},\beta_{\mathrm{f}},\gamma_{\mathrm{f}}) \tag{3.32}$$

其中线性映射 $\mathcal{F}_3$ 满足

$$\|\mathcal{F}_3(\alpha_{\mathrm{f}},\beta_{\mathrm{f}},\gamma_{\mathrm{f}})\|\leq C_\nu\left(|\beta_{\mathrm{f}}|+\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}}+|\lambda|\right)(|\alpha_{\mathrm{f}}|+\|\gamma_{\mathrm{f}}\|)\right),$$

在 $0<\varepsilon$，$|\lambda|\ll\nu\ll 1$ 的条件下。

我们注意到，匹配条件（3.30）、（3.31）和（3.32）构成了关于变量 α_{f}、β_{f}、γ_{f}、α_{r}、β_{r}和 γ_{r}的线性系统。根据上述对线性映射的估计 β_{r}、γ_{f}和 α_{r}，可以唯一求出它们。我们得到 $\mathcal{F}_1$、$\mathcal{F}_2$ 和 $\mathcal{F}_3$。

$$\gamma_{\mathrm{f}}=\widetilde{\mathcal{F}}_1(\alpha_{\mathrm{f}},\beta_{\mathrm{f}},\gamma_{\mathrm{r}}),\qquad \alpha_{\mathrm{r}}=\widetilde{\mathcal{F}}_2(\alpha_{\mathrm{f}},\beta_{\mathrm{f}},\gamma_{\mathrm{r}}),\qquad \beta_{\mathrm{r}}=\widetilde{\mathcal{F}}_3(\alpha_{\mathrm{f}},\beta_{\mathrm{r}},\gamma_{\mathrm{r}}), \tag{3.33}$$

~其中线性映射 $\mathcal{F}_i$、$i=1$，2，3 满足以下界

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{\mathcal{F}}_i(\alpha_{\mathrm{f}},\beta_{\mathrm{f}},\gamma_{\mathrm{r}})\right\|&\leq C_\nu\left(\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}}+|\lambda|\right)(|\alpha_{\mathrm{f}}|+|\beta_{\mathrm{f}}|)+\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}\|\gamma_{\mathrm{r}}\|\right),\qquad i=1,2,\\
\left\|\widetilde{\mathcal{F}}_3(\alpha_{\mathrm{f}},\beta_{\mathrm{f}},\gamma_{\mathrm{r}})\right\|&\leq C_\nu\left(|\beta_{\mathrm{f}}|+\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}}+|\lambda|\right)|\alpha_{\mathrm{f}}|+\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}\|\gamma_{\mathrm{r}}\|\right),
\end{aligned}$$

在 $0<\varepsilon$，$|\lambda|\ll\nu\ll 1$的条件下，估计（3.22）可通过观察以下内容直接得到

$$\begin{aligned}
P^{\mathrm{u}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)&=\mathcal{T}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu},L_\varepsilon+l_{\varepsilon,\nu}\right)\alpha_{\mathrm{r}},\\
P^{\mathrm{c}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)&=\mathcal{T}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu},L_\varepsilon+l_{\varepsilon,\nu}\right)\beta_{\mathrm{r}},\\
\widetilde{P}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{f},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)&=\widetilde{\mathcal{T}}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{f},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu},l_{\varepsilon,\nu}\right)\gamma_{\mathrm{f}}+\int_{L_\varepsilon+l_{\varepsilon,\nu}}^{\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}}\widetilde{\mathcal{T}}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{f},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu},y-L_\varepsilon\right)\left(\varepsilon\mathcal{B}_0+B_{\mathrm{f}}(y;\varepsilon,\lambda)\right)\psi(y)\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

并应用命题3.2 和3.3 以及估计（3.25）和（3.26）。

对于精细估计（3.23），我们首先注意到

$$\Pi_3\Phi_{\mathrm{f}}(\xi)=0,\qquad \Pi_3\Psi_{\mathrm{f},\nu}(\xi)=\begin{pmatrix}0_{2\times1}\\1\end{pmatrix},\qquad \Pi_3\widetilde{\mathcal{T}}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{f},\nu}(\xi,y)=\Pi_3,\qquad \Pi_3\widetilde{P}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{f},\nu}(\xi)=0,\qquad \Pi_3\widetilde{P}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{f},\nu}(\xi)=0,$$

对 ξ、$y\in[l_{\varepsilon,\nu},\frac{1}{\nu}]$成立，其中 $\Pi_3\in\mathbb{R}^{3\times3}$ 是到第三标准基向量的正交投影 $\mathbf{e}_3$,参见命题 3.2。因此，将互补投影 Π_3 和 $I_3-\Pi_3$ 应用于 3.24）在 $\xi=L_\varepsilon+l_{\varepsilon\text{处},\ \nu}$同时利用命题 3.2 以及估计式（3.25）、（3.26）、（3.27）和（3.33），可得

$$\|(I_3-\Pi_3)\psi(L_\varepsilon+l_{\varepsilon,\nu})\|\le C_\nu\left(|\beta_{\mathrm{f}}|+\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}}+|\lambda|\right)|\alpha_f|+\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}\|\gamma_{\mathrm{r}}\|\right),\tag{3.34}$$

and

$$\begin{aligned}&\left\|\Pi_3\psi(L_\varepsilon+l_{\varepsilon,\nu})-\left(\beta_{\mathrm{f}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}-\alpha_{\mathrm{f}}\varepsilon\Pi_3\mathcal{B}_0\int_{-\infty}^{\frac{1}{\nu}}\begin{pmatrix}u_{\mathrm{f}}'(\xi)\\v_{\mathrm{f}}'(\xi)\\0\end{pmatrix}\mathrm{d}\xi\right)\right\|\\&\qquad\le C_\nu\left(\varepsilon|\beta_{\mathrm{f}}|+\varepsilon\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}}+|\lambda|\right)|\alpha_f|+\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}\|\gamma_{\mathrm{r}}\|\right),\end{aligned}\tag{3.35}$$

给定 $0<\varepsilon,\ |\lambda|\ll\nu\ll1$。我们计算

$$-\Pi_3\mathcal{B}_0\int_{-\infty}^{\frac{1}{\nu}}\begin{pmatrix}u_{\mathrm{f}}'(\xi)\\v_{\mathrm{f}}'(\xi)\\0\end{pmatrix}\mathrm{d}\xi=\frac{\varepsilon}{c}\left(u_{\mathrm{f}}(\tfrac{1}{\nu})-u_2\right)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

因此，将估计式（3.34）和（3.35）与命题 3.3 结合可得

$$\begin{aligned}\left\langle\mathbf{e}_3,P^{\mathrm{c}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\right\rangle&=\left\langle\mathbf{e}_3,\mathcal{T}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu},L_\varepsilon+l_{\varepsilon,\nu}\right)\Pi_3\psi(L_\varepsilon+l_{\varepsilon,\nu})\right\rangle\\&\quad+\left\langle\mathbf{e}_3,\mathcal{T}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu},L_\varepsilon+l_{\varepsilon,\nu}\right)(I_3-\Pi_3)\psi(L_\varepsilon+l_{\varepsilon,\nu})\right\rangle\\&=\frac{u_{\mathrm{r}}(\nu)-\gamma f(u_{\mathrm{r}}(\nu))-a}{u_2-\gamma f(u_2)-a}\left(\beta_{\mathrm{f}}+\frac{\varepsilon}{c}\left(u_{\mathrm{f}}(\tfrac{1}{\nu})-u_2\right)\alpha_f\right)+\widetilde{\mathcal{F}}_{31}(\alpha_{\mathrm{f}},\beta_{\mathrm{f}},\gamma_{\mathrm{r}}),\end{aligned}$$

~其中线性映射 $\mathcal{F}_{31}$ 满足

$$|\widetilde{\mathcal{F}}_{31}(\alpha_{\mathrm{f}},\beta_{\mathrm{f}},\gamma_{\mathrm{r}})|\le C_\nu\left(\left(\varepsilon^{\frac{1}{3}}+|\lambda|\right)(|\beta_f|+\varepsilon|\alpha_{\mathrm{f}}|)+\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}\|\gamma_{\mathrm{r}}\|\right),$$

给定 $0<\varepsilon,\ |\lambda|\ll\nu\ll1$。这就证明了最终的估计式（3.23）。 □

类似地，可以得到如下关于远离折叠点处临界流形后沿和左分支上的特征值问题的结果。

命题 3.5. 给定 $0<\varepsilon,|\lambda|\ll\nu\ll1$，对每个

$$\gamma_{\mathrm{l}}\in P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{l},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out},0}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)[\mathbb{C}^3],\qquad and\qquad \alpha_{\mathrm{b}},\beta_{\mathrm{b}}\in\mathbb{C},$$

一个唯一解 $\psi\colon\ \mathcal{I}_{\mathrm{l}}\to\mathbb{C}^3$ 满足边界条件(2.15) 的特征值问题 s

$$P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{l},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out},0}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{out},0}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)=\gamma_{\mathrm{l}},\qquad\widetilde{P}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{b},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)=\beta_{\mathrm{b}}\Psi_{\mathrm{b},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right),\qquad\widetilde{P}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{b},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)=\alpha_{\mathrm{b}}\Phi_{\mathrm{b}}\left(\tfrac{1}{\nu}\right).$$

此外，存在与 ε 和 λ 无关的常数 $C_\nu,\vartheta_\nu>0$，使得解 ψ 满足以下估计

$$\begin{aligned}\left\|\widetilde{P}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{b},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\right\|&\le C_\nu\left(\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}}+|\lambda|\right)(|\alpha_{\mathrm{b}}|+|\beta_{\mathrm{b}}|)+\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}\|\gamma_{\mathrm{l}}\|\right),\\\left\|P^{\mathrm{u}}_{\mathrm{l},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out},0}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{out},0}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\right\|&\le C_\nu\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}\left(|\alpha_{\mathrm{b}}|+|\beta_{\mathrm{b}}|+\|\gamma_{\mathrm{l}}\|\right),\\\left\|P^{\mathrm{c}}_{\mathrm{l},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out},0}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{out},0}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\right\|&\le C_\nu\left(|\beta_{\mathrm{b}}|+\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}}+|\lambda|\right)|\alpha_{\mathrm{b}}|+\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}\|\gamma_{\mathrm{l}}\|\right),\end{aligned}$$

and

$$\left|\left\langle \mathbf{e}_3, P^{\mathrm{c}}_{\mathrm{l},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out},0}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{out},0}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\right\rangle - \frac{u_{\mathrm{l}}(\nu)-\gamma f(u_{\mathrm{l}}(\nu))-a}{\bar{u}_2-\gamma f(\bar{u}_2)-a}\left(\beta_{\mathrm{b}}+\frac{\varepsilon}{c}\left(u_{\mathrm{b}}(\tfrac{1}{\nu})-\bar{u}_2\right)\alpha_{\mathrm{b}}\right)\right| \\ \leq C_\nu\left(\left(\varepsilon^{\frac{1}{3}}+|\lambda|\right)(|\beta_{\mathrm{b}}|+\varepsilon|\alpha_{\mathrm{b}}|)+\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}\|\gamma_{\mathrm{l}}\|\right),$$

其中 $\mathbf{e}_3=(0,0,1)^\top$ 是第三标准基向量。

3.4 求解折叠点附近的特征值问题

命题 3.4 和命题 3.5 给出了折叠点之间区间 $\mathcal{I}_{\mathrm{r}}=[\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu},\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}]$ and $\mathcal{I}_{\mathrm{l}}=[\xi^{\mathrm{out},0}\mathrm{lf}_{\varepsilon,\nu},\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}]$ 上特征值问题 (2.15) 的解的估计。接下来需要获得折叠点附近区间 $\mathcal{I}_{\mathrm{uf}}=[\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu},\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}]$ and $\mathcal{I}_{\mathrm{lf}}=[\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu},\xi^{\mathrm{out},L}_{\varepsilon\,\nu}]\mathrm{lf}$, 上解的估计。由于每个折叠点处正规双曲性的丧失，这是一个棘手的问题；尤其是，由于 (2.15) 的中心不稳定空间特征值缺少与 (ε,λ) 无关的谱隙，因此无法在区间 $\mathcal{I}_{\mathrm{uf}},\mathcal{I}_{\mathrm{lf}}$ 上建立合适的指数三分解。要跟踪解在这些区间上的行为，需要采用吹胀方法——§4 将详细介绍这一过程，这里则陈述主要结果。为此，我们定义复值函数 $\Upsilon_{\mathrm{lf}},\Upsilon_{\mathrm{uf}}$：

$$\Upsilon_{\mathrm{lf}}(z):=\frac{z^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3\mathrm{Ai}'(-\Omega_0)^2}\int_{-\Omega_0}^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{z^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}(s+\Omega_0)}\left(s\mathrm{Ai}(s)^2-\mathrm{Ai}'(s)^2\right)\mathrm{d}s$$
$$\Upsilon_{\mathrm{uf}}(z):=\frac{z^2}{\theta_{\mathrm{uf}}c^3\mathrm{Ai}'(-\Omega_0)^2}\int_{-\Omega_0}^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{z^2}{\theta_{\mathrm{uf}}c^3}(s+\Omega_0)}\left(s\mathrm{Ai}(s)^2-\mathrm{Ai}'(s)^2\right)\mathrm{d}s$$

其中 $-\Omega_0<0$ 表示艾里函数的最大零点 $\mathrm{Ai}(z)$ (见附录 C)，且 $\theta_{\mathrm{lf}},\theta_{\mathrm{uf}}$ 由下式给出

$$\theta_{\mathrm{lf}}:=-\frac{(a^2-a+1)^{1/6}(u_1-\gamma f(u_1)-a)^{1/3}}{c}>0$$
$$\theta_{\mathrm{uf}}:=\frac{(a^2-a+1)^{1/6}(\bar{u}_1-\gamma f(\bar{u}_1)-a)^{1/3}}{c}>0 \tag{3.36}$$

与 §2.1.4 中相同。我们首先考虑下折点附近区间 $\mathcal{I}_{\mathrm{lf}}$ 上的特征值问题。区间端点处解的估计以二分投影 $P^{\mathrm{cu,s}}\mathrm{lf}_{\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi)$ 的形式给出，这些投影由区间 $\mathcal{I}_{\mathrm{lf}}$ 上一个便于使用的局部坐标变换得到，该变换将系统化为缓慢通过折叠点的标准形。关于这些投影的详情，参见 §4。类似地，在上折叠点附近的区间 $\mathcal{I}_{\mathrm{uf}}$ 上，以二分投影$P^{\mathrm{cu,s}}\mathrm{uf}_{\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi)$ 的形式给出解的估计更为方便。为进行匹配过程，我们需要一些估计，将二分投影 $P^{\mathrm{cu,s}}\mathrm{uf/lf}_{\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi)$ 与命题 3.4 和命题 3.5 在相应区间$\mathcal{I}_{\mathrm{uf/lf}}$端点处的投影联系起来。总之，我们有如下结论。

命题 *3.6.* 存在连续函数 $\eta\colon[0,\infty)\to[0,\infty)$，满足 $\eta(0)=0$，使得在 $0<\varepsilon\ll\mu\ll\nu\ll1$ 成立的条件下，存在与 ε 和 μ 无关的常数 $C_\nu,\vartheta_\nu>0$，以及互补投影 $P^{\mathrm{cu}}\mathrm{lf}_{\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi)$ $P^{\mathrm{s}}\mathrm{lf}_{\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi)\in\mathbb{C}^{3\times3}$，对于 $\xi\in\mathcal{I}_{\mathrm{lf}}=[\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu},\xi^{\mathrm{out},L}_{\varepsilon}\mathrm{lf}_{,\nu}]$，使得以下结论对 $\lambda\in R_1(\mu)$ 成立。

(i) 这些投影满足以下估计

$$\left\|P^i_{\mathrm{lf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)-\widetilde{P}^i_{\mathrm{f},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right)\right\|\leq C_\nu\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}}+|\lambda|\right), \tag{3.37}$$
$$\left\|P^i_{\mathrm{lf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out},L}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)-P^i_{\mathrm{l},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out},0}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\right\|\leq C_\nu\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon} \tag{3.38}$$
$$\left\|\mathbf{e}_3^\top\widetilde{P}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{f},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right)P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\right\|\leq C_\nu\varepsilon, \tag{3.39}$$

对于 $i=\mathrm{s,cu}$，其中我们记

$$\widetilde{P}^{\mathrm{cu}}_{\mathrm{f},\nu}(\xi)=\widetilde{P}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{f},\nu}(\xi)+\widetilde{P}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{f},\nu}(\xi),\qquad P^{\mathrm{cu}}_{\mathrm{l},\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi)=P^{\mathrm{c}}_{\mathrm{l},\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi)+P^{\mathrm{u}}_{\mathrm{l},\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi),$$

并且，其中 $\mathbf{e}_3=(0,0,1)^\top$ 是第三标准基向量。

(ii) 对每个

$$\gamma_{\mathrm{uf}}\in P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\left[\mathbb{C}^3\right],\qquad \beta_{\mathrm{lf}}=\begin{pmatrix}\beta_{1,\mathrm{lf}}\\ \beta_{2,\mathrm{lf}}\\ \varepsilon\beta_{3,\mathrm{lf}}\end{pmatrix}\in P^{\mathrm{cu}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out},L}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\left[\mathbb{C}^3\right],$$

存在一个解 $\psi\colon\mathcal{I}_{\mathrm{lf}}\to\mathbb{C}^3$ 满足特征值问题(2.15) 及边界条件

$$P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)=\gamma_{\mathrm{lf}},\qquad P^{\mathrm{cu}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out},L}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{out},L}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)=\beta_{\mathrm{lf}},$$

满足估计

$$\left\|P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out},L}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{out},L}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\right\|\le C_\nu \mathrm{e}^{-\frac{\vartheta_\nu}{\varepsilon}}\|\gamma_{\mathrm{lf}}\|.$$

此外，如果 $\Re(\lambda)\ge\varepsilon^{1/5}$，那么有

$$\left\|P^{\mathrm{cu}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\right\|\le C_\nu\exp\left(\frac{\nu\Re(\lambda)}{c\varepsilon}\right)\|\beta_{\mathrm{lf}}\|,\tag{3.40}$$

而如果 $|\Re(\lambda)|\le\mu\varepsilon^{1/6}$，则成立

$$P^{\mathrm{cu}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)=\begin{pmatrix}U_{\mathrm{lf}}\\ V_{\mathrm{lf}}\\ W_{\mathrm{lf}}\end{pmatrix}(\beta_{\mathrm{lf}}),$$

其中 U_{lf}、V_{lf} 和 W_{lf} 满足

$$\left\|\begin{pmatrix}U_{\mathrm{lf}}\\ V_{\mathrm{lf}}\end{pmatrix}(\beta_{\mathrm{lf}})-\alpha^u_{\mathrm{lf}}(\beta_{\mathrm{lf}};\varepsilon,\lambda)\begin{pmatrix}u'_\varepsilon\\ v'_\varepsilon\end{pmatrix}\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\right\|\le C_\nu\left(\|\beta_{\mathrm{lf}}\|+|\lambda\log|\lambda||\cdot|\beta_{3,\mathrm{lf}}|\right),$$

$$\left|W_{\mathrm{lf}}(\beta_{\mathrm{lf}})-\varepsilon\beta_{3,\mathrm{lf}}\frac{w'_\varepsilon\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)}{w'_\varepsilon\left(\xi^{\mathrm{out},L}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)}\right|\le C_\nu\varepsilon\|\beta_{\mathrm{lf}}\|+\left(C_\nu\varepsilon\,|\lambda\log|\lambda||+\varepsilon\eta(\nu)\left|\Upsilon_{\mathrm{lf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})\right|\right)|\beta_{3,\mathrm{lf}}|$$

with

$$\left|\alpha^u_{\mathrm{lf}}(\beta_{\mathrm{lf}};\varepsilon,\lambda)-\frac{\varepsilon\beta_{3,\mathrm{lf}}}{w'_\varepsilon\left(\xi^{\mathrm{out},L}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)}\left(1-\Upsilon_{\mathrm{lf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})\right)\right|\le\eta(\nu)\left|\Upsilon_{\mathrm{lf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})\right||\beta_{3,\mathrm{lf}}|.$$

命题 3.6 的证明将在 §4.5中给出。类似地，我们有以下关于上折叠点附近特征值问题的解的命题。

命题 *3.7.* 存在一个连续函数 $\eta\colon[0,\infty)\to[0,\infty)$，满足 $\eta(0)=0$，使得在 $0<\varepsilon\ll\mu\ll\nu\ll1$ 的条件下，存在与 ε 和 μ 无关的常数 $C_\nu,\vartheta_\nu>0$，以及互补投影 $P^{\mathrm{cuuf}}_{\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi)$ $P^{\mathrm{suf}}_{\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi)\in\mathbb{C}^{3\times3}$，对于 $\xi\in\mathcal{I}_{\mathrm{uf}}=[\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu},\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}]$，使得以下结论对 $\lambda\in R_1(\mu)$ 成立。

(i) 这些投影满足以下估计

$$\begin{aligned}\left\|P^{i}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)-\widetilde{P}^{i}_{\mathrm{b},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right)\right\| &\le C_\nu\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}}+|\lambda|\right),\\ \left\|P^{i}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)-P^{i}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\right\| &\le C_\nu \mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}\\ \left\|\mathbf{e}_3^{\top}\widetilde{P}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{b},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right)P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\right\| &\le C_\nu\varepsilon,\end{aligned}$$

对于 $i=\mathrm{s},\mathrm{cu}$，其中我们记

$$\widetilde{P}^{\mathrm{cu}}_{\mathrm{b},\nu}(\xi)=\widetilde{P}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{b},\nu}(\xi)+\widetilde{P}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{b},\nu}(\xi),\qquad P^{\mathrm{cu}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi)=P^{\mathrm{c}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi)+P^{\mathrm{u}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi),$$

并且 $\mathbf{e}_3=(0,0,1)^{\top}$ 是第三标准基向量。

(ii) 对于每个

$$\gamma_{\mathrm{uf}}\in P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\left[\mathbb{C}^3\right],\qquad \beta_{\mathrm{uf}}=\begin{pmatrix}\beta_{1,\mathrm{uf}}\\ \beta_{2,\mathrm{uf}}\\ \varepsilon\beta_{3,\mathrm{uf}}\end{pmatrix}\in P^{\mathrm{cu}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\left[\mathbb{C}^3\right],$$

存在一个解 $\psi\colon\mathcal{I}_{\mathrm{uf}}\to\mathbb{C}^3$ 满足边界条件的特征值问题 (2.15) 的解

$$P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)=\gamma_{\mathrm{uf}},\qquad P^{\mathrm{cu}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)=\beta_{\mathrm{uf}},$$

满足估计

$$\left\|P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\right\|\le C_\nu\mathrm{e}^{-\frac{\vartheta_\nu}{\varepsilon}}\|\gamma_{\mathrm{uf}}\|.$$

此外，若 $\Re(\lambda)\ge\varepsilon^{1/5}$，则有

$$\left\|P^{\mathrm{cu}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\right\|\le C_\nu\exp\left(\frac{\nu\Re(\lambda)}{c\varepsilon}\right)\|\beta_{\mathrm{uf}}\|,\tag{3.41}$$

而如果 $|\Re(\lambda)|\le\mu\varepsilon^{1/6}$，则成立

$$P^{\mathrm{cu}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)=\begin{pmatrix}U_{\mathrm{uf}}\\ V_{\mathrm{uf}}\\ W_{\mathrm{uf}}\end{pmatrix}(\beta_{\mathrm{uf}}),$$

其中 U_{uf}、V_{uf} 和 W_{uf} 满足

$$\begin{aligned}\left\|\begin{pmatrix}U_{\mathrm{uf}}\\ V_{\mathrm{uf}}\end{pmatrix}(\beta_{\mathrm{uf}})-\alpha^{u}_{\mathrm{uf}}(\beta_{\mathrm{uf}};\varepsilon,\lambda)\begin{pmatrix}u'_\varepsilon\\ v'_\varepsilon\end{pmatrix}\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\right\| &\le C_\nu\left(\|\beta_{\mathrm{uf}}\|+|\lambda\log|\lambda||\cdot|\beta_{3,\mathrm{uf}}|\right),\\ \left|W_{\mathrm{uf}}(\beta_{\mathrm{uf}})-\varepsilon\beta_{3,\mathrm{uf}}\frac{w'_\varepsilon\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)}{w'_\varepsilon\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)}\right| &\le C_\nu\varepsilon\|\beta_{\mathrm{uf}}\|\\ &\quad+\left(C_\nu\varepsilon\,|\lambda\log|\lambda||+\varepsilon\eta(\nu)\left|\Upsilon_{\mathrm{uf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})\right|\right)|\beta_{3,\mathrm{uf}}|\end{aligned}$$

with

$$\left|\alpha^{u}_{\mathrm{uf}}(\beta_{\mathrm{uf}};\varepsilon,\lambda)-\frac{\varepsilon\beta_{3,\mathrm{uf}}}{w'_\varepsilon\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)}\left(1-\Upsilon_{\mathrm{uf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})\right)\right|\le\eta(\nu)\left|\Upsilon_{\mathrm{uf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})\right||\beta_{3,\mathrm{uf}}|.$$

3.5 主公式的推导

我们回顾一下：当且仅当存在 $\rho \in [-\pi/L_\varepsilon, \pi/L_\varepsilon)$，使得带有相应 Floquet 边界条件 (3.1) 的特征值问题 (2.15) 存在非平凡解时，$\lambda \in \mathbb{C}$ 才属于线性化 $\mathcal{L}_\varepsilon$ 的谱。为了运用复函数理论的结果，我们将 ρ 复化，并考虑取值于一个有界、与 ε 和 λ 无关且包含区间 $[-\pi/L_\varepsilon, \pi/L_\varepsilon)$ 的开集 $U \subset \mathbb{C}$ 中的 ρ 值。我们采用 Lin方法，为 $\rho \in U$ 和 $\lambda \in R_1(\mu)$ 构造满足 (2.15)-(3.1) 的非平凡解。具体而言，我们在区间 $\mathcal{I}_{\mathrm{r}}$、$\mathcal{I}_{\mathrm{l}}$、$\mathcal{I}_{\mathrm{lf}}$ 和 $\mathcal{I}_{\mathrm{uf}}$ 上匹配特征值问题 (2.15) 的解，这些解分别在命题 3.4、3.4、3.6 和 3.7 中建立。以下结果给出了这一匹配过程的结果，并导出一个隐式超越方程，我们称之为“主公式”，该方程联系了 λ、ε 和 ρ。

命题 3.8。 存在一个连续函数 $\eta\colon\ [0,\infty) \to [0,\infty)$ 满足 $\eta(0) = 0$，使得，只要 $0 < \varepsilon \ll \mu \ll \nu \ll 1$，就存在一个与 ε 和 μ 无关的常数 $C_\nu > 0$，使得特征值问题 (2.15)-(2.16) 在 $\rho \in U$ 和 $\lambda \in R_{1,\,\varepsilon}(\mu)\colon = R_1(\mu) \cap \{\lambda \in \mathbb{C}\colon\ |\Re(\lambda)| \le \mu\varepsilon^{1/6}\}$ 时存在非平凡解，当且仅当我们有

$$\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}\rho - \frac{\lambda}{c})L_\varepsilon} = \left(1 + \frac{(u_1 - u_2)\Upsilon_{\mathrm{lf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})}{u_2 - \gamma f(u_2) - a}\right)\left(1 + \frac{(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)\Upsilon_{\mathrm{uf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})}{\bar{u}_2 - \gamma f(\bar{u}_2) - a}\right) + \mathcal{R}_\varepsilon(\lambda), \tag{3.42}$$

其中，残差 $\mathcal{R}_\varepsilon\colon\ R_{1,\,\varepsilon}(\mu) \to \mathbb{C}$ 满足界

$$|\mathcal{R}_\varepsilon(\lambda,\varepsilon)| \le C_\nu\left(\varepsilon^{\frac{1}{3}} + |\lambda\log|\lambda||\right) + \eta(\nu)\left(|\Upsilon_{\mathrm{uf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})| + |\Upsilon_{\mathrm{lf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})|\right). \tag{3.43}$$

此外，如果 $\lambda \in R_1(\mu)$ 满足 $\Re(\lambda) \ge \varepsilon^{1/5}$，则特征值问题 (2.15)-(2.16) 不存在非平凡解。

证明。 在本证明中，$C \ge 1$ 表示一个与 λ、ξ、ν、μ 和 ε 无关的常数，必要时将取其更大。此外，$C_\nu \ge 1$ 和 $\vartheta_\nu > 0$ 表示分别与 λ、ξ、μ 和 ε 无关的常数，必要时将分别取其更大和更小。

结合命题 3.4、3.5、3.6 和 3.7，我们在 $\xi = \xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{uf},\,\varepsilon,\,\nu}$、$\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf}\,,\,\varepsilon,\,\nu}$、$\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf}\,,\,\varepsilon,\,\nu}$ 处施加匹配条件，并且

$$\xi = \xi^{\mathrm{out},L}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu} = \xi^{L}_{\varepsilon,\nu} = \xi^{0}_{\varepsilon,\nu} + L_\varepsilon = \xi^{\mathrm{out},0}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu} + L_\varepsilon$$

将非平凡解的存在性 $\psi(\xi)$ 约化为特征值问题（2.15），满足 Floquet 边界条件（3.1）的某个 $\rho \in U$ 自由变量 $\alpha_{\mathrm{f/b}}$、$\beta_{\mathrm{f/b}}$、$\gamma_{\mathrm{l/r}}$、$\gamma_{\mathrm{uf/lf}}$和 $\beta_{\mathrm{uf/lf}}$所构成的方程组，其中我们定义

$$\alpha_{\mathrm{b}}\Phi_{\mathrm{b}}\left(\tfrac{1}{\nu}\right) = \widetilde{P}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{b},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right),\quad \beta_{\mathrm{b}}\Psi_{\mathrm{b},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right) = \widetilde{P}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{b},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right),\quad \gamma_{\mathrm{uf}} = P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)$$

在 $\xi = \xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{uf},\,\varepsilon,\,\nu}$，

$$\beta_{\mathrm{uf}} = \begin{pmatrix}\beta_{1,\mathrm{uf}}\\ \beta_{2,\mathrm{uf}}\\ \varepsilon\beta_{3,\mathrm{uf}}\end{pmatrix} = P^{\mathrm{cu}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right),\quad \gamma_{\mathrm{r}} = P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)$$

在 $\xi = \xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf}\,,\varepsilon,\nu}$，

$$\alpha_{\mathrm{f}}\Phi_{\mathrm{f}}\left(\tfrac{1}{\nu}\right) = \widetilde{P}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{f},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right),\quad \beta_{\mathrm{f}}\Psi_{\mathrm{f},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right) = \widetilde{P}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{f},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right),\quad \gamma_{\mathrm{lf}} = P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)$$

在 $\xi=\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}$ 以及

$$\beta^0_{\mathrm{lf}}=\begin{pmatrix}\beta^0_{1,\mathrm{lf}}\\ \beta^0_{2,\mathrm{lf}}\\ \varepsilon\beta^0_{3,\mathrm{lf}}\end{pmatrix}=P^{\mathrm{cu}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out},L}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{out},0}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right),\quad \gamma^0_{\mathrm{l}}=P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{l},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out},0}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{out},0}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right),$$
$$\beta^L_{\mathrm{lf}}=\begin{pmatrix}\beta^L_{1,\mathrm{lf}}\\ \beta^L_{2,\mathrm{lf}}\\ \varepsilon\beta^L_{3,\mathrm{lf}}\end{pmatrix}=P^{\mathrm{cu}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out},L}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{out},L}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right),\quad \gamma^L_{\mathrm{l}}=P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{l},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out},0}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{out},L}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)$$

在 $\xi=\xi^{\mathrm{out},L}_{\nu}=\xi^{\mathrm{out}}_{\varepsilon\mathrm{lf},\varepsilon,0\,\mathrm{lf},\nu}+L_{\varepsilon}$。此外，我们令

$$\beta_{\mathrm{r}}=\widetilde{P}^{\mathrm{cu}}_{\mathrm{f},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right),\qquad \beta_{\mathrm{l}}=\widetilde{P}^{\mathrm{cu}}_{\mathrm{b},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right).\tag{3.44}$$

显然，有

$$\|\beta_{\mathrm{r}}\|\le C_\nu\left(|\alpha_{\mathrm{f}}|+|\beta_{\mathrm{f}}|\right),\qquad \|\beta_{\mathrm{l}}\|\le C_\nu\left(|\alpha_{\mathrm{b}}|+|\beta_{\mathrm{b}}|\right).\tag{3.45}$$

另一方面，应用投影 $\widetilde{P}_{\mathrm{c}j,\nu}\left(\frac{1}{\nu}\right)$ 和 $\widetilde{P}_{\mathrm{u}j,\nu}\left(\frac{1}{\nu}\right)$ 对于 $j=\mathrm{f},\ \mathrm{b}$ 到 (3.44)，并利用命题 3.2，我们得到

$$|\alpha_{\mathrm{f}}|,|\beta_{\mathrm{f}}|\le C_\nu\|\beta_{\mathrm{r}}\|,\qquad |\alpha_{\mathrm{b}}|,|\beta_{\mathrm{b}}|\le C_\nu\|\beta_{\mathrm{l}}\|.\tag{3.46}$$

我们首先求解 $\gamma_{\mathrm{l/r}}$，$\gamma_{\mathrm{up/dn}}$ 以 $\beta_{\mathrm{l/r}}$，$\beta_{\mathrm{up/dn}}$。根据命题 3.6，可得

$$\left\|P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out},L}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{out},L}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\right\|\le C_\nu\mathrm{e}^{-\frac{\vartheta_\nu}{\varepsilon}}\|\gamma_{\mathrm{lf}}\|,$$

若 $0<\varepsilon,\ |\lambda|\ll\nu\ll 1$。利用以下事实

$$\begin{aligned}\psi\left(\xi^{\mathrm{out},L}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)&=P^{\mathrm{cu}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out},L}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{out},L}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)+P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out},L}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{out},L}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\\ &=\beta^L_{\mathrm{lf}}+P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out},L}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{out},L}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right),\end{aligned}$$

应用投影 $P_{\mathrm{sl}\,\varepsilon,\,\lambda,\,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out},0}_{\varepsilon\,\mathrm{lf},\,\nu}\right)$，并利用命题 3.3 和 3.6，我们得到

$$\gamma^L_{\mathrm{l}}=F_1(\beta^L_{\mathrm{lf}},\gamma_{\mathrm{lf}})\tag{3.47}$$

给定 $0<\varepsilon,\ |\lambda|\ll\nu\ll 1$，其中 F_1 是一个满足以下条件的线性映射

$$\left\|F_1(\beta^L_{\mathrm{lf}},\gamma_{\mathrm{lf}})\right\|\le C_\nu\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}\left(\|\beta^L_{\mathrm{lf}}\|+\|\gamma_{\mathrm{lf}}\|\right).\tag{3.48}$$

类似地，我们可以得到

$$\gamma_{\mathrm{r}}=F_2(\beta_{\mathrm{uf}},\gamma_{\mathrm{uf}}),\tag{3.49}$$

其中 F_2 是一个满足以下条件的线性映射

$$\|F_2(\beta_{\mathrm{uf}},\gamma_{\mathrm{uf}})\|\le C_\nu\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}\left(\|\beta_{\mathrm{uf}}\|+\|\gamma_{\mathrm{uf}}\|\right).\tag{3.50}$$

接下来，利用估计式 (3.46)、命题 3.4 和 3.5，以及由 Floquet–Bloch 边界条件 (3.1) 可知 $\gamma^0_{\mathrm{l}}=\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}\rho-\frac{\lambda}{c})L_\varepsilon}\gamma^L_{\mathrm{l}}$ 成立，我们得到

$$\begin{aligned}\left\|\widetilde{P}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{f},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\right\|&\le C_\nu\left(\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}}+|\lambda|\right)\|\beta_{\mathrm{r}}\|+\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}\|\gamma_{\mathrm{r}}\|\right),\\ \left\|\widetilde{P}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{b},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right),\psi\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\right\|&\le C_\nu\left(\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}}+|\lambda|\right)\|\beta_{\mathrm{l}}\|+\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}\|\gamma^L_{\mathrm{l}}\|\right),\end{aligned}\tag{3.51}$$

其中用到了 $0<\varepsilon,\ |\lambda|\ll\nu\ll 1$ 以及 (2.11)。因此，应用命题 3.7 并利用 (3.47) 和 (3.48)，我们得到

$$\gamma_{\mathrm{uf}}=F_3(\beta_{\mathrm{l}},\beta_{\mathrm{lf}}^L,\gamma_{\mathrm{lf}}),\tag{3.52}$$

满足 $0<\varepsilon,\ |\lambda|\ll\nu\ll 1$，其中 F_3 是一个满足以下条件的线性映射

$$\left\|F_3(\beta_{\mathrm{l}},\beta_{\mathrm{lf}}^L,\gamma_{\mathrm{lf}})\right\|\le C_\nu\left(\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}}+|\lambda|\right)\|\beta_{\mathrm{l}}\|+\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}\left(\|\beta_{\mathrm{lf}}^L\|+\|\gamma_{\mathrm{lf}}\|\right)\right).\tag{3.53}$$

类似地，我们有

$$\gamma_{\mathrm{lf}}=F_4(\beta_{\mathrm{r}},\beta_{\mathrm{uf}},\gamma_{\mathrm{uf}}),\tag{3.54}$$

其中 F_4 是一个满足以下条件的线性映射

$$\|F_4(\beta_{\mathrm{r}},\beta_{\mathrm{uf}},\gamma_{\mathrm{uf}})\|\le C_\nu\left(\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}}+|\lambda|\right)\|\beta_{\mathrm{r}}\|+\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}\left(\|\beta_{\mathrm{uf}}\|+\|\gamma_{\mathrm{uf}}\|\right)\right).\tag{3.55}$$

结合估计（3.48）、（3.50）、（3.53）和（3.55），我们求解线性方程系统（3.47）、（3.49）和（3.52）（3.54），得到 γ_{uf}，γ_{lf}和 γ_{l}，γ_{r}，从而得到

$$\begin{aligned}\gamma_{\mathrm{uf}}&=F_5\left(\beta_{\mathrm{l}},\beta_{\mathrm{r}},\beta_{\mathrm{uf}},\beta_{\mathrm{lf}}^L\right),\\ \gamma_{\mathrm{lf}}&=F_6\left(\beta_{\mathrm{l}},\beta_{\mathrm{r}},\beta_{\mathrm{uf}},\beta_{\mathrm{lf}}^L\right),\\ \gamma_{\mathrm{l}}^L&=F_7\left(\beta_{\mathrm{l}},\beta_{\mathrm{r}},\beta_{\mathrm{uf}},\beta_{\mathrm{lf}}^L\right),\\ \gamma_{\mathrm{r}}&=F_8\left(\beta_{\mathrm{l}},\beta_{\mathrm{r}},\beta_{\mathrm{uf}},\beta_{\mathrm{lf}}^L\right),\end{aligned}\tag{3.56}$$

满足 $0<\varepsilon,\ |\lambda|\ll\nu\ll 1$，其中 F_5，F_6，F_7和 F_8是满足以下条件的线性映射

$$\begin{aligned}\|F_5\left(\beta_{\mathrm{l}},\beta_{\mathrm{r}},\beta_{\mathrm{uf}},\beta_{\mathrm{lf}}^L\right)\|&\le C_\nu\left(\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}}+|\lambda|\right)\|\beta_{\mathrm{l}}\|+\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}\left(\|\beta_{\mathrm{r}}\|+\|\beta_{\mathrm{uf}}\|+\|\beta_{\mathrm{lf}}^L\|\right)\right),\\ \|F_6\left(\beta_{\mathrm{l}},\beta_{\mathrm{r}},\beta_{\mathrm{uf}},\beta_{\mathrm{lf}}^L\right)\|&\le C_\nu\left(\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}}+|\lambda|\right)\|\beta_{\mathrm{r}}\|+\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}\left(\|\beta_{\mathrm{l}}\|+\|\beta_{\mathrm{uf}}\|+\|\beta_{\mathrm{lf}}^L\|\right)\right),\end{aligned}$$

and

$$\|F_j\left(\beta_{\mathrm{l}},\beta_{\mathrm{r}},\beta_{\mathrm{uf}},\beta_{\mathrm{lf}}^L\right)\|\le C_\nu\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}\left(\|\beta_{\mathrm{l}}\|+\|\beta_{\mathrm{r}}\|+\|\beta_{\mathrm{uf}}\|+\|\beta_{\mathrm{lf}}^L\|\right)$$

对于 $j=7,\ 8$。

排除 $\Re(\lambda)\ge\varepsilon^{1/5}$ 的谱。对于 $\Re(\lambda)\ge\varepsilon^{1/5}$，估计 (3.40) 和 (3.41) 给出了沿下折叠点和上折叠点的解 $\psi(\xi)$ 在中心不稳定方向上的反向增长的温和上界。我们证明，对于任意 $\rho\in U$，这些估计都排除了方程 (2.15)-(3.1) 存在非平凡解的可能。更具体地说，我们针对剩余自由变量 $\beta_{\mathrm{l/r}}$ 和 $\beta_{\mathrm{uf/lf}}$ 推导出一个齐次线性系统，并证明其行列式非零。因此，必有 $\beta_{\mathrm{l/r}}$、$\beta_{\mathrm{uf/lf}}=0$，由此通过 (3.56) 可得 $\gamma_{\mathrm{l/r}}$、$\gamma_{\mathrm{uf/lf}}=0$。进而，$\psi(\xi)$ 必恒等于零。

给定 $0<\varepsilon,\ |\lambda|\ll\nu\ll 1$ 和 $\Re(\lambda)\ge\varepsilon^{1/5}$，命题3.7 给出

$$\left\|P_{\mathrm{uf}}^{\mathrm{cu}}\left(\xi_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}^{\mathrm{in}}\right)\psi\left(\xi_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}^{\mathrm{in}}\right)\right\|\le C_\nu\mathrm{e}^{\frac{\nu\Re(\lambda)}{c\varepsilon}}\|\beta_{\mathrm{uf}}\|.$$

因此，应用命题3.7 并利用（3.51）和（3.56），我们得到

$$\beta_{\mathrm{l}}=G_1(\beta_{\mathrm{l}},\beta_{\mathrm{r}},\beta_{\mathrm{uf}},\beta_{\mathrm{lf}}^L),\tag{3.57}$$

其中 G_1 是一个满足条件的线性映射

$$\|G_1(\beta_{\mathrm{l}},\beta_{\mathrm{r}},\beta_{\mathrm{uf}},\beta_{\mathrm{lf}}^L)\|\le C_\nu\left(\mathrm{e}^{\frac{\nu\Re(\lambda)}{c\varepsilon}}\|\beta_{\mathrm{uf}}\|+\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}}+|\lambda|\right)\|\beta_{\mathrm{l}}\|+\mathrm{e}^{-\frac{\vartheta_\nu}{\varepsilon}}\left(\|\beta_{\mathrm{r}}\|+\|\beta_{\mathrm{lf}}^L\|\right)\right).\tag{3.58}$$

类似地，我们有

$$\beta_{\mathrm{r}} = G_2(\beta_{\mathrm{l}}, \beta_{\mathrm{r}}, \beta_{\mathrm{uf}}, \beta_{\mathrm{lf}}^L), \tag{3.59}$$

其中 G_2 是满足以下条件的线性映射

$$\|G_2(\beta_{\mathrm{l}}, \beta_{\mathrm{r}}, \beta_{\mathrm{uf}}, \beta_{\mathrm{lf}}^L)\| \leq C_\nu \left(\mathrm{e}^{\frac{\nu \Re(\lambda)}{c\varepsilon}} \|\beta_{\mathrm{lf}}^L\| + \left(\varepsilon^{\frac{2}{3}} + |\lambda|\right) \|\beta_{\mathrm{r}}\| + \mathrm{e}^{-\frac{\vartheta_\nu}{\varepsilon}} \left(\|\beta_{\mathrm{l}}\| + \|\beta_{\mathrm{uf}}\|\right) \right). \tag{3.60}$$

接下来，根据估计（3.46）、命题3.4和3.5，以及 $\gamma_{\mathrm{l}}^0 = \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}\rho - \frac{\lambda}{c})^{L_\varepsilon}} \gamma_{\mathrm{l}}^L$，我们有

$$\begin{aligned}
\left\| P^{\mathrm{cu}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu} \left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right) \psi \left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right) \right\| &\leq C_\nu \left(\|\beta_{\mathrm{r}}\| + \mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon} \|\gamma_{\mathrm{r}}\| \right), \\
\left\| P^{\mathrm{cu}}_{\mathrm{l},\varepsilon,\lambda,\nu} \left(\xi^{\mathrm{out},0}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right) \psi \left(\xi^{\mathrm{out},0}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right) \right\| &\leq C_\nu \left(\|\beta_{\mathrm{l}}\| + \mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon} \|\gamma_{\mathrm{l}}^L\| \right),
\end{aligned}$$

其中我们用到了 $0 < \varepsilon$、$|\lambda| \ll \nu \ll 1$和（2.11）。因此，应用命题3.3、命题3.6和命题3.7，并回顾恒等式 $\beta_{\mathrm{lf}}^0 = \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}\rho - \frac{\lambda}{c})^{L_\varepsilon}} \beta_{\mathrm{lf}}^L$和 $\gamma_{\mathrm{l}}^0 = \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}\rho - \frac{\lambda}{c})^{L_\varepsilon}} \gamma_{\mathrm{l}}^L$，同时利用（2.11）、（3.56）、$0 < \varepsilon$、$|\lambda| \ll \nu \ll 1$和$\Re(\lambda) \geq \varepsilon^{1/5}$，可得

$$\begin{aligned}
\beta_{\mathrm{uf}} &= G_3(\beta_{\mathrm{l}}, \beta_{\mathrm{r}}, \beta_{\mathrm{uf}}, \beta_{\mathrm{lf}}^L), \\
\beta_{\mathrm{lf}}^L &= G_4(\beta_{\mathrm{l}}, \beta_{\mathrm{r}}, \beta_{\mathrm{uf}}, \beta_{\mathrm{lf}}^L),
\end{aligned} \tag{3.61}$$

其中 G_3 和 G_4 是满足以下条件的线性映射

$$\begin{aligned}
\|G_3(\beta_{\mathrm{l}}, \beta_{\mathrm{r}}, \beta_{\mathrm{uf}}, \beta_{\mathrm{lf}}^L)\| &\leq C_\nu \left(\|\beta_{\mathrm{r}}\| + \mathrm{e}^{-\frac{\vartheta_\nu}{\varepsilon}} \left(\|\beta_{\mathrm{l}}\| + \|\beta_{\mathrm{uf}}\| + \|\beta_{\mathrm{lf}}^L\|\right) \right), \\
\|G_4(\beta_{\mathrm{l}}, \beta_{\mathrm{r}}, \beta_{\mathrm{uf}}, \beta_{\mathrm{lf}}^L)\| &\leq C_\nu \left(\mathrm{e}^{-\frac{\Re(\lambda)}{c} L_\varepsilon} \|\beta_{\mathrm{l}}\| + \mathrm{e}^{-\frac{\vartheta_\nu}{\varepsilon}} \left(\|\beta_{\mathrm{r}}\| + \|\beta_{\mathrm{uf}}\| + \|\beta_{\mathrm{lf}}^L\|\right) \right).
\end{aligned} \tag{3.62}$$

方程（3.57）、（3.59）和（3.61）构成了一个关于变量 $\beta_{\mathrm{l/r}}$ 和 $\beta_{\mathrm{uf/lf}}$ 的四个线性方程组成的齐次方程组，形式为

$$\begin{pmatrix}
1 + a_{1,\varepsilon,\lambda,\nu} & b_{1,\varepsilon,\lambda,\nu} & \mathrm{e}^{\frac{\nu\Re(\lambda)}{c\varepsilon}} c_{1,\varepsilon,\lambda,\nu} & b_{2,\varepsilon,\lambda,\nu} \\
b_{3,\varepsilon,\lambda,\nu} & 1 + a_{2,\varepsilon,\lambda,\nu} & b_{4,\varepsilon,\lambda,\nu} & \mathrm{e}^{\frac{\nu\Re(\lambda)}{c\varepsilon}} c_{2,\varepsilon,\lambda,\nu} \\
b_{5,\varepsilon,\lambda,\nu} & c_{3,\varepsilon,\lambda,\nu} & 1 + b_{6,\varepsilon,\lambda,\nu} & b_{7,\varepsilon,\lambda,\nu} \\
\mathrm{e}^{-\frac{\Re(\lambda)}{c} L_\varepsilon} c_{4,\varepsilon,\lambda,\nu} & b_{8,\varepsilon,\lambda,\nu} & b_{9,\varepsilon,\lambda,\nu} & 1 + b_{10,\varepsilon,\lambda,\nu}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\beta_{\mathrm{l}} \\ \beta_{\mathrm{r}} \\ \beta_{\mathrm{uf}} \\ \beta_{\mathrm{lf}}
\end{pmatrix} = 0, \tag{3.63}$$

其中，根据估计（3.58）、（3.60）和（3.62），系数满足

$$\begin{aligned}
|a_{j,\varepsilon,\lambda,\nu}| &\leq C_\nu \left(\varepsilon^{\frac{2}{3}} + |\lambda|\right), && j = 1, 2, \\
|b_{j,\varepsilon,\lambda,\nu}| &\leq C_\nu \mathrm{e}^{-\frac{\vartheta_\nu}{\varepsilon}}, && j = 1, \ldots, 10, \\
|c_{j,\varepsilon,\lambda,\nu}| &\leq C_\nu, && j = 1, \ldots, 4.
\end{aligned}$$

因此，将后者与估计（2.11）结合，可直接得到：若 $0 < \varepsilon$，$|\lambda| \ll \nu \ll 1$ 且$\Re(\lambda) \geq \varepsilon^{1/5}$，则$d_{\varepsilon、\lambda、\nu}$对应的（$(4 \times 4)$矩阵方程组（3.63）的行列式可近似为

$$|d_{\varepsilon,\lambda,\nu} - 1| \leq C_\nu \left(\varepsilon^{\frac{2}{3}} + |\lambda|\right),$$

从而得到 $d_{\varepsilon,\lambda,\nu} \neq 0$。这意味着 $\beta_{\mathrm{l/r}}, \beta_{\mathrm{uf/lf}} = 0$，并且根据（3.56），还可得 $\gamma_{\mathrm{l/r}}, \gamma_{\mathrm{uf/lf}} = 0$。因此，$\psi(\xi)$ 恒等于零。由此我们得出，对于任意 $\rho \in U$，方程组（2.15）-（3.1）都不存在非平凡解。

在 $\xi=\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}$ **和** $\xi=\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}$ **处进行匹配**。下面继续推导主公式（3.42）。通过（$\gamma_{\mathrm{l/r}}$ 和 $\gamma_{\mathrm{uf/lf}}$ 关于 $\alpha_{\mathrm{f/b}},\beta_{\mathrm{f/b}}$ 和 $\beta_{\mathrm{uf/lf}}$ 的表达式，3.56），我们接着通过在 α_{f} 和 β_{f} 处匹配来求解 $\xi=\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}$。根据命题 3.6，可得

$$P^{\mathrm{cu}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)=\begin{pmatrix}U_{\mathrm{lf}}\\V_{\mathrm{lf}}\\W_{\mathrm{lf}}\end{pmatrix}(\beta^L_{\mathrm{lf}}),$$

给定 $\lambda\in R_{1,\ \varepsilon}(\mu)$ 和 $0<\varepsilon\ll\mu\ll\nu\ll 1$，其中线性映射 U_{lf}，V_{lf}，W_{lf} 满足

$$\begin{aligned}
&\left\|\begin{pmatrix}U_{\mathrm{lf}}\\V_{\mathrm{lf}}\end{pmatrix}(\beta^L_{\mathrm{lf}})-\alpha^u_{\mathrm{lf}}(\beta^L_{\mathrm{lf}};\varepsilon,\lambda)\begin{pmatrix}u'_\varepsilon\\v'_\varepsilon\end{pmatrix}\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\right\|\le C_\nu\left(\|\beta^L_{\mathrm{lf}}\|+|\lambda\log|\lambda||\cdot|\beta^L_{3,\mathrm{lf}}|\right),\\
&\left|W_{\mathrm{lf}}(\beta^L_{\mathrm{lf}})-\varepsilon\beta^L_{3,\mathrm{lf}}\frac{w'_\varepsilon\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)}{w'_\varepsilon\left(\xi^{\mathrm{out},L}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)}\right|\le\left(C_\nu\varepsilon|\lambda\log|\lambda||+\varepsilon\eta(\nu)\left|\Upsilon_{\mathrm{lf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})\right|\right)|\beta^L_{3,\mathrm{lf}}|\\
&\qquad\qquad+C_\nu\varepsilon\|\beta^L_{\mathrm{lf}}\|
\end{aligned}\tag{3.64}$$

a并且 α^u_{lf} 和 η（ν）如命题 中所述。根据 β_{f}的定义，我们有 e

$$\beta_{\mathrm{f}}\Psi_{\mathrm{f},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right)=\widetilde{P}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{f},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)=\widetilde{P}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{f},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right)\left(\begin{pmatrix}U_{\mathrm{lf}}\\V_{\mathrm{lf}}\\W_{\mathrm{lf}}\end{pmatrix}(\beta^L_{\mathrm{lf}})+\gamma_{\mathrm{lf}}\right).$$

为确定 β_{f}，注意到 $\Psi_{\mathrm{f},\ \nu}\left(\frac{1}{\nu}\right)$ 和 $\widetilde{P}_{\mathrm{cf}\,\nu}\left(\frac{1}{\nu}\right)$ **的第三个分量**3根据命题 3.2均等于 1，因此可以忽略前两个分量，并写成

$$\begin{pmatrix}**\\\beta_{\mathrm{f}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}**\\W_{\mathrm{lf}}(\beta^L_{\mathrm{lf}})\end{pmatrix}+\widetilde{P}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{f},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right)\gamma_{\mathrm{lf}}.$$

因此，利用估计 （3.39）以及命题 3.6 中的界（3.45）、（3.56）和（3.64），可得 t

$$\beta_{\mathrm{f}}=F_9(\alpha_{\mathrm{f}},\beta_{\mathrm{f}},\alpha_{\mathrm{b}},\beta_{\mathrm{b}},\beta_{\mathrm{uf}},\beta^L_{\mathrm{lf}}),\tag{3.65}$$

其中线性映射 F_9 满足

$$\begin{aligned}
&\left|F_9(\alpha_{\mathrm{f}},\beta_{\mathrm{f}},\alpha_{\mathrm{b}},\beta_{\mathrm{b}},\beta_{\mathrm{uf}},\beta^L_{\mathrm{lf}})-\varepsilon\beta^L_{3,\mathrm{lf}}\frac{w'_\varepsilon\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)}{w'_\varepsilon\left(\xi^{\mathrm{out},L}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)}\right|\le\left(C_\nu\varepsilon|\lambda\log|\lambda||+\varepsilon\eta(\nu)\left|\Upsilon_{\mathrm{lf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})\right|\right)|\beta^L_{3,\mathrm{lf}}|\\
&\qquad+C_\nu\varepsilon\|\beta^L_{\mathrm{lf}}\|+C_\nu\left(\varepsilon\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}}+|\lambda|\right)(|\alpha_{\mathrm{f}}|+|\beta_{\mathrm{f}}|)+\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}\left(|\alpha_{\mathrm{b}}|+|\beta_{\mathrm{b}}|+\|\beta_{\mathrm{uf}}\|+\|\beta^L_{\mathrm{lf}}\|\right)\right).
\end{aligned}$$

同样，利用命题 3.2，我们计算得

$$\begin{aligned}
\alpha_{\mathrm{f}}\Phi_{\mathrm{f}}\left(\tfrac{1}{\nu}\right)&=\widetilde{P}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{f},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\\
&=\widetilde{P}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{f},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right)\begin{pmatrix}U_{\mathrm{lf}}\\V_{\mathrm{lf}}\\0\end{pmatrix}+\widetilde{P}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{f},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right)P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\\
&=\alpha^u_{\mathrm{lf}}(\beta^L_{\mathrm{lf}};\varepsilon,\lambda)\Phi_{\mathrm{f}}\left(\tfrac{1}{\nu}\right)+\widetilde{P}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{f},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right)\alpha^u_{\mathrm{lf}}(\beta^L_{\mathrm{lf}};\varepsilon,\lambda)\left(\begin{pmatrix}u'_\varepsilon\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\\v'_\varepsilon\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\\0\end{pmatrix}-\Phi_{\mathrm{f}}\left(\tfrac{1}{\nu}\right)\right)\\
&\quad+\widetilde{P}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{f},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right)\left(\begin{pmatrix}U_{\mathrm{lf}}\\V_{\mathrm{lf}}\\0\end{pmatrix}-\alpha^u_{\mathrm{lf}}(\beta^L_{\mathrm{lf}};\varepsilon,\lambda)\begin{pmatrix}u'_\varepsilon\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\\v'_\varepsilon\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\\0\end{pmatrix}\right)+\widetilde{P}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{f},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right)\gamma_{\mathrm{lf}}
\end{aligned}$$

因此，根据命题 2.2 和 3.6以及估计式（3.45）、（3.56）和（3.64），有

$$\alpha_{\mathrm{f}} = F_{10}(\alpha_{\mathrm{f}}, \beta_{\mathrm{f}}, \alpha_{\mathrm{b}}, \beta_{\mathrm{b}}, \beta_{\mathrm{uf}}, \beta_{\mathrm{lf}}^{L}), \tag{3.66}$$

给定 $\lambda \in R_{1,\ \varepsilon}(\mu)$ 和 $0 < \varepsilon \ll \mu \ll \nu \ll 1$，其中线性映射 F_{10} 满足

$$\begin{aligned}\left|F_{10}(\alpha_{\mathrm{f}}, \beta_{\mathrm{f}}, \alpha_{\mathrm{b}}, \beta_{\mathrm{b}}, \beta_{\mathrm{uf}}, \beta_{\mathrm{lf}}^{L}) - \alpha_{\mathrm{lf}}^{u}(\beta_{\mathrm{lf}}^{L}; \varepsilon, \lambda)\right| \leq C_{\nu} \Big(&\varepsilon^{\frac{2}{3}} |\alpha_{\mathrm{lf}}^{u}(\beta_{\mathrm{lf}}^{L}; \varepsilon, \lambda)| + \|\beta_{\mathrm{lf}}^{L}\| + |\lambda \log |\lambda|| \, |\beta_{3,\mathrm{lf}}^{L}| \\ &+ \left(\varepsilon^{\frac{2}{3}} + |\lambda|\right)^{2} (|\alpha_{\mathrm{f}}| + |\beta_{\mathrm{f}}|) + \mathrm{e}^{-\vartheta_{\nu}/\varepsilon} (|\alpha_{\mathrm{b}}| + |\beta_{\mathrm{b}}| + \|\beta_{\mathrm{uf}}\|)\Big).\end{aligned} \tag{3.67}$$

命题2.2 给出

$$\begin{aligned}\left|\varepsilon^{-1} w_{\varepsilon}'\left(\xi_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}^{\mathrm{out},L}\right) + \frac{1}{c}(u_1(\nu) - \gamma f(u_1(\nu)) - a)\right| &\leq C_{\nu} \varepsilon^{\frac{2}{3}}, \\ \left|\varepsilon^{-1} w_{\varepsilon}'\left(\xi_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}^{\mathrm{out},L}\right) + \frac{1}{c}(u_1 - \gamma f(u_1) - a)\right| &\leq C\delta_0(\nu).\end{aligned} \tag{3.68}$$

将后者与（3.67）和命题 3.6结合，并利用 $u_1 - \gamma f\ (u_1)\ - a \neq 0$这一事实，可得

$$\begin{aligned}&\left|F_{10}(\alpha_{\mathrm{f}}, \beta_{\mathrm{f}}, \alpha_{\mathrm{b}}, \beta_{\mathrm{b}}, \beta_{\mathrm{uf}}, \beta_{\mathrm{lf}}^{L}) + c\beta_{3,\mathrm{lf}}^{L} \frac{1 - \Upsilon_{\mathrm{lf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})}{u_1(\nu) - \gamma f(u_1(\nu)) - a}\right| \\ &\quad \leq \left(C_{\nu}\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}} + |\lambda \log |\lambda||\right) + C\eta(\nu)\left|\Upsilon_{\mathrm{lf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})\right|\right) |\beta_{3,\mathrm{lf}}^{L}| \\ &\qquad + C_{\nu}\left(\|\beta_{\mathrm{lf}}^{L}\| + \left(\varepsilon^{\frac{2}{3}} + |\lambda|\right)^{2} (|\alpha_{\mathrm{f}}| + |\beta_{\mathrm{f}}|) + \mathrm{e}^{-\vartheta_{\nu}/\varepsilon} (|\alpha_{\mathrm{b}}| + |\beta_{\mathrm{b}}| + \|\beta_{\mathrm{uf}}\|)\right),\end{aligned}$$

给定$\lambda \in R_{1,\ \varepsilon}(\mu)$ 和 $0 < \varepsilon \ll \mu \ll \nu \ll 1$。利用隐函数定理求解（3.65）和（3.66）中的（α_{f}，β_{f}），并结合（3.68）和命题2.2，可得

$$\begin{aligned}\alpha_{\mathrm{f}} &= -c\beta_{3,\mathrm{lf}}^{L} \frac{1 - \Upsilon_{\mathrm{lf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})}{u_1(\nu) - \gamma f(u_1(\nu)) - a} + F_{11}(\alpha_{\mathrm{b}}, \beta_{\mathrm{b}}, \beta_{\mathrm{uf}}, \beta_{\mathrm{lf}}^{L}), \\ \beta_{\mathrm{f}} &= \varepsilon\beta_{3,\mathrm{lf}}^{L} \frac{u_{\mathrm{f}}(\frac{1}{\nu}) - \gamma f(u_2) - a}{u_1(\nu) - \gamma f(u_1(\nu)) - a} + \varepsilon F_{12}(\alpha_{\mathrm{b}}, \beta_{\mathrm{b}}, \beta_{\mathrm{uf}}, \beta_{\mathrm{lf}}^{L}),\end{aligned} \tag{3.69}$$

prov定 $\lambda \in R_{1,\ \varepsilon}(\mu)$ 和 $0 < \varepsilon \ll \mu \ll \nu \ll 1$，其中线性映射 F_{11}，F_{12} 满足　　sfy

$$\begin{aligned}\left|F_j(\alpha_{\mathrm{b}}, \beta_{\mathrm{b}}, \beta_{\mathrm{uf}}, \beta_{\mathrm{lf}}^{L})\right| \leq C_{\nu} &\left(\|\beta_{\mathrm{lf}}^{L}\| + \mathrm{e}^{-\vartheta_{\nu}/\varepsilon} (|\alpha_{\mathrm{b}}| + |\beta_{\mathrm{b}}| + \|\beta_{\mathrm{uf}}\|)\right) \\ &+ \left(C_{\nu}\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}} + |\lambda \log |\lambda||\right) + C\eta(\nu)\left|\Upsilon_{\mathrm{lf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})\right|\right) |\beta_{3,\mathrm{lf}}^{L}|.\end{aligned}$$

对于 $j = 11,\ 12$。对于$\xi = \xi_{\mathrm{uf},\ \varepsilon,\ \nu}^{\mathrm{in}}$处的匹配，我们按照上述方法，求出以其他变量表示的 $(\alpha_{\mathrm{b}},\ \beta_{\mathrm{b}})$，由此得到

$$\begin{aligned}\alpha_{\mathrm{b}} &= -c\beta_{3,\mathrm{uf}} \frac{1 - \Upsilon_{\mathrm{uf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})}{u_{\mathrm{r}}(\nu) - \gamma f(u_{\mathrm{r}}(\nu)) - a} + F_{13}(\alpha_{\mathrm{f}}, \beta_{\mathrm{f}}, \beta_{\mathrm{uf}}, \beta_{\mathrm{lf}}^{L}), \\ \beta_{\mathrm{b}} &= \varepsilon\beta_{3,\mathrm{lf}}^{L} \frac{u_{\mathrm{b}}(\frac{1}{\nu}) - \gamma f(\bar{u}_2) - a}{u_{\mathrm{r}}(\nu) - \gamma f(u_{\mathrm{r}}(\nu)) - a} + \varepsilon F_{14}(\alpha_{\mathrm{f}}, \beta_{\mathrm{f}}, \beta_{\mathrm{uf}}, \beta_{\mathrm{lf}}^{L}),\end{aligned} \tag{3.70}$$

其中线性映射 F_{13}，F_{14} 满足

$$\begin{aligned}\left|F_j(\alpha_{\mathrm{f}}, \beta_{\mathrm{f}}, \beta_{\mathrm{uf}}, \beta_{\mathrm{lf}}^{L})\right| \leq C_{\nu} &\left(\|\beta_{\mathrm{uf}}\| + \mathrm{e}^{-\vartheta_{\nu}/\varepsilon} \left(|\alpha_{\mathrm{f}}| + |\beta_{\mathrm{f}}| + \|\beta_{\mathrm{lf}}^{L}\|\right)\right) \\ &+ \left(C_{\nu}\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}} + |\lambda \log |\lambda||\right) + C\eta(\nu)\left|\Upsilon_{\mathrm{uf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})\right|\right) |\beta_{3,\mathrm{uf}}|,\end{aligned}$$

对于 $j = 13,\ 14$。

在 $\xi=\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}$ 和 $\xi=\xi^{\mathrm{out}}_{L,\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}$ 根据命题 3.4，当 $\xi=\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}$ 时，我们有如下估计

$$\begin{aligned}
&\left\|P^{\mathrm{u}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\right\| \le C_\nu \mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}\left(|\alpha_{\mathrm{f}}|+|\beta_{\mathrm{f}}|+\|\gamma_{\mathrm{r}}\|\right),\\
&\left\|P^{\mathrm{c}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\right\| \le C_\nu\left(|\beta_{\mathrm{f}}|+\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}}+|\lambda|\right)|\alpha_{\mathrm{f}}|+\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}\|\gamma_{\mathrm{r}}\|\right),
\end{aligned} \tag{3.71}$$

给定 $0<\varepsilon,\ |\lambda|\ll\nu\ll 1$。回忆 β_{uf} 的定义，我们写作

$$\begin{aligned}
\beta_{\mathrm{uf}} &= P^{\mathrm{cu}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\left(1-P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)+\left[P^{\mathrm{cu}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)-P^{\mathrm{cu}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\right]\beta_{\mathrm{uf}}\\
&= P^{\mathrm{cu}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)+\left[P^{\mathrm{cu}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)-P^{\mathrm{cu}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\right]\beta_{\mathrm{uf}}\\
&\quad-P^{\mathrm{u}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\left(P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)-P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\right)\left(\gamma_{\mathrm{r}}+P^{\mathrm{cu}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\right).
\end{aligned} \tag{3.72}$$

因此，利用命题 3.3 和 3.7，并应用估计（3.45）、（3.56）和（3.71），我们得到 at

$$\|\beta_{\mathrm{uf}}\| \le C_\nu\left(|\beta_{\mathrm{f}}|+\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}}+|\lambda|\right)|\alpha_{\mathrm{f}}|+\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}\left(|\alpha_{\mathrm{b}}|+|\beta_{\mathrm{b}}|+\|\beta^L_{\mathrm{lf}}\|\right)\right), \tag{3.73}$$

给定 $\lambda\in R_{1,\varepsilon}(\mu)$ 和 $0<\varepsilon\ll\mu\ll\nu\ll 1$。通过分别对 $\beta_{\mathrm{uf}}=(\beta_{1,\mathrm{uf}},\ \beta_{2,\mathrm{uf}},\ \varepsilon\beta_{3,\mathrm{uf}})^\top$ 的快分量和慢分量进行界定，我们可以得到更精细的估计。为了界定 β_{uf} 的快分量，我们写作

$$\begin{aligned}
\beta_{\mathrm{uf}} &= P^{\mathrm{cu}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\beta_{\mathrm{uf}}+\left[P^{\mathrm{cu}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)-P^{\mathrm{cu}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\right]\beta_{\mathrm{uf}}\\
&= P^{\mathrm{c}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\beta_{\mathrm{uf}}+\left[P^{\mathrm{cu}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)-P^{\mathrm{cu}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\right]\beta_{\mathrm{uf}}\\
&\quad+P^{\mathrm{u}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\left(1-P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\\
&= P^{\mathrm{c}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\beta_{\mathrm{uf}}+\left[P^{\mathrm{cu}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)-P^{\mathrm{cu}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\right]\beta_{\mathrm{uf}}+P^{\mathrm{u}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\\
&\quad-P^{\mathrm{u}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\left(P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)-P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\right)\left(\gamma_{\mathrm{r}}+P^{\mathrm{cu}}_{\mathrm{r},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\psi\left(\xi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{uf},\varepsilon,\nu}\right)\right).
\end{aligned} \tag{3.74}$$

将命题 3.7 以及界（3.45）、（3.56）、（3.71）和（3.73）应用于（3.74，并结合命题 3.3 及其证明中的估计（3.10）和（3.15），我们得到

$$\begin{aligned}
\beta_{1,\mathrm{uf}} &= F_{15}(\beta_{\mathrm{uf}},\alpha_{\mathrm{f}},\alpha_{\mathrm{b}},\beta_{\mathrm{f}},\beta_{\mathrm{b}},\beta^L_{\mathrm{lf}}),\\
\beta_{2,\mathrm{uf}} &= F_{16}(\beta_{\mathrm{uf}},\alpha_{\mathrm{f}},\alpha_{\mathrm{b}},\beta_{\mathrm{f}},\beta_{\mathrm{b}},\beta^L_{\mathrm{lf}}),
\end{aligned}$$

其中线性映射 $F_j, j=15,16$ 满足

$$\begin{aligned}
&|F_j(\beta_{\mathrm{uf}},\alpha_{\mathrm{f}},\alpha_{\mathrm{b}},\beta_{\mathrm{f}},\beta_{\mathrm{b}},\beta^L_{\mathrm{lf}})|\\
&\quad\le C_\nu\left(\varepsilon|\beta_{3,\mathrm{uf}}|+\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}}+|\lambda|\right)(|\beta_{1,\mathrm{uf}}|+|\beta_{2,\mathrm{uf}}|)+\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}\left(|\alpha_{\mathrm{f}}|+|\beta_{\mathrm{f}}|+|\alpha_{\mathrm{b}}|+|\beta_{\mathrm{b}}|+\|\beta^L_{\mathrm{lf}}\|\right)\right).
\end{aligned}$$

求解关于 $\beta_{1,\mathrm{uf}}$ 和 $\beta_{2,\mathrm{uf}}$ 的这个系统，得到

$$\begin{aligned}
\beta_{1,\mathrm{uf}} &= F_{17}(\beta_{3,\mathrm{uf}},\alpha_{\mathrm{f}},\alpha_{\mathrm{b}},\beta_{\mathrm{f}},\beta_{\mathrm{b}},\beta^L_{\mathrm{lf}}),\\
\beta_{2,\mathrm{uf}} &= F_{18}(\beta_{3,\mathrm{uf}},\alpha_{\mathrm{f}},\alpha_{\mathrm{b}},\beta_{\mathrm{f}},\beta_{\mathrm{b}},\beta^L_{\mathrm{lf}}),
\end{aligned}$$

在 λ 的条件下 $\in R_{1,\varepsilon}(\mu)$ 和 $0<\varepsilon\ll\mu\ll\nu\ll 1$，其中线性映射 $F_j, j=17,18$ 满足

$$|F_j(\beta_{\mathrm{uf}},\alpha_{\mathrm{f}},\alpha_{\mathrm{b}},\beta_{\mathrm{f}},\beta_{\mathrm{b}},\beta^L_{\mathrm{lf}})| \le C_\nu\left(\varepsilon|\beta_{3,\mathrm{uf}}|+\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}\left(|\alpha_{\mathrm{f}}|+|\beta_{\mathrm{f}}|+|\alpha_{\mathrm{b}}|+|\beta_{\mathrm{b}}|+\|\beta^L_{\mathrm{lf}}\|\right)\right),$$

由此我们得到估计

$$\|\beta_{\mathrm{uf}}\| \le C_\nu\left(\varepsilon|\beta_{3,\mathrm{uf}}|+\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}\left(|\alpha_{\mathrm{f}}|+|\beta_{\mathrm{f}}|+|\alpha_{\mathrm{b}}|+|\beta_{\mathrm{b}}|+\|\beta^L_{\mathrm{lf}}\|\right)\right). \tag{3.75}$$

聚焦于式（3.72）中的第三个（慢）分量，并利用命题 3.3、3.4和 3.7 以及估计式（3.45）、（3.56）和（3.75），我们发现

$$\begin{aligned}
&\left|\varepsilon\beta_{3,\mathrm{uf}}-\frac{u_{\mathrm{r}}(\nu)-\gamma f(u_{\mathrm{r}}(\nu))-a}{u_2-\gamma f(u_2)-a}\left(\beta_{\mathrm{f}}+\frac{\varepsilon}{c}\left(u_{\mathrm{f}}(\tfrac{1}{\nu})-u_2\right)\alpha_{\mathrm{f}}\right)\right| \\
&\quad\le C_\nu\left(\left(\varepsilon^{\frac{1}{3}}+|\lambda|\right)\left(|\beta_{\mathrm{f}}|+\varepsilon|\alpha_{\mathrm{f}}|\right)+\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}\left(\|\gamma_{\mathrm{r}}\|+\|\beta_{\mathrm{uf}}\|\right)\right) \\
&\quad\le C_\nu\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}\left(|\alpha_{\mathrm{b}}|+|\beta_{\mathrm{b}}|+\|\beta_{\mathrm{uf}}\|+\|\beta_{\mathrm{lf}}^L\|\right)+C_\nu\left(\varepsilon^{\frac{1}{3}}+|\lambda|\right)\left(|\beta_{\mathrm{f}}|+\varepsilon|\alpha_{\mathrm{f}}|\right),
\end{aligned}\tag{3.76}$$

在给定 $\lambda\in R_{1,\varepsilon}(\mu)$ 和 $0<\varepsilon\ll\mu\ll\nu\ll 1$ 的条件下。当 $\xi=\xi^{\mathrm{out}}$、L 时，按照上述类似方法继续推导，可得

$$\|\beta_{\mathrm{lf}}^0\|\le C_\nu\left(\varepsilon|\beta_{3,\mathrm{lf}}^0|+\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}\left(|\alpha_{\mathrm{f}}|+|\beta_{\mathrm{f}}|+|\alpha_{\mathrm{b}}|+|\beta_{\mathrm{b}}|+\|\beta_{\mathrm{uf}}\|+\|\beta_{\mathrm{lf}}^L\|\right)\right)\tag{3.77}$$

and

$$\begin{aligned}
&\left|\varepsilon\beta_{3,\mathrm{lf}}^0-\frac{u_{\mathrm{l}}(\nu)-\gamma f(u_{\mathrm{l}}(\nu))-a}{\bar u_2-\gamma f(\bar u_2)-a}\left(\beta_{\mathrm{b}}+\frac{\varepsilon}{c}\left(u_{\mathrm{b}}(\tfrac{1}{\nu})-\bar u_2\right)\alpha_{\mathrm{b}}\right)\right| \\
&\quad\le C_\nu\left(\left(\varepsilon^{\frac{1}{3}}+|\lambda|\right)\left(|\beta_{\mathrm{b}}|+\varepsilon|\alpha_{\mathrm{b}}|\right)+\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}\left(\|\gamma_{\mathrm{l}}^0\|+\|\beta_{\mathrm{lf}}^L\|\right)\right) \\
&\quad\le C_\nu\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}\left(|\alpha_{\mathrm{f}}|+|\beta_{\mathrm{f}}|+\|\beta_{\mathrm{uf}}\|+\|\beta_{\mathrm{lf}}^L\|\right)+C_\nu\left(\varepsilon^{\frac{1}{3}}+|\lambda|\right)\left(|\beta_{\mathrm{b}}|+\varepsilon|\alpha_{\mathrm{b}}|\right).
\end{aligned}\tag{3.78}$$

由（3.73）和（3.77），并利用 Floquet 条件（3.1），且必要时缩小 $\vartheta_\nu>0$，可得

$$\begin{aligned}
\|\beta_{\mathrm{uf}}\|&\le C_\nu\left(\varepsilon|\beta_{3,\mathrm{uf}}|+\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}\left(|\alpha_{\mathrm{f}}|+|\beta_{\mathrm{f}}|+|\alpha_{\mathrm{b}}|+|\beta_{\mathrm{b}}|+|\beta_{3,\mathrm{lf}}^L|\right)\right),\\
\|\beta_{\mathrm{lf}}^0\|&\le C_\nu\left(\varepsilon|\beta_{3,\mathrm{lf}}^0|+\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}\left(|\alpha_{\mathrm{f}}|+|\beta_{\mathrm{f}}|+|\alpha_{\mathrm{b}}|+|\beta_{\mathrm{b}}|+|\beta_{3,\mathrm{uf}}|\right)\right),\\
\|\beta_{\mathrm{lf}}^L\|&\le C_\nu\left(\varepsilon|\beta_{3,\mathrm{lf}}^L|+\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}\left(|\alpha_{\mathrm{f}}|+|\beta_{\mathrm{f}}|+|\alpha_{\mathrm{b}}|+|\beta_{\mathrm{b}}|+|\beta_{3,\mathrm{uf}}|\right)\right),
\end{aligned}\tag{3.79}$$

在给定 $\lambda\in R_{1,\varepsilon}(\mu)$ 和 $0<\varepsilon\ll\mu\ll\nu\ll 1$ 的条件下。

主公式。 我们先求解（3.69）和（3.70），将 α_{f}、β_{f}、α_{b}和 β_{b} 表示为 $\beta_{3,\mathrm{uf}}$和$\beta_{3,\mathrm{lf}}^L$的函数。利用（3.79），可得

$$\begin{aligned}
\alpha_{\mathrm{f}}+c\beta_{3,\mathrm{lf}}^L\frac{1-\Upsilon_{\mathrm{lf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})}{u_{\mathrm{l}}(\nu)-\gamma f(u_{\mathrm{l}}(\nu))-a}&=F_{19}(\beta_{3,\mathrm{uf}},\beta_{3,\mathrm{lf}}^L),\\
\beta_{\mathrm{f}}-\varepsilon\beta_{3,\mathrm{lf}}^L\frac{u_{\mathrm{f}}(\frac{1}{\nu})-\gamma f(u_2)-a}{u_{\mathrm{l}}(\nu)-\gamma f(u_{\mathrm{l}}(\nu))-a}&=\varepsilon F_{20}(\beta_{3,\mathrm{uf}},\beta_{3,\mathrm{lf}}^L),
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\alpha_{\mathrm{b}}+c\beta_{3,\mathrm{uf}}\frac{1-\Upsilon_{\mathrm{uf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})}{u_{\mathrm{r}}(\nu)-\gamma f(u_{\mathrm{r}}(\nu))-a}&=F_{21}(\beta_{3,\mathrm{uf}},\beta_{3,\mathrm{lf}}^L),\\
\beta_{\mathrm{b}}-\varepsilon\beta_{3,\mathrm{lf}}^L\frac{u_{\mathrm{b}}(\frac{1}{\nu})-\gamma f(\bar u_2)-a}{u_{\mathrm{r}}(\nu)-\gamma f(u_{\mathrm{r}}(\nu))-a}&=\varepsilon F_{22}(\beta_{3,\mathrm{uf}},\beta_{3,\mathrm{lf}}^L),
\end{aligned}$$

在给定 $\lambda\in R_{1,\varepsilon}(\mu)$ 和 $0<\varepsilon\ll\mu\ll\nu\ll 1$，其中 F_j、$j=19,20,21,22$ 是满足条件的线性映射 g

$$\left|F_j(\beta_{3,\mathrm{uf}},\beta_{3,\mathrm{lf}}^L)\right|\le\left(C_\nu\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}}+|\lambda\log|\lambda||\right)+C\eta(\nu)\left|\Upsilon_{\mathrm{uf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})\right|\right)|\beta_{3,\mathrm{lf}}^L|+C_\nu\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}|\beta_{3,\mathrm{uf}}|$$

对于 $j=19$，20 和

$$\left|F_j(\beta_{3,\mathrm{uf}},\beta_{3,\mathrm{lf}}^L)\right| \le \left(C_\nu\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}}+|\lambda\log|\lambda||\right)+C\eta(\nu)\left|\Upsilon_{\mathrm{uf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})\right|\right)|\beta_{3,\mathrm{uf}}|+C_\nu \mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}|\beta_{3,\mathrm{lf}}^L|$$

对于 $j=21$，22。将这些估计代入（3.76）和（3.78），应用命题 2.2，利用估计（3.68）和（3.79），并除以 ε，得到

$$\begin{aligned}&\left|\beta_{3,\mathrm{uf}}-\beta_{3,\mathrm{lf}}^L\frac{u_{\mathrm{r}}(\nu)-\gamma f(u_{\mathrm{r}}(\nu))-a}{u_{\mathrm{l}}(\nu)-\gamma f(u_{\mathrm{l}}(\nu))-a}\left(1+\frac{(u_1-u_2)\Upsilon_{\mathrm{lf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})}{u_2-\gamma f(u_2)-a}\right)\right|\\ &\quad\le\left(C_\nu\left(\varepsilon^{\frac{1}{3}}+|\lambda\log|\lambda||\right)+C\eta(\nu)\left|\Upsilon_{\mathrm{uf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})\right|\right)|\beta_{3,\mathrm{lf}}^L|+C_\nu \mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}|\beta_{3,\mathrm{uf}}|.\end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned}&\left|\beta_{3,\mathrm{lf}}^0-\beta_{3,\mathrm{uf}}\frac{u_{\mathrm{l}}(\nu)-\gamma f(u_{\mathrm{l}}(\nu))-a}{u_{\mathrm{r}}(\nu)-\gamma f(u_{\mathrm{r}}(\nu))-a}\left(1+\frac{(\bar u_1-\bar u_2)\Upsilon_{\mathrm{uf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})}{\bar u_2-\gamma f(\bar u_2)-a}\right)\right|\\ &\quad\le\left(C_\nu\left(\varepsilon^{\frac{1}{3}}+|\lambda\log|\lambda||\right)+C\eta(\nu)\left|\Upsilon_{\mathrm{uf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})\right|\right)|\beta_{3,\mathrm{uf}}|+C_\nu \mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}|\beta_{3,\mathrm{lf}}^L|.\end{aligned}$$

应用命题 2.2，利用 Floquet 条件（3.1），求出 $\beta_{3,\mathrm{uf}}$ 关于 $\beta_{3,\mathrm{lf}}^L$的表达式，并代入第二个估计中，提取公因子 $\beta_{3,\mathrm{lf}}^L$，从而推出

$$\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}\rho-\frac{\lambda}{c})L_\varepsilon}=\left(1+\frac{(u_1-u_2)\Upsilon_{\mathrm{lf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})}{u_2-\gamma f(u_2)-a}\right)\left(1+\frac{(\bar u_1-\bar u_2)\Upsilon_{\mathrm{uf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})}{\bar u_2-\gamma f(\bar u_2)-a}\right)+\mathcal{R}_\varepsilon(\lambda),$$

在 $\lambda\in R_{1,\,\varepsilon}(\mu)$ 且 $0<\varepsilon\ll\mu\ll\nu\ll 1$的条件下，其中 $\mathcal{R}_\varepsilon(\lambda)$ 与（3.43）中相同。 □

3.6 主公式分析

我们接下来分析命题 3.8 的主公式（3.42），该公式控制区域 $R_1(\mu)$中的谱。考虑以下四个子区域将很有帮助

$$\begin{aligned}R_{1,1,\varepsilon}(\mu)&:=B_0\left(\tfrac{1}{2}\mu\varepsilon^{\frac{1}{6}}\right)\\ R_{1,2,\varepsilon}(\varsigma,\mu,M)&:=\left\{\lambda\in R_1(\mu)\setminus R_{1,1,\varepsilon}(\mu):|\Re(\lambda)|\le\varsigma\varepsilon^{\frac{1}{6}},|\Im(\lambda)|\le M\varepsilon^{\frac{1}{6}}\right\}\\ R_{1,3,\varepsilon}(\varsigma,\mu,M)&:=\left\{\lambda\in R_1(\mu):|\Re(\lambda)|\le\varsigma\varepsilon^{\frac{1}{6}},|\Im(\lambda)|\ge M\varepsilon^{\frac{1}{6}}\right\},\\ R_{1,4,\varepsilon}(\mu)&:=\left\{\lambda\in R_1(\mu):\Re(\lambda)\ge\varepsilon^{\frac{1}{5}}\right\},\end{aligned}$$

其中 $0<\varsigma\ll\mu\ll 1\ll M$ 的选取与 $\varepsilon>0$无关；见图 14。区域 $R_{1,4,\varepsilon}(\mu)$ 内不存在谱，这一事实可直接由命题 3.8得出。此外，其余区域的并集满足

$$R_{1,1,\varepsilon}(\mu)\cup R_{1,2,\varepsilon}(\varsigma,\mu,M)\cup R_{1,3,\varepsilon}(\varsigma,\mu,M)\subset R_{1,\varepsilon}(\mu),$$

其中 $R_{1,\,\varepsilon}(\mu)$ 在命题 3.8中定义，因此主公式（3.42）在这三个区域内均成立。我们分别考察每个区域，因为相应的估计在各区域中略有不同。

3.6.1 区域$R_{1,\,1,\,\varepsilon}(\mu)$

我们首先分析区域 $R_{1,\,1,\,\varepsilon}(\mu)$ 中的主公式；这是最精细的情形，因为其中包含一条在原点与虚轴相切的临界谱曲线。下文中，我们运用解析函数理论展开临界曲线，并验证二次相切，这对波列的扩散谱稳定性至关重要。

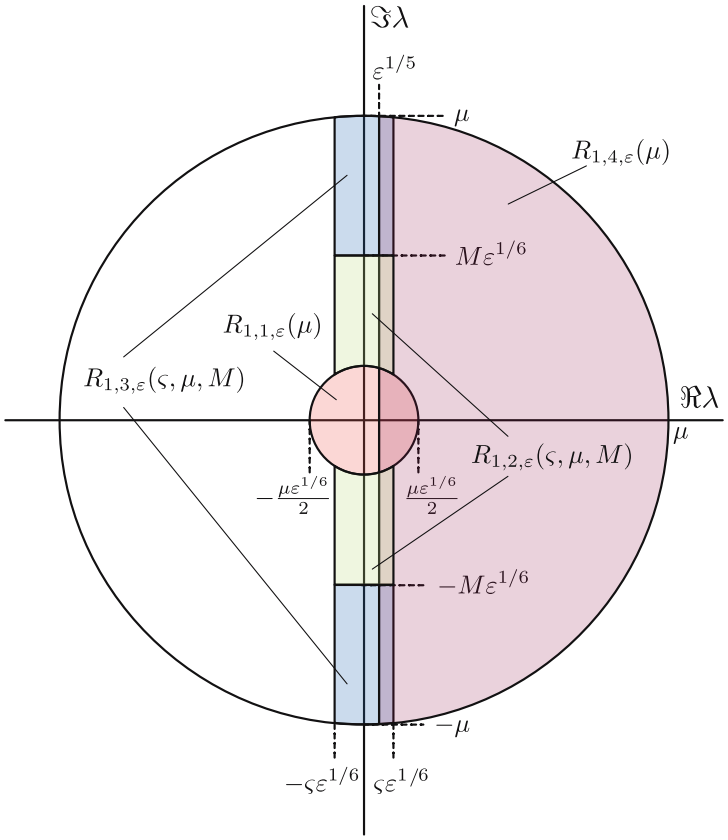


图14：图中展示了球 $R_1(\mu) \subset \mathbb{C}$ 的子区域 $R_{1,1,\varepsilon}(\mu)R_{1,2,\varepsilon}(\varsigma,\mu,M)R_{1,3,\varepsilon}(\varsigma,\mu,M)$, 以及 $R_{1,4,\varepsilon}(\mu)$。

命题 *3.9.* 设 $0 < a < \frac{1}{2}$, $0 < \gamma < \gamma_*(a)$，且 $c > c_*(a)$。固定 $\delta > 0$。若 $0 < \varepsilon \ll \mu \ll 1$，则存在一个包含 *0* 的开区间 $I_\varepsilon \subset \mathbb{R}$ 以及一个光滑函数 $\lambda_\varepsilon\colon I_\varepsilon \to \mathbb{C}$，使得对于某个 $\rho \in \mathbb{R}$，$\lambda \in R_{1,1,\varepsilon}(\mu)$ 是主公式 *(3.42)* 的解，当且仅当对于某个 $\tilde{\rho} \in I_\varepsilon$，有 $\lambda = \lambda_\varepsilon(\tilde{\rho})$。此外，有 $\lambda_\varepsilon(0) = \Re(\lambda_\varepsilon'(0)) = 0$, $\Re(\lambda_\varepsilon(\rho)) < 0$，其中 $\rho \in I_\varepsilon \setminus \{0\}$，并且

$$\left|\lambda_\varepsilon'(0) - \mathrm{i}c\right| \le \delta, \qquad \left|\lambda_\varepsilon''(0) + \frac{2\kappa c^3}{L_0}\varepsilon^{\frac{2}{3}}\right| \le \delta\varepsilon^{\frac{2}{3}} \tag{3.80}$$

其中 $L_0 = L_\mathrm{r} + L_\mathrm{l} > 0$ 由 (2.7) 和 (2.8)定义，并且 $\kappa > 0$ 由以下内容给出

$$\begin{aligned}\kappa \coloneqq -\frac{2\Omega_0(1-a+a^2)^{1/3}}{3c^2}\Bigg(&\frac{1}{(u_1-\gamma f(u_1)-a)^{1/3}(u_2-\gamma f(u_2)-a)}\\ &+\frac{1}{(\bar{u}_1-\gamma f(\bar{u}_1)-a)^{1/3}(\bar{u}_2-\gamma f(\bar{u}_2)-a)}\Bigg),\end{aligned} \tag{3.81}$$

with $-\Omega_0 < 0$ 表示艾里函数 $\mathrm{Ai}(z)$ *(*参见附录 *C)* 的最大零点 .

证明。 在此证明中， $C \ge 1$ 表示一个与 λ、 ν、 μ 和 ε 无关的常数；必要时可取更大的值。此外， $C_\nu \ge 1$ 表示一个与 λ、 μ 和 ε 无关的常数；必要时可取更大的值。

我们利用命题 C.2 展开

$$\Upsilon_j(z) = I_0\left(-\frac{z^2}{\theta_j c^3}\right) = -\frac{2\Omega_0}{3\theta_j c^3}\,z^2 + \mathcal{O}(z^4) \tag{3.82}$$

对于 $z\in\mathbb{C}$，其中 $|z|\ll 1$ 和 $j=\mathrm{uf},\ \mathrm{lf}$，其中 I_0 由式（C.1）给出。另一方面，命题 2.2 给出了展开式

$$\frac{L_0}{L_\varepsilon}=\varepsilon+\mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{4}{3}}), \tag{3.83}$$

对于 $0<\varepsilon\ll 1$。我们对主公式（3.42）取主复对数，乘以 L_0/L_ε，并代入展开式（3.82）和（3.83）。利用恒等式（2.6）和（3.36）以及残差估计（3.43），可得

$$\mathrm{i}\rho L_0-\frac{\lambda}{c}L_0+\kappa\varepsilon^{\frac{2}{3}}\lambda^2=h_{\varepsilon,\nu}(\lambda) \tag{3.84}$$

对于 $\rho\in U$、$0<\varepsilon\ll\mu\ll\nu\ll 1$和 $\lambda\in B_0(\mu\varepsilon^{1/6})$，其中 $U\subset\mathbb{C}$ 与§3.5中一样，是一个 μ、ε、λ 和 ν-独立的有界开集，包含区间 $[-\pi/L_\varepsilon,\pi/L_\varepsilon)$；函数$h_{\varepsilon,\nu}\colon B_0(\mu\varepsilon^{1/6})\to\mathbb{C}$满足如下估计

$$|h_{\varepsilon,\nu}(\lambda)|\le C_\nu\left(\varepsilon^{\frac{4}{3}}+|\lambda|^4\varepsilon^{\frac{1}{3}}+|\lambda|\varepsilon|\log(\varepsilon)|\right)+C\eta(\nu)\varepsilon^{\frac{2}{3}}|\lambda|^2. \tag{3.85}$$

由平移不变性，特征值问题（2.15）-（2.16）存在非平凡解 $\Psi(\xi)=(u_\varepsilon'(\xi)\ v_\varepsilon'(\xi)\ w_\varepsilon'(\xi))^\top$，对应于$(\lambda,\ \rho)=(0,\ 0)$。因此，根据命题3.8，$(\lambda,\ \rho)=(0,\ 0)$必定是（3.84）的一个解，这意味着$h_{\varepsilon,\nu}(0)=0$。

接下来，我们证明 $h_{\varepsilon,\nu}$ 是解析函数。首先注意到，方程 (2.15)-(2.16) 对于 $\lambda,\rho\in\mathbb{C}$ 存在非平凡解，当且仅当 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho L_\varepsilon}$ 是单值矩阵 $\mathcal{T}_\varepsilon(L_\varepsilon,0;\lambda)$ 的特征值，其中 $\mathcal{T}_\varepsilon(\xi,y;\lambda)$ 表示系统 (2.15) 的演化。根据 [65, 引理 2.1。4]，演化 $\mathcal{T}_\varepsilon(\xi,y;\lambda)$ 关于 $\lambda\in\mathbb{C}$ 解析，因为其系数矩阵是解析的。将 $\mathcal{T}_\varepsilon(L_\varepsilon,0;\lambda)$ 的特征值记为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho_{1,\varepsilon}(\lambda)L_\varepsilon}$、$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho_{2,\varepsilon}(\lambda)L_\varepsilon}$ 和 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho_{3,\varepsilon}(\lambda)L_\varepsilon}$。根据解析微扰理论，参见 [66, 第二章。1]，$\rho_{1,\varepsilon}$、$\rho_{2,\varepsilon}$ 和 $\rho_{3,\varepsilon}$ 可以选为连续函数，并且对于所有 $\lambda\in\mathbb{C}$，矩阵 $\mathcal{T}_\varepsilon(L_\varepsilon,0;\lambda)$ 都有相同数量的不同特征值，例外点的离散集合除外。

反证法，假设 $\lambda_0\in B_0(\mu\varepsilon^{1/6})$ 是一点，在该点有 $\rho_{i,\varepsilon}(\lambda_0)=\rho_{j,\varepsilon}(\lambda_0)$ $2U$ 对于 $i,j\in\{1,2,3\}$，且 $i\ne j$。那么，利用 $\rho_{i,\varepsilon}$ 和 $\rho_{j,\varepsilon}$ 的连续性，并应用命题 3.8，我们推知存在 λ_0 的一个开邻域 $\mathcal{U}_\varepsilon\subset B(\mu\varepsilon^{1/6})$，使得数对 $(\rho_{i,\varepsilon}(\lambda)\ \lambda)$、$(\rho_{j,\varepsilon}(\lambda)\ \lambda)$ 属于 $U\times\mathcal{U}_\varepsilon$，并且对所有 $\lambda\in\mathcal{U}_\varepsilon$ 都必须满足主公式 (3.42)。因此，对于每个 $\lambda\in\mathcal{U}_\varepsilon$，都有 $\rho_{i,\varepsilon}(\lambda)=\rho_{j,\varepsilon}(\lambda$。由于例外点集合在 $\mathbb{C}$ 中是离散的，这意味着对于所有 $\lambda\in\mathbb{C}$，$\mathcal{T}_\varepsilon(L_\varepsilon,0;\lambda)$ 至多有两个不同的特征值。然而，在 $\lambda=0$ 处这不可能成立，因为在 $\lambda=0$ 处，特征值问题 (2.15) 与关于周期轨道 $(u_\varepsilon(\xi)\ v_\varepsilon(\xi)\ w_\varepsilon(\xi))^\top$ 的变分方程 (2.1) 相同；根据命题 4.7]，该轨道是双曲的，具有二维稳定流形和二维不稳定流形。也就是说，单值矩阵 $\mathcal{T}_\varepsilon(L_\varepsilon,0;0)$ 有三个不同的特征值：一个中性特征值 1、一个模为 >1 的特征值，以及一个模为 <1 的特征值。由此可得，对于每个 $\lambda\in B_0(\mu\varepsilon^{1/6})$，$\mathcal{T}_\varepsilon(L_\varepsilon,0;\lambda)$ 中满足 $\rho\in U$ 的特征值 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho L_\varepsilon}$ 都是代数单重的。因此，根据解析微扰理论，参见第 II.1]，章，它们关于 λ 解析依赖。由于根据估计 (3.87)，(3.84) 对每个 $\lambda\in B_0(\mu\varepsilon^{1/6})$ 都有唯一解 $\rho\in U$，因此必定存在一个 $j_0\in\{1,2,3\}$，使得

$$h_{\varepsilon,\nu}(\lambda)=\mathrm{i}\rho_{j_0,\varepsilon}(\lambda)L_0-\frac{\lambda}{c}L_0+\kappa\varepsilon^{\frac{2}{3}}\lambda^2$$

对每个 $\lambda\in B_0($ $\mu\varepsilon^{1/6})$ 都成立。因此我们得出，$h_{\varepsilon,\nu}$ 是解析的，且 $\rho_{j_0,\varepsilon}\colon B_0(\mu\varepsilon^{1/6})\to\mathbb{C}$ 由下式给出

$$\rho_{j_0,\varepsilon}(\lambda)=-\mathrm{i}\frac{\lambda}{c}+\mathrm{i}\frac{1}{L_0}\left(\kappa\varepsilon^{\frac{2}{3}}\lambda^2-h_{\varepsilon,\nu}(\lambda)\right).$$

根据估计（3.85），可得

$$\sup_{\lambda\in B_0\left(\mu\varepsilon^{1/6}\right)}\left|\kappa\varepsilon^{\frac{2}{3}}\lambda^2-h_{\varepsilon,\nu}(\lambda)\right|\le C_\nu\varepsilon$$

对所有 $0<\varepsilon\ll\mu\ll\nu\ll 1$ 均成立。因此，对一阶导数使用柯西估计，可得

$$\left|\rho'_{j_0,\varepsilon}(\lambda)+\mathrm{i}c^{-1}\right|\le\frac{\sup\left\{\left|\kappa\varepsilon^{\frac{2}{3}}z^2-h_{\varepsilon,\nu}(z)\right|:z\in R_{1,1,\varepsilon}(\mu)\right\}}{\frac{1}{2}\mu\varepsilon^{1/6}}\le C_\nu\varepsilon^{\frac{5}{6}}\tag{3.86}$$

对于所有 $0<\varepsilon\ll\mu\ll\nu\ll 1$ 和 $\lambda\in R_{1,1,\varepsilon}(\mu)$。因此，我们发现，只要满足 $0<\varepsilon\ll\mu\ll\nu\ll 1$，解析函数 $\rho_{j_0,\varepsilon}$ 就会将球 $R_{1,1,\varepsilon}(\mu)$ 双射到其像 V_ε上。根据开映射定理，该像必为开集，且因 $\rho_{j_0,\varepsilon}(0)=0$ 而包含原点。根据全纯逆函数定理，其逆函数 $\lambda_\varepsilon\colon V_\varepsilon\to R_{1,1,\varepsilon}(\mu)$ 也必为解析函数。利用区间 $[-\pi/L_\varepsilon,\pi/L_\varepsilon)$ 包含于 U这一点，我们得出，存在一个开区间 $I_\varepsilon\subset\mathbb{R}$，使得 $\lambda\in R_{1,1,\varepsilon}(\mu)$ 是某个 $\rho\in\mathbb{R}$ 对应的主公式 (3.42) 的解，当且仅当对于某个 $\tilde\rho\in I_\varepsilon$，我们有 $\lambda=\lambda_\varepsilon(\tilde\rho)$。

为了得到谱曲线 $\lambda_\varepsilon|_{I_\varepsilon}$的界，我们先对 ρ_{j_0}的二阶导数$_\varepsilon$ 进行界定，使用柯西估计。因此，借助估计式（3.85），我们得到

$$\begin{aligned}\left|\rho''_{j_0,\varepsilon}(\lambda)-2\mathrm{i}\frac{\kappa}{L_0}\varepsilon^{\frac{2}{3}}\right|&\le\frac{2!\sup\left\{|h_{\varepsilon,\nu}(z)|:z\in R_{1,1,\varepsilon}(\mu)\right\}}{\frac{1}{4}\mu^2\varepsilon^{1/3}}\\&\le C_\nu\varepsilon^{\frac{2}{3}}\left(\mu^2+\mu^{-2}\varepsilon^{\frac{1}{3}}+\mu^{-1}\varepsilon^{\frac{1}{6}}|\log(\varepsilon)|\right)+C\eta(\nu)\varepsilon^{\frac{2}{3}}\end{aligned}\tag{3.87}$$

对所有 $0<\varepsilon\ll\mu\ll\nu\ll 1$ 和 $\lambda\in R_{1,\ 1,\ \varepsilon}(\mu)$ 均成立。因此，只要 $0<\varepsilon\ll\mu\ll\nu\ll 1$，我们便发现实函数 $\rho_\varepsilon^R\colon(-\frac{1}{2}\mu\varepsilon^{1/6},\ \frac{1}{2}\mu\varepsilon^{1/6})\to\mathbb{R}$，其定义为 $\rho_\varepsilon^R(\omega)=\Re\rho_{j_0,\ \varepsilon}(\mathrm{i}\omega)$，是严格凸的。此外，由于该问题具有实对称性，必有 $\rho'_{j_0,\ \varepsilon}(0)\in\mathbb{R}$，这意味着 $\rho_\varepsilon^R(0)=0=\left(\rho_\varepsilon^R\right)'(0)$。由此可知，$\rho_\varepsilon^R(\omega)$ 在 $\omega=0$处取得严格最小值，因此对所有 $\omega\in(-\frac{1}{2}\mu\varepsilon^{1/6},\ \frac{1}{2}\mu\varepsilon^{1/6})\setminus\{0\}$，它都严格为正。也就是说，除原点外，谱曲线 $\lambda_\varepsilon|_{I_\varepsilon}$ 不会与虚轴相交；在原点处，我们有

$$\lambda_\varepsilon(0)=0,\qquad\lambda'_\varepsilon(0)=\frac{1}{\rho'_{j_0,\varepsilon}(0)},\qquad\lambda''_\varepsilon(0)=-\frac{\rho''_{j_0,\varepsilon}(0)}{\left(\rho'_{j_0,\varepsilon}(0)\right)^3}\tag{3.88}$$

根据反函数定理。利用估计（ 3 87 $\rho'_{j_0\,\varepsilon}\ 0\ \in\mathbb{R}$ $\lambda_\varepsilon^R\ \ I_\varepsilon\to$ 。），$\mathbb{R}$ $\lambda_\varepsilon^R\ \rho\ =\Re\lambda_\varepsilon\ \rho$ $(\lambda_\varepsilon^R)'\ 0\ =0$ $(\lambda_\varepsilon^R)''\ 0\ <0$ 3 86 3 87 并回想. ()，我们注意到：其中() () 满足() 且()，正如所需。最后，利用（。）、（。）和（3.88），我们得到（3.80）。 □

3.6.2 区域 $R_{1,\ 2,\ \varepsilon}(\varsigma,\ \mu,\ M)$

我们通过证明任意解$R_{1,\ 2,\ \varepsilon}(\varsigma,\ \mu,\ M)$ 的实部都严格为负，从而排除区域$\lambda\in R_{1,\ 2,\ \varepsilon}(\varsigma,\ \mu,\ M)$ 中存在不稳定谱的可能性。为此，我们使用附录C 中的艾里函数展开，并利用函数 Υ_{uf}和 Υ_{lf}的单调性。

命题 3.10. 设 $0<a<\frac{1}{2}$ 且 $0<\gamma<\gamma_*(a)$。固定 $\mu>0$。若 $0<\varepsilon\ll\varsigma\ll 1$，则主公式$\lambda\in R_{1,2,\varepsilon}(\varsigma,\mu,\varsigma^{-1/2})$ ((3.42) 的任意解 $\Re(\lambda)<0$。

证明。在此证明中，$C\ge 1$ 表示一个与 λ、ε、ν和 ς无关的常数，必要时可取更大的值。在整个证明过程中，我们使用简写 $\lambda_r=\varepsilon^{-1/6}\Re(\lambda)$ 和 $\lambda_i=\varepsilon^{-1/6}\Im(\lambda)$。

若 $0<\varepsilon\ll\varsigma\ll 1$，则对于 $\lambda\in R_{1,2,\varepsilon}(\varsigma,\mu,\varsigma^{-1/2})$，有 $\frac{1}{4}\mu\le|\lambda_i|\le\varsigma^{-1/2}$ 且 $|\lambda_r|\le\varsigma$，因此

$$\left|\frac{\lambda^2}{\varepsilon^{1/3}}+\lambda_i^2\right|\le C\sqrt{\varsigma},\qquad\Re\left(\frac{\lambda^2}{\varepsilon^{1/3}}\right)\le\varsigma^2.$$

因此，　利用中值定理并结合命题 C.2，我们估计

$$\left|\Upsilon_j\left(\frac{\lambda}{\varepsilon^{1/6}}\right)-I_0\left(\frac{\lambda_i^2}{\theta_j c^3}\right)\right|=\left|I_0\left(-\frac{\lambda^2}{\theta_j c^3\varepsilon^{1/3}}\right)-I_0\left(\frac{\lambda_i^2}{\theta_j c^3}\right)\right|\le C\sqrt{\varsigma},\qquad\left|I_0\left(\frac{\lambda_i^2}{\theta_j c^3}\right)\right|\le C\tag{3.89}$$

对于 $j=\mathrm{lf}$、uf，若 $0<\varepsilon\ll\varsigma\ll 1$ 且 $\lambda\in R_{1,\,2,\,\varepsilon}(\varsigma,\ \mu,\ \varsigma^{-1/2})$，其中函数 I_0 由式（C.1）给出。因此，对主公式（3.42）取绝对值，并利用（3.89）和命题 3.8，可得

$$\mathrm{e}^{\frac{\Re(\lambda)}{c}L_\varepsilon}\le\left|\left(1-\frac{(u_2-u_1)I_0\left(\frac{\lambda_i^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}\right)}{u_2-\gamma f(u_2)-a}\right)\left(1-\frac{(\bar u_2-\bar u_1)I_0\left(\frac{\lambda_i^2}{\theta_{\mathrm{uf}}c^3}\right)}{\bar u_2-\gamma f(\bar u_2)-a}\right)\right|+C\eta(\nu)\tag{3.90}$$

给定 $0<\varepsilon\ll\varsigma\ll\nu\ll 1$ 和 $\lambda\in R_{1,2,\varepsilon}(\varsigma,\mu,\varsigma^{-1/2})$。我们接下来证明，对于 $\lambda\in R_{1,2,\varepsilon}(\varsigma,\mu,\varsigma^{-1/2})$，(3.90) 右侧严格小于 1。由命题 C.2，函数 $I_0(z)$ 在 $[0,\infty)$ 上严格递增，且 $I_0(0)=0$ 和 $I_0(z)\to 1$ 当 $z\to\infty$。因此，利用

$$\frac{u_2-u_1}{u_2-\gamma f(u_2)-a}>0,\qquad\frac{\bar u_2-\bar u_1}{\bar u_2-\gamma f(\bar u_2)-a}>0,$$

我们注意到，函数

$$A_{\mathrm{lf}}(z):=1-\frac{(u_2-u_1)I_0\left(\frac{z^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}\right)}{u_2-\gamma f(u_2)-a},\qquad A_{\mathrm{uf}}(z):=1-\frac{(\bar u_2-\bar u_1)I_0\left(\frac{z^2}{\theta_{\mathrm{uf}}c^3}\right)}{\bar u_2-\gamma f(\bar u_2)-a}$$

在 $[0,\infty)$ 上严格递减。因此，我们有

$$1=A_{\mathrm{lf}}(0)>A_{\mathrm{lf}}\left(\tfrac14\mu\right)\ge A_{\mathrm{lf}}(z)\ge\lim_{w\to\infty}A_{\mathrm{lf}}(w)=\frac{u_1-\gamma f(u_1)-a}{u_2-\gamma f(u_2)-a}$$

and

$$1=A_{\mathrm{uf}}(0)>A_{\mathrm{uf}}\left(\tfrac14\mu\right)\ge A_{\mathrm{uf}}(z)\ge\lim_{w\to\infty}A_{\mathrm{uf}}(w)=\frac{\bar u_1-\gamma f(\bar u_1)-a}{\bar u_2-\gamma f(\bar u_2)-a}$$

对于 $z\ge\frac14\mu$，其中我们利用了 $f(u_1)=f(u_2)$ 且 $f(\bar u_1)=f(\bar u_2)$。回顾 u_1、$\bar u_1$、u_2 和 $\bar u_2$ 的表达式 (1.4)、(1.5) 和 (1.6)，并利用 $f(u_1)=f(u_2)<0$、$f(\bar u_1)=f(\bar u_2)>0$、$0<a<\frac12$ 以及 $\gamma>0$，我们得到 -

$$0>\frac{u_1-\gamma f(u_1)-a}{u_2-\gamma f(u_2)-a}>\frac{u_1-a}{u_2-a}>-\frac12,\qquad 0>\frac{\bar u_1-\gamma f(\bar u_1)-a}{\bar u_2-\gamma f(\bar u_2)-a}>\frac{\bar u_1}{\bar u_2}>-2$$

从而

$$A_{\mathrm{lf}}(z)>-\frac12,\qquad A_{\mathrm{uf}}(z)>-2$$

对于 $z\ge 0$。因此，如果乘积 $|A_{\mathrm{lf}}(z)||A_{\mathrm{uf}}(z)|$ 对于 $z\ge\frac14\mu$ 曾等于 1，那么它必定在某个 $z_*\ge\frac14\mu$ 值处取到，使得 $A_{\mathrm{lf}}(z_*)\ge\frac12>0$ 且 $-A_{\mathrm{uf}}(z_*)\le-1<0$，从而 $A_{\mathrm{lf}}(z_*)A_{\mathrm{uf}}(z_*)=-1$。设 $z_*\ge\frac14\mu$ 满足 $A_{\mathrm{lf}}(z_*)>0$ 且 $A_{\mathrm{uf}}(z_*)<0$。那么，存在 $0<z_-<z_*<z_+$ 使得 $A_{\mathrm{uf}}(z_-)=0$ 且 $A_{\mathrm{lf}}(z_+)=0$，因此 $A_{\mathrm{lf}}(z)A_{\mathrm{uf}}(z)$ 在区间 (z_-,z_+) 上取得其最小值。我们证明该最小值严格大于 -1。对于 $z\in(z_-,z_+)$，有

$$\begin{aligned}A_{\mathrm{lf}}(z)A_{\mathrm{uf}}(z)&=\left(1-\frac{(u_2-u_1)I_0\left(\frac{z^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}\right)}{u_2-\gamma f(u_2)-a}\right)\left(1-\frac{(\bar u_2-\bar u_1)I_0\left(\frac{z^2}{\theta_{\mathrm{uf}}c^3}\right)}{\bar u_2-\gamma f(\bar u_2)-a}\right)\\&>\left(1-\frac{(u_2-u_1)I_0\left(\frac{z^2}{\theta_{\mathrm{uf}}c^3}\right)}{u_2-\gamma f(u_2)-a}\right)\left(1-\frac{(\bar u_2-\bar u_1)I_0\left(\frac{z^2}{\theta_{\mathrm{uf}}c^3}\right)}{\bar u_2-\gamma f(\bar u_2)-a}\right)\end{aligned}$$

由于 $\theta_{\mathrm{uf}}>\theta_{\mathrm{lf}}$ 对于 $0<a<\frac{1}{2}$ 且 $0<\gamma<\gamma_*(a)$；见（3.36）。后者的右侧关于 $I_0(z^2/(\theta_{\mathrm{uf}}c^3))$ 是二次函数。利用（2.6），可知它在以下情况下达到最小值

$$(u_2-u_1)I_0\left(\frac{z^2}{\theta_{\mathrm{uf}}c^3}\right)=\frac{1}{2}\left(u_2-\gamma f(u_2)-\bar{u}_2+\gamma f(\bar{u}_2)\right),$$

因此，利用 $0<a<\frac{1}{2}$ 和 $0<\gamma<\gamma_*(a)<6$，我们有

$$\begin{aligned}A_{\mathrm{lf}}(z)A_{\mathrm{uf}}(z)&>\frac{\left(u_2-\gamma f(u_2)-a+\bar{u}_2-\gamma f(\bar{u}_2)-a\right)^2}{4(\bar{u}_2-\gamma f(\bar{u}_2)-a)(u_2-\gamma f(u_2)-a)}\\&=-\frac{(1-2a)^2(9+(-2-a+a^2)\gamma)^2}{27(9+2(2-5a+5a^2)\gamma+(-1+a)^2a^2\gamma^2)}>-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

因此，当 $z\geq\frac{1}{4}\mu$ 时，量 $|A_{\mathrm{lf}}(z)A_{\mathrm{uf}}(z)|$ 与 1 始终保持严格正距离。于是，取$0<\varepsilon\ll\varsigma\ll\nu\ll1$，即可确保对于$\lambda\in R_{1,2,\varepsilon}(\varsigma,\mu,\varsigma^{-1/2})$，(3.90) 的右端与 1 始终保持严格正距离，因此该区域内 (3.42) 的任意解都必须满足 $\Re(\lambda)<0$。 □

3.6.3 区域 $R_{1,3,\varepsilon}(\varsigma,\mu,M)$

最后，我们证明任意解 $\lambda\in R_{1,3,\varepsilon}(\varsigma,\mu,M)$ 主公式（3.42）的实部必为严格负值。这可通过研究函数 $\Upsilon_{\mathrm{uf}}(z)$ 和 $\Upsilon_{\mathrm{lf}}(z)$ 在$z\to\infty$时的极限行为来证明。

命题 3.11。设 $0<a<\frac{1}{2}$ 和 $0<\gamma<\gamma_*(a)$。若 $0<\varepsilon\ll\varsigma,\mu,1/M\ll1$，任意解$\lambda\in R_{1,3,\varepsilon}(\varsigma,\mu,M)$ 满足主公式 (3.42) 则满足 $\Re(\lambda)<0$。

证明。我们采用与命题 3.10 的证明类似的方法。再次，$C\geq1$ 表示一个 λ-、ε-、ν-、M-，以及 ς-无关的常数，必要时可取更大值。此外，我们使用以下简写$\lambda_r=\varepsilon^{-1/6}\Re(\lambda)$ 和 $\lambda_i=\varepsilon^{-1/6}\Im(\lambda)$。

若 $0<\varepsilon\ll\varsigma,1/M,\mu\ll1$，则对 $\lambda\in R_{1,3,\varepsilon}(\varsigma,\mu,M)$，有 $M\leq|\lambda_i|\leq\mu\varepsilon^{-1/6}$ 和 $|\lambda_r|\leq\varsigma$，因此

$$\Re\left(\frac{\lambda^2}{\varepsilon^{1/3}}\right)=\lambda_r^2-\lambda_i^2\leq-\frac{M^2}{2}.$$

因此，命题 C.2给出

$$\begin{aligned}\left|\Upsilon_j(\lambda\varepsilon^{-1/6})-1\right|&=\left|I_0\left(-\frac{\lambda^2}{\theta_jc^3\varepsilon^{1/3}}\right)-1\right|\leq\frac{1}{\mathrm{Ai}'(-\Omega_0)^2}\int_{-\Omega_0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{M^2}{2\theta_jc^3}(s+\Omega_0)}\mathrm{Ai}(s)^2\mathrm{d}s\\&=1-I_0\left(\frac{M^2}{2\theta_jc^3}\right)\leq\frac{C}{M^4},\end{aligned}$$

对于 $j=\mathrm{uf}$、lf，若 $0<\varepsilon\ll\varsigma$，$1/M$，$\mu\ll1$ 且 $\lambda\in R_{1,3,\varepsilon}(\varsigma,\mu,M)$，其中函数 I_0 由式（C.1）给出。因此，命题 3.8 意味着

$$\mathrm{e}^{\frac{\Re(\lambda)}{c}L_\varepsilon}=\left|\left(1+\frac{u_1-u_2}{u_2-\gamma f(u_2)-a}\right)\left(1+\frac{\bar{u}_1-\bar{u}_2}{\bar{u}_2-\gamma f(\bar{u}_2)-a}\right)\right|+C\eta(\nu),\tag{3.91}$$

若 $0<\varepsilon\ll\varsigma$，$\mu$，$1/M\ll\nu\ll1$ 且 $\lambda\in R_{1,3,\varepsilon}(\varsigma,\mu,M)$。

我们通过证明（3.91）的右端严格小于 1 来继续推导，由此可知，任意解 $\lambda\in R_{1,3,\varepsilon}(\varsigma,\mu,M)$（3.42）都必须满足 $\Re(\lambda)<0$。回顾 $u_1,\bar{u}_1,u_2$ 和 $\bar{u}_2$ 的公式（1.4）、（1.5）和（1.6），我们计算得

$$\left(1+\frac{u_1-u_2}{u_2-\gamma f(u_2)-a}\right)\left(1+\frac{\bar{u}_1-\bar{u}_2}{\bar{u}_2-\gamma f(\bar{u}_2)-a}\right)=\frac{a(1-a)\left(9-\left(2+4a-4a^2\right)\gamma+a(1-a)\gamma^2\right)}{9+2\left(2-5a+5a^2\right)\gamma+(1-a)^2a^2\gamma^2}.$$

我们注意到，分子和分母中 γ 项前面的系数在区域 $0 < a < \frac{1}{2}$ 内均无零点，因此每一项的符号固定。我们还注意到，对于 $0 < a < \frac{1}{2}$， $\gamma_*(a) < 6$。因此，我们估计

$$\frac{a(1-a)\left(9-\left(2+4a-4a^2\right)\gamma+a(1-a)\gamma^2\right)}{9+2\left(2-5a+5a^2\right)\gamma+(1-a)^2a^2\gamma^2} \leq \frac{a(1-a)\left(9+a(1-a)\gamma^2\right)}{9} \leq \frac{1}{2}$$

and

$$\frac{a(1-a)\left(9-\left(2+4a-4a^2\right)\gamma+a(1-a)\gamma^2\right)}{9+2\left(2-5a+5a^2\right)\gamma+(1-a)^2a^2\gamma^2} \geq -\frac{a(1-a)\left(2+4a-4a^2\right)\gamma}{9} \geq -\frac{1}{2},$$

由此我们推得（3.91）的右端严格小于 1，条件是 且 ， 3, $\varepsilon(\varsigma,\ \mu,\ M)$，因此 $\Re(\lambda) < 0$。

□

命题2.4的证明

该结果由结合命题 3.8、3.9、3.10以及3.11得到。

4 折叠点附近的特征值问题

命题 2.4的证明，特别是第 §3.6节中对主公式的分析，依赖于命题 3.6-3.7 关于特征值问题（2.15）在区间 $\mathcal{I}_{\mathrm{lf}}$ 和 $\mathcal{I}_{\mathrm{uf}}$上的行为所作的估计；沿着这些区间，波列分别经过左下折叠点和右上折叠点的小邻域。在本节中，我们通过仔细分析（3.6-3.7 ）在这些区间上的行为，证明命题 2.15-3.7 。我们提出一种基于几何去奇异化技术的方法 [20, 69], ，并将其应用于将线性化特征值问题与波列的存在性问题耦合后得到的系统 [22]。

关键挑战在于，当波列经过非双曲折叠点附近时，中心空间特征值与不稳定空间特征值之间不存在与 (ε,λ) 无关的统一谱隙；因此，对于区间 $\mathcal{I}_{\mathrm{lf}}$ 和 $\mathcal{I}_{\mathrm{uf}}$ 上的小 $\lambda \in R_1(\mu)$，无法为特征值问题 (2.15) 构造与 (ε,λ) 无关的指数三分解。尽管如此，中心-不稳定动力学与稳定动力学之间仍存在谱隙。因此，根据 §4.1 所述的存在性问题的结构，我们推导出一种坐标变换，将二维（非双曲）中心-不稳定动力学与（双曲）稳定动力学分离。基于所得线性化问题的结构，我们在 §4.2 提出一个简化模型，用以识别关键项，尤其是那些反映特征值参数 λ 首阶效应的项，并据此推导出折叠点附近特征值问题 (2.15) 的预期首阶行为。借鉴玩具模型的行为，在 §4.3 中我们回到完整问题，并对（非双曲）中心-不稳定空间中特征值问题的行为推导出精确估计。最后，在 §4.4 中，我们针对情形 $\Re(\lambda) \geq \varepsilon^{1/5}$ 下的动力学得到温和估计，并在 §4.5 中完成命题 3.6-3.7 的证明。

记号。在本节中，我们使用记号 $f = \mathcal{O}(g)$ 表示 $|f| \leq C|g|$，其中 C 是一个常数，可以取为与 $0 < \varepsilon$、$|\lambda| \ll \nu \ll 1$ 无关。

4.1 设置与局部坐标

我们研究下折叠点 2.15）邻域内的特征值问题（$(u,\ w)\ = (u_1,\ f(u_1)$ ，并将其改写为

$$\Psi_\xi = \left(A_0(\xi;\varepsilon)+\lambda B\right)\Psi, \qquad A_0(\xi,\varepsilon) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -f'(u_\varepsilon(\xi)) & -c & 1 \\ -\frac{\varepsilon}{c} & 0 & \frac{\varepsilon\gamma}{c} \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} -\frac{1}{c} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

回顾 §2.1.4 中的结论：在折叠点邻域内，对于存在性问题（2.1），存在一种光滑坐标变换，可将非平凡动力学约化到二维中心流形上；借助吹胀去奇异化技术，可追踪波列解绕过非双曲折叠点的过程。这里，我们推导一个类似的局部坐标系来分析（4.1）。

波列解 $U_\varepsilon(\xi) = (u_\varepsilon,\ u'_\varepsilon,\ w_\varepsilon)(\xi)$ 满足一阶系统（2.1），我们将其写成如下形式

$$U_\xi = \mathcal{F}(U), \tag{4.2}$$

其中 $U = (u, v, w)$、$\mathcal{F}(U) = (v, -cv - f(u) + w, -\varepsilon/c(u - \gamma w - a))$。如 §2.1.4 所述，对于任意 $k > 0$，存在一个原点邻域 $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ 以及一个 C^k-坐标变换 $\mathcal{N}_\varepsilon : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^3$，使映射 $U = (u_1, 0, f(u_1))^\top + \mathcal{N}_\varepsilon(V)$ 将（2.1）变换为系统（2.9）。在该系统中，局部（非唯一）二维中心流形 $\mathcal{W}^{\mathrm{c}} := \{(x, y, z) \in \mathcal{V} :\ z = 0\}$ 上的非双曲中心动力学与正规双曲的 z-动力学相互解耦。沿用 [22], 中的分析，将对应于波列的周期轨道 Γ_ε 的二维不稳定流形 $\mathcal{W}^{\mathrm{u}}(\Gamma_\varepsilon)$ 追踪至折叠点邻域后，$\mathcal{W}^{\mathrm{u}}(\Gamma_\varepsilon)$ 进入该邻域时，在 ε 方向上与右慢流形的不稳定流形 $\mathcal{W}^{\mathrm{u}}(\mathcal{M}^r_\varepsilon)$ 指数级接近对齐，且与二维中心流形 $\mathcal{W}^{\mathrm{c}}$的强稳定纤维横截；因此，$\mathcal{W}^{\mathrm{u}}(\Gamma_\varepsilon)$ 沿着 $\mathcal{W}^{\mathrm{c}}$ 对齐，随后沿着右慢流形 $\mathcal{M}^r_\varepsilon$ 的不稳定流形 $\mathcal{W}^{\mathrm{u}}(\mathcal{M}^r_\varepsilon)$ 对齐。在折叠点邻域内，我们利用流形 $\mathcal{W}^{\mathrm{u}}(\Gamma_\varepsilon)$ 的不变性，并选取相对于该流形的坐标，以简化存在性和稳定性问题的分析。

特别要注意的是，$\mathcal{W}^{\mathrm{u}}$（Γ_ε）本身就是折叠点邻域内的二维正规吸引的局部不变类中心流形（因此代表了非唯一中心流形 $\mathcal{W}^{\mathrm{c}}$的一种选择）。因此，选取相对于该流形的坐标，并将相应的强稳定纤维拉直后，可得到与（2.9）形式相同的向量场，此时流形 $\mathcal{W}^{\mathrm{u}}$（Γ_ε）表示为 $z = 0$。稍微滥用一下记号，我们仍将该坐标变换记为 $\mathcal{N}_\varepsilon$。

综上所述，存在一个与 ε无关的原点邻域 $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$以及一个坐标变换 $\mathcal{N}_\varepsilon$：$\mathcal{V} \to \mathbb{R}^3$（另见例如[20]），使得映射 $U =$（u_1，0，f（u_1）$^\top$ $+\mathcal{N}_\varepsilon$（V）将存在性问题（4.2）变换为系统

$$V_\xi = \mathcal{G}(V), \tag{4.3}$$

其中 $V = (x,\ y,\ z)$ 和

$$\mathcal{G}(V) = \begin{pmatrix} g_1(x, y; \varepsilon) \\ g_2(x, y; \varepsilon) \\ g_3(x, y, z; \varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{f''(u_1)}{2\beta_1 c} x^2 - \frac{\beta_1}{\beta_2} y + \mathcal{O}\left(\varepsilon, xy, x^3\right) \\ -\frac{\varepsilon\beta_2}{c^2}\left(u_1 - \gamma f(u_1) - a - \frac{x}{\beta_1} - \frac{\gamma c y}{\beta_2} + \mathcal{O}\left(\varepsilon, x^2, xy, y^2\right)\right) \\ z\left(-c + \mathcal{O}\left(x, y, z, \varepsilon\right)\right) \end{pmatrix}.$$

该映射 $\mathcal{N}_\varepsilon$ 满足

$$N_0 := \mathcal{N}'_0(0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\beta_1} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\beta_2} & -c \\ 0 & \frac{c}{\beta_2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad N_0^{-1} := \begin{pmatrix} -\beta_1 & -\frac{\beta_1}{c} & \frac{\beta_1}{c^2} \\ 0 & 0 & \frac{\beta_2}{c} \\ 0 & -\frac{1}{c} & \frac{1}{c^2} \end{pmatrix},$$

其中

$$\beta_1 = (a^2 - a + 1)^{1/3}(u_1 - \gamma f(u_1) - a)^{-1/3}, \qquad \beta_2 = c(a^2 - a + 1)^{1/6}(u_1 - \gamma f(u_1) - a)^{-2/3}.$$

因此，线性映射 $\mathcal{N}'_0(0)$ 将系统变换为其关于 $\varepsilon = 0$ 的若尔当标准形。在（x，y，z）坐标中，$\mathcal{W}^{\mathrm{u}}(\Gamma_\varepsilon)$ 由子空间 $z = 0$ 给出，并由（x，y）坐标参数化。在

这些坐标中，波列 $\Gamma_\varepsilon(\xi)$ 由 $U_\varepsilon(\xi) = (u_1,\ 0,\ f(u_1))^\top + \mathcal{N}_\varepsilon(V_\varepsilon(\xi))$ 给出，其中 $V_\varepsilon(\xi) = (x_\varepsilon(\xi)\ y_\varepsilon(\xi),\ 0)$。此外，我们有

$$\mathcal{N}'_\varepsilon(V_\varepsilon) = N_0 + (n_{ij}(x,y;\varepsilon))_{i,j=1,2,3}\,, \tag{4.4}$$

其中

$$\begin{aligned} n_{ij}(x,y;\varepsilon) &= \mathcal{O}(|x|+|y|+\varepsilon), \qquad i=1,2, j=1,2,3\\ n_{3j}(x,y;\varepsilon) &= \mathcal{O}(\varepsilon), \qquad j=1,2,3. \end{aligned}$$

如 §2.1.4 所述，在该局部坐标系中，对于 $\varepsilon = 0$，临界流形 $\mathcal{M}_0$ 由条件 $z = 0$ 和 $g_1(x,y;0) = 0$确定，局部呈现为以原点 $(x,y) = (0,0)$ 为中心的开口向上的抛物线；抛物线的左、右分支分别表示 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{l}}$和 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{m}}$；见图10。可以利用爆破去奇异化技术分析子空间 $z = 0$ 中 (4.3) 的动力学；具体而言，通过追踪折叠点 [20,§4], 附近的扰动流形 $\mathcal{M}_\varepsilon^{\mathrm{l}}$，已知将正 x-轴附加到 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{l}}$后得到的扩展流形 $\mathcal{M}^{\mathrm{l}}_{,0}{}^{+}$ (2.10)，会扰动为局部不变流形 $\mathcal{M}^{\mathrm{l}}_{,\varepsilon}{}^{+}$，它在 C^0 中与 $\mathcal{M}^{\mathrm{l}}_{,0}{}^{+}$ 相距 $\mathcal{O}(\varepsilon^{2/3})$，并且在$C^1$ 中与 $\mathcal{M}^{\mathrm{l}}_{,0}{}^{+}$ 相距 $\mathcal{O}(\varepsilon^{1/3})$。此外，按照 [22, 命题 4.7], 中的分析，将周期轨道 Γ_ε沿折叠点向后追踪，可推知 Γ_ε 在某个邻域 $\mathcal{V}$ 内与 $\mathcal{M}^{\mathrm{l}}_{,\varepsilon}{}^{+}$相距 C^1-$\mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon})$，其中存在某个 $\vartheta_\nu > 0$。因此，我们可以用与流形 $\mathcal{M}^{\mathrm{l}}_{,\varepsilon}{}^{+}$相同的方式，在这些局部坐标中刻画波列 Γ_ε 的行为，误差至多为指数小量。对于充分小的 $\varepsilon_0 > 0$，记 $\mathcal{M}^{\mathrm{l},+} := \cup_{0\le\varepsilon\le\varepsilon_0}\mathcal{M}_\varepsilon^{\mathrm{l},+}$

W我们有以下结论，这归功于 [20, 22], 命题 2.2以及上述讨论 on.

引理 *4.1.* 存在连续函数 $\eta\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$，满足 $\eta(0) = 0$，使得在满足$0 < \varepsilon \ll \nu \ll 1$的条件下，存在与 ε无关的常数 $C_\nu, \vartheta_\nu > 0$，使下述结论成立。在区间$\mathcal{I}_{\mathrm{lf}}$ 上，与波列解 $(u_\varepsilon, w_\varepsilon)(\xi)$对应的方程 *(2.1)* 的周期轨道 Γ_ε 与 $\mathcal{M}^{\mathrm{l}}_{,\varepsilon}{}^{+}$ 是 C^1-$\mathcal{O}(e^{-\vartheta_\nu/\varepsilon})$-接近的，并且可以表示为方程 *(2.9)* 的一个解 $(x,y,z) = (x_\varepsilon(\xi)\ y_\varepsilon(\xi), 0)$，该解满足

$$\sup_{\xi\in\mathcal{I}_{\mathrm{lf}}} |x_\varepsilon(\xi)| + |y_\varepsilon(\xi)| \le \eta(\nu)$$

and

$$\begin{aligned} (x_\varepsilon, y_\varepsilon)\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right) &= (x_{\mathrm{in}}(\nu,\varepsilon), y_{\mathrm{in}}(\nu,\varepsilon)),\\ (x_\varepsilon, y_\varepsilon)\left(\xi^{\mathrm{out},L}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right) &= (x_{\mathrm{out}}(\nu,\varepsilon), y_{\mathrm{out}}(\nu,\varepsilon)), \end{aligned}$$

其中 $x_{\mathrm{in/out}}, y_{\mathrm{in/out}}$ 是满足以下条件的连续函数

$$\begin{aligned} |x_{\mathrm{in}}(\nu,\varepsilon) - x_{\mathrm{in}}(\nu,0)|, |y_{\mathrm{in}}(\nu,\varepsilon)|, |x_{\mathrm{out}}(\nu,\varepsilon) - x_{\mathrm{out}}(\nu,0)|, |y_{\mathrm{out}}(\nu,\varepsilon) - y_{\mathrm{out}}(\nu,0)| \le C_\nu\varepsilon^{2/3},\\ 0 < x_{\mathrm{in}}(\nu,0) < \eta(\nu), \qquad -\eta(\nu) < x_{\mathrm{out}}(\nu,0) < 0 < y_{\mathrm{out}}(\nu,0) < \eta(\nu) \end{aligned}$$

并且 $g_1(x_{\mathrm{out}}(\nu,\ 0)\ y_{\mathrm{out}}(\nu,\ 0); 0) = 0$。

现在我们转向线性化稳定性问题（4.1），并在以下引理中将其变换到同一局部坐标系。

引理 *4.2*。对于任意 $k > 0$ 和 $0 < \nu \ll 1$，存在 μ、$\varepsilon_0 > 0$ 以及一个 C^k-坐标变换$R_1(\mu) \times (0,\varepsilon_0) \times \mathcal{I}_{\mathrm{lf}} \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$，由 $\Psi = N_{\varepsilon,\lambda(\xi)}\Phi$定义，其中 $N_{\varepsilon,\lambda(\xi)} = \mathcal{N}'_\varepsilon(V_\varepsilon(\xi)) + \mathcal{O}(\lambda)$，以及一个重标度 $\zeta = \theta_{\mathrm{lf}}\xi$，它将线性化方程 *(4.1)* 变换为如下系统

$$\begin{aligned} X_\zeta &= X\left(-2x - \frac{\lambda^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3} + \mathcal{O}(x^2, y, \varepsilon, \lambda x, \lambda^3)\right) + Y\left(1 + \mathcal{O}(x,y,\varepsilon,\lambda)\right),\\ Y_\zeta &= \mathcal{O}(\varepsilon X, \varepsilon Y),\\ Z_\zeta &= \left(-\frac{c}{\theta_{\mathrm{lf}}} + \mathcal{O}(x,y,\varepsilon,\lambda)\right) Z, \end{aligned} \tag{4.5}$$

其中波列 $(x,y)(\zeta) = (x_\varepsilon, y_\varepsilon)(\zeta/\theta_{\mathrm{lf}})$ 满足方程

$$\begin{aligned} x_\zeta &= -x^2 + y + \mathcal{O}(xy, y^2, x^3, \varepsilon), \\ y_\zeta &= \varepsilon\,(1 + \mathcal{O}(x, y, \varepsilon)) \end{aligned}$$

在区间 $\xi = \zeta/\theta_{\mathrm{lf}} \in \mathcal{I}_{\mathrm{lf}}$ 上。

证明。我们首先变换 $\Psi = \mathcal{N}'_\varepsilon(V_\varepsilon(\xi))\tilde{\Phi}$，其中 $\tilde{\Phi} = (\tilde{X},\ \tilde{Y},\ \tilde{Z})^\top$，由此得到系统

$$\tilde{\Phi}_\xi = \left(\bar{A}(x_\varepsilon(\xi), y_\varepsilon(\xi); \varepsilon) + \lambda \bar{B}(x_\varepsilon(\xi), y_\varepsilon(\xi); \varepsilon)\right)\tilde{\Phi}, \tag{4.6}$$

其中 $\bar{A}(x,\ y;\ \varepsilon) = \mathcal{G}'\left((x,\ y,\ 0)^\top\right)$ 且

$$\begin{aligned} \bar{B}(x, y; \varepsilon) &= \left[\mathcal{N}'_\varepsilon\left((x, y, 0)^\top\right)\right]^{-1} B \mathcal{N}'_\varepsilon\left((x, y, 0)^\top\right) \\ &= \begin{pmatrix} b_{11}(x,y,\varepsilon) & \frac{\beta_1}{\beta_2 c^2} + b_{12}(x,y,\varepsilon) & -1 + b_{13}(x,y,\varepsilon) \\ \varepsilon b_{21}(x,y,\varepsilon) & \varepsilon b_{22}(x,y,\varepsilon) & \varepsilon b_{23}(x,y,\varepsilon) \\ \frac{1}{\beta_1 c} + b_{31}(x,y,\varepsilon) & \frac{1}{c^2\beta_2} + b_{32}(x,y,\varepsilon) & -\frac{2}{c} + b_{33}(x,y,\varepsilon) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其中 $b_{ij}(x,\ y,\ \varepsilon) = \mathcal{O}(x,\ y,\ \varepsilon)$。由于波列解局限于由子空间 $\mathcal{W}^{\mathrm{u}}(\Gamma_\varepsilon)$给出的不变流形 $z = 0$，我们可以将注意力限制在该子空间，并注意到特征值问题（4.6）的解由系统的解给出

$$\tilde{\Phi}_\xi = \left(\bar{A}(x, y; \varepsilon) + \lambda \bar{B}(x, y; \varepsilon)\right)\tilde{\Phi}, \tag{4.7}$$

其中 $(x,\ y) = (x_\varepsilon(\xi)\ y_\varepsilon(\xi))$ 满足

$$\begin{aligned} x_\xi &= g_1(x, y; \varepsilon), \\ y_\xi &= g_2(x, y; \varepsilon). \end{aligned}$$

这一约化 有效地在存在性问题中分离出了局部双曲动力学。

现在，我们旨在以类似方式，在 Φ变量中分离出相应的双曲动力学。注意，当（x、y）=（x_ε（ξ） y_ε（ξ））且 $\lambda = 0$时，波列的导数 $\Phi = V'_\varepsilon$（ξ）满足 线性化方程 $\Phi_\xi = A$（x、y；ε）Φ，该方程具有一个正规吸引不变子空间$\{Z = 0\}$，并由强稳定纤维构成叶状结构。一般而言，当 $|\lambda|$较小时，该流形（及其稳定叶状结构）在（4.7）中保持为一个正规吸引不变流形。因此，我们寻求一个坐标变换 （X、Y、Z）$\mapsto \Phi =$（X、Y、Z），它关于变量 $\Phi =$（X、Y、Z）是线性的，并将该流形平移至子空间$\{Z = 0\}$，当 $|\lambda|$较小时成立，同时使其稳定纤维变直。该变换的目标是在保持向量场关于线性化坐标的线性的同时，对系统进行分块对角化，从而将强稳定双曲动力学与折叠点附近的非双曲动力学分离开来。

为实现这一目标，我们首先考虑替代系统

$$\begin{aligned} V_\xi &= \mathcal{G}(V), \\ \tilde{W}_\xi &= \mathcal{G}(V + \tilde{W}) - \mathcal{G}(V) + \lambda \bar{B}(x, y; \varepsilon)\tilde{W}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

其中 $V = (x, y, z)$，且 $W = (W_1, W_2, W_3)$。注意，对解 $(V, W) = (V_\varepsilon, 0)$ 附近的 W-方程进行线性化，恰好得到特征值问题 (4.6)。考虑不变子空间 $z = 0$ 中的 (4.8)，当 $\lambda = 0$ 时，存在一个通常吸引的不变子流形，其由子空间 $W_3 = 0$ 给出。因此，对于 $\lambda \in R_1(\mu)$，当 $\mu > 0$ 足够小时，我们得到 (4.8) 的一个依赖于 λ 的局部中心流形，该流形包含于子空间 $z = 0$ [26] 中。现在我们进行一个近恒等坐标变换 $W = \mathcal{H}_{\varepsilon,\lambda}(W, V) = W + \mathcal{O}(\lambda)$，其中 $W = (W_1, W_2, W_3)$，该变换将此

中心流形变换到子空间 $W_3 = 0$，并使其强稳定纤维变直。简单计算表明，该变换满足

$$D_W \mathcal{H}_{\varepsilon,\lambda}(0, V_\varepsilon) = I + \lambda \left(\mathcal{H}_{ij}(x, y; \varepsilon, \lambda)\right)_{i,j=1,2,3}, \tag{4.9}$$

其中

$$\begin{aligned}
H_{1j}(x, y; \varepsilon, \lambda) &= \mathcal{O}\left(|x| + |y| + |\varepsilon| + |\lambda|\right), \\
H_{2j}(x, y; \varepsilon, \lambda) &= \mathcal{O}(\varepsilon), \\
H_{31}(x, y; \varepsilon, \lambda) &= \frac{1}{\beta_1 c^2} + \mathcal{O}\left(|x| + |y| + |\varepsilon| + |\lambda|\right), \\
H_{32}(x, y; \varepsilon, \lambda) &= \frac{1}{\beta_2 c^3} + \mathcal{O}\left(|x| + |y| + |\varepsilon| + |\lambda|\right), \\
H_{33}(x, y; \varepsilon, \lambda) &= 0
\end{aligned}$$

对于 $j = 1$、2、3。将所得系统在解 $(V,\ W) = (V_\varepsilon,\ 0)$ 附近线性化，可得到线性化方程

$$\begin{aligned}
X_\xi &= \theta_{\mathrm{lf}} X \left(-2x - \frac{\lambda^2}{\theta_{\mathrm{lf}} c^3} + \mathcal{O}(x^2, y, \varepsilon, \lambda x, \lambda^3)\right) + \theta_{\mathrm{lf}} Y \left(1 + \mathcal{O}(x, y, \varepsilon, \lambda)\right), \\
Y_\xi &= \mathcal{O}(\varepsilon X, \varepsilon Y), \\
Z_\xi &= \left(-c + \mathcal{O}(x, y, \varepsilon, \lambda)\right) Z,
\end{aligned} \tag{4.10}$$

其中

$$-\frac{f''(u_1)}{2\beta_1 c} = -\frac{\beta_1}{\beta_2} = \theta_{\mathrm{lf}} := -\frac{(a^2 - a + 1)^{1/6}(u_1 - \gamma f(u_1) - a)^{1/3}}{c} > 0.$$

相应的变换 以直接从（4.10）得到（4.6），因此通过设定

$$\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = H_{\varepsilon,\lambda}(\xi)\Phi,$$

其中矩阵 $H_{\varepsilon,\ \lambda}(\xi) := D_W \mathcal{H}_{\varepsilon,\ \lambda}(0,\ V_\varepsilon(\xi))$。回到（4.1），因此得到一个 C^k-坐标变换 $\Psi = N_{\varepsilon,\ \lambda}(\xi)\Phi$，它关于 Φ 是线性的，其中

$$N_{\varepsilon,\lambda}(\xi) := \mathcal{N}_\varepsilon'(V_\varepsilon(\xi)) H_{\varepsilon,\lambda}(\xi) \tag{4.11}$$

以及重标度 $\zeta = \theta_{\mathrm{lf}}\xi$，它将 (4.1) 变换为 (4.5)。 □

与引理 4.1 和引理 4.2 类似的结果对波列 Γ_ε 以及上折叠点 $(u,\ w)$ 附近的 (4.1) $= (\bar{u}_1,\ f(\bar{u}_1))$ 在区间 $\mathcal{I}_{\mathrm{uf}}$上成立。

4.2 一个简化的系统

受引理 4.2 的结果启发，我们首先忽略高阶项，并考虑 XYZ 坐标中折叠点附近特征值问题的一个更简单的玩具模型

$$\begin{aligned}
X_\zeta &= -2xX + Y - \frac{\lambda^2}{\theta_{\mathrm{lf}} c^3} X, \\
Y_\zeta &= 0, \\
Z_\zeta &= -\frac{c}{\theta_{\mathrm{lf}}} Z.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

假设波列解 $(x,\ y)(\zeta) = (x_\varepsilon,\ y_\varepsilon)(\zeta/\theta_{\mathrm{lf}})$ 满足忽略高阶项后的相应存在性问题

$$\begin{aligned} x_\xi &= -x^2 + y, \\ y_\xi &= \varepsilon. \end{aligned} \tag{4.13}$$

我们简记$\xi_{\mathrm{in}} = \xi_{\mathrm{lf}}^{\mathrm{in}}$, $\varepsilon\ \nu$ $\varepsilon\ \nu$ $x_{\mathrm{in}} = x$ $y_{\mathrm{out}} =$, ,
$y\ \zeta_{\mathrm{out}}$ $x_{\mathrm{in}}\ y_{\mathrm{out}} > 0$ ε 4 1
$\xi_{\mathrm{out}} = \xi^{\mathrm{out}}$, $L\,\mathrm{lf}$, 并定义 $\zeta_{\mathrm{in}} = \theta_{\mathrm{lf}}\xi_{\mathrm{in}}$, $\zeta_{\mathrm{out}} = \theta_{\mathrm{lf}}\xi_{\mathrm{out}}$, 并令:$(\zeta_{\mathrm{in}})()$, 注意到根据引理, 彼此独立地远离零。。我们考虑求解问题 (4.12), 并满足边界条件

$$X\left(\zeta_{\mathrm{out}}\right) = X_{\mathrm{out}}, \qquad Y\left(\zeta_{\mathrm{out}}\right) = \varepsilon Y_{\mathrm{out}}, \qquad Z\left(\zeta_{\mathrm{in}}\right) = Z_{\mathrm{in}},$$

其中 X_{out}, Y_{out}, $Z_{\mathrm{in}} \in \mathbb{C}$。将 Y 坐标按 ε 缩放是为了方便（见下文）。从方程的形式可以立即看出, $Y(\zeta) \equiv \varepsilon Y_{\mathrm{out}}$, 而 $Z(\zeta) = Z_{\mathrm{in}}\mathrm{e}^{-c(\zeta-\zeta_{\mathrm{in}})/\theta_{\mathrm{lf}}}$; 特别地, 稳定的 Z 动力学与中心不稳定的 XY 动力学完全解耦, 在后者中 Y 保持常数。因此, 只需确定 $X(\zeta)$。

根据4.1节的讨论, 波列解与扰动流形 $\mathcal{M}_{+}^{\mathrm{l}}$指数接近; 该扰动流形是通过沿折叠点向后追踪扰动临界流形 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{l}}$ 得到的。在简化系统（4.13）中, ε $\mathcal{M}_0^{\mathrm{l}}$ 恰好由抛物线 $y = x^2$ 在区域 $x < 0$中的分支给出。因此, $x(\zeta)$ 由以下方程描述

$$x_\zeta = -x^2 + y_{\mathrm{out}} + \varepsilon(\zeta - \zeta_{\mathrm{out}}).$$

忽略指数小误差, 我们得到

$$\begin{aligned} x(\zeta) &= \varepsilon^{1/3} x_R\left(\frac{y_{\mathrm{out}}}{\varepsilon^{2/3}} + \varepsilon^{1/3}\left(\zeta - \zeta_{\mathrm{out}}\right)\right), \\ y(\zeta) &= y_{\mathrm{out}} + \varepsilon(\zeta - \zeta_{\mathrm{out}}) \end{aligned}$$

是（4.13）中对应于 $\mathcal{M}_{\varepsilon}^{\mathrm{l}}{}^{+}$ 的解; 这里, 双射函数 $x_R\colon (-\Omega_0, \infty) \to \mathbb{R}$ 是黎卡提方程的唯一单调递增解

$$x_s = -x^2 + s \tag{4.14}$$

满足

$$\begin{aligned} s &\sim x_R^2 + \frac{1}{2x_R} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x_R^3}\right), \qquad x_R \to -\infty, \\ s &\sim -\Omega_0 + \frac{1}{x_R} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x_R^3}\right), \qquad x_R \to \infty, \end{aligned} \tag{4.15}$$

其中, Ω_0是 $\bar{J}(s)$ 的最小正零点: $= J_{-\frac{1}{3}}(2s^{3/2}/3) + J_{\frac{1}{3}}(2s^{3/2}/3)$, 其中 $J_{\pm\frac{1}{3}}$是第一类贝塞尔函数 [69]。令 $x = \frac{\phi_s}{\phi}$, 可将（4.14）改写为艾里方程 —

$$\phi_{ss} = s\phi,$$

其中条件 (4.15) 确保 $\phi(s)$ =艾里函数(s), 该艾里函数满足 艾里函数(s) $\to 0$ 当 $s \to \infty$时, 其中 $-\Omega_0$ 是 艾里函数(s)的第一个零点。

注意到 $Y(\zeta) = \varepsilon Y_{\mathrm{out}} = Y_{\mathrm{out}} y'(\zeta)$, 并设

$$X(\zeta) = Y_{\mathrm{out}} x'(\zeta) + \tilde{X}(\zeta),$$

由此得到方程

$$\tilde{X}_\zeta = -2x\tilde{X} - \frac{\lambda^2}{\theta_{\mathrm{lf}} c^3}\tilde{X} - \frac{\lambda^2}{\theta_{\mathrm{lf}} c^3} Y_{\mathrm{out}} x'(\zeta),$$

由此我们得到解

$$\tilde{X}(\zeta) = X_{\text{out}} \mathrm{e}^{-\int_{\zeta_{\text{out}}}^{\zeta} 2x(\tilde{\zeta}) + \frac{\lambda^2}{\theta_{\text{lf}} c^3} \mathrm{d}\tilde{\zeta}} - \frac{\lambda^2}{\theta_{\text{lf}} c^3} Y_{\text{out}} \int_{\zeta_{\text{out}}}^{\zeta} \mathrm{e}^{\int_{-\tilde{\zeta}}^{\zeta} 2x(\bar{\zeta}) + \frac{\lambda^2}{\theta_{\text{lf}} c^3} \mathrm{d}\bar{\zeta}} x'(\tilde{\zeta}) \mathrm{d}\tilde{\zeta}.$$

令 $s := \frac{y_{\text{out}}}{\varepsilon^{2/3}} + \varepsilon^{1/3}(\zeta - \zeta_{\text{out}})$，类似地令 $\tilde{\zeta}$，$\bar{\zeta}$，其中

$$(s_{\text{in}}, s_{\text{out}}) := \left(\frac{y_{\text{out}}}{\varepsilon^{2/3}} + \varepsilon^{1/3}(\zeta_{\text{in}} - \zeta_{\text{out}}), \frac{y_{\text{out}}}{\varepsilon^{2/3}} \right), \tag{4.16}$$

利用 $x_R(s) = \mathrm{Ai}'(s)\,\mathrm{Ai}(s)$ 这一事实，我们有

$$\begin{aligned}\tilde{X}(\zeta_{\text{in}}) = X_{\text{out}} \frac{\mathrm{Ai}(s_{\text{out}})^2}{\mathrm{Ai}(s_{\text{in}})^2} \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{\varepsilon^{1/3}\theta_{\text{lf}} c^3}(s_{\text{out}} - s_{\text{in}})} \\ + \frac{\lambda^2 \varepsilon^{1/3}}{\theta_{\text{lf}} c^3 \mathrm{Ai}(s_{\text{in}})^2} Y_{\text{out}} \int_{s_{\text{in}}}^{s_{\text{out}}} \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{\varepsilon^{1/3}\theta_{\text{lf}} c^3}(s - s_{\text{in}})} \left(s\mathrm{Ai}(s)^2 - \mathrm{Ai}'(s)^2 \right) \mathrm{d}s.\end{aligned}$$

利用（4.15）和（4.16），引理 4.1，以及艾里函数 Ai 的性质（见引理 C.1(iii)），我们有

$$|s_{\text{in}} + \Omega_0| \le C_\nu \varepsilon^{1/3}$$

and

$$\begin{aligned}\tilde{X}(\zeta_{\text{in}}) = X_{\text{out}} \frac{x'(\zeta_{\text{in}})}{x'(\zeta_{\text{out}})} \frac{s_{\text{out}}\mathrm{Ai}(s_{\text{out}})^2 - \mathrm{Ai}'(s_{\text{out}})^2}{s_{\text{in}}\mathrm{Ai}(s_{\text{in}})^2 - \mathrm{Ai}'(s_{\text{in}})^2} \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{\varepsilon^{1/3}\theta_{\text{lf}} c^3}(s_{\text{out}} - s_{\text{in}})} \\ + \frac{\lambda^2 Y_{\text{out}} x'(\zeta_{\text{in}})}{\varepsilon^{1/3}\theta_{\text{lf}} c^3 \left(s_{\text{in}}\mathrm{Ai}(s_{\text{in}})^2 - \mathrm{Ai}'(s_{\text{in}})^2 \right)} \int_{s_{\text{in}}}^{s_{\text{out}}} \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{\varepsilon^{1/3}\theta_{\text{lf}} c^3}(s - s_{\text{in}})} \left(s\mathrm{Ai}(s)^2 - \mathrm{Ai}'(s)^2 \right) \mathrm{d}s,\end{aligned}$$

我们推得，对于满足 $|\lambda\varepsilon^{-1/6}| \ll 1$ 或 $\Re(\lambda^2) < 0$（或等价地，$|\Re(\lambda)| < |\Im(\lambda)|$）的 λ，存在 C_ν，$\vartheta_\nu > 0$ 使得

$$\begin{aligned}\left| \tilde{X}(\zeta_{\text{in}}) + \Upsilon_{\text{lf}}\left(\lambda\varepsilon^{-1/6}\right) Y_{\text{out}} x'(\zeta_{\text{in}}) \right| \le C_\nu \left(\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon} |X_{\text{out}}| + |\lambda|^2 |Y_{\text{out}}| \right) \\ + C_\nu(\varepsilon^{1/3} + |\lambda|^2) \left| I_{\text{lf}}\left(\lambda\varepsilon^{-1/6}\right) Y_{\text{out}} x'(\zeta_{\text{in}}) \right|,\end{aligned}$$

其中

$$\Upsilon_{\text{lf}}(z) := \frac{z^2}{\theta_{\text{lf}} c^3 \mathrm{Ai}'(-\Omega_0)^2} \int_{-\Omega_0}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{z^2}{\theta_{\text{lf}} c^3}(s + \Omega_0)} \left(s\mathrm{Ai}(s)^2 - \mathrm{Ai}'(s)^2 \right) \mathrm{d}s.$$

函数 $\Upsilon_{\text{lf}}(z)$ 的性质在附录 C中有所描述。

回到与（4.12）相关的边值问题，给定出口条件 X_{out}，$Y_{\text{out}} \in \mathbb{C}$，因此我们得到（4.12）的一个解，满足 $Y(\zeta) \equiv \varepsilon Y_{\text{out}}$，$X(\zeta_{\text{out}}) = X_{\text{out}}$，以及在 $\zeta = \zeta_{\text{in}}$处相应的入口条件

$$\begin{aligned}X(\zeta_{\text{in}}) &= Y_{\text{out}} x'(\zeta_{\text{in}}) \left(1 - \Upsilon_{\text{lf}}\left(\lambda\varepsilon^{-1/6}\right) \right) + \text{h.o.t.} \\ Y(\zeta_{\text{in}}) &= Y_{\text{out}}\varepsilon = Y_{\text{out}} y'(\zeta_{\text{in}}).\end{aligned} \tag{4.17}$$

实际上，在 $\zeta = \zeta_{\text{in}}$ 线性化问题（4.12）的相应解类似于导数 $(x', y')(\zeta)$ 的某个倍数（当 4.12）时，它满足该问题），至多相差 $\lambda = 0$中的主阶修正 $X(\zeta)$，该修正由函数 $\Upsilon_{\text{lf}}\left(\lambda\varepsilon^{-1/6}\right)$ 描述，这是由于 $\lambda^2 X$ 项出现在（4.12）中。下一节将回到（4.5），并聚焦于中心不稳定 XY动力学。受（4.17）的启发，我们将在（4.5）的完整 XY动力学中求解一个类似的边值问题，其中包括所有高阶项，并精确刻画所得解的估计。

4.3 中心不稳定 XY 动力学的吹胀分析

受第 4.2 节分析的启发，我们现在考虑完整的 XY 动力学。通过折叠点将存在性问题与特征值问题耦合起来，对 $\theta_{\mathrm{lf}}\xi = \zeta$ 进行重标度，并限制在不变子空间$Z = 0$中，我们得到以下结果

$$\begin{aligned} x_\zeta &= -x^2 + y + \mathcal{O}(xy, y^2, x^3, \varepsilon), \\ y_\zeta &= \varepsilon\left(1 + \mathcal{O}(x, y, \varepsilon)\right), \\ X_\zeta &= X\left(-2x - \frac{\lambda^2}{\theta_{\mathrm{lf}} c^3} + \mathcal{O}(x^2, y, \varepsilon, \lambda x, \lambda^3)\right) + Y\left(1 + \mathcal{O}(x, y, \varepsilon, \lambda)\right), \\ Y_\zeta &= \mathcal{O}(\varepsilon X, \varepsilon Y). \end{aligned} \tag{4.18}$$

这里注意到，波列解 $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)(\zeta/\theta_{\mathrm{lf}})$ 在与 $\xi \in \mathcal{I}_{\mathrm{lf}}$ 对应的重标度区间 $\zeta \in [\zeta_{\mathrm{in}}, \zeta_{\mathrm{out}}]$ 上满足前两个方程，其中我们将 $\xi_{\mathrm{in}} := \xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf}}, \varepsilon, \nu, \xi_{\mathrm{out}} := \xi^{\mathrm{out}}, L\mathrm{lf}\ \varepsilon, \nu$ 简记为 $\zeta_{\mathrm{in}} = \theta_{\mathrm{lf}}\xi_{\mathrm{in}}, \zeta_{\mathrm{out}} = \theta_{\mathrm{lf}}\xi_{\mathrm{out}}$。导数 $(x, y)'(\zeta)$ 在取 $(x, y)(\zeta) = (x_\varepsilon, y_\varepsilon)(\zeta/\theta_{\mathrm{lf}})$ 且 $\lambda = 0$ 时，满足 (4.18) 最后两个分量中的线性化方程。受 §4.2 结果的启发，对于 $0 < \mu < M$，我们定义

$$\Lambda_\varepsilon(\mu, M) = \Lambda_{\mathrm{r},\varepsilon}(\mu, M) \cup \Lambda_{\mathrm{c},\varepsilon}(\mu, M),$$

其中

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mathrm{r},\varepsilon}(\mu, M) &= \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\Re(\lambda)| \le \mu\varepsilon^{1/6}, |\Im(\lambda)| \le M\varepsilon^{1/6}\right\}, \\ \Lambda_{\mathrm{c},\varepsilon}(\mu, M) &= \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\Re(\lambda)| \le \mu M^{-1}|\Im(\lambda)|, M\varepsilon^{1/6} \le |\Im(\lambda)| \le \mu\right\} \end{aligned}$$

分别在 $\lambda = 0$ 附近定义矩形区域和（部分）锥形区域。区域 $\Lambda_{\mathrm{r},\varepsilon}(\mu, M) \cup \Lambda_{\mathrm{c},\varepsilon}(\mu, M) = \Lambda_\varepsilon(\mu, M)$ 的示意图见图15。注意，集合 $\Lambda_\varepsilon(\mu, M)$ 包含命题 3.8 的子区域$R_{1,\varepsilon}(\mu) = \left\{\lambda \in R_1(\mu) : |\Re(\lambda)| \le \mu\varepsilon^{1/6}\right\}$，尤其包含 §3.6 中分析的三个子区域 $R_{1,i,\varepsilon}, i = 1, 2, 3$ 的并集。我们回顾函数

$$\Upsilon_{\mathrm{lf}}(z) = \frac{z^2}{\theta_{\mathrm{lf}} c^3} \frac{1}{\mathrm{Ai}'(-\Omega_0)^2} \int_{-\Omega_0}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{z^2}{\theta_{\mathrm{lf}} c^3}(s + \Omega_0)} \left(s\mathrm{Ai}(s)^2 - \mathrm{Ai}'(s)^2\right) \mathrm{d}s,$$

其中，$\mathrm{Ai}(s)$ 表示艾里函数，$-\Omega_0$ 是 $\mathrm{Ai}(s)$ 的最大零点，或者等价地，Ω_0 是 $\bar{J}(z)$ 的最小正零点：$= J_{-\frac{1}{3}}(2z^{3/2}/3) + J_{\frac{1}{3}}(2z^{3/2}/3)$，其中 $J_{\pm\frac{1}{3}}$ 是第一类贝塞尔函数。我们有如下结论。

命题 *4.3*。固定 $M > 0$。存在一个连续函数 η: $[0, \infty) \to [0, \infty)$，满足 $\eta(0) = 0$，使得只要 $0 < \varepsilon \ll \nu \ll \mu \ll 1$，对于每个 $(X_{\mathrm{out}}, Y_{\mathrm{out}}) \in \mathbb{C}^2$ 和 $\lambda \in \Lambda_\varepsilon(\mu, M)$，都存在一个解$\psi^0_{\mathrm{lf}} = (x, y, X^0_{\mathrm{lf}}, Y^0 lf)$：$[\zeta_{\mathrm{in}}, \zeta_{\mathrm{out}}] \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^2$，满足方程 (4.18)，且 $(x, y)(\zeta) = (x_\varepsilon, y_\varepsilon)(\zeta/\theta_{\mathrm{lf}})$，并且该解满足

$$\begin{aligned} X^0_{\mathrm{lf}}(\zeta_{\mathrm{out}}) &= X_{\mathrm{out}}, \\ Y^0_{\mathrm{lf}}(\zeta_{\mathrm{out}}) &= \varepsilon Y_{\mathrm{out}}. \end{aligned}$$

此外，存在与(ε, λ)无关的常数 $C_\nu, \vartheta_\nu > 0$，使解满足以下估计

$$\begin{aligned} \left|X^0_{\mathrm{lf}}(\zeta_{\mathrm{in}}) - \alpha^x_{\mathrm{lf},\nu}(Y_{\mathrm{out}}; \varepsilon, \lambda) x'_\varepsilon(\zeta_{\mathrm{in}}/\theta_{\mathrm{lf}})\right| &\le \mathcal{R}^x_{\mathrm{lf},\nu}(X_{\mathrm{out}}, Y_{\mathrm{out}}; \varepsilon, \lambda), \\ \left|Y^0_{\mathrm{lf}}(\zeta_{\mathrm{in}}) - \varepsilon Y_{\mathrm{out}} \frac{y'_\varepsilon(\zeta_{\mathrm{in}}/\theta_{\mathrm{lf}})}{y'_\varepsilon(\zeta_{\mathrm{out}}/\theta_{\mathrm{lf}})}\right| &\le \mathcal{R}^y_{\mathrm{lf},\nu}(X_{\mathrm{out}}, Y_{\mathrm{out}}; \varepsilon, \lambda), \end{aligned}$$

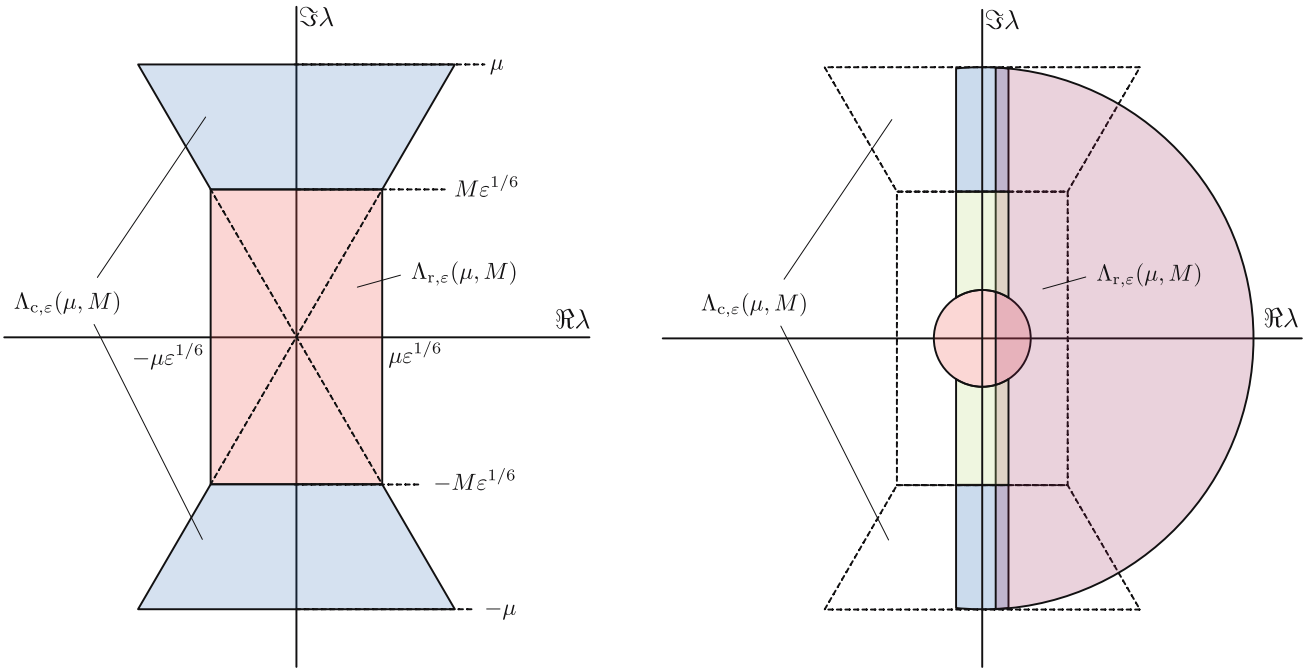


图15：（左）图示区域 $\Lambda_{\mathrm{r},\varepsilon}(\mu,M)\cup\Lambda_{\mathrm{c},\varepsilon}(\mu,M)\ =\ \Lambda_{\varepsilon}(\mu,M)$。（右）图示区域 $\Lambda_{\mathrm{r},\varepsilon}(\mu,M)$ 和 $\Lambda_{\mathrm{c},\varepsilon}(\mu,M)$ 叠加在 §3.6 中未标记的区域 $R_{1,1,\varepsilon}(\mu)$ $R_{1,2,\varepsilon}(\varsigma,\mu,M)$ $R_{1,3,\varepsilon}(\varsigma,\mu,M)$ 以及 $R_{1,4,\varepsilon}(\mu)$ 上；与图 14 对比。

其中 $\alpha^{x}_{\mathrm{lf},\nu}$ 和 $\mathcal{R}^{x}_{\mathrm{lf},\nu}$, $\mathcal{R}^{y}{}_{\mathrm{lf}\ \nu}$ 满足

$$\alpha^{x}_{\mathrm{lf},\nu}(Y_{\mathrm{out}};\varepsilon,\lambda)=\frac{\varepsilon Y_{\mathrm{out}}}{y'_{\varepsilon}\left(\zeta_{\mathrm{out}}/\theta_{\mathrm{lf}}\right)}\left(1-\Upsilon_{\mathrm{lf}}\left(\lambda\varepsilon^{-1/6}\right)+\mathcal{O}\left(\eta(\nu)\Upsilon_{\mathrm{lf}}\left(\lambda\varepsilon^{-1/6}\right)\right)\right),$$

$$\mathcal{R}^{x}_{\mathrm{lf},\nu}(X_{\mathrm{out}},Y_{\mathrm{out}};\varepsilon,\lambda)=\begin{cases}C_{\nu}\left(|X_{\mathrm{out}}|+(\varepsilon+|\lambda\log\varepsilon|)\,|Y_{\mathrm{out}}|\right), & \lambda\in\Lambda_{\mathrm{r},\varepsilon}(\mu,M),\\ C_{\nu}\left(|X_{\mathrm{out}}|+(\varepsilon+|\lambda\log|\lambda||)|Y_{\mathrm{out}}|\right), & \lambda\in\Lambda_{\mathrm{c},\varepsilon}(\mu,M),\end{cases}$$

$$\mathcal{R}^{y}_{\mathrm{lf},\nu}(X_{\mathrm{out}},Y_{\mathrm{out}};\varepsilon,\lambda)=\begin{cases}C_{\nu}\varepsilon\,|X_{\mathrm{out}}|+\left(C_{\nu}\varepsilon\left(\varepsilon+|\lambda\log\varepsilon|\right)+\varepsilon\eta(\nu)\left|\Upsilon_{\mathrm{lf}}\left(\lambda\varepsilon^{-1/6}\right)\right|\right)|Y_{\mathrm{out}}|, & \lambda\in\Lambda_{\mathrm{r},\varepsilon}(\mu,M),\\ C_{\nu}\varepsilon|X_{\mathrm{out}}|+\left(C_{\nu}\varepsilon\left(\varepsilon+|\lambda\log|\lambda||\right)+\varepsilon\eta(\nu)\right)|Y_{\mathrm{out}}|, & \lambda\in\Lambda_{\mathrm{c},\varepsilon}(\mu,M),\end{cases}$$

为求解完整特征值问题（4.18），当 $(x,y)(\zeta)=(x_{\varepsilon},y_{\varepsilon})(\zeta/\theta_{\mathrm{lf}})$ 且 $\lambda\neq 0$时，我们像处理存在性问题时那样使用吹胀方法；见 §2.1。在存在性问题中，与典范折叠点 [69], 的吹起一样，策略是附加方程 $\varepsilon_{\zeta}=0$，并对三个坐标 (x,y,ε) 进行准齐次球面爆破变换，变换定义为

$$(\bar{x},\bar{y},\bar{\varepsilon},\bar{r})\mapsto(x,y,\varepsilon)=(\bar{r}\bar{x},\bar{r}^{2}\bar{y},\bar{r}^{3}\bar{\varepsilon}),$$

其中 $(\bar{x},\bar{y},\bar{\varepsilon})\ \in\ S^{2}$。这里，我们对耦合的存在性—稳定性问题 (4.18) 执行相同的步骤，这需要同时对 (X,Y,λ) 应用吹起变换。根据 §4.2 的分析，我们预期线性化解 (X,Y) 的行为类似于存在性问题的解的导数 (x_{ζ},y_{ζ})，因此相应地选取 (X,Y) 的权重。同样受 §4.2 分析的启发，我们进一步选取 λ 的权重，以保留 (4.18) 中 X 方程里预期的主导阶 $\lambda^{2}X$ 项。由于线性化方程中出现 λ^{2}，我们相应地调整存在性问题中的缩放，以避免每个坐标图中出现缩放变量的分数次幂。由此得到吹起变换

$$\left(\bar{x},\bar{y},\bar{\varepsilon},\bar{X},\bar{Y},\bar{\lambda}\bar{r}\right)\mapsto(x,y,\varepsilon,X,Y,\lambda)=\left(\bar{r}^{2}\bar{x},\bar{r}^{4}\bar{y},\bar{r}^{6}\bar{\varepsilon},\bar{r}^{4}\bar{X},\bar{r}^{6}\bar{Y},\bar{r}\bar{\lambda}\right),$$

其中 $(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{\varepsilon})\ \in S^{2}$ 且 $(\bar{X},\ \bar{Y},\ \bar{\lambda})\ \in\mathbb{C}^{3}$。

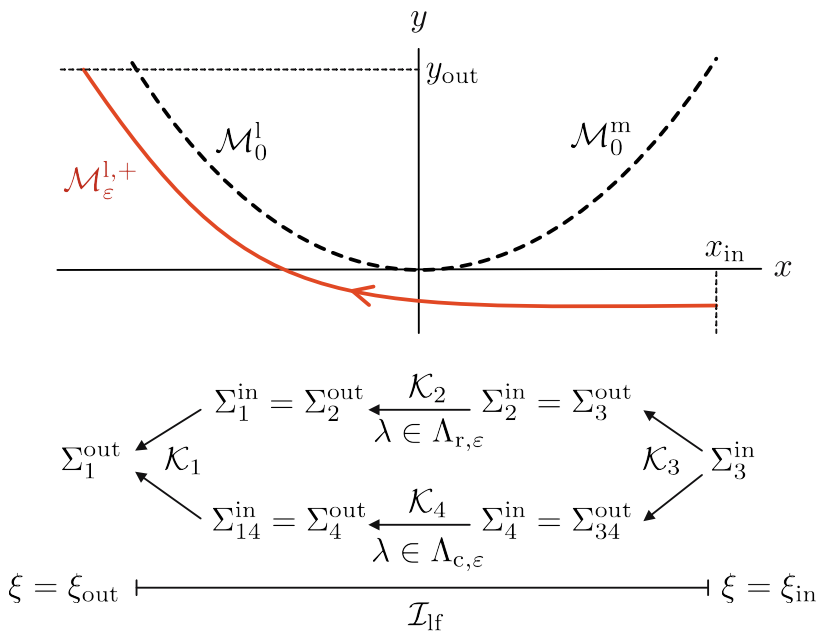


图 16：展示了命题 4.3 证明所用的设置，概述了坐标图 $\mathcal{K}_i$、$i = 1$、2、3、4 在这些坐标图中追踪解，以求解区间 $\xi \in \mathcal{I}_{\text{lf}}$ 上的中心不稳定 (XY) 动力学的边值问题。截面 $\Sigma_*^{\text{in/out}}$表示穿过坐标图 $\mathcal{K}_i$、$i = 1$、2、3、4、的解的进入/离开截面，相关分析见 §4.3.1–§4.3.4。

随后必须像在存在性问题中那样，沿着三个坐标图 $\mathcal{K}_i$，$i = 1$，2，3 跟踪该解；参见 [20, 22, 69]。还需要一个附加坐标图 $\mathcal{K}_4$，以捕捉 $\lambda \in \Lambda_{\text{c},\,\varepsilon}\,(\mu,\ M)$ 的取值，这些取值对应于 λ 位于 $\mathcal{O}\,(\varepsilon^{1/6})$ 的小邻域之外、且 $\Im\,(\lambda)$ 取小的 $\mathcal{O}(1)$ 值的情形，并且与 ε 无关。

在坐标图 $\mathcal{K}_1$ 中，变换形式为

$$x = r_1^2 x_1, \quad y = r_1^4, \quad \varepsilon = r_1^6 \varepsilon_1, \quad X = r_1^4 X_1, \quad Y = r_1^6 Y_1, \quad \lambda = r_1 \lambda_1. \tag{4.19}$$

类似地，在坐标图 $\mathcal{K}_2$ 中，变换形式为

$$x = r_2^2 x_2, \quad y = r_2^4 y_2, \quad \varepsilon = r_2^6, \quad X = r_2^4 X_2, \quad Y = r_2^6 Y_2, \quad \lambda = r_2 \lambda_2 \tag{4.20}$$

在坐标图 $\mathcal{K}_3$ 中，变换形式为

$$x = r_3^2, \quad y = r_3^4 y_3, \quad \varepsilon = r_3^6 \varepsilon_3, \quad X = r_3^4 X_3, \quad Y = r_3^6 Y_3, \quad \lambda = r_3 \lambda_3. \tag{4.21}$$

最后，在坐标图 $\mathcal{K}_4$ 中，我们得到变换

$$x_4 = r_4^2 x_4, \quad y = r_4^4 y_4, \quad \varepsilon = r_4^6 \varepsilon_4, \quad X = r_4^4 X_4, \quad Y = r_4^6 Y_4, \quad \lambda = r_4(\lambda_4 + \mathrm{i}). \tag{4.22}$$

注意，此坐标图相当于按实数量 $r_4 := \Im(\lambda)$ 进行重标度。

根据 [22] 中的存在性分析（以及关于通过一般折叠点 [69] 的相应理论），波列 $(x,\ y)(\zeta) = (x_\varepsilon,\ y_\varepsilon)(\zeta/\theta_{\text{lf}})$ 依次通过三个坐标图 $\mathcal{K}_i$，$i = 1$、2、3。我们记

$$I_i := [\zeta_{\text{in},j}, \zeta_{\text{out},j}], \qquad i = 1, 2, 3$$

这些 ζ区间内，波列位于各个坐标图中。由于我们将引用几何设置来讨论已知的穿过非退化折叠点的结果 [20, 69], ，因此我们选择的坐标图标记与那些研究中的记号相对应；不过，由于流的方向（见图 11

和16），波列实际经过各坐标图的顺序为 $\mathcal{K}_3 \to \mathcal{K}_2 \to \mathcal{K}_1$，因此 $\zeta_{\text{in},\ 3} = \zeta_{\text{in}}$ 和 $\zeta_{\text{out},\ 1} = \zeta_{\text{out}}$ 和 $[\zeta_{\text{in}}, \zeta_{\text{out}}] = I_3 \cup I_2 \cup I_1$。对于 $\lambda \in \Lambda_{\text{r},\ \varepsilon}(\mu,\ M)$的取值，特征值问题可用这三个坐标图进行分析；然而，若 $\lambda \in \Lambda_{\text{c},\ \varepsilon}(\mu,\ M)$ 取这些值，则需要绕道经过坐标图 $\mathcal{K}_4$，而不是坐标图 $\mathcal{K}_2$；见图16。

我们还将利用这样一个事实：波列的导数记为 $(X_\varepsilon, Y_\varepsilon)(\zeta) := (x, y)'(\zeta)$，其中 $(x, y)(\zeta) = (x_\varepsilon, y_\varepsilon)(\zeta/\theta_{\text{lf}})$，当 $\lambda = 0$ 时满足线性化方程。受 §4.2 中~ ~分析以及解 (4.17) 的预期形式启发，我们令 $(X, Y) = (\alpha X_\varepsilon, \alpha Y_\varepsilon) + (X, Y)$，其中$\alpha$ 待定，并得到如下系统

$$
\begin{aligned}
x_\zeta &= -x^2 + y + \mathcal{O}(xy, y^2, x^3, \varepsilon),\\
y_\zeta &= \varepsilon\left(1 + \mathcal{O}(x, y, \varepsilon)\right),\\
X_\zeta &= X\left(-2x - \frac{\lambda^2}{\theta_{\text{lf}} c^3} + \mathcal{O}(x^2, y, \varepsilon, \lambda x, \lambda^3)\right) + Y\left(1 + \mathcal{O}(x, y, \varepsilon, \lambda)\right),\\
&\quad + \alpha X_\varepsilon\left(-\frac{\lambda^2}{\theta_{\text{lf}} c^3} + \mathcal{O}\left(\lambda(|x| + |y| + |\varepsilon| + |\lambda|^2)\right)\right) + \mathcal{O}(\alpha\lambda Y_\varepsilon),\\
Y_\zeta &= \mathcal{O}(\varepsilon X, \varepsilon Y, \alpha\varepsilon\lambda X_\varepsilon, \alpha\varepsilon\lambda Y_\varepsilon),
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

其中，我们省略了 $(X,\ Y)$ 上的波浪号。

在本节余下部分，我们通过推导各坐标图中的边值问题解所满足的估计，来分析 (4.23)：$\mathcal{K}_1$ (§4.3.1)、$\mathcal{K}_2$ (§4.3.2)、$\mathcal{K}_4$ (§4.3.3) 和 $\mathcal{K}_3$ (§4.3.4)。随后将这些解进行匹配，从而得到方程 (4.18) 的一个解，该解满足命题 4.3 中的估计，其证明见 §4.3.5。

4.3.1 坐标图 $\mathcal{K}_1$

我们从坐标图 $\mathcal{K}_1$开始，应用坐标变换（4.19）后，得到系统

$$
\begin{aligned}
(r_1)_\zeta &= \frac{1}{4} r_1^3 \varepsilon_1 F_1(x_1, r_1, \varepsilon_1),\\
(x_1)_\zeta &= r_1^2\left(1 - x_1^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_1 x_1 + \mathcal{O}(r_1^2)\right),\\
(\varepsilon_1)_\zeta &= -\frac{3}{2} r_1^2 \varepsilon_1^2 F_1(x_1, r_1, \varepsilon_1),\\
(X_1)_\zeta &= r_1^2 X_1\left(-2x_1 - \frac{\lambda_1^2}{\theta_{\text{lf}} c^3} - \varepsilon_1 + \mathcal{O}(r_1\lambda_1, r_1^2)\right) + r_1^2 Y_1\left(1 + \mathcal{O}(r_1\lambda_1, r_1^2)\right)\\
&\quad + \alpha\left(\frac{1}{2} r_1^2 \varepsilon_1 F_1(x_1, r_1, \varepsilon_1) x_1 + (x_1)_\zeta\right)\left(-\frac{\lambda_1^2}{\theta_{\text{lf}} c^3} + \mathcal{O}(r_1\lambda_1)\right) + \mathcal{O}(\alpha r_1^3 \varepsilon_1 \lambda_1),\\
(Y_1)_\zeta &= -\frac{3}{2} r_1^2 \varepsilon_1 Y_1 F_1(x_1, r_1, \varepsilon_1) + \mathcal{O}(r_1^4 \varepsilon_1 X_1, r_1^6 \varepsilon_1 Y_1, \alpha r_1 \varepsilon_1 \lambda_1 X_\varepsilon, \alpha r_1 \varepsilon_1 \lambda_1 Y_\varepsilon),\\
(\lambda_1)_\zeta &= -\frac{1}{4} r_1^2 \varepsilon_1 \lambda_1 F_1(x_1, r_1, \varepsilon_1),
\end{aligned}
$$

其中 $F_1(x_1, r_1, \varepsilon_1) = 1 + \mathcal{O}(r_1^2)$。现在，我们通过重标度 $\mathrm{d}z_1 = r_1^2 \mathrm{d}\zeta$ 对系统进行去奇异化，并得到

$$
\begin{aligned}
r_1' &= \frac{1}{4} r_1 \varepsilon_1 F_1(x_1, r_1, \varepsilon_1), \\
x_1' &= 1 - x_1^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_1 x_1 + \mathcal{O}(r_1^2), \\
\varepsilon_1' &= -\frac{3}{2}\varepsilon_1^2 F_1(x_1, r_1, \varepsilon_1), \\
X_1' &= X_1 \left(-2x_1 - \frac{\lambda_1^2}{\theta_{\mathrm{lf}} c^3} - \varepsilon_1 + \mathcal{O}(r_1\lambda_1, r_1^2) \right) + Y_1 \left(1 + \mathcal{O}(r_1\lambda_1, r_1^2) \right) \\
&\quad + \alpha \left(\frac{1}{2}\varepsilon_1 F_1(x_1, r_1, \varepsilon_1) x_1 + x_1' \right) \left(-\frac{\lambda_1^2}{\theta_{\mathrm{lf}} c^3} + \mathcal{O}(r_1\lambda_1) \right) + \mathcal{O}(\alpha r_1 \varepsilon_1 \lambda_1), \\
Y_1' &= -\frac{3}{2}\varepsilon_1 Y_1 F_1(x_1, r_1, \varepsilon_1) + \mathcal{O}(r_1^2\varepsilon_1 X_1, r_1^4 \varepsilon_1 Y_1, \alpha r_1^{-1} \varepsilon_1 \lambda_1 X_\varepsilon, \alpha r_1^{-1} \varepsilon_1 \lambda_1 Y_\varepsilon), \\
\lambda_1' &= -\frac{1}{4}\varepsilon_1 \lambda_1 F_1(x_1, r_1, \varepsilon_1),
\end{aligned}
$$

其中 $' = \mathrm{d}\,\mathrm{d}z_1$。我们首先关注坐标 $(r_1, x_1, \varepsilon_1)$ 中的存在性问题，将注意力限制在由 Σ_1^{in} 和 Σ_1^{out} 定义的截面之间的流：

$$
\begin{aligned}
\Sigma_1^{\mathrm{in}} &= \{|x_1 + 1| \le \bar{x}_1, 0 \le r_1 \le r_{1,\varepsilon}(\delta), \varepsilon_1 = \delta\}, \\
\Sigma_1^{\mathrm{out}} &= \{|x_1 + 1| \le \bar{x}_1, r_1 = r_{1,\varepsilon}(\varepsilon_1), 0 \le \varepsilon_1 \le \delta\},
\end{aligned}
$$

其中 $r_{1,\varepsilon}(\varepsilon_1)^4 = y_{\mathrm{out}}(\nu, \varepsilon)$ 满足 $|r_{1,\varepsilon}(\varepsilon_1) - \bar{r}_1| \le C_\nu \varepsilon_1^{2/3}$，并且根据引理 4.1，$\bar{r}_1^4 := r_{1,\varepsilon}(0)^4 = y_{\mathrm{out}}(\nu, 0) > 0$；$\delta, \bar{x}_1 > 0$ 是充分小的常数。在 $\mathcal{K}_1$ 坐标中，波列由解 $(x_{1,\varepsilon}, r_{1,\varepsilon}, \varepsilon_{1,\varepsilon})(z_1)$ 表示，它分别在 $z_1 = z_1^{\mathrm{in}}, z_1^{\mathrm{out}}$ 处到达这些截面。不动点 $(x_1, r_1, \varepsilon_1) = (-1, 0, 0)$ 具有一个中心不稳定流形 M_1^+，其图像由下式给出：

$$
M_1^+ = \left\{ x_1 = x_1^+(r_1, \varepsilon_1) = -1 + \mathcal{O}\left(r_1^2, \varepsilon_1\right), 0 \le r_1 \le r_{1,\varepsilon}(\varepsilon_1), 0 \le \varepsilon_1 \le \delta \right\}.
$$

流形 M_1^+是 $\mathcal{M}^{1,+}$ 在 $\mathcal{K}_1$-坐标系中的表示；例如参见命题 4.2]。因此，根据引理 4.1，在截面 $\Sigma_1^{\mathrm{in}}, \Sigma_1^{\mathrm{out}}$之间，解 $(x_{1,\varepsilon}, r_{1,\varepsilon}, \varepsilon_{1,\varepsilon})(z_1)$始终保持与 M_1^+相距 $\mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon})$-近。相应的特征值问题因此可写为

$$
\begin{aligned}
X_1' &= X_1 \left(2 - \frac{\lambda_1^2}{\theta_{\mathrm{lf}} c^3} + \mathcal{O}\left(r_1\lambda_1, r_1^2, \varepsilon_1\right) \right) + Y_1 \left(1 + \mathcal{O}\left(r_1\lambda_1, r_1^2\right) \right) \\
&\quad + \alpha \left(-\frac{1}{2}\varepsilon_1 + \mathcal{O}\left(r_1^2\varepsilon_1, \varepsilon_1^2\right) \right) \left(-\frac{\lambda_1^2}{\theta_{\mathrm{lf}} c^3} + \mathcal{O}(r_1\lambda_1) \right) + \mathcal{O}(\alpha r_1 \varepsilon_1 \lambda_1), \\
Y_1' &= -\frac{3}{2}\varepsilon_1 Y_1 \bar{F}_1(r_1, \varepsilon_1) + \mathcal{O}(r_1^2\varepsilon_1 X_1, r_1^4 \varepsilon_1 Y_1, \alpha r_1^3 \varepsilon_1^2 \lambda_1), \\
\lambda_1' &= -\frac{1}{4}\varepsilon_1 \lambda_1 \bar{F}_1(r_1, \varepsilon_1)
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

在区间 $z_1 \in [z_1^{\mathrm{in}}, z_1^{\mathrm{out}}]$上，其中 $\bar{F}_1(r_1, \varepsilon_1) = F_1\left(x_1^+(r_1, \varepsilon_1)\, r_1, \varepsilon_1\right) + \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/(r_1^6\varepsilon_1)})$。我们考察 (4.24) 在不变集 $r_1 = Y_1 = 0$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1' &= -\frac{3}{2}\varepsilon_1^2, \\
X_1' &= X_1 \left(2 - \frac{\lambda_1^2}{\theta_{\mathrm{lf}} c^3} + \mathcal{O}(\varepsilon_1) \right) + \alpha \frac{\lambda_1^2 \varepsilon_1}{2\theta_{\mathrm{lf}} c^3} \left(1 + \mathcal{O}(\varepsilon_1) \right), \\
\lambda_1' &= -\frac{1}{4}\varepsilon_1 \lambda_1.
\end{aligned}
$$

固定 $\mu>0$ 足够小。给定一个限制在区域内的 $(\varepsilon_1,\ \lambda_1)$-子系统的解

$$\lambda_1\in\Lambda_1(\delta,\mu,M):=\left\{\lambda_1\in\mathbb{C}:|\Re(\lambda_1)|\le\mu\delta^{1/6},|\Im(\lambda_1)|\le M\delta^{1/6}\right\},$$

存在唯一解 $X_1=X_1^*=\mathcal{O}\left(\alpha\lambda_1^2\varepsilon_1\right)$，其有界性由 $z_1\to\infty$ 给出

$$X_1^*(z_1)=\frac{\alpha}{2\theta_{\mathrm{lf}}c^3}\int_\infty^{z_1}\exp\left(\int_s^{z_1}2-\frac{\lambda_1(\bar{s})^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}+\mathcal{O}(\varepsilon_1(\bar{s}))\mathrm{d}\bar{s}\right)\lambda_1(s)^2\varepsilon_1(s)\left(1+\mathcal{O}(\varepsilon_1(s))\right)\mathrm{d}s,\tag{4.25}$$

其中我们注意到 $\left|X_1^*(z_1^{\mathrm{out}})\right|\le C_{\bar{r}_1}|\alpha\varepsilon\lambda|$。我们在完整系统（ $X_1=X_1^*+\tilde{X}_1$ 中设定4.24），从而得到系统

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_1'&=\tilde{X}_1h_{1,X}(r_1,\varepsilon_1,\lambda_1)+Y_1h_{1,Y}(r_1,\varepsilon_1,\lambda_1)+\alpha h_{1,\alpha}(r_1,\varepsilon_1,\lambda_1),\\
Y_1'&=-\frac{3}{2}\varepsilon_1Y_1\bar{F}_1(r_1,\varepsilon_1)+\varepsilon_1\tilde{X}_1g_{1,X}(r_1,\varepsilon_1,\lambda_1)+\varepsilon_1Y_1g_{1,Y}(r_1,\varepsilon_1,\lambda_1)+\varepsilon_1\alpha g_{1,\alpha}(r_1,\varepsilon_1,\lambda_1),\\
\lambda_1'&=-\frac{1}{4}\varepsilon_1\lambda_1\bar{F}_1(r_1,\varepsilon_1),
\end{aligned}\tag{4.26}$$

其中

$$\begin{aligned}
h_{1,X}(r_1,\varepsilon_1,\lambda_1)&=2-\frac{\lambda_1^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}+\mathcal{O}(r_1\lambda_1,r_1^2,\varepsilon_1),\\
h_{1,Y}(r_1,\varepsilon_1,\lambda_1)&=1+\mathcal{O}(r_1\lambda_1,r_1^2),\\
h_{1,\alpha}(r_1,\varepsilon_1,\lambda_1)&=\mathcal{O}(r_1\varepsilon_1\lambda_1),\\
g_{1,X}(r_1,\varepsilon_1,\lambda_1)&=\mathcal{O}(r_1^2),\\
g_{1,Y}(r_1,\varepsilon_1,\lambda_1)&=\mathcal{O}(r_1^4),\\
g_{1,\alpha}(r_1,\varepsilon_1,\lambda_1)&=\mathcal{O}(r_1^2\varepsilon_1\lambda_1^2,r_1^3\varepsilon_1\lambda_1).
\end{aligned}$$

我们有如下结论。

命题 *4.4*。考虑 *(4.24)*，其中 $(x_1,r_1,\varepsilon_1)=(x_{1,\varepsilon},r_{1,\varepsilon},\varepsilon_{1,\varepsilon})(z_1)$，并固定 $M>0$。存在 $C,C_{\bar{r}_1},\theta_{\bar{r}_1},\mu>0$，使得以下结论成立。给定 $X_1^{\mathrm{out}}\in\mathbb{C}$，以及任意满足 $\lambda_1(z_{\mathrm{in}})=:\lambda_{1,0}\in2\Lambda_1(\delta,\mu,M)$ 的 $\lambda\in\mathbb{C}$，存在 *(4.24)* 的一个解 (X_1,Y_1,λ_1)：$[z_1^{\mathrm{in}},z_1^{\mathrm{out}}]\to\mathbb{C}^2\times\Lambda_1(\delta,\mu,M)$，满足

$$X_1(z_1^{\mathrm{out}})=X_1^*(z_1^{\mathrm{out}})+X_1^{\mathrm{out}},\qquad Y_1(z_1^{\mathrm{in}})=0,$$

以及估计

$$\left|X_1(z_1^{\mathrm{in}})-X_1^*(z_1^{\mathrm{in}})\right|\le C_{\bar{r}_1}\left(|X_1^{\mathrm{out}}|\mathrm{e}^{-\theta_{\bar{r}_1}/\varepsilon}+|\alpha\lambda|\right),\qquad|Y_1(z_1^{\mathrm{out}})|\le C\frac{\varepsilon}{\bar{r}_1^4}|X_1^{\mathrm{out}}|+C_{\bar{r}_1}|\alpha\varepsilon\lambda|.$$

证明。我们着重求解系统 (4.26)。我们首先构造满足边界条件 $\tilde{X}_1(z_1^{\mathrm{out}})=0,Y_1(z_1^{\mathrm{in}})=0$的非齐次方程的一个解。利用这一事实：

$$\int_s^{z_1}-\frac{3}{2}\varepsilon_1(\tilde{s})\bar{F}_1(r_1(\tilde{s},\varepsilon_1(\tilde{s})\mathrm{d}s=\int_s^{z_1}\varepsilon_1'(\tilde{s})/\varepsilon_1(\tilde{s})\mathrm{d}\tilde{s}=\log(\varepsilon_1(z_1))-\log(\varepsilon_1(s))\tag{4.27}$$

因此

$$\exp\left(\int_s^{z_1}-\frac{3}{2}\varepsilon_1(\tilde{s})\bar{F}_1(r_1(\tilde{s}),\varepsilon_1(\tilde{s}))\mathrm{d}\tilde{s}\right)=\frac{\varepsilon_1(z_1)}{\varepsilon_1(s)},\tag{4.28}$$

我们可以将满足 $\tilde{X}_1(z_1^{\text{out}}) = 0$, $Y_1(z_1^{\text{in}}) = 0$ 的非齐次方程的解写成积分方程

$$\begin{aligned}\tilde{X}_1(z_1) &= \int_{z_1^{\text{out}}}^{z_1} \mathrm{e}^{\beta_1(z_1,s)} \left(Y_1(s)h_{1,Y}(s) + \alpha h_{1,\alpha}(s)\right) \mathrm{d}s,\\ Y_1(z_1) &= \varepsilon_1(z_1) \int_{z_1^{\text{in}}}^{z_1} \tilde{X}_1(s)g_{1,X}(s) + Y_1(s)g_{1,Y}(s) + \alpha g_{1,\alpha}(s)\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{4.29}$$

其中

$$\beta_1(z_1, z_0) = \int_{z_0}^{z_1} h_{1,X}(s)\mathrm{d}s$$

并记

$$\begin{aligned}g_{1,*}(s) &\coloneqq g_{1,*}(r_1(s), \varepsilon_1(s), \lambda_1(s)),\\ h_{1,*}(s) &\coloneqq h_{1,*}(r_1(s), \varepsilon_1(s), \lambda_1(s))\end{aligned}$$

当 $* = X, Y, \alpha$ 时。我们在空间 $\tilde{X}_1, Y_1 \in C([z_1^{\text{in}}, z_1^{\text{out}}])$ 上考虑积分方程 (4.29)，其范数为

$$\|(\tilde{X}_1, Y_1)\|_{1,I} = \|\tilde{X}_1\|_{\varepsilon_1} + \|Y_1\|_{r_1\varepsilon_1} = \sup_{z_1\in[z_1^{\text{in}}, z_1^{\text{out}}]} \left|\varepsilon_1(z_1)^{-1}\tilde{X}_1(z_1)\right| + \sup_{z_1\in[z_1^{\text{in}}, z_1^{\text{out}}]} \left|(r_1(z_1)\varepsilon_1(z_1))^{-1}Y_1(z_1)\right|,$$

利用不动点论证，方程 (4.29) 存在唯一解 $(\tilde{X}_1^I, Y_1^I)(z_1)$，满足以下估计

$$\left|\tilde{X}_1^I(z_1^{\text{in}})\right| \le C_{\bar{r}_1}|\alpha\lambda|, \qquad \left|Y_1^I(z_1^{\text{out}})\right| \le C_{\bar{r}_1}|\alpha\varepsilon\lambda|.$$

接下来，我们构造齐次方程的一个解，该方程由 (4.26) 在 $\alpha = 0$ 下给出，并满足边界条件 $\tilde{X}_1(z_1^{\text{out}}) = X_1^{\text{out}}, Y_1(z_1^{\text{in}}) = 0$，该解可表示为积分方程

$$\begin{aligned}\tilde{X}_1(z_1) &= X_1^{\text{out}}\mathrm{e}^{\beta_1(z_1,z_1^{\text{out}})} + \int_{z_1^{\text{out}}}^{z_1} \mathrm{e}^{\beta_1(t,s)}Y_1(s)h_{1,Y}(s)\mathrm{d}s,\\ Y_1(z_1) &= \varepsilon_1(z_1) \int_{z_1^{\text{in}}}^{z_1} \tilde{X}_1(s)g_{1,X}(s) + Y_1 g_{1,Y}(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

˜类似地，对于独立于 $\bar{r}_1, \delta, \varepsilon, \lambda$ 而固定的小 $\kappa > 0$，在空间 $X_1, Y_1 \in C([z_1^{\text{in}}, z_1^{\text{out}}])$ 上利用不动点论证，其范数为

$$\|(\tilde{X}_1, Y_1)\|_{1,\kappa} = \sup_{z_1\in[z_1^{\text{in}}, z_1^{\text{out}}]} \left|\mathrm{e}^{\beta_1^\kappa(z_1^{\text{out}},z_1)}\tilde{X}_1(z_1)\right| + \sup_{z_1\in[z_1^{\text{in}}, z_1^{\text{out}}]} \left|\varepsilon_1(z_1)^{-1}\mathrm{e}^{\beta_1^\kappa(z_1^{\text{out}},z_1)}Y_1(z_1)\right|,$$

其中

$$\beta_1^\kappa(z_1, z_0) = \int_{z_0}^{z_1} (h_{1,X}(s) - \kappa)\mathrm{d}s.$$

得到一个满足以下估计的解（$\tilde{X}_1^H$, Y_1^H）(z_1)

$$|\tilde{X}_1^H(z_1)| \le C|X_1^{\text{out}}|\mathrm{e}^{\beta_1^\kappa(z_1,z_1^{\text{out}})}, \qquad |Y_1^H(z_1)| \le C|X_1^{\text{out}}|\varepsilon_1(z_1)\mathrm{e}^{\beta_1^\kappa(z_1,z_1^{\text{out}})},$$

特别是，我们发现

$$|Y_1^H(z_1^{\text{out}})| \le C\frac{\varepsilon}{\bar{r}_1^4}\left|X_1^{\text{out}}\right|.$$

因此，我们得到一个由以下公式给出的（4.24）的解

$$X_1(z_1) = X_1^*(z_1) + \tilde{X}_1^I(z_1) + \tilde{X}_1^H(z_1),$$
$$Y_1(z_1) = Y_1^I(z_1) + Y_1^H(z_1)$$

满足

$$X_1(z_1^{\text{out}}) = X_1^*(z_1^{\text{out}}) + \tilde{X}_1^I(z_1^{\text{out}}) + \tilde{X}_1^H(z_1^{\text{out}}) + X_1^{\text{out}} = X_1^*(z_1^{\text{out}}) + X_1^{\text{out}},$$
$$\left|Y_1(z_1^{\text{out}})\right| = \left|Y_1^I(z_1^{\text{out}}) + Y_1^H(z_1^{\text{out}})\right| \le C\frac{\varepsilon}{\bar{r}_1^4}|X_1^{\text{out}}| + C_{\bar{r}_1}|\alpha\varepsilon\lambda|,$$

and

$$\left|X_1(z_1^{\text{in}}) - X_1^*(z_1^{\text{in}})\right| = \left|\tilde{X}_1^I(z_1^{\text{in}}) + \tilde{X}_1^H(z_1^{\text{in}})\right| \le C_{\bar{r}_1}\left(|X_1^{\text{out}}|\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon} + |\alpha\lambda|\right),$$
$$Y_1(z_1^{\text{in}}) = Y_1^I(z_1^{\text{in}}) + Y_1^H(z_1^{\text{in}}) = 0,$$

如所述。 □

我们考虑命题 4.4 中关于 λ 的条件。注意，由于 λ_1 的实部和虚部在区间 $[z_1^{\text{in}}, z_1^{\text{out}}]$, λ_1 上的绝对值都严格递减，因此对于 $z_1 \in [z_1^{\text{in}}, z_1^{\text{out}}]$, z_1 始终属于集合 $\Lambda_1(\delta, \mu, M)$。这将考察范围限制为满足 $|\Re(\lambda)| \le \mu\varepsilon^{1/6}$ 且 $|\Im(\lambda)| \le M\varepsilon^{1/6}$ 的 λ 值，其中 μ 可能需要取小；也就是说，我们仅考虑 $\lambda \in \Lambda_{\mathrm{r},\varepsilon}(\mu, M)$ 的值。命题 4.4 中为此类 λ 值构造的解，可以与坐标图 $\mathcal{K}_2$ 中的解相匹配。

为了将论证扩展到 $\lambda \in \Lambda_{\mathrm{c},\,\varepsilon}(\mu,\ M)$ 的值（也就是说，取较小但与 ε 无关的 $|\Im(\lambda)|$ 值），我们必须考虑这样的解：对于区间 $z_1 \in [z_1^{\text{in}}, z_1^{\text{out}}]$ 的某一部分，$\lambda_1(z_1)$ 位于 $\Lambda_1(\delta,\ \mu,\ M)$ 之外。相应的解将满足略有不同的估计，并将改为与坐标图 $\mathcal{K}_4$ 中的解相匹配。我们关注经由截面进入 $\mathcal{K}_1$ 的轨道

$$\Sigma_{14}^{\text{in}} = \left\{\Im(\lambda_1) = M\delta^{1/6}\right\},$$

特别是那些满足 $\Im\lambda_1(z_{14}^{\text{in}}) = M\delta^{1/6}$ 且 $|\Re\lambda_1(z_{14}^{\text{in}})| \le \mu\delta^{1/6}$（其中某个 $z_1^{\text{in}} < z_{14}^{\text{in}} < z_1^{\text{out}}$）的解。这些解将与坐标图 $\mathcal{K}_4$ 中的解相匹配（情形 $\Im(\lambda_1) = -M\delta^{1/6}$ 类似），而那些经由边界 $|\Re(\lambda_1)| = \mu\delta^{1/6}$ 进入的解则无关紧要。我们有如下

命题 4.5. 考虑满足 $(x_1, r_1, \varepsilon_1) = (x_{1,\varepsilon}, r_{1,\varepsilon}, \varepsilon_{1,\varepsilon})(z_1)$ 的 *(4.24)*，并固定 $M > 0$。存在 $C, C_{\bar{r}_1}, \mu > 0$，使得以下结论成立。给定 $X_1^{\text{out}} \in \mathbb{C}$ 以及任意 $\lambda \in \Lambda_{\mathrm{c},\varepsilon}(\mu, M)$，使得对于某个 $z_1^{\text{in}} < z_{14}^{\text{in}} < z_1^{\text{out}}$，有 $\Im\lambda_1(z_{14}^{\text{in}}) = M\delta^{1/6}$ 且 $|\Re\lambda_1(z_{14}^{\text{in}})| \le \mu\delta^{1/6}$，则存在 *(4.24)* 的一个解 (X_1, Y_1, λ_1)：$[z_{14}^{\text{in}}, z_1^{\text{out}}] \to \mathbb{C}^2 \times \Lambda_1(\delta, \mu, M)$，满足

$$X_1(z_1^{\text{out}}) = X_1^*(z_1^{\text{out}}) + X_1^{\text{out}}, \qquad Y_1(z_{14}^{\text{in}}) = 0,$$

以及这些估计

$$\left|X_1(z_{14}^{\text{in}}) - X_1^*(z_{14}^{\text{in}})\right| \le C_{\bar{r}_1}\left(|X_1^{\text{out}}| + |\alpha\lambda|\right), \qquad |Y_1(z_1^{\text{out}})| \le C\frac{\varepsilon}{\bar{r}_1^4}|X_1^{\text{out}}| + C_{\bar{r}_1}|\alpha\varepsilon\lambda|.$$

证明。 论证与命题 4.4的证明类似。 □

4.3.2 坐标图 $\mathcal{K}_2$

我们采用坐标变换 (4.20) 并令 $z_2 = r_2^2\zeta$。记作 $' = \mathrm{d}\,\mathrm{d}z_2$，可得如下系统 ——

$$\begin{aligned}
x_2' &= -x_2^2 + y_2 + \mathcal{O}(r_2^2),\\
y_2' &= 1 + \mathcal{O}(r_2^2),\\
X_2' &= X_2\left(-2x_2 - \frac{\lambda_2^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3} + \mathcal{O}(r_2^2, r_2\lambda_2)\right) + Y_2\left(1 + \mathcal{O}(r_2^2, r_2\lambda_2)\right)\\
&\qquad + \alpha\left(-x_2^2 + y_2 + \mathcal{O}(r_2^2)\right)\left(-\frac{\lambda_2^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3} + \mathcal{O}(r_2\lambda_2)\right) + \mathcal{O}(\alpha r_2\lambda_2),\\
Y_2' &= \mathcal{O}(r_2^2X_2, r_2^4Y_2, \alpha r_2^3\lambda_2),
\end{aligned} \tag{4.30}$$

我们在区间 $z_2 \in [z_2^{\mathrm{in}}, z_2^{\mathrm{out}}]$ 上考察该系统，在此区间上，波列解由 $\mathcal{K}_2$ 坐标中的解 $(x_{\varepsilon,\,2},\ y_{\varepsilon,\,2})$ 表示，该解在以下截面之间穿行

$$\begin{aligned}
\Sigma_2^{\mathrm{in}} &= \left\{x_2 = \delta^{-1/3}\right\},\\
\Sigma_2^{\mathrm{out}} &= \left\{y_2 = \delta^{-2/3}\right\}.
\end{aligned}$$

注意到 $\lambda_2 = \lambda_1\delta^{-1/6}$，因此 λ_2 满足 $|\Re(\lambda_2)| \le \mu$，$|\Im(\lambda_2)| \le M$。当 $r_2 = 0$ 时，我们得到系统

$$\begin{aligned}
x_2' &= -x_2^2 + y_2,\\
y_2' &= 1,\\
X_2' &= X_2\left(-2x_2 - \frac{\lambda_2^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}\right) + Y_2 - \alpha\frac{\lambda_2^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}\left(-x_2^2 + y_2\right),\\
Y_2' &= 0,
\end{aligned} \tag{4.31}$$

这是玩具模型的一个重缩放版本，该模型已在 §4.2 中分析过。前一对方程的动力学由唯一解 x_R 所组织，该解满足黎卡提方程

$$x' = -x^2 + z_2, \tag{4.32}$$

满足

$$\begin{aligned}
z_2 &\sim x_R^2 + \frac{1}{2x_R} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x_R^4}\right), \qquad x_R \to -\infty,\\
z_2 &\sim -\Omega_0 + \frac{1}{x_R} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x_R^3}\right), \qquad x_R \to \infty,
\end{aligned}$$

其中 Ω_0 是 $\bar{J}(z) := J_{-\frac{1}{3}}(2z^{3/2}/3) + J_{\frac{1}{3}}(2z^{3/2}/3)$ 的最小正零点，其中 $J_{\pm\frac{1}{3}}$ 是第一类贝塞尔函数。当 $r_2 > 0$ 较小时，该解会以正则方式扰动为 (4.30) 中 (x_2, y_2)-系统的一个解，满足 $(x_2, y_2)(z_2) = (x_R(z_2),\ z_2) + \mathcal{O}(r_2^2)$，对应于 $\mathcal{K}_2$- 坐标中流形 $\mathcal{M}^{\mathrm{l},+}$ 的一个切片；参见备注 4.3]。根据引理 4.1，波列解与该解指数级接近，因此在 $\mathcal{K}_2$-坐标中可表示为一个解 $(x_{\varepsilon,2}, y_{\varepsilon,2}) = (x_R(z_2),\ z_2) + \mathcal{O}(r_2^2)$，其中 r_2 较小且位于区间 $z_2 \in [z_2^{\mathrm{in}}, z_2^{\mathrm{out}}]$ 上。因此，在极限 $r_2 \to 0$ 下，我们将 $\mathcal{K}_2$-坐标中的波列解 $(x_{\varepsilon,2}, y_{\varepsilon,2})$ 与解 $(x_2, y_2) = (x_R(z_2),\ z_2)$ 视为同一解，并将线性化问题写作

$$\begin{aligned}
X_2' &= X_2\left(-2x_R - \frac{\lambda_2^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}\right) + Y_2 - \alpha\frac{\lambda_2^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}x_R',\\
Y_2' &= 0,
\end{aligned}$$

当 $Y_2=0$ 时， X_2-方程有一个唯一解 $X_2=X_2^*(z_2)$，该解在 $z_2\to\infty$ 时有界，其表达式为

$$X_2^*(z_2)=-\alpha\frac{\lambda_2^2}{\theta_{\mathrm{lf}},c^3}\int_\infty^{z_2}\exp\left(\int_s^{z_2}-2x_R(\bar{s})-\frac{\lambda_2^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}\mathrm{d}\bar{s}\right)x_R'(s)\mathrm{d}s,$$

这对应于来自坐标图 $\mathcal{K}_1$ 的解 X_1^*，现用 $\mathcal{K}_2$ 坐标表示。令 $X_2=X_2^*+X_2$，由此得到方程

$$\begin{aligned}
x_2' &= -x_2^2+y_2+\mathcal{O}(r_2^2),\\
y_2' &= 1+\mathcal{O}(r_2^2),\\
\tilde{X}_2' &= \tilde{X}_2\left(-2x_2-\frac{\lambda_2^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}+\mathcal{O}(r_2^2,r_2\lambda_2)\right)+Y_2\left(1+\mathcal{O}(r_2^2,r_2\lambda_2)\right)+\mathcal{O}(\alpha r_2\lambda_2),\\
Y_2' &= \mathcal{O}\left(r_2^2\tilde{X}_2,r_2^4Y_2,\alpha r_2^3\lambda_2,\alpha r_2^2\lambda_2^2\right).
\end{aligned}\tag{4.33}$$

有如下结论。

命题 *4.6.* 考虑具有 $(x_2,y_2)=(x_{2,\varepsilon},y_{2,\varepsilon})(z_2)$ 的 *(4.30)*。给定 $(X_2^{\mathrm{out}},Y_2^{\mathrm{out}})\in\mathbb{C}^2$ 以及任意满足 $|\Re(\lambda_2)|<\mu$, $|\Im(\lambda_2)|<M$ 的 $\lambda_2\in\mathbb{C}$，存在 *(4.30)* 的一个解 (X_2,Y_2)：$[z_2^{\mathrm{in}},z_2^{\mathrm{out}}]\to\mathbb{C}^2$，满足

$$X_2(z_2^{\mathrm{out}})=X_2^{\mathrm{out}}+X_2^*(z_2^{\mathrm{out}}),\qquad Y_2(z_2^{\mathrm{out}})=0,$$

以及以下估计

$$\begin{aligned}
X_2(z_2^{\mathrm{in}}) &= X_2^{\mathrm{out}}\exp\left(\int_{z_2^{\mathrm{out}}}^{z_2^{\mathrm{in}}}-2x_R(\tilde{z})-\frac{\lambda_2^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}\mathrm{d}\tilde{z}\right)+X_2^*(z_2^{\mathrm{in}})+\mathcal{O}\left(r_2^2|X_2^{\mathrm{out}}|,r_2\lambda_2|X_2^{\mathrm{out}}|,\alpha r_2\lambda_2\right),\\
Y_2(z_2^{\mathrm{in}}) &= \mathcal{O}\left(r_2^2|X_2^{\mathrm{out}}|,\alpha r_2^2\lambda_2^2,\alpha r_2^3\lambda_2\right),
\end{aligned}$$

对所有充分小的 $r_2>0$ 均成立。

证明。 利用 $(x_{2,\ \varepsilon},\ y_{2,\ \varepsilon})(z_2)=(x_R(z_2)-z_2)+\mathcal{O}(r_2^2)$这一事实，以及过渡时间$|z_2^{\mathrm{in}}-z_2^{\mathrm{out}}|$ 有界且与 r_2、λ_2无关这一事实，可知这些估计可由对 (4.33) 应用正则摄动论证得到，条件是 r_2充分小。 □

4.3.3 坐标图 $\mathcal{K}_4$

我们变换到 $\mathcal{K}_4$ 坐标（4.22），通过缩放 $\mathrm{d}z_4=r_4^2\mathrm{d}\zeta$ 进行去奇异化，并记作$'=\mathrm{d}\ \mathrm{d}z_4$，从而得到该系统

$$\begin{aligned}
x_4' &= F_4(x_4,y_4,\varepsilon_4,r_4),\\
y_4' &= \varepsilon_4\left(1+\mathcal{O}(r_4^2)\right),\\
X_4' &= X_4\left(-2x_4-\frac{(\lambda_4+\mathrm{i})^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}+\mathcal{O}(r_4)\right)+Y_4\left(1+\mathcal{O}(r_4)\right)\\
&\quad+\alpha F_4(x_4,y_4,\varepsilon_4,r_4)\left(-\frac{(\lambda_4+\mathrm{i})^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}+\mathcal{O}(r_4)\right)+\mathcal{O}(\alpha r_4\varepsilon_4),\\
Y_4' &= \mathcal{O}(r_4^2\varepsilon_4X_4,r_4^4\varepsilon_4Y_4,\alpha r_4^3\varepsilon_4),
\end{aligned}\tag{4.34}$$

其中 $F_4(x_4,\ y_4,\ \varepsilon_4,\ r_4)=-x_4^2+y_4+\mathcal{O}(r_4^2)$。坐标图 $\mathcal{K}_4$涉及 $\varepsilon_4\le M^{-6}$的取值。我们固定一个较小的常数 $\delta_4>0$，并首先考虑 4.34，其中 $\delta_4\le\varepsilon_4\le M^{-6}$ 取充分小的值时，r_4 位于涵盖截面间过渡的区间 $[z_4^{\mathrm{in}},z_4^{\mathrm{out}}]$

$$\Sigma_4^{\mathrm{in}}=\left\{x_4=M^{-2}\delta^{-1/3}\right\},\qquad\Sigma_4^{\mathrm{out}}=\left\{y_4=M^{-4}\delta^{-2/3}\right\}.$$

注意，截面 Σ_4^{out}对应于坐标图 Σ_{14}^{in} 中的截面 $\mathcal{K}_1$；参见 §4.3.1。令 $r_4 = 0$，即可得到系统

$$\begin{aligned}
x_4' &= -x_4^2 + y_4,\\
y_4' &= \varepsilon_4,\\
X_4' &= X_4\left(-2x_4 - \frac{(\lambda_4+\mathrm{i})^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}\right) + Y_4 - \alpha\frac{(\lambda_4+\mathrm{i})^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}\left(-x_4^2+y_4\right),\\
Y_4' &= 0,
\end{aligned}$$

这对应于经过4.31变换到 $\mathcal{K}_4$坐标下的系统。该(x_4, y_4) 系统对应于重新缩放的黎卡提方程（4.32），其形式为

$$x_4' = -x_4^2 + \varepsilon_4 z_4,$$

它允许重新缩放的特解 $x_4(z_4) = \varepsilon_4^{1/3} x_R(\varepsilon_4^{1/3} z_4)$。与 §4.3.2 中的$\mathcal{K}_2$ 分析类似，波列解可表示为满足（4.34）的解 $(x_4, y_4) = (x_{4,\varepsilon}, y_{4,\varepsilon})(z_4)$，其中 $(x_{4,\varepsilon}, y_{4,\varepsilon})(z_4) = (\varepsilon_4^{1/3} x_R(\varepsilon_4^{1/3} z_4)\ \varepsilon_4 z_4) + \mathcal{O}(r_4^2)$。

当 $Y_4 = 0$ 时，我们可以构造由下式给出的唯一解 $X_4 = X_4^*(z_4)$

$$X_4^*(z_4) \coloneqq -\alpha\frac{(\lambda_4+\mathrm{i})^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}\int_\infty^{z_4} \exp\left(\int_s^{z_4} -2\varepsilon_4^{1/3} x_R(\varepsilon_4^{1/3}\tilde{s}) - \frac{(\lambda_4+\mathrm{i})^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}\mathrm{d}\tilde{s}\right)\varepsilon_4^{2/3} x_R'\big(\varepsilon_4^{1/3} s\big)\mathrm{d}s,$$

˜这对应于坐标图 $\mathcal{K}_1$ 中的解 X_1^*。我们令 $X_4 = X_4^* + X_4$，由此得到方程

$$\begin{aligned}
x_4' &= F_4(x_4, y_4, \varepsilon_4, r_4),\\
y_4' &= \varepsilon_4\left(1 + \mathcal{O}(r_4^2)\right),\\
\tilde{X}_4' &= \tilde{X}_4\left(-2x_4 - \frac{(\lambda_4+\mathrm{i})^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3} + \mathcal{O}(r_4)\right) + Y_4\left(1+\mathcal{O}(r_4)\right) + \mathcal{O}(\alpha r_4),\\
Y_4' &= \mathcal{O}(r_4^2\varepsilon_4\tilde{X}_4, r_4^4\varepsilon_4 Y_4, \alpha r_4^2).
\end{aligned} \tag{4.35}$$

我们有如下结论。

命题 *4.7.* 考虑 *(4.34)*，其中 $(x_4, y_4) = (x_{4,\varepsilon}, y_{4,\varepsilon})(z_4)$，并固定足够小的 $M > 0$ 和 $\delta_4 > 0$。对于所有足够小的 $r_4 > 0$，以下结论成立。给定 $(X_4^{\text{out}}, Y^{\text{out}4}) \in \mathbb{C}^2$，任意满足$\delta_4 \le \varepsilon_4 \le M^{-6}$ 的 ε_4 以及任意足够小的 $\lambda_4 \in \mathbb{R}$，都存在 (X_4, Y_4)：$[z_4^{\text{in}}, z_4^{\text{out}}] \to \mathbb{C}^2$ 的一个解，使其满足 *(4.34)*

$$X_4(z_4^{\text{out}}) = X_4^{\text{out}} + X_4^*(z_4^{\text{out}}), \qquad Y_4(z_4^{\text{out}}) = 0,$$

以及以下估计

$$\begin{aligned}
X_4(z_4^{\text{in}}) &= X_4^{\text{out}} \exp\left(\int_{z_4^{\text{out}}}^{z_4^{\text{in}}} -2\varepsilon_4^{1/3} x_R(\varepsilon_4^{1/3}\tilde{s}) - \frac{(\lambda_4+\mathrm{i})^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}\mathrm{d}\tilde{s}\right) + X_4^*(z_4^{\text{in}}) + \mathcal{O}\left(r_4|X_4^{\text{out}}|, \alpha r_4\right),\\
Y_4(z_4^{\text{in}}) &= \mathcal{O}\left(r_4^2|X_4^{\text{out}}|, \alpha r_4^2\right).
\end{aligned}$$

证明。利用以下事实 $(x_{4,\varepsilon}, y_{4,\varepsilon})(z_2) = (\varepsilon^{1/3} x_R(\varepsilon^{1/3} z_4)\ \varepsilon_4 z_4)$ 当 $r_4 = 0$时成立，以及过渡时间 $|z_4^{\text{in}} - z_4^{\text{out}}|$ 不依赖于 r_4且有界这一事实，对于充分小的 r_4，对（4.35）应用正则摄动论证即可得到这些估计。

□

命题 4.7 依赖于针对充分小的 r_4 的扰动论证；特别是，需要能够对过渡时间给出一个不依赖于 r_4 的上界，而该时间的行为为 ε_4^{-1}。对于较小的$0 < \varepsilon_4 \le \delta_4 \ll 1$，我们注意到，在 $\mathcal{K}_4$-坐标

$$\begin{aligned} x_4' &= F_4(x_4, y_4, \varepsilon_4, r_4), \\ y_4' &= \varepsilon_4 \left(1 + \mathcal{O}(r_4^2)\right) \end{aligned}$$

相当于在小参数 ε_4 下（沿反向时间）缓慢通过折叠点。当 $\varepsilon_4 \to 0$ 时，对充分小的 $r_4 > 0$，临界流形 $F_4(x_4, y_4, 0, r_4) = 0$ 在区域 $|x_4| \le M^{-2}\delta^{-1/3}, |y_4| \le M^{-4}\delta^{-2/3}$ 内呈现为一条开口向上的抛物线。这条抛物线的左分支与正 x 轴的并集对应于 $\mathcal{K}_4$ 坐标中的流形 $\mathcal{M}^{\mathrm{l}}_{,0}{}^{+}$。利用爆破去奇异化技术，当 $\varepsilon_4 > 0$ 较小时，该流形发生扰动，这与系统 (2.9) 的情形非常相似。因此，流形 $\mathcal{M}^{\mathrm{l}}_{,+}$ 在这些坐标中有一种自然表示，即为相应的小 ε_4 下这些流形的并集。根据引理 4.1，波列再次由解 $(x_4, y_4) = (x_{4,\varepsilon}, y_{4,\varepsilon})(z_4)$ 表示，该解在这些坐标中与 $\mathcal{M}^{\mathrm{l}}_{,+}$ 指数接近。我们有以下结果。

命题 *4.8*。考虑带有 $(x_4, y_4) = (x_{4,\varepsilon}, y_{4,\varepsilon})(z_4)$ 的 *(4.34)*。存在 $\delta_4, \theta_4 > 0$，使得对所有$0 < \varepsilon_4 \le \delta_4$ 以及所有充分小的 $r_4, \lambda_4 > 0$，下述结论成立。给定 $X_4^{\mathrm{out}} \in \mathbb{C}^2$，存在 *(4.34)* 的一个解 (X_4, Y_4)：$[z_4^{\mathrm{in}}, z_4^{\mathrm{out}}] \to \mathbb{C}^2$，满足

$$X_4(z_4^{\mathrm{out}}) = X_4^{\mathrm{out}}, \qquad Y_4(z_4^{\mathrm{out}}) = 0,$$

以及如下估计

$$\begin{aligned} X_4(z_4^{\mathrm{in}}) &= X_4^{\dagger}(z_4^{\mathrm{in}}; r_4) + \mathcal{O}\left(\alpha r_4 \varepsilon_4, r_4^2 \varepsilon_4 |X_4^{\mathrm{out}}|, \mathrm{e}^{-\theta_4/\varepsilon_4} |X_4^{\mathrm{out}}|\right), \\ Y_4(z_4^{\mathrm{in}}) &= \mathcal{O}\left(\alpha r_4^2 \varepsilon_4, r_4^2 \varepsilon_4 |X_4^{\mathrm{out}}|\right), \end{aligned}$$

对所有 $0 < \varepsilon_4 \le \delta_4$，其中 $X_4^{\dagger}(z_4; r_4)$ 是一个满足下述条件的解

$$X_4^{\dagger}(z_4^{\mathrm{in}}; r_4) = \alpha x'_{4,\varepsilon}(z_4^{\mathrm{in}}) \left(-1 + \mathcal{O}\left(r_4, \varepsilon_4^{1/3}\right)\right) + \mathcal{O}(\alpha r_4 \varepsilon_4).$$

证明。 我们将 (4.34) 改写为

$$\begin{aligned} x_4' &= F_4(x_4, y_4, \varepsilon_4, r_4), \\ y_4' &= \varepsilon_4 \left(1 + \mathcal{O}(r_4^2)\right), \\ X_4' &= X_4 h_{4,X}(x_4, y_4, r_4, \varepsilon_4, \lambda_4) + Y_4 h_{4,Y}(x_4, y_4, r_4, \varepsilon_4, \lambda_4) \\ &\quad + \alpha F_4(x_4, y_4, \varepsilon_4, r_4) \left(-\frac{(\lambda_4 + \mathrm{i})^2}{\theta_{\mathrm{lf}} c^3} + \mathcal{O}(r_4)\right) + \alpha h_{4,\alpha}(x_4, y_4, r_4, \varepsilon_4, \lambda_4), \\ Y_4' &= X_4 g_{4,X}(x_4, y_4, r_4, \varepsilon_4, \lambda_4) + Y_4 g_{4,Y}(x_4, y_4, r_4, \varepsilon_4, \lambda_4) + \alpha g_{4,\alpha}(x_4, y_4, r_4, \varepsilon_4, \lambda_4). \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} h_{4,X}(x_4, y_4, r_4, \varepsilon_4, \lambda_4) &= -2x_4 - \frac{(\lambda_4 + \mathrm{i})^2}{\theta_{\mathrm{lf}} c^3} + \mathcal{O}(r_4), \\ h_{4,Y}(x_4, y_4, r_4, \varepsilon_4, \lambda_4) &= 1 + \mathcal{O}(r_4), \\ h_{4,\alpha}(x_4, y_4, r_4, \varepsilon_4, \lambda_4) &= \mathcal{O}(r_4 \varepsilon_4), \\ g_{4,X}(x_4, y_4, r_4, \varepsilon_4, \lambda_4) &= \mathcal{O}(r_4^2 \varepsilon_4), \\ g_{4,Y}(x_4, y_4, r_4, \varepsilon_4, \lambda_4) &= \mathcal{O}(r_4^4 \varepsilon_4), \\ g_{4,\alpha}(x_4, y_4, r_4, \varepsilon_4, \lambda_4) &= \mathcal{O}(r_4^3 \varepsilon_4). \end{aligned}$$

我们令 $h_{4,*}(s)=h_{4,*}(x_4(s)\ y_4(s)\ r_4,\ \varepsilon_4,\ \lambda_4)$ 和 $g_{4,*}(s)=g_{4,*}(x_4(s)\ y_4(s)\ r_4,\ \varepsilon_4,\ \lambda_4)$，其中 $*=X,\ Y,\ \alpha$，并定义

$$\beta_4(z_4,z_0)\coloneqq\int_{z_0}^{z_4}h_{4,X}(s)\mathrm{d}s.$$

我们令 $X_4=X_4^{\dagger}+\tilde{X}_4$，其中

$$X_4^{\dagger}(z_4;r_4)=\int_{z_4^{\mathrm{out}}}^{z_4}\mathrm{e}^{\beta_4(z_4,s)}\left(\alpha x'_{4,\varepsilon}(s)\left(-\frac{(\lambda_4+\mathrm{i})^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}+\mathcal{O}(r_4)\right)+\alpha h_{4,\alpha}(s)\right)\mathrm{d}s,$$

并将特征值问题改写为积分方程

$$\begin{aligned}\tilde{X}_4(z_4)&=X_4^{\mathrm{out}}\mathrm{e}^{\beta_4(z_4,z_4^{\mathrm{out}})}+\int_{z_4^{\mathrm{out}}}^{z_4}\mathrm{e}^{\beta_4(z_4,s)}Y_4h_{4,Y}(s)\mathrm{d}s,\\ Y_4(z_4)&=\int_{z_4^{\mathrm{out}}}^{z_4}\left(X_4^{\dagger}(s;r_4)+\tilde{X}_4\right)g_{4,X}(s)+Y_4(s)g_{4,Y}(s)+\alpha g_{4,\alpha}(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{4.36}$$

首先，注意到以下关系，对 $X_4^{\dagger}(z_4;r_4)$ 进行估计

$$\begin{aligned}h_{4,X}(s)&=-2x_{4,\varepsilon}(s)-\frac{(\lambda_4+\mathrm{i})^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}+\mathcal{O}(r_4)\\&=\frac{x''_{4,\varepsilon}(s)}{x'_{4,\varepsilon}(s)}-\frac{y'_{4,\varepsilon}(s)}{x'_{4,\varepsilon}(s)}-\frac{(\lambda_4+\mathrm{i})^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}+\mathcal{O}(r_4),\end{aligned}$$

从而

$$X_4^{\dagger}(z_4;r_4)=\alpha x'_{4,\varepsilon}(z_4)\left(-\frac{(\lambda_4+\mathrm{i})^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}+\mathcal{O}(r_4)\right)\int_{z_4^{\mathrm{out}}}^{z_4}e^{\tilde{\beta}_4(z_4,s)}\mathrm{d}s+\mathcal{O}(\alpha r_4\varepsilon_4),$$

其中

$$\tilde{\beta}_4(z_4,s)\coloneqq\beta_4(z_4,s)-\int_s^{z_4}\frac{x''_{4,\varepsilon}(\tilde{s})}{x'_{4,\varepsilon}(\tilde{s})}\mathrm{d}\tilde{s}=\int_s^{z_4}-\frac{y'_{4,\varepsilon}(\tilde{s})}{x'_{4,\varepsilon}(\tilde{s})}-\frac{(\lambda_4+\mathrm{i})^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}+\mathcal{O}(r_4)\mathrm{d}\tilde{s}.$$

注意，被积函数的第一项表示由解 $(x_4,\ y_4)=(x_{4,\varepsilon},\ y_{4,\varepsilon})(z_4)$ 所构成的图像的斜率，该解满足

$$-\frac{\mathrm{d}y_4}{\mathrm{d}x_4}(\tilde{s})=-\frac{y'_{4,\varepsilon}(\tilde{s})}{x'_{4,\varepsilon}(\tilde{s})}\geq C\varepsilon_4,\tag{4.37}$$

例如，参见 [20, 注 4.1]. 通过分部积分——对项 $\exp\left(\frac{(\lambda_4+\mathrm{i})^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}(s-z_4)\right)$ 进行积分——我们得到

$$\begin{aligned}X_4^{\dagger}(z_4^{\mathrm{in}};r_4)&=\alpha x'_{4,\varepsilon}(z_4^{\mathrm{in}})\left(-1+\mathcal{O}\left(r_4,\varepsilon_4\right)\right)+\mathcal{O}(\alpha r_4\varepsilon_4)\\&\quad+\alpha x'_{4,\varepsilon}(z_4^{\mathrm{in}})\int_{z_4^{\mathrm{out}}}^{z_4^{\mathrm{in}}}\left(\frac{y'_{4,\varepsilon}(\tilde{s})}{x'_{4,\varepsilon}(\tilde{s})}+\mathcal{O}(r_4)\right)e^{\tilde{\beta}_4(z_4^{\mathrm{in}},s)}\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{4.38}$$

最后，按照 [20, §4.7], 中的估计，我们发现

$$\left|\frac{y'_{4,\varepsilon}(\tilde{s})}{x'_{4,\varepsilon}(\tilde{s})}\right|\leq C\varepsilon_4^{1/3}$$

在宽度为 $\mathcal{O}(\varepsilon_4^{-1/3})$ 的区间上，在其余积分区间上，被积函数关于 $\varepsilon_4^{-1/3}$ 呈指数级微小，这是由于指数项和 (4.37)，由此我们得到

$$X_4^{\dagger}(z_4^{\mathrm{in}};r_4)=\alpha x'_{4,\varepsilon}(z_4^{\mathrm{in}})\left(-1+\mathcal{O}\left(r_4,\varepsilon_4^{1/3}\right)\right)+\mathcal{O}(\alpha r_4\varepsilon_4).\tag{4.39}$$

然后，通过在空间$\tilde{X}_4$上对积分方程（(4.36)）应用不动点论证，便可得到该结果 $Y_4\in C$（$[z_4^{\mathrm{in}},z_4^{\mathrm{out}}]$）。

□

4.3.4 坐标图 $\mathcal{K}_3$

我们变换到 $\mathcal{K}_3$坐标（4.21），通过 $\mathrm{d}z_3 = r_3^2\mathrm{d}\zeta$ 进行去奇异化，并记 $' = \mathrm{d}\,\mathrm{d}z_3$，从而得到以下系统

$$
\begin{aligned}
r_3' &= -\frac{1}{2}r_3F_3(r_3,y_3,\varepsilon_3),\\
y_3' &= 2y_3F_3(r_3,y_3,\varepsilon_3) + \varepsilon_3\left(1+\mathcal{O}(r_3^2)\right),\\
\varepsilon_3' &= 3\varepsilon_3F_3(r_3,y_3,\varepsilon_3),\\
X_3' &= 2X_3F_3(r_3,y_3,\varepsilon_3) + X_3\left(-2-\frac{\lambda_3^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}+\mathcal{O}(r_3^2,r_3\lambda_3)\right) + Y_3\left(1+\mathcal{O}(r_3^2,r_3\lambda_3)\right)\\
&\quad + \alpha\left(\frac{\lambda_3^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}+\mathcal{O}(r_3\lambda_3)\right)F_3(r_3,y_3,\varepsilon_3) + \mathcal{O}(\alpha r_3\varepsilon_3\lambda_3),\\
Y_3' &= 3Y_3F_3(r_3,y_3,\varepsilon_3) + \mathcal{O}(r_3^2\varepsilon_3X_3, r_3^4\varepsilon_3Y_3, \alpha r_3\lambda_3\varepsilon_3),\\
\lambda_3' &= \frac{1}{2}\lambda_3F_3(r_3,y_3,\varepsilon_3),
\end{aligned}
$$

其中 $F_3(r_3,\ y_3,\ \varepsilon_3) = 1-y_3+\mathcal{O}(r_3^2)$。首先考虑 $(r_3,\ y_3,\ \varepsilon_3)$-坐标中的存在性问题，我们将注意力限制在由 Σ_3^{in}和 Σ_3^{out}定义的截面之间的流：

$$
\begin{aligned}
\Sigma_3^{\mathrm{in}} &= \{r_3 = r_{3,\varepsilon}(\varepsilon_3), |y_3| \le \bar{y}_3, 0 \le \varepsilon_3 \le \delta\},\\
\Sigma_3^{\mathrm{out}} &= \{0 \le r_3 \le r_{3,\varepsilon}(\delta), |y_3| \le \bar{y}_3, \varepsilon_3 = \delta\},
\end{aligned}
$$

其中，根据引理 4.1，$r_{3,\varepsilon}(\varepsilon_3)^2 = x_{\mathrm{in}}(\nu,\varepsilon)$满足$|r_{3,\ \varepsilon}(\varepsilon_3)\ -\bar{r}_3| \le C_\nu\varepsilon_3^{2/3}$；并且 $\bar{r}_3^2 := r_{3,\varepsilon}(0)^2 = x_{\mathrm{in}}(\nu, 0)$，$\bar{y}_3$ 是一个小常数。波列在 $\mathcal{K}_3$-坐标中由解 $(r_{3,\varepsilon},y_{3,\varepsilon},\varepsilon_{3,\varepsilon})(z_3)$表示，它分别在 $z = z_3^{\mathrm{in}}$、z_3^{out}处到达这些截面。利用引理 2.10]和方程的形式，当 $\bar{r}_3$充分小时，流形 $\mathcal{M}^{1,+}$ 可以在 $\mathcal{K}_3$-坐标中表示为图像 $y_3 = -\Omega_0\varepsilon_3^{2/3} + \mathcal{O}(r_3^2\varepsilon_3\log\ \varepsilon_3,\varepsilon_3)$；因此，根据引理 4.1，波列与该图像的距离呈指数级小。

因此，我们考虑相应的特征值问题

$$
\begin{aligned}
X_3' &= 2X_3F_3(r_3,y_3,\varepsilon_3) + X_3\left(-2-\frac{\lambda_3^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}+\mathcal{O}(r_3^2,r_3\lambda_3)\right) + Y_3\left(1+\mathcal{O}(r_3^2,r_3\lambda_3)\right)\\
&\quad + \alpha\left(\frac{\lambda_3^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}+\mathcal{O}(r_3\lambda_3)\right)F_3(r_3,y_3,\varepsilon_3) + \mathcal{O}(\alpha r_3\varepsilon_3\lambda_3),\\
Y_3' &= 3Y_3F_3(r_3,y_3,\varepsilon_3) + \mathcal{O}(r_3^2\varepsilon_3X_3, r_3^4\varepsilon_3Y_3, \alpha r_3\lambda_3\varepsilon_3),\\
\lambda_3' &= \frac{1}{2}\lambda_3F_3(r_3,y_3,\varepsilon_3)
\end{aligned}
\tag{4.40}
$$

在区间 $z_3 \in [z_3^{\mathrm{in}}, z_3^{\mathrm{out}}]$上，对于 $\lambda_3 \in \Lambda_3(\delta,\mu,M) = \{\lambda_3 \in \mathbb{C}\colon\ |\Re(\lambda_3)| \le \mu\delta^{1/6}, |\Im(\lambda_3)| \le M\delta^{1/6}\}$ 的取值，我们首先考虑经由截面 Σ_3^{out} 离开的解 $\mathcal{K}_3$；这些解将与来自坐标图 $\mathcal{K}_2$ 的解相匹配。对 $\mathrm{d}\tilde{z}_3 = F_3(r_3,y_3,\varepsilon_3)\mathrm{d}z_3$ 进行重标度，并将相应变换后的区间记为 $\tilde{z}_3 \in [\tilde{z}_3^{\mathrm{in}}, \tilde{z}_3^{\mathrm{out}}]$，我们首先考虑不变子空间 $r_3 = 0$ 上的系统

$$
\begin{aligned}
\dot{y}_3 &= 2y_3 + \frac{\varepsilon_3}{1-y_3},\\
\dot{\varepsilon}_3 &= 3\varepsilon_3,\\
\dot{X}_3 &= X_3\frac{\left(-\frac{\lambda_3^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}-2y_3\right)}{1-y_3} + \frac{Y_3}{1-y_3} + \alpha\frac{\lambda_3^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3},\\
\dot{Y}_3 &= 3Y_3,\\
\dot{\lambda}_3 &= \frac{1}{2}\lambda_3,
\end{aligned}
$$

其中 $\cdot = \mathrm{d}\,\mathrm{d}\tilde{z}_3$。在子空间 $Y_3 = 0$ 中，设 $X_3 = X_3^*$ 是此方程的一个解，且满足 $\lim_{\tilde{z}_3\to-\infty} X_3^*(\tilde{z}_3) = X_3^\infty$。利用 $\lambda_3 = \lambda_2\varepsilon_3^{1/6}$ 和 $y_3 = -\Omega_0\varepsilon_3^{2/3} + \mathcal{O}(r_3^2\varepsilon_3 \log\, \varepsilon_3, \varepsilon_3)$ 这一事实，我们得出在子空间 $r_3 = 0$ 中，

$$\frac{\mathrm{d}X_3}{\mathrm{d}\varepsilon_3} = \frac{\dot{X}_3}{\dot{\varepsilon}_3} = \frac{X_3}{3\varepsilon_3^{2/3}}\left(-\frac{\lambda_2^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3} + \mathcal{O}\left(\varepsilon_3^{1/3}, \lambda_2^2\varepsilon_3^{2/3}\right)\right) + \alpha\frac{\lambda_2^2}{3\varepsilon_3^{2/3}\theta_{\mathrm{lf}}c^3}, \tag{4.41}$$

因此，X_3^* 可按 ε_3 展开为

$$\begin{aligned} X_3^* &= X_3^\infty \mathrm{e}^{-\frac{\lambda_2^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}\varepsilon_3^{1/3}}\left(1 + \mathcal{O}\left(\varepsilon_3^{2/3}, \lambda_2^2\varepsilon_3\right)\right) + \alpha\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\lambda_2^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}\varepsilon_3^{1/3}}\right)\left(1 + \mathcal{O}\left(\varepsilon_3^{2/3}, \lambda_2^2\varepsilon_3\right)\right) \\ &= X_3^\infty \mathrm{e}^{-\frac{\lambda_3^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}}\left(1 + \mathcal{O}\left(\varepsilon_3^{2/3}\right)\right) + \alpha\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\lambda_3^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}}\right)\left(1 + \mathcal{O}\left(\varepsilon_3^{2/3}\right)\right), \end{aligned}$$

当 $\varepsilon_3 \to 0$时。为确定使该解对应于坐标图 $\mathcal{K}_2$中的特解 X_2^* 的 X_3^∞值，我们将 X_2^* 变换到坐标图 $\mathcal{K}_3$，其中 X_2^* 可按 ε_3展开为

$$X_3 = \alpha\frac{\lambda_2^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}\frac{1}{\mathrm{Ai}'(-\Omega_0)^2}\left(1 + \mathcal{O}\left(\varepsilon_3^{1/3}\right)\right)\int_\infty^{-\Omega_0} \mathrm{e}^{\frac{\lambda_2^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}(s+\Omega_0)}\left(\mathrm{Ai}'(s)^2 - s\mathrm{Ai}(s)^2\right)\mathrm{d}s,$$

由此可知，当满足以下条件时，X_3^* 和 X_2^* 对应于同一个解：

$$X_3^\infty = \alpha\Upsilon_{\mathrm{lf}}(\lambda_2) = \alpha\frac{\lambda_2^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}\frac{1}{\mathrm{Ai}'(-\Omega_0)^2}\int_\infty^{-\Omega_0} \mathrm{e}^{\frac{\lambda_2^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}(s+\Omega_0)}\left(\mathrm{Ai}'(s)^2 - s\mathrm{Ai}(s)^2\right)\mathrm{d}s.$$

注意，$|\Upsilon_{\mathrm{lf}}(\lambda_2)|$ 在区域 $|\Re(\lambda_2)| < \mu$中 $|\Im(\lambda_2)| < M$对于充分小的 $\mu > 0$是良定义且一致有界的；参见附录 C。

˜令 $X_3 = X_3^* + X_3$，得到如下系统

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{X}}_3 &= \tilde{X}_3 h_{3,X}(r_3, \varepsilon_3, y_3, \lambda_3) + Y_3 h_{3,Y}(r_3, \varepsilon_3, y_3, \lambda_3) + \alpha h_{3,\alpha}(r_3, \varepsilon_3, y_3, \lambda_3), \\ \dot{Y}_3 &= 3Y_3 + \varepsilon_3\left(\tilde{X}_3 g_{3,X}(r_3, \varepsilon_3, y_3, \lambda_3) + Y_3 g_{3,Y}(r_3, \varepsilon_3, y_3, \lambda_3) + \alpha g_{3,\alpha}(r_3, \varepsilon_3, y_3, \lambda_3)\right), \\ \dot{\lambda}_3 &= \frac{1}{2}\lambda_3, \end{aligned} \tag{4.42}$$

其中

$$\begin{aligned} h_{3,X}(r_3, \varepsilon_3, y_3, \lambda_3) &= -\frac{\lambda_3^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3} + \mathcal{O}\left(r_3^2, r_3\lambda_3, y_3\right), \\ h_{3,Y}(r_3, \varepsilon_3, y_3, \lambda_3) &= 1 + \mathcal{O}\left(r_3^2, r_3\lambda_3, y_3\right), \\ h_{3,\alpha}(r_3, \varepsilon_3, y_3, \lambda_3) &= \mathcal{O}\left(r_3\lambda_3, r_3^2\Upsilon_{\mathrm{lf}}(\lambda_2)\right), \\ g_{3,X}(r_3, \varepsilon_3, y_3, \lambda_3) &= \mathcal{O}\left(r_3^2\right), \\ g_{3,Y}(r_3, \varepsilon_3, y_3, \lambda_3) &= \mathcal{O}\left(r_3^4\right), \\ g_{3,\alpha}(r_3, \varepsilon_3, y_3, \lambda_3) &= \mathcal{O}\left(r_3\lambda_3, r_3^2\Upsilon_{\mathrm{lf}}(\lambda_2)\right). \end{aligned}$$

我们有如下结论。

命题 4.9. 考虑 (4.40)，其中 $(r_3, y_3, \varepsilon_3) = (r_{3,\varepsilon}, y_{3,\varepsilon}, \varepsilon_{3,\varepsilon})(z_3)$，并固定 $M > 0$。存在$C, C_{\bar{r}_3}, \mu > 0$，使得以下结论成立。给定 $(X_3^{\mathrm{in}}, Y\mathit{out3}) \in \mathbb{C}^2$和任意 $\lambda \in \Lambda_{\mathrm{r},\varepsilon}(\mu, M)$，存在一个解 (X_3, Y_3, λ_3)：$[z_3^{\mathrm{in}}, z_3^{\mathrm{out}}] \to \mathbb{C}^2 \times \Lambda_3(\delta, \mu, M)$，满足 (4.40)

$$X_3(z_3^{\mathrm{out}}) = X_3^*(z_3^{\mathrm{out}}) + \tilde{X}_3^{\mathrm{out}}, \qquad Y_3(z_3^{\mathrm{out}}) = Y_3^{\mathrm{out}},$$

以及以下估计

$$\begin{aligned}\left|X_3(z_3^{\mathrm{in}})-\Upsilon_{\mathrm{lf}}(\lambda_2)F_3(r_3^{\mathrm{in}},y_3^{\mathrm{in}},\varepsilon_3^{\mathrm{in}})\right|&\le C_{\bar r_3}\left(\left|\tilde X_3^{\mathrm{out}}\right|+\left|Y_3^{\mathrm{out}}\right|+|\alpha\lambda\log\varepsilon|\right)+C|\alpha\bar r_3^2\Upsilon_{\mathrm{lf}}(\lambda_2)|,\\ \left|Y_3(z_3^{\mathrm{in}})\right|&\le C_{\bar r_3}\varepsilon\left(|\tilde X_3^{\mathrm{out}}|+|Y_3^{\mathrm{out}}|+|\alpha\lambda\log\varepsilon|\right)+C\frac{\varepsilon}{\bar r_3^4}\left|\alpha\Upsilon_{\mathrm{lf}}(\lambda_2)\right|,\end{aligned}$$

其中 $(r_3^{\mathrm{in}},y_3^{\mathrm{in}},\varepsilon_3^{\mathrm{in}}):=(r_3,y_3,\varepsilon_3)(z_3^{\mathrm{in}})$。

证明。 利用关系 $X_3=X_3^*+\tilde X_3$，我们求解 (4.42)，并使其满足边界条件 $\tilde X_3(\tilde z_3^{\mathrm{out}})=\tilde X_3^{\mathrm{out}}$以及 $Y_3(\tilde z_3^{\mathrm{out}})=Y_3^{\mathrm{out}}$。我们将 (4.42) 写成相应的积分方程

$$\begin{aligned}\tilde X_3(\tilde z_3)&=\tilde X_3^{\mathrm{out}}\mathrm{e}^{\beta_3(\tilde z_3,\tilde z_3^{\mathrm{out}})}+\int_{\tilde z_3^{\mathrm{out}}}^{\tilde z_3}\mathrm{e}^{\beta_3(\tilde z_3,s)}\left(Y_3h_{3,Y}(s)+\alpha h_{3,\alpha}(s)\right)\mathrm{d}s,\\ Y_3(\tilde z_3)&=Y_3^{\mathrm{out}}\frac{\varepsilon_3(\tilde z_3)}{\delta}+\varepsilon_3(\tilde z_3)\int_{\tilde z_3^{\mathrm{out}}}^{z_3}\tilde X_3(s)g_{3,X}(s)+Y_3(s)g_{3,Y}(s)+\alpha g_{3,\alpha}(s)\mathrm{d}s,\end{aligned}\tag{4.43}$$

这里用到了 $\varepsilon_3(\tilde z_3^{\mathrm{out}})=\delta$ 这一事实，并且

$$\beta_3(\tilde z_3,\tilde z_0)=\int_{\tilde z_0}^{\tilde z_3}h_{3,X}(s)\mathrm{d}s.$$

注意到，根据假设，λ_3 始终属于集合 $\Lambda_3(\delta,\mu,M)$；通过令 μ 足够小，我们可以确保 $|\mathrm{e}^{\beta_3(\tilde z_3,\tilde z_0)}|$ 一致有界，且其界与 $M,\delta,\bar r_3,\mu$无关，只要 $\tilde z_3^{\mathrm{in}}\le\tilde z_3\le\tilde z_0\le\tilde z_3^{\mathrm{out}}$。

考虑将（4.4 3）视为空间上的不动点方程 $\tilde X_3,\ Y_3\in C([\tilde z_3^{\mathrm{in}},\tilde z_3^{\mathrm{out}}])$，其范数为

$$\|(\tilde X_3,Y_3)\|=\sup_{\tilde z_3\in[\tilde z_3^{\mathrm{in}},\tilde z_3^{\mathrm{out}}]}\left|\tilde X_3(\tilde z_3)\right|+\sup_{\tilde z_3\in[\tilde z_3^{\mathrm{in}},\tilde z_3^{\mathrm{out}}]}\left|\varepsilon_3(\tilde z_3)^{-1}Y_3(\tilde z_3)\right|,$$

我们得到一个满足以下估计的解

$$\begin{aligned}|\tilde X_3(\tilde z_3^{\mathrm{in}})|&\le C_{\bar r_3}\left(|\tilde X_3^{\mathrm{out}}|+|Y_3^{\mathrm{out}}|+|\alpha\lambda\log\varepsilon|\right)+C\bar r_3^2|\alpha\Upsilon_{\mathrm{lf}}(\lambda_2)|,\\ |Y_3(\tilde z_3^{\mathrm{in}})|&\le C_{\bar r_3}\varepsilon\left(|\tilde X_3^{\mathrm{out}}|+|Y_3^{\mathrm{out}}|+|\alpha\lambda\log\varepsilon|\right)+C\frac{\varepsilon}{\bar r_3^4}|\alpha\Upsilon_{\mathrm{lf}}(\lambda_2)|.\end{aligned}$$

注意到

$$X_3^*(\tilde z_3^{\mathrm{in}})=X_3^\infty F_3(r_3^{\mathrm{in}},\varepsilon_3^{\mathrm{in}},y_3^{\mathrm{in}})+\mathcal{O}\left(X_3^\infty(\varepsilon_3^{\mathrm{in}})^{2/3},X_3^\infty(\lambda_3^{\mathrm{in}})^2\right),$$

其中 $\varepsilon_3^{\mathrm{in}}=\varepsilon/\left(r_3^{\mathrm{in}}\right)^6$，且 $\lambda_3^{\mathrm{in}}=\lambda/r_3^{\mathrm{in}}$，并将解表示为原始自变量 z_3 的形式，因此我们得到方程（4.40）的一个满足以下条件的解

$$\begin{aligned}\left|X_3(z_3^{\mathrm{in}})-\alpha\Upsilon_{\mathrm{lf}}(\lambda_2)F_3(r_3^{\mathrm{in}},y_3^{\mathrm{in}},\varepsilon_3^{\mathrm{in}})\right|&=\left|X_3^*(z_3^{\mathrm{in}})+\tilde X_3(z_3^{\mathrm{in}})-\alpha\Upsilon_{\mathrm{lf}}(\lambda_2)F_3(r_3^{\mathrm{in}},y_3^{\mathrm{in}},\varepsilon_3^{\mathrm{in}})\right|\\ &\le C_{\bar r_3}\left(|\tilde X_3^{\mathrm{out}}|+|Y_3^{\mathrm{out}}|+|\alpha\lambda\log\varepsilon|\right)+C\bar r_3^2|\alpha\Upsilon_{\mathrm{lf}}(\lambda_2)|,\end{aligned}$$

正如所声称的。 □

我们分别考虑从 $\mathcal{K}_3$ 经由截面 $\Sigma_{34}^{\mathrm{out}}=\{\Im(\lambda_3)=M\delta^{1/6}\}$（对应截面 Σ_4^{in}，从坐标图 $\mathcal{K}_4$出发的解；情形 $\Im(\lambda_3)=-M\delta^{1/6}$ 类似。我们分别讨论命题4.7 和 4.8 所涵盖的情形，它们分别对应于在 $\Sigma_{34}^{\mathrm{out}}$取值为$\delta_4M^6\le\varepsilon_3/\delta\le1$ 和 $0<\varepsilon_3/\delta\le\delta_4M^6$时与之相交的轨道；在这两种情形下得到的估计略有不同。

对于 $\delta_4 M^6 \le \varepsilon_3/\delta \le 1$这一情形，由命题 4.7处理，与上面的论证几乎完全相同。将解 X_4^* 从 $\mathcal{K}_4$ 变换到 $\mathcal{K}_3$ 可得展开式

$$X_3 = \alpha \frac{(\lambda_4+\mathrm{i})^2}{\varepsilon_4^{1/3}\theta_{\mathrm{lf}}c^3}\frac{1}{\mathrm{Ai}'(-\Omega_0)^2}\left(1+\mathcal{O}(\lambda_3^2\varepsilon_4^{1/3})\right)\int_{\infty}^{-\Omega_0} \mathrm{e}^{\frac{(\lambda_4+\mathrm{i})^2}{\varepsilon_4^{1/3}\theta_{\mathrm{lf}}c^3}(s+\Omega_0)}\left(\mathrm{Ai}'(s)^2 - s\mathrm{Ai}(s)^2\right)\mathrm{d}s.$$

该解对应于取 $X_3^\infty = \alpha\Upsilon_{\mathrm{lf}}((\lambda_4+\mathrm{i})\varepsilon_4^{-1/6})$ 后的解 X_3^*，此时取极限 $\lambda_3 \to 0$。这实质上将上文对 X_3^* 的定义扩展到了满足 $|\Im(\lambda_2)| \le \delta_4^{-1/6}$ 的 λ_2 值，并注意到，只要 $|\lambda_4|$ 足够小，$\Upsilon_{\mathrm{lf}}((\lambda_4+\mathrm{i})\varepsilon_4^{-1/6})$ 就是良定义的 $\varepsilon_4 \to 0$。

另一方面，对于情形 $0 < \varepsilon_3/\delta \le \delta_4 M^6$，我们回顾命题 4.39 的证明中 $X_4^\dagger(z_4^{\mathrm{in}};\ r_4)$ 满足的估计4.8。特别地，我们看到当 $r_4 = 0$ 时，$X_4^\dagger$ 对应于坐标图中的一个解 $\mathcal{K}_3$，满足

$$X_3 = \alpha\left(1+\mathcal{O}\left(\lambda_3^2\varepsilon_4^{2/3}, \varepsilon_4^{1/3}\right)\right),$$

而这又对应于取下式后的 $\mathcal{K}_3$ 中的解 X_3^*

$$X_3^\infty = \alpha\left(1+\mathcal{O}\left(\varepsilon_4^{1/3}\right)\right) = \alpha\Upsilon_{\mathrm{lf}}\left((\lambda_4+\mathrm{i})\varepsilon_4^{-1/6}\right)\left(1+\mathcal{O}\left(\varepsilon_4^{1/3}\right)\right).$$

与命题 4.9类似，我们有以下结论。

命题 *4.10*。考虑 *(4.40)*，其中 $(r_3, y_3, \varepsilon_3) = (r_{3,\varepsilon}, y_{3,\varepsilon}, \varepsilon_{3,\varepsilon})(z_3)$，并固定 $M > 0$。存在$C_{\bar r_3}, C, \mu > 0$使得以下结论成立。给定 $(X_3^{\mathrm{in}}, Y_3^{\mathrm{out}}) \in \mathbb{C}^2$以及任意 $\lambda \in \Lambda_{c,\varepsilon}(\mu, M)$，存在 *(4.40)* 的一个解 (X_3, Y_3, λ_3)：$[z_3^{\mathrm{in}}, z_{34}^{\mathrm{out}}] \to \mathbb{C}^3$，满足

$$X_3(z_{34}^{\mathrm{out}}) = X_3^*(z_{34}^{\mathrm{out}}) + \tilde X_3^{\mathrm{out}}, \qquad Y_3(z_{34}^{\mathrm{out}}) = \varepsilon_3(z_{34}^{\mathrm{out}})Y_3^{\mathrm{out}},$$

以及以下估计

$$\left|X_3(z_3^{\mathrm{in}}) - \alpha\Upsilon_{\mathrm{lf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})F_3(r_3^{\mathrm{in}}, y_3^{\mathrm{in}}, \varepsilon_3^{\mathrm{in}})\right| \le C_{\bar r_3}\left(|\tilde X_3^{\mathrm{out}}| + |Y_3^{\mathrm{out}}| + |\alpha\lambda\log|\lambda||\right) + C\bar r_3^2|\alpha|\left|\Upsilon_{\mathrm{lf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})\right|,$$
$$\left|Y_3(z_3^{\mathrm{in}})\right| \le C_{\bar r_3}\varepsilon\left(|\tilde X_3^{\mathrm{out}}| + |Y_3^{\mathrm{out}}| + |\alpha\lambda\log|\lambda||\right) + C\frac{\varepsilon}{\bar r_3^4}|\alpha|,$$

其中 $(r_3^{\mathrm{in}}, y_3^{\mathrm{in}}, \varepsilon_3^{\mathrm{in}}) := (r_3, y_3, \varepsilon_3)(z_3^{\mathrm{in}})$。

证明。 我们再次将系统 (4.42改写为积分方程

$$\tilde X_3(\tilde z_3) = \tilde X_3^{\mathrm{out}}\mathrm{e}^{\beta_3(\tilde z_3, \tilde z_{34}^{\mathrm{out}})} + \int_{\tilde z_{34}^{\mathrm{out}}}^{\tilde z_3}\mathrm{e}^{\beta_3(z_3,s)}\left(Y_3 h_{3,Y}(s) + \alpha h_{3,\alpha}(s)\right)\mathrm{d}s,$$
$$Y_3(z_3) = Y_3^{\mathrm{out}}\varepsilon_3(\tilde z_3) + \varepsilon_3(\tilde z_3)\int_{\tilde z_{34}^{\mathrm{out}}}^{\tilde z_3}\bar X_3(s)g_{3,X}(s) + Y_3(s)g_{3,Y}(s) + \alpha g_{3,\alpha}(s)\mathrm{d}s$$

在变换后的区间 $\tilde z_3 \in [\tilde z_3^{\mathrm{in}}, \tilde z_{34}^{\mathrm{out}}]$ 上，其中函数 g_*, h_*, β_3 与 (4.42) 中相同，只是$h_{3,\alpha}, g_{3,\alpha}$ 现在满足稍作修改的估计

$$h_{3,\alpha}(r_3, \varepsilon_3, y_3, \lambda_3) = \mathcal{O}(r_3\lambda_3, r_3^2),$$
$$g_{3,\alpha}(r_3, \varepsilon_3, y_3, \lambda_3) = \mathcal{O}(r_3\lambda_3, r_3^2).$$

继续按照 命题的证明4.9，相应的解现在满足估计 s

$$|\tilde X_3(\tilde z_3^{\mathrm{in}})| \le C_{\bar r_3}\left(|\tilde X_3^{\mathrm{out}}| + |Y_3^{\mathrm{out}}| + |\alpha\lambda\log|\lambda||\right) + C\bar r_3^2\left|\alpha\Upsilon_{\mathrm{lf}}\left((\lambda_4+\mathrm{i})\varepsilon_4^{-1/6}\right)\right|,$$
$$|Y_3(\tilde z_3^{\mathrm{in}})| \le C_{\bar r_3}\varepsilon\left(|\tilde X_3^{\mathrm{out}}| + |Y_3^{\mathrm{out}}| + |\alpha\lambda\log|\lambda||\right) + C\frac{\varepsilon}{\bar r_3^4}\left|\alpha\Upsilon_{\mathrm{lf}}\left((\lambda_4+\mathrm{i})\varepsilon_4^{-1/6}\right)\right|,$$

注意到，区间 $[\tilde z_3^{\mathrm{in}}, \tilde z_{34}^{\mathrm{out}}]$ 现在的长度为 $\mathcal{O}(\log|\lambda|)$。结论可仿照命题 4.9的证明得出。

□

4.3.5 命题证明4.3

现在我们可以完成命题 4.3的证明，该命题涉及特征值问题通过折叠点时的估计。

命题证明*4.3*。 我们结合命题 4.4-4.10的结果。当 $\lambda \in \Lambda_{\mathrm{r},\varepsilon}(\mu, M)$ 取值时，通过坐标图 $\mathcal{K}_2$ 跟踪解；而对于 $\lambda \in \Lambda_{\mathrm{c},\varepsilon}(\mu, M)$，我们使用坐标图 $\mathcal{K}_4$。我们先考虑前一种情况。

我们首先匹配坐标图 $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$中的解。根据命题 4.4，在截面 Σ_1^{in}中，解 (X_1, Y_1) 满足

$$\left|X_1(z_1^{\mathrm{in}}) - X_1^*(z_1^{\mathrm{in}})\right| \le C_{\bar{r}_1}\left(|X_1^{\mathrm{out}}|\mathrm{e}^{-\theta_{\bar{r}_1}/\varepsilon} + |\alpha\lambda|\right), \qquad Y_1(z_1^{\mathrm{in}}) = 0,$$

w它在转换为 $\mathcal{K}_2$-坐标后，对应于一个满足以下条件的解

$$\left|X_2(z_2^{\mathrm{out}}) - X_2^*(z_2^{\mathrm{out}})\right| \le C_{\bar{r}_1}\left(|X_1^{\mathrm{out}}|\mathrm{e}^{-\theta_{\bar{r}_1}/\varepsilon} + |\alpha\lambda|\right), \qquad Y_2(z_2^{\mathrm{out}}) = 0$$

在截面 Σ_2^{out}中。因此，我们可以通过适当选择 X_2^{out}，使其满足

$$\left|X_2^{\mathrm{out}}\right| \le C_{\bar{r}_1}\left(|X_1^{\mathrm{out}}|\mathrm{e}^{-\theta_{\bar{r}_1}/\varepsilon} + |\alpha\lambda|\right).$$

回顾命题 4.6，并利用过渡时间 $|z_2^{\mathrm{in}} - z_2^{\mathrm{out}}|$ 有界且其界与r_2无关这一事实，λ_2 可用于估计解 $X_2(z_2^{\mathrm{in}})$中的指数因子，因此该解满足以下估计

$$\begin{aligned}\left|X_2(z_2^{\mathrm{in}}) - X_2^*(z_2^{\mathrm{in}})\right| &\le C_{\bar{r}_1}\left(|X_1^{\mathrm{out}}|\mathrm{e}^{-\theta_{\bar{r}_1}/\varepsilon} + |\alpha r_2\lambda_2|\right),\\ \left|Y_2(z_2^{\mathrm{in}})\right| &\le C_{\bar{r}_1}\left(|X_1^{\mathrm{out}}|\mathrm{e}^{-\theta_{\bar{r}_1}/\varepsilon} + |\alpha r_2\lambda_2|\left(|r_2| + |\lambda_2|\right)\right)\end{aligned}$$

在截面 Σ_2^{in} 中，其中常数 $C_{\bar{r}_1}$ 如有必要可以取更大值。变换到 $\mathcal{K}_3$-坐标后，在截面 Σ_3^{out} 中，这对应于一个满足以下条件的解

$$\begin{aligned}\left|X_3(z_3^{\mathrm{out}}) - X_3^*(z_3^{\mathrm{out}})\right| &\le C_{\bar{r}_1}\left(|X_1^{\mathrm{out}}|\mathrm{e}^{-\theta_{\bar{r}_1}/\varepsilon} + |\alpha r_2\lambda_2|\right),\\ \left|Y_3(z_3^{\mathrm{out}})\right| &\le C_{\bar{r}_1}\left(|X_1^{\mathrm{out}}|\mathrm{e}^{-\theta_{\bar{r}_1}/\varepsilon} + |\alpha r_2\lambda_2|\left(|r_2| + |\lambda_2|\right)\right),\end{aligned}$$

这又对应于命题 4.9 的一个解，在适当选取 $\tilde{X}_3^{\mathrm{out}}$，$Y_{\mathrm{out}_3} \in \mathbb{C}$ 后，该解满足

$$\begin{aligned}\left|\tilde{X}_3^{\mathrm{out}}\right| &\le C_{\bar{r}_1}\left(|X_1^{\mathrm{out}}|\mathrm{e}^{-\theta_{\bar{r}_1}/\varepsilon} + |\alpha\lambda|\right),\\ \left|Y_3^{\mathrm{out}}\right| &\le C_{\bar{r}_1}\left(|X_1^{\mathrm{out}}|\mathrm{e}^{-\theta_{\bar{r}_1}/\varepsilon} + \left|\alpha\varepsilon^{1/3}\lambda\right| + \left|\alpha\lambda^2\right|\right).\end{aligned}$$

因此，在截面 Σ_3^{in} 中，此解满足以下估计

$$\begin{aligned}\left|X_3(z_3^{\mathrm{in}}) - \alpha\Upsilon_{\mathrm{lf}}(\lambda_2)F_3(r_3^{\mathrm{in}}, y_3^{\mathrm{in}}, \varepsilon_3^{\mathrm{in}})\right| &\le C_{\bar{r}_1,\bar{r}_3}\left(\left|X_1^{\mathrm{out}}\right|\mathrm{e}^{-\theta_{\bar{r}_1}/\varepsilon} + |\alpha\lambda\log\varepsilon|\right) + C|\alpha\bar{r}_3^2\Upsilon_{\mathrm{lf}}(\lambda_2)|,\\ \left|Y_3(z_3^{\mathrm{in}})\right| &\le C_{\bar{r}_1,\bar{r}_3}\varepsilon\left(\left|X_1^{\mathrm{out}}\right|\mathrm{e}^{-\theta_{\bar{r}_1}/\varepsilon} + |\alpha\lambda\log\varepsilon|\right) + C\frac{\varepsilon}{\bar{r}_3^4}|\alpha\Upsilon_{\mathrm{lf}}(\lambda_2)|,\end{aligned}$$

将其变换回原始（吹下）坐标后，满足

$$\begin{aligned}\left|\bar{r}_3^4 X_3(z_3^{\mathrm{in}}) + \alpha_3(\alpha;\lambda,\varepsilon)X_\varepsilon(\xi_{\mathrm{in}})\right| &\le C_{\bar{r}_1,\bar{r}_3}\left(\left|X_1^{\mathrm{out}}\right|\mathrm{e}^{-\theta_{\bar{r}_1}/\varepsilon}\right),\\ \left|\bar{r}_3^6 Y_3(z_3^{\mathrm{in}})\right| &\le C_{\bar{r}_1,\bar{r}_3}\varepsilon\left(\left|X_1^{\mathrm{out}}\right|\mathrm{e}^{-\theta_{\bar{r}_1}/\varepsilon} + |\alpha\lambda\log\varepsilon|\right) + C\bar{r}_3^2\varepsilon|\alpha\Upsilon_{\mathrm{lf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})|.\end{aligned} \tag{4.44}$$

其中

$$\left|\alpha_3(\alpha;\lambda,\varepsilon)-\alpha\Upsilon_{\mathrm{lf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})\right|\le C_{\bar r_1,\bar r_3}|\alpha\lambda\log\varepsilon|+C|\alpha\bar r_3^2\Upsilon_{\mathrm{lf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})|.$$

最后，我们通过从截面 Σ_1^{out} 中的 $\mathcal{K}_1$-坐标变换，在 $\zeta=\zeta_{\mathrm{out}}$ 处将完整解与出口条件相匹配，即

$$\begin{aligned}X_{\mathrm{out}}&=\alpha X_\varepsilon(\zeta_{\mathrm{out}})+\bar r_1^4X_1^{\mathrm{out}}+R_1^x\left(\alpha,X_1^{\mathrm{out}};\lambda,\varepsilon\right),\\ \varepsilon Y_{\mathrm{out}}&=\alpha Y_\varepsilon(\zeta_{\mathrm{out}})+\varepsilon R_1^y\left(\alpha,X_1^{\mathrm{out}};\lambda,\varepsilon\right),\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\left|R_1^x\left(\alpha,X_1^{\mathrm{out}};\lambda,\varepsilon\right)\right|&\le C_{\bar r_1}|\alpha\varepsilon\lambda|,\\ \left|R_1^y\left(\alpha,X_1^{\mathrm{out}};\lambda,\varepsilon\right)\right|&\le C_{\bar r_1}|\alpha\lambda|+C\left|X_1^{\mathrm{out}}\right|.\end{aligned}$$

由关于 Y_{out} 的方程可得

$$Y_{\mathrm{out}}=\alpha\frac{Y_\varepsilon(\zeta_{\mathrm{out}})}{\varepsilon}+R_1^y\left(\alpha,X_1^{\mathrm{out}};\lambda,\varepsilon\right),\tag{4.45}$$

注意到 $Y_\varepsilon(\zeta_{\mathrm{out}})=\varepsilon(1+\mathcal{O}(\bar r_1,\ \varepsilon))$ 可对 α 求解，并满足估计

$$\left|\alpha-\frac{\varepsilon Y_{\mathrm{out}}}{Y_\varepsilon(\zeta_{\mathrm{out}})}\right|\le C_{\bar r_1}\left(\left|X_1^{\mathrm{out}}\right|+|\lambda|\,|Y_{\mathrm{out}}|\right).$$

代入关于 X_{out} 的方程，可得

$$X_{\mathrm{out}}=\bar r_1^4X_1^{\mathrm{out}}+\tilde R_1^x\left(X_1^{\mathrm{out}},Y_{\mathrm{out}};\lambda,\varepsilon\right),$$

其中

$$\left|\tilde R_1^x\left(X_1^{\mathrm{out}},Y_{\mathrm{out}};\lambda,\varepsilon\right)\right|\le C_{\bar r_1}\varepsilon\left(\left|X_1^{\mathrm{out}}\right|+|Y_{\mathrm{out}}|\right),$$

据此可解出满足该估计的 X_1^{out}

$$\left|X_1^{\mathrm{out}}-\frac{X_{\mathrm{out}}}{\bar r_1^4}\right|\le C_{\bar r_1}\varepsilon\left(\left|X_1^{\mathrm{out}}\right|+|Y_{\mathrm{out}}|\right).\tag{4.46}$$

将这些估计代入（4.44），在 $\zeta=\zeta_{\mathrm{in}}$ 处可得

$$\begin{aligned}|X(\zeta_{\mathrm{in}})-\alpha X_\varepsilon(\zeta_{\mathrm{in}})+\alpha_3(\alpha;\lambda,\varepsilon)X_\varepsilon(\xi_{\mathrm{in}})|&\le C_{\bar r_1,\bar r_3}\left(\left|X_1^{\mathrm{out}}\right|\mathrm{e}^{-\theta_{\bar r_1}/\varepsilon}\right),\\ |Y(\zeta_{\mathrm{in}})-\alpha Y_\varepsilon(\zeta_{\mathrm{in}})|&\le C_{\bar r_1,\bar r_3}\varepsilon\left(\left|X_1^{\mathrm{out}}\right|\mathrm{e}^{-\theta_{\bar r_1}/\varepsilon}+|\alpha\lambda\log\varepsilon|\right)+C\bar r_3^2\varepsilon|\alpha\Upsilon_{\mathrm{lf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})|.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\left|X(\zeta_{\mathrm{in}})-\alpha^x_{\mathrm{lf},\bar r_1,\bar r_3}(Y_{\mathrm{out}};\varepsilon,\lambda)X_\varepsilon(\zeta_{\mathrm{in}})\right|&\le C_{\bar r_1,\bar r_3}\left(|X_{\mathrm{out}}|+(\varepsilon+|\lambda\log\varepsilon|)\,|Y_{\mathrm{out}}|\right),\\ \left|Y(\zeta_{\mathrm{in}})-\frac{\varepsilon Y_\varepsilon(\zeta_{\mathrm{in}})}{Y_\varepsilon(\zeta_{\mathrm{out}})}Y_{\mathrm{out}}\right|&\le C_{\bar r_1,\bar r_3}\varepsilon\left(|X_{\mathrm{out}}|+(\varepsilon+|\lambda\log\varepsilon|)\,|Y_{\mathrm{out}}|\right)+C\bar r_3^2\varepsilon\left|\Upsilon_{\mathrm{lf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})\right||Y_{\mathrm{out}}|.\end{aligned}$$

其中

$$\alpha^x_{\mathrm{lf},\bar r_1,\bar r_3}(Y_{\mathrm{out}};\varepsilon,\lambda)=\frac{\varepsilon Y_{\mathrm{out}}}{Y_\varepsilon(\zeta_{\mathrm{out}})}\left(1-\Upsilon_{\mathrm{lf}}(\lambda\varepsilon^{1/6})\left(1+\mathcal{O}\left(\bar r_3^2\right)\right)\right),\tag{4.47}$$

注意到，量 $\bar{r}_1$、$\bar{r}_3$ 满足 $\bar{r}_1^4 = y_{\text{out}}(\nu、\ \varepsilon)$ 以及 $\bar{r}_3^2 = x_{\text{in}}(\nu、\ \varepsilon)$，因此当 $\nu \to 0$ 时可以取更小；参见引理 4.1。因此，我们得到所需的估计

$$\begin{aligned}
\left|X(\zeta_{\text{in}}) - \alpha^x_{\text{lf},\nu}(Y_{\text{out}};\varepsilon,\lambda)x'_\varepsilon\left(\xi^{\text{in}}_{\text{lf},\varepsilon,\nu}\right)\right| &\le C_\nu\left(|X_{\text{out}}| + (\varepsilon + |\lambda\log\varepsilon|)\,|Y_{\text{out}}|\right),\\
\left|Y(\zeta_{\text{in}}) - \varepsilon Y_{\text{out}}\frac{y'_\varepsilon\left(\xi^{\text{in}}_{\text{lf},\varepsilon,\nu}\right)}{y'_\varepsilon\left(\xi^{\text{out},L}_{\text{lf},\varepsilon,\nu}\right)}\right| &\le C_\nu\varepsilon\left(|X_{\text{out}}| + (\varepsilon + |\lambda\log\varepsilon|)\,|Y_{\text{out}}|\right)\\
&\quad + \eta(\nu)\varepsilon\left|\Upsilon_{\text{lf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})\right|\,|Y_{\text{out}}|,
\end{aligned} \tag{4.48}$$

对于满足 $\eta(\nu) \to 0$ as $\nu \to 0$ 的 $\lambda \in \Lambda_{\text{r},\varepsilon}(\mu, M)$ 和 $\eta(\nu)$，其中

$$\alpha^x_{\text{lf},\nu}(Y_{\text{out}};\varepsilon,\lambda) = \frac{\varepsilon Y_{\text{out}}}{y'_\varepsilon\left(\xi^{\text{out},L}_{\text{lf},\varepsilon,\nu}\right)}\left(1 - \Upsilon_{\text{lf}}(\lambda\varepsilon^{1/6})\left(1 + \mathcal{O}\left(\eta(\nu)\right)\right)\right), \tag{4.49}$$

并且我们使用了关系

$$(X_\varepsilon, Y_\varepsilon)(\zeta) = \frac{1}{\theta_{\text{lf}}}(x_\varepsilon, y_\varepsilon)'\left(\frac{\zeta}{\theta_{\text{lf}}}\right)$$

和 $\zeta_{\text{in}} = \theta_{\text{lf}}\xi^{\text{in}}_{\text{lf},\varepsilon,\nu}$, $\zeta_{\text{out}} = \theta_{\text{lf}}\xi^{\text{out},L\,\text{lf}}_{\varepsilon,\nu}$。

接下来，我们考虑 $\lambda \in \Lambda_{\text{c},\varepsilon}(\mu, M)$ 的取值，此时解必须经过坐标图 $\mathcal{K}_4$。我们首先将坐标图 $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_4$ 中的解进行匹配。根据命题 4.5，在截面 Σ^{in}_{14} 中，解 (X_1, Y_1)满足

$$\left|X_1(z_1^{\text{in}}) - X_1^*(z_1^{\text{in}})\right| \le C_{\bar{r}_1}\left(|X_1^{\text{out}}| + |\alpha\lambda|\right), \qquad Y_1(z_1^{\text{in}}) = 0,$$

w它转换到 $\mathcal{K}_4$-坐标后，对应于一个满足以下条件的解

$$\left|X_4(z_4^{\text{out}}) - X_4^*(z_4^{\text{out}})\right| \le C_{\bar{r}_1}\left(|X_1^{\text{out}}| + |\alpha\lambda|\right), \qquad Y_4(z_4^{\text{out}}) = 0$$

在截面 Σ^{out}_4 上。转换到 $\mathcal{K}_4$-坐标后，我们根据 4.7 命题或命题 4.8进行匹配，具体取决于 $\varepsilon_4 \ge \delta_4$ 还是 $\varepsilon_4 \le \delta_4$。

情形 $\delta_4 \le \varepsilon_4 \le M^{-6}$： 在这种情形下，我们使用命题 4.7，与满足以下条件的解相匹配

$$\left|X_4^{\text{out}}\right| \le C_{\bar{r}_1}\left(|X_1^{\text{out}}| + |\alpha\lambda|\right).$$

利用过渡时间 $|z_4^{\text{in}} - z_4^{\text{out}}|$ 不依赖于 r_4 和 $\varepsilon_4 \ge \delta_4$ 这一事实来界定解 $X_4(z_4^{\text{in}})$ 在命题 4.7中的指数因子，因此该解满足以下估计

$$\begin{aligned}
\left|X_4(z_4^{\text{in}}) - X_4^*(z_4^{\text{in}})\right| &\le C_{\bar{r}_1}\left(\left(\mathrm{e}^{-\theta_4/\varepsilon_4} + |r_4|\right)|X_1^{\text{out}}| + |\alpha r_4|\right),\\
\left|Y_4(z_4^{\text{in}})\right| &\le C_{\bar{r}_1}|r_4|^2\left(|X_1^{\text{out}}| + |\alpha|\right),
\end{aligned}$$

变换到 $\mathcal{K}_3$ 坐标后，在截面 Σ^{out}_{34} 上，该解满足以下估计

$$\begin{aligned}
\left|X_3(z_{34}^{\text{out}}) - X_3^*(z_{34}^{\text{out}})\right| &\le C_{\bar{r}_1}\left(\left(\mathrm{e}^{-\theta_4/\varepsilon_4} + |r_4|\right)|X_1^{\text{out}}| + |\alpha r_4|\right),\\
\left|Y_3(z_{34}^{\text{out}})\right| &= C_{\bar{r}_1}|r_4|^2\left(|X_1^{\text{out}}| + |\alpha|\right),
\end{aligned}$$

进而，通过取适当的 $\tilde{X}_3^{\text{out}}$, $Y_{\text{out}3}$，可得到命题4.10 的一个解，它满足以下估计

$$\begin{aligned}
\left|\tilde{X}_3^{\text{out}}\right| &\le C_{\bar{r}_1}\left(\left(\mathrm{e}^{-\theta_4/\varepsilon_4} + |r_4|\right)|X_1^{\text{out}}| + |\alpha r_4|\right),\\
\left|Y_3^{\text{out}}\right| &\le C_{\bar{r}_1}|r_4|^2\left(|X_1^{\text{out}}| + |\alpha|\right).
\end{aligned}$$

因此，在截面 Σ_3^{in}中，该解满足以下估计

$$\begin{aligned}\left|X_3(z_3^{\text{in}})-\alpha\Upsilon_{\text{lf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})F_3(r_3^{\text{in}},y_3^{\text{in}},\varepsilon_3^{\text{in}})\right|&\le C_{\bar r_1,\bar r_3}\left(|X_1^{\text{out}}|+|\alpha\lambda\log|\lambda||\right)+C\bar r_3^{-2}|\alpha|\left|\Upsilon_{\text{lf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})\right|,\\ \left|Y_3(z_3^{\text{in}})\right|&\le C_{\bar r_1,\bar r_3}\varepsilon\left(|X_1^{\text{out}}|+|\alpha\lambda\log|\lambda||\right)+C\frac{\varepsilon}{\bar r_3^4}|\alpha|.\end{aligned}\tag{4.50}$$

情形 $0<\varepsilon_4\le\delta_4$**：**我们采用与上文类似的方法，不过通过选取适当的 X_4^{out}，使其满足

$$\left|X_4^{\text{out}}\right|\le C_{\bar r_1}\left(|X_1^{\text{out}}|+(|\varepsilon_4|+|\lambda|)\,|\alpha|\right),$$

这里我们使用（4.25）来估计 $X_1^*(z_1^{\text{in}})$ 在 $\mathcal{K}_4$-坐标中。根据命题 4.8，因此该解满足以下估计

$$\begin{aligned}\left|X_4(z_4^{\text{in}})-X_4^\dagger(z_4^{\text{in}};r_4)\right|&\le C_{\bar r_1}\left(\left(\mathrm{e}^{-\theta_4/\varepsilon_4}+r_4^2\varepsilon_4\right)|X_1^{\text{out}}|+\left(\mathrm{e}^{-\theta_4/\varepsilon_4}+r_4\varepsilon_4\right)|\alpha|\right),\\ \left|Y_4(z_4^{\text{in}})\right|&\le C_{\bar r_1}r_4^2\varepsilon_4\left(|X_1^{\text{out}}|+|\alpha|\right)\end{aligned}$$

在截面 Σ_4^{in} 中。转换到 $\mathcal{K}_3$-坐标后，在截面 Σ_{34}^{out} 中，这对应于一个满足以下条件的解

$$\begin{aligned}\left|X_3(z_{34}^{\text{out}})-X_3^*(z_{34}^{\text{out}})\right|&\le C_{\bar r_1}\left(\left(\mathrm{e}^{-\theta_4/\varepsilon_4}+r_4^2\varepsilon_4\right)|X_1^{\text{out}}|+\left(\mathrm{e}^{-\theta_4/\varepsilon_4}+r_4\right)|\alpha|\right),\\ \left|Y_3(z_{34}^{\text{out}})\right|&\le C_{\bar r_1}r_4^2\varepsilon_4\left(|X_1^{\text{out}}|+|\alpha|\right),\end{aligned}$$

这又对应于 于通过适当选取 $\tilde X_3^{\text{out}}$，$Y_{\text{out}3}$，使其满足命题 4.9 中的一个解 ng

$$\begin{aligned}\left|\tilde X_3^{\text{out}}\right|&\le C_{\bar r_1}\left(\left(\mathrm{e}^{-\theta_4/\varepsilon_4}+r_4^2\varepsilon_4\right)|X_1^{\text{out}}|+\left(\mathrm{e}^{-\theta_4/\varepsilon_4}+r_4\right)|\alpha|\right),\\ \left|Y_3^{\text{out}}\right|&\le C_{\bar r_1}r_4^2\varepsilon_4\left(|X_1^{\text{out}}|+|\alpha|\right).\end{aligned}$$

在截面 Σ_3^{in} 中，因此该解满足估计式（4.50），其中修正项 $\mathrm{e}^{-\theta_4/\varepsilon_4}|\alpha|$可通过令 δ_4 相对于 $\bar r_1$ 足够小，并使用命题 C.2，吸收到不等式（4.50）第一项中的最后一项里。$\bar r_3$

综合考虑两种情形的估计（4.50），我们得到 Σ_3^{in} 中解的统一估计，该估计适用于 $0<\varepsilon_4\le M^{-6}$ 的所有取值（因此也适用于充分小的 $\mu>0$ 对应的所有 $\lambda\in\Lambda_{\text{c},\varepsilon}(\mu,M)$）。变换回原始（吹下）坐标后，解因此满足

$$\begin{aligned}\left|\bar r_3^4X_3(z_3^{\text{in}})+\alpha_3(\alpha;\lambda,\varepsilon)X_\varepsilon(\xi_{\text{in}})\right|&\le C_{\bar r_1,\bar r_3}|X_1^{\text{out}}|,\\ \left|\bar r_3^6Y_3(z_3^{\text{in}})\right|&\le C_{\bar r_1,\bar r_3}\varepsilon\left(|X_1^{\text{out}}|+|\alpha\lambda\log|\lambda||\right)+C\bar r_3^2\varepsilon|\alpha|,\end{aligned}\tag{4.51}$$

其中

$$\left|\alpha_3(\alpha;\lambda,\varepsilon)-\alpha\Upsilon_{\text{lf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})\right|\le C_{\bar r_1,\bar r_3}|\alpha\lambda\log|\lambda||+C|\alpha\bar r_3^2\Upsilon_{\text{lf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})|.$$

最后，我们通过从截面 Σ_1^{out} 中的 $\mathcal{K}_1$ 坐标进行变换，在 $\zeta=\zeta_{\text{out}}$ 处将完整解与出口条件相匹配，即

$$\begin{aligned}X_{\text{out}}&=\alpha X_\varepsilon(\zeta_{\text{out}})+\bar r_1^4X_1^{\text{out}}+R_1^x\left(\alpha,X_1^{\text{out}};\lambda,\varepsilon\right),\\ \varepsilon Y_{\text{out}}&=\alpha Y_\varepsilon(\zeta_{\text{out}})+\varepsilon R_1^y\left(\alpha,X_1^{\text{out}};\lambda,\varepsilon\right),\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\left|R_1^x\left(\alpha,X_1^{\text{out}};\lambda,\varepsilon\right)\right|&\le C_{\bar r_1}|\alpha\varepsilon\lambda|,\\ \left|R_1^y\left(\alpha,X_1^{\text{out}};\lambda,\varepsilon\right)\right|&\le C_{\bar r_1}|\alpha\lambda|+C\left|X_1^{\text{out}}\right|.\end{aligned}$$

按照（4.45）–（4.46）中的方法进行求解，可得 α， X_1^{out}，满足以下估计

$$\left|\alpha-\frac{\varepsilon Y_{\mathrm{out}}}{Y_\varepsilon(\zeta_{\mathrm{out}})}\right|\le C_{\bar r_1}\left(\left|X_1^{\mathrm{out}}\right|+|\lambda|\,|Y_{\mathrm{out}}|\right),$$
$$\left|X_1^{\mathrm{out}}-\frac{X_{\mathrm{out}}}{\bar r_1^4}\right|\le C_{\bar r_1}\varepsilon\left(\left|X_1^{\mathrm{out}}\right|+|Y_{\mathrm{out}}|\right).$$

将这些估计代入 $\zeta=\zeta_{\mathrm{in}}$，利用（4.51），可得如下结果

$$|X(\zeta_{\mathrm{in}})-\alpha X_\varepsilon(\zeta_{\mathrm{in}})+\alpha_3(\alpha;\lambda,\varepsilon)X_\varepsilon(\zeta_{\mathrm{in}})|\le C_{\bar r_1,\bar r_3}|X_1^{\mathrm{out}}|,$$
$$|Y(\zeta_{\mathrm{in}})-\alpha Y_\varepsilon(\zeta_{\mathrm{in}})|\le C_{\bar r_1,\bar r_3}\varepsilon\left(\left|X_1^{\mathrm{out}}\right|+|\alpha\lambda\log|\lambda||\right)+C\bar r_3^2\varepsilon|\alpha\Upsilon_{\mathrm{lf}}(\lambda\varepsilon^{-1/6})|,$$

从而

$$\left|X(\zeta_{\mathrm{in}})-\alpha^x_{\mathrm{lf},\bar r_1,\bar r_3}(Y_{\mathrm{out}};\varepsilon,\lambda)X_\varepsilon(\zeta_{\mathrm{in}})\right|\le C_{\bar r_1,\bar r_3}\left(|X_{\mathrm{out}}|+(\varepsilon+|\lambda|\log|\lambda||)\,|Y_{\mathrm{out}}|\right),$$
$$\left|Y(\zeta_{\mathrm{in}})-\frac{\varepsilon Y_\varepsilon(\zeta_{\mathrm{in}})}{Y_\varepsilon(\zeta_{\mathrm{out}})}Y_{\mathrm{out}}\right|\le C_{\bar r_1,\bar r_3}\varepsilon|X_{\mathrm{out}}|+\left(C_{\bar r_1,\bar r_3}\varepsilon|\lambda|\log|\lambda||+C\bar r_3^2\varepsilon\right)|Y_{\mathrm{out}}|,$$

其中 $\alpha^x_{\mathrm{lf},\,\bar r_1,\,\bar r_3}(Y_{\mathrm{out}};\ \varepsilon,\ \lambda)$ 满足（4.47）。再次注意，量 $\bar r_1$，$\bar r_3$ 满足 $\bar r_1^4=y_{\mathrm{out}}(\nu,\ \varepsilon)$，且 $\bar r_3^2=x_{\mathrm{in}}(\nu,\ \varepsilon)$，因此当 $\nu\to 0$ 时，可以取更小值。类似于（4.48），可得所需的估计

$$\left|X(\zeta_{\mathrm{in}})-\alpha^x_{\mathrm{lf},\nu}(Y_{\mathrm{out}};\varepsilon,\lambda)x'_\varepsilon\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)\right|\le C_\nu\left(|X_{\mathrm{out}}|+(\varepsilon+|\lambda|\log|\lambda||)\,|Y_{\mathrm{out}}|\right),$$
$$\left|Y(\zeta_{\mathrm{in}})-\varepsilon Y_{\mathrm{out}}\frac{y'_\varepsilon\left(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)}{y'_\varepsilon\left(\xi^{\mathrm{out},L}_{\mathrm{lf},\varepsilon,\nu}\right)}\right|\le C_\nu\varepsilon|X_{\mathrm{out}}|+\left(C_\nu\varepsilon|\lambda|\log|\lambda||+\eta(\nu)\varepsilon\right)|Y_{\mathrm{out}}|,$$

当 $\lambda\in\Lambda_{\mathrm{c},\ \varepsilon}(\mu,\ M)$ 时，其中 $\alpha^x_{\mathrm{lf},\ \nu}(Y_{\mathrm{out}};\ \varepsilon,\ \lambda)$ 满足（4.49）。 □

4.4 关于 $\Re$ 的中心不稳定 $(X,\ Y)$-动力学的温和估计 $\Re(\lambda)\ge\varepsilon^{1/5}$

变换后的特征值问题（4.5）中折叠点附近的中心不稳定 $(X,\ Y)$-动力学由下式给出

$$\Psi_\zeta=\left(\tilde A(\zeta;\varepsilon,\lambda)+\mathcal{O}(\varepsilon)\right)\Psi,\qquad \tilde A(\zeta;\varepsilon,\lambda)=\begin{pmatrix}a_1(\zeta;\varepsilon)+\tilde a_1(\zeta;\varepsilon,\lambda) & a_2(\zeta;\varepsilon,\lambda)\\ 0 & 0\end{pmatrix}\tag{4.52}$$

其中 $\zeta\in[\zeta_{\mathrm{in}},\zeta_{\mathrm{out}}]$，这里我们有

$$a_1(\zeta;\varepsilon)=-2x_\varepsilon(\zeta)+\mathcal{O}(x_\varepsilon(\zeta)^2,y_\varepsilon(\zeta)),\qquad \tilde a_1(\zeta;\varepsilon,\lambda)=-\frac{\lambda^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}+\mathcal{O}(\lambda x_\varepsilon(\zeta),\lambda y_\varepsilon(\zeta),\lambda^3),$$

and

$$a_2(\zeta;\varepsilon,\lambda)=1+\mathcal{O}(x_\varepsilon(\zeta),y_\varepsilon(\zeta),\lambda).$$

我们研究如下情形下的（4.52） $0<\varepsilon$，$|\lambda|\ll\nu\ll 1$ 且 $\Re(\lambda)\ge\varepsilon^{1/5}$。系统（4.52）的主导阶动力学由以下上三角系统给出

$$\Psi_\zeta=\tilde A(\zeta;\varepsilon,\lambda)\Psi,\tag{4.53}$$

其演化可通过系数函数 a_1， $\tilde a_1$ 和 a_2显式确定。因此，通过对这些系数函数进行界定，我们得到了对（4.53）演化反向增长的温和估计。借助常数变易公式，这一估计可推广至完整系统（4.52）。

下面的引理给出了系数函数 a_1 和 $\tilde a_1$的界。

引理 *4.11.* 给定 $0<\varepsilon,|\lambda|\ll\nu\ll 1$，存在一个与 ε和 λ无关的常数 $C_\nu>0$，一个与 ν、 λ和 ε无关的常数 $C>0$，以及一点 $\zeta_{\text{middle}}\in[\zeta_{\text{in}},\zeta_{\text{out}}]$，使得 $|\zeta_{\text{middle}}-\zeta_{\text{in}}|\le C_\nu\varepsilon^{-1/3}$和$1\le C_\nu\varepsilon|\zeta_{\text{out}}-\zeta_{\text{middle}}|$成立，并且 *(4.52)* 中的系数 a_1 *(*$\zeta;\varepsilon$*)* 和 $\tilde{a}_1$*(*$\zeta;\varepsilon,\lambda$*)* 满足

$$\left|\Re\left(\tilde{a}_1(\zeta;\varepsilon,\lambda)\right)+\frac{1}{\theta_{\text{lf}}c^3}\left(\Re(\lambda)^2-\Im(\lambda)^2\right)\right|\le C\left(|\Re(\lambda)|+|\Im(\lambda)|^2\right)\left(|x_\varepsilon(\zeta)|+|y_\varepsilon(\zeta)|\right)+C_\nu|\lambda|^3$$

对于 $\zeta\in[\zeta_{\text{in}},\zeta_{\text{out}}]$ 和

$$a_1(\zeta;\varepsilon)\ge -C_\nu\varepsilon^{1/3}$$

对于 $\zeta\in[\zeta_{\text{middle}},\zeta_{\text{out}}]$。

证明。 系数 $\tilde{a}_1$ 的界可直接由引理 4.2 的坐标变换通过取实部并使用引理 4.1得到。

对于 a_1的界，注意到点 $\zeta_{\text{middle}}\in[\zeta_{\text{in}},\zeta_{\text{out}}]$ 可以作为坐标图 $\mathcal{K}_2$的入口点。 ζ_{middle} 的估计源于以下事实：在坐标图 $\mathcal{K}_1$ 中所花费的时间为 $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$，而在坐标图$\mathcal{K}_{2、3}$ 中所花费的时间为 $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1/3})$。对于 $\xi\in[\zeta_{\text{middle}},\zeta_{\text{out}}]$，因此波列会被坐标图 $\mathcal{K}_1$ 或 $\mathcal{K}_2$捕获，在后一种情况下，我们可以对 $x_\varepsilon(\zeta)\le C_\nu\varepsilon^{1/3}$进行估计。此外，在坐标图$\mathcal{K}_1$中，我们有 $|y_\varepsilon(\zeta)|\le C_\nu|x_\varepsilon(\zeta)|^2$，而在坐标图 $\mathcal{K}_2$中，我们有 $|y_\varepsilon(\zeta)|\le C_\nu\varepsilon^{2/3}$，因此结论成立。 □

现在，我们已经可以对（4.52）在$[\zeta_{\text{in}},\zeta_{\text{out}}]$上的解的反向增长建立温和估计。

命题 4.12。 设 $0<\varepsilon、|\lambda|\ll\nu\ll 1$ 和 $\Re(\lambda)\ge\varepsilon^{1/5}$。那么，对每个 $\Psi_{\text{out}}\in\mathbb{C}^2$，具有初始条件 $\Psi(\zeta_{\text{out}})=\Psi_{\text{out}}$ 的解$\Psi\colon[\zeta_{\text{in}},\zeta_{\text{out}}]\to\mathbb{C}^2$ 满足

$$\|\Psi(\zeta_{\text{in}})\|\le \mathrm{e}^{\frac{\Re(\lambda)}{c}(\zeta_{\text{out}}-\zeta_{\text{in}})}\|\Psi_{\text{out}}\|.$$

证明。 由于 $\Psi(\zeta)$ 是方程（4.52）在初始条件 $\Psi(\zeta_{\text{out}})=\Psi_{\text{out}}$ 下的解，我们发现， $\Phi(\zeta)=\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{c}(\zeta-\zeta_{\text{out}})}\Psi(\zeta)$ 是加权问题的一个解，其初始条件为 $\Phi(\zeta_{\text{out}})=\Psi_{\text{out}}$

$$\Phi_\zeta=\left(\tilde{A}(\zeta;\varepsilon,\lambda)+\mathcal{O}(\varepsilon)+\frac{\lambda}{c}\right)\Phi,\tag{4.54}$$

其系数矩阵可写为

$$\begin{pmatrix}a_1(\zeta;\varepsilon)+\tilde{a}_1(\zeta;\varepsilon,\lambda)+\frac{\lambda}{c} & a_2(\zeta;\varepsilon,\lambda)\\ 0 & \frac{\lambda}{c}\end{pmatrix}+\varepsilon\tilde{B}(\zeta;\varepsilon,\lambda),$$

˜其中，矩阵 $B(\zeta;\varepsilon,\lambda)$ 和系数 $a_2(\zeta;\varepsilon,\lambda)$ 在 $[\zeta_{\text{in}},\zeta_{\text{out}}]$ 上有界，其上界为与 ε、 λ 和 ν 无关的常数 $C_0>0$。若 $0<\varepsilon$、 $|\lambda|\ll\nu\ll 1$ 和 $\Re(\lambda)\ge 0$，则由引理 4.1 和引理 4.11 可得

$$\Re\left(\tilde{a}_1(\zeta;\varepsilon,\lambda)+\frac{\lambda}{c}\right)\ge\frac{3\Re(\lambda)}{4c}.\tag{4.55}$$

˜对于 $\zeta\in[\zeta_{\text{in}},\zeta_{\text{out}}]$。系统的演化 $\mathcal{T}_{\varepsilon,\lambda}(\zeta,y)$

$$\Psi_\zeta=\left(\tilde{A}(\zeta;\varepsilon,\lambda)+\frac{\lambda}{c}\right)\Psi,$$

读作

$$\tilde{\mathcal{T}}_{\varepsilon,\lambda}(\zeta,y)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\left(a_1(\zeta;\varepsilon)+\tilde{a}_1(\zeta;\varepsilon,\lambda)+\frac{\lambda}{c}\right)(\zeta-y)} & \int_y^{\zeta}\mathrm{e}^{\left(a_1(\zeta;\varepsilon)+\tilde{a}_1(\zeta;\varepsilon,\lambda)+\frac{\lambda}{c}\right)(\zeta-z)}a_2(z;\varepsilon,\lambda)\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{c}(z-y)}dz\\ 0 & \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{c}(\zeta-y)}\end{pmatrix}$$

当 ζ， $y\in[\zeta_{\mathrm{in}},\zeta_{\mathrm{out}}]$。因此，结合（4.55）与引理 4.11，在满足 $0<\varepsilon$， $|\lambda|\ll\nu\ll1$且 $\Re(\lambda)\geq\varepsilon^{1/5}$的条件下，我们得到一个与 ν、 ε和 λ无关的常数 $C_1>0$，使得

$$\left\|\tilde{\mathcal{T}}_{\varepsilon,\lambda}(\zeta,y)\right\|\leq\frac{C_1}{\Re(\lambda)}\mathrm{e}^{\frac{\Re(\lambda)}{2c}(\zeta-y)}\tag{4.56}$$

对于 ζ， $y\in[\zeta_{\mathrm{middle}},\zeta_{\mathrm{out}}]$，当 $\zeta\leq y$时成立。我们利用常数变易公式将解 $\Phi(\zeta)$表示为（4.54）的解

$$\Phi(\zeta)=\tilde{\mathcal{T}}_{\varepsilon,\lambda}(\zeta,\zeta_{\mathrm{out}})\Psi_{\mathrm{out}}+\varepsilon\int_{\zeta_{\mathrm{out}}}^{\zeta}\tilde{\mathcal{T}}_{\varepsilon,\lambda}(\zeta,y)\tilde{B}(y;\varepsilon,\lambda)\Phi(y)dy\tag{4.57}$$

当 $\zeta\in[\zeta_{\mathrm{middle}},\zeta_{\mathrm{out}}]$时。令

$$\eta(\zeta)=\sup_{y\in[\zeta,\zeta_{\mathrm{out}}]}\|\Phi(y)\|\mathrm{e}^{-\frac{\Re(\lambda)}{4c}(y-\zeta_{\mathrm{out}})}$$

借助（4.57）和（4.56）对其进行估计，得到

$$\|\Phi(\zeta)\|\leq\frac{C_1}{\Re(\lambda)}\mathrm{e}^{\frac{\Re(\lambda)}{2c}(\zeta-\zeta_{\mathrm{out}})}\|\Psi_{\mathrm{out}}\|+\frac{4C_0C_1\varepsilon}{\Re(\lambda)^2}\eta(\zeta)\mathrm{e}^{\frac{\Re(\lambda)}{4c}(\zeta-\zeta_{\mathrm{out}})}$$

当$\zeta\in$时 $[\zeta_{\mathrm{middle}},\zeta_{\mathrm{out}}]$。若 $0<\varepsilon$， $|\lambda|\ll\nu\ll1$且 $\Re(\lambda)\geq\varepsilon^{1/5}$，则后者意味着

$$\eta(\zeta)\leq2\frac{C_1}{\Re(\lambda)}\|\Psi_{\mathrm{out}}\|$$

对于 $\zeta\in[\zeta_{\mathrm{middle}},\zeta_{\mathrm{out}}]$。因此，只要 $0<\varepsilon$， $|\lambda|\ll\nu\ll1$且 $\Re(\lambda)\geq\varepsilon^{1/5}$，我们便可得到

$$\|\Phi(\zeta_{\mathrm{middle}})\|\leq2C_1\varepsilon^{-1/5}\mathrm{e}^{\frac{\Re(\lambda)}{4c}(\zeta_{\mathrm{middle}}-\zeta_{\mathrm{out}})}\|\Psi_{\mathrm{out}}\|.$$

因此，注意到（4.54）的系数矩阵在 $[\zeta_{\mathrm{in}},\zeta_{\mathrm{out}}]$上有界，其界为一个与 ε-、 ν-和 λ-无关的常数 $C_2>0$，我们应用引理 4.11 和格朗沃尔不等式，推得

$$\|\Phi(\zeta_{\mathrm{in}})\|\leq\mathrm{e}^{C_2|\zeta_{\mathrm{middle}}-\zeta_{\mathrm{in}}|}\|\Phi(\zeta_{\mathrm{middle}})\|\leq\|\Psi_{\mathrm{out}}\|,$$

只要 $0<\varepsilon$， $|\lambda|\ll\nu\ll1$ 且 $\Re(\lambda)\geq\varepsilon^{1/5}$。因此，回到原来的 Ψ-坐标，结论成立。

□

4.5 命题3.6 和 3.7 的证明

将（双曲的） Z-动力学纳入（4.18）后，我们得到如下线性化问题

$$\begin{aligned}X_\zeta&=X\left(-2x-\frac{\lambda^2}{\theta_{\mathrm{lf}}c^3}+\mathcal{O}(x^2,y,\varepsilon,\lambda x,\lambda^3)\right)+Y\left(1+\mathcal{O}(x,y,\varepsilon,\lambda)\right),\\ Y_\zeta&=\mathcal{O}(\varepsilon X,\varepsilon Y),\\ Z_\zeta&=\left(-\frac{c}{\theta_{\mathrm{lf}}}+\mathcal{O}(x,y,\varepsilon,\lambda)\right)Z.\end{aligned}\tag{4.58}$$

如下所述。

命题 4.13。 固定 $M>0$ 和 $\nu>0$。存在 $\mu>0$ 使得对于每个 $(X_{\text{out}},\ Y_{\text{out}},\ Z_{\text{in}})\in\mathbb{C}^3$和 $\lambda\in\Lambda_\varepsilon(\mu,\ M)$，存在一个解 $\psi_{\text{uf}}=(X_{\text{lf}},\ Y_{\text{lf}},\ Z_{\text{lf}})$：$\mathcal{I}_{\text{lf}}\to\mathbb{C}^3$满足 (4.58) 的解，其满足

$$X_{\text{lf}}\left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)=X_{\text{out}},\qquad Y_{\text{lf}}\left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)=\varepsilon Y_{\text{out}},\qquad Z_{\text{lf}}\left(\frac{1}{\nu}\right)=Z_{\text{in}}$$

此外，$(X_{\text{lf}},\ Y_{\text{lf}})=(X^0_{\text{lf}},\ Y^{0}{}_{\text{lf}})$，由命题 *4.3*保证的相应解，并且存在$(\varepsilon,\ \lambda)$-无关的常数 $C_\nu,\ \vartheta_\nu$使得该解满足

$$\left|Z_{\text{lf}}\left(\xi^{\text{out},L}_{\text{lf},\varepsilon,\nu}\right)\right|\le C_\nu|Z_{\text{in}}|\mathrm{e}^{-\vartheta_\nu/\varepsilon}.$$

证明。 结果由命题 4.3 以及方程（4.58）的块对角形式得到。 □

现在我们能够 完成命题 3.6的证明。命题 3.7 的证明类似 .

命题 *3.6* 的证明。 根据命题 4.13，还需将结果用原始 $(U,\ V,\ W)$-坐标表示。经过折叠点，我们为系统（$Q^{\text{cu/s}}{}_{\text{uf}}(\xi)$（4.58）定义投影，具体为

$$Q^{\text{cu}}_{\text{lf}}(\xi)=\begin{pmatrix}I_2&0\\0&0\end{pmatrix},\qquad Q^{\text{s}}_{\text{lf}}(\xi)=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}. \tag{4.59}$$

为在原始坐标中获得这些投影，我们回顾引理4.2的变换，并得到相应的投影 $P_{\text{cu/s lf}\ \varepsilon,\ \lambda,\ \nu}(\xi)$，具体为

$$P^{\text{cu/s}}_{\text{lf},\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi):=N_{\varepsilon,\lambda}(\xi)Q^{\text{cu/s}}_{\text{lf}}(\xi)N_{\varepsilon,\lambda}(\xi)^{-1}. \tag{4.60}$$

对于 (i)，注意到在 $\xi=\xi^{\text{out},L}\text{lf}_{\varepsilon,\nu}=L_\varepsilon+\frac{\nu}{\varepsilon}$ 附近，当波列解接近左慢流形 $\mathcal{M}^{\text{l}}_\varepsilon$ 时，投影 $P^i\text{lf}_{\varepsilon,\lambda,\nu},P^i\text{l}_{\varepsilon,\lambda,\nu}$，$i=\text{s}$、cu 均可进行延拓，使其分别在一个宽度为 $\frac{\nu}{2\varepsilon}$ 的重叠区间上定义良好。由于投影 $P^i\text{lf}_{\varepsilon,\lambda,\nu},P^i\text{l}_{\varepsilon,\lambda,\nu}$ 沿波列运动，分别处于任意小的折叠点邻域的内部和外部，因此可以将投影 $P^i\text{l}_{\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi)$ 的定义延拓至 $\xi=\frac{3\nu}{4\varepsilon}$，并将投影 $P^i\text{lf}_{\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi)$ 的定义延拓至 $\xi=L_\varepsilon+\frac{5\nu}{4\varepsilon}$；注意到根据周期性，$\xi=\frac{\nu}{\varepsilon}$ 和 $\xi=L_\varepsilon+\frac{\nu}{\varepsilon}$ 可以视为相同。因此，应用 [14, 引理 B.3]，估计 (3.38) 成立。

I为了描述投影 $P^i_{\text{lf},0,\lambda,\nu}$ 在 $\varepsilon\to0$ 时的行为，我们记

$$P^i_{\text{lf},0,\lambda,\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right):=\lim_{\varepsilon\to0}P^i_{\text{lf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(L_\varepsilon+\tfrac{1}{\nu}\right).$$

对于估计（3.37），我们首先注意到，根据构造以及命题 2.2中的逐点估计，有

$$\left\|P^i_{\text{lf},\varepsilon,\lambda,\nu}\left(L_\varepsilon+\tfrac{1}{\nu}\right)-P^i_{\text{lf},0,0,\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right)\right\|\le C_\nu\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}}+|\lambda|\right).$$

现在我们断言 $P^{i}{}_{\text{lf}0,0,\nu}\left(\frac{1}{\nu}\right)=P^{i}{}_{\text{f}\ \nu}\left(\frac{1}{\nu}\right)$。为此，我们首先回顾命题 3.2 中的结论

$$\ker P^{\text{s}}_{\text{f},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right)=\text{Ran}P^{\text{cu}}_{\text{f},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right)=\text{Sp}\left\{\Phi_{\text{f}}(\tfrac{1}{\nu}),\Psi_{\text{f},\nu}(\tfrac{1}{\nu})\right\},$$

其中，解 $\Phi_{\text{f}}(\frac{1}{\nu})\ \Psi_{\text{f},\nu}(\frac{1}{\nu})$ 在 $\xi\to-\infty$ 时都有界。此外，由于 $P_{\text{sf}\ \nu}\left(\frac{1}{\nu}\right)$ 的秩为 1，因此有

$$\text{Ran}P^{\text{s}}_{\text{f},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right)=\text{Sp}\left\{\Psi_{\text{f},*}(\tfrac{1}{\nu})\right\},$$

其中 $\Psi_{\text{f},\ *}$ 是方程（3.6）的唯一解（相差一个标量倍数），该解在 $\xi\to\infty$ 时指数衰减，并在 $\xi\to-\infty$时无界。

考察 4.10）在极限 $\varepsilon \to 0$下的情形，可见一维子空间 $X = Y = 0$ 唯一地包含了所有在 ξ中指数衰减的解，因此

$$\mathrm{Ran} P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{lf},0,0,\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right) = \mathrm{Ran} P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{f},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right).$$

根据构造（见引理 4.2），当 $\lambda = 0$

$$\mathrm{Ran} P^{\mathrm{cu}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,0,\nu}\left(L_\varepsilon + \tfrac{1}{\nu}\right) = \ker P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{lf},\varepsilon,0,\nu}\left(L_\varepsilon + \tfrac{1}{\nu}\right) = T_{\Gamma_\varepsilon\left(\frac{1}{\nu}\right)} \mathcal{W}^{\mathrm{u}}(\Gamma_\varepsilon),$$

其中 $T_{\Gamma_\varepsilon(1/\nu)}\mathcal{W}^{\mathrm{u}}(\Gamma_\varepsilon)$ 表示周期轨道 Γ_ε 在 $\xi = \frac{1}{\nu}$ 处的不稳定流形 $\mathcal{W}^{\mathrm{u}}(\Gamma_\varepsilon)$ 的切空间。此外，由 [22, 命题 4.7] 的证明可知，流形 $\mathcal{W}^{\mathrm{u}}(\Gamma_\varepsilon)$ 和$\mathcal{W}^{\mathrm{u}}(\mathcal{M}^{\mathrm{r}}_0)$ 在进入上折叠点的一个邻域时是 C^1-$\mathcal{O}(\varepsilon)$-接近的。因此，我们有

$$\mathrm{Ran} P^{\mathrm{cu}}_{\mathrm{lf},0,0,\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right) = \ker P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{lf},0,0,\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right) = T_{\left(u_{\mathrm{f}}\left(\frac{1}{\nu}\right), v_{\mathrm{f}}\left(\frac{1}{\nu}\right), f(u_1)\right)} \mathcal{W}^{\mathrm{u}}(\mathcal{M}^{\mathrm{r}}_0).$$

该空间是二维的，且必须由当 $\xi \to -\infty$ 时有界的解组成。由于约化快前沿 $\left(u_{\mathrm{f}}\left(\frac{1}{\nu}\right),\ v_{\mathrm{f}}\left(\frac{1}{\nu}\right),\ f(u_1)\right)^\top$ 位于 $\mathcal{W}^{\mathrm{u}}(\mathcal{M}^{\mathrm{r}}_0)$ 中，因此约化前沿解的导数 $\Phi_{\mathrm{f}}(\xi)$ 在 $\xi = \frac{1}{\nu}$ 处必须属于 $T_{(u_{\mathrm{f}}(\xi)\ v_{\mathrm{f}}(\xi)\ f(u_1))}\mathcal{W}^{\mathrm{u}}(\mathcal{M}^{\mathrm{r}}_0)$。由于解 $\Psi_{\mathrm{f},\ *}$ 在 $\xi \to -\infty$ 时无界，该空间中的第二个解必定是 Φ_{f}，$\Psi_{\mathrm{f},\ \nu}$ 的线性组合。因此

$$\ker P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{lf},0,0,\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right) = \ker P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{f},\nu}\left(\tfrac{1}{\nu}\right),$$

以及 $P^{i}_{\mathrm{lf}0,0,\nu}\left(\frac{1}{\nu}\right) = P^{i}_{\mathrm{f}\,\nu}\left(\frac{1}{\nu}\right), i = \mathrm{s},\ \mathrm{cu}$，如所需，从而完成了对估计（3.37）。

对于估计 (3.39)，我们直接应用投影的定义 $P^{\mathrm{cf}}_{\nu}\left(\frac{1}{\nu}\right)$ 将命题 3.2 应用于 (4.60)，由此根据 (4.59) 可知，在确定 (3.39) 时，只有 $P^{\mathrm{slf}}_{\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{slf}},\varepsilon,\nu)$ 的第三行是相关的。考察 (4.11)，并注意到通过 (4.4) 得到的 $\mathcal{N}'_\varepsilon(V_\varepsilon(\xi))$ 的第三行结构，以及通过 (4.9) 得到的 $D_W\mathcal{H}_{\varepsilon,\lambda}(0, V_\varepsilon)$ 的第二行，即可得出结果。

最后，我们注意到，变换 $N_{\varepsilon,\lambda}(\xi)$ 由（4.11）给出，在$\xi \in \mathcal{I}_{\mathrm{lf}}$ 和 $\lambda \in R_1(\mu)$下，对$\varepsilon, \lambda, \mu)$一致有界

$$U'_\varepsilon(\xi) = \mathcal{N}'_\varepsilon(V_\varepsilon(\xi))V'_\varepsilon(\xi) = \mathcal{N}'_\varepsilon(V_\varepsilon(\xi)) \begin{pmatrix} x'_\varepsilon(\xi) \\ y'_\varepsilon(\xi) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.61}$$

因此

$$N_{\varepsilon,\lambda}(\xi) \begin{pmatrix} x'_\varepsilon(\xi) \\ y'_\varepsilon(\xi) \\ 0 \end{pmatrix} = U'_\varepsilon(\xi) + \begin{pmatrix} \mathcal{O}(|\lambda||U'_\varepsilon(\xi)|) \\ \mathcal{O}(|\lambda||U'_\varepsilon(\xi)|) \\ \mathcal{O}(\varepsilon|\lambda||U'_\varepsilon(\xi)|) \end{pmatrix}. \tag{4.62}$$

将命题 4.12 在区域 $\Re(\lambda) \le \varepsilon^{1/5}$和命题 4.13 在区域$|\Re(\lambda)| \le \mu\varepsilon^{1/6}$的结果用投影 $P^{\mathrm{cu/s\,lf}}_{\varepsilon,\lambda,\nu}(\xi)$ 来解释，再转换回 (U, V, W) 坐标并利用 (4.61)-(4.62)，即可得到结论。

□

5 区域 $R_2(\mu, \varpi, \varrho)$

设 $\varrho > 0$ 如命题 2.3 所述，$\mu > 0$ 如命题 2.4 所述。本节通过分析 $\mathcal{L}_\varepsilon$ 在紧中间区域 $R_2(\mu, \varpi, \varrho)$ 中的谱，证明命题 2.5，其中 $\varpi > 0$ 是一个充分小且与 ε 无关的常数。特别地，我们证明 $\mathcal{L}_\varepsilon$ 在 $R_2(\mu, \varpi, \varrho)$ 中的所有谱都必须位于开左半平面。为此，只需如 §2.2 中所述，证明特征值问题 (2.13)-(2.14) 对满足 $\Re(\lambda) \ge 0$ 的 $\lambda \in R_2(\mu, \varpi, \varrho)$ 不存在非平凡解。

我们按如下方式展开。首先，我们证明快子系统

$$\check{\Psi}_\xi = \check{A}_{\mathrm{f}}(\xi;\varepsilon,\lambda)\check{\Psi}, \qquad \check{A}_i(\xi;\varepsilon,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda - f'(u_\varepsilon(\xi)) & -c \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

（2.1 3）通过将其与谱问题联系起来，在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性

$$u_{\xi\xi} + cu_\xi + f'(u_i(\xi))u = \lambda u \tag{5.2}$$

与行进 前沿（或后沿）解 $u_i(x-ct)$、 $i = \mathrm{f,b}$ 相关联的 Fisher–KPP 型方程 n

$$u_t = u_{xx} + f(u).$$

接下来，我们将 $R_2(\mu,\varpi,\varrho)$ 划分为两个子区域

$$R_{2,1}(\mu,\varpi,\varrho) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\Re(\lambda)| \le \varpi, \mu \le |\lambda| \le \varrho\},$$
$$R_{2,2}(\mu,\varpi,\varrho) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re(\lambda) \ge \varpi, \mu \le |\lambda| \le \varrho\}.$$

对于 $\lambda \in R_{2,1}(\mu,\varpi,\varrho)$，我们证明（5.1）的指数二分性可由重标度系统（3.9）继承，从而可以借助 Riccati 变换对完整特征值问题进行分块对角化。与命题 3.3 的证明一样，对角化特征值问题中慢分量的动力学可以计算到首阶。随后，Floquet 边界条件（2.16）导出关于 λ 的一个方程；当 $\varpi > 0$ 足够小时，该方程在 $\Re(\lambda) \ge 0$ 的条件下，对于 μ,ϖ,ϱ 不存在解 $\lambda \in R_{2,1}$。

给定固定的 $\varpi > 0$，粗糙性结果表明，对于 $\lambda \in R_{2,\ 2}(\mu,\ \varpi,\ \varrho)$，(5.1) 在$\mathbb{R}$ 上的指数二分性可传递到完整特征值问题 (2.13)。这排除了 (2.13) 的非平凡解满足 Floquet 边界条件 (2.14) 的可能，因此我们发现 $\mathcal{L}_\varepsilon$ 在 $R_{2,\ 2}(\mu,\ \varpi,\ \varrho)$ 中没有谱。

5.1 快子系统

我们得到 $\mathbb{R}$ 上的指数二分性，适用于快子系统 (5.1)，且对每个 $\lambda \in R_2(\mu,\ \varpi,\ \varrho)$均成立。首先，我们通过从下列约化快子系统进行扰动，建立 (5.1) 沿波列前沿和后沿的指数二分性

$$\check{\Psi}_\xi = \check{\mathcal{A}}(u_i(\xi);\lambda)\check{\Psi}, \qquad \check{\mathcal{A}}(u;\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda - f'(u) & -c \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

对于 $i = \mathrm{f,\ b}$。系统 (5.3) 是 Sturm–Liouville 问题 (5.2) 的一阶形式；若 $\varpi > 0$ 足够小，则对于 $\lambda \in R_2(\mu,\varpi,\varrho)$，该问题不存在非平凡有界解。这给出了 (5.3) 在 $\mathbb{R}$ 上的指数二分性，并可利用粗糙性结果将其传递到 (5.1)。另一方面，对于每个 $\lambda \in R_2(\mu,\varpi,\varrho)$，(5.1) 的系数矩阵逐点双曲，并沿临界流形的左、右分支缓慢变化。与命题 3.3 的证明类似，这给出了 (5.3) 沿这些分支的指数二分性。最后，将各个区间上的指数二分性拼接起来，我们建立了 (5.1) 在 $\mathbb{R}$ 上的指数二分性。

命题 5.1。 取常数 $\mu,\ \varrho > 0$ 满足 $\mu < \varrho$。若 $0 < \varepsilon \ll \varpi \ll 1$，系统 (5.1) 则对每个 $\lambda \in R_2(\mu,\ \varpi,\ \varrho)$ 在 $\mathbb{R}$ 上具有 ε- 和 λ-无关的指数二分性常数。

证明。 我们首先为 (5.3) 在 $\mathbb{R}$上建立指数二分性。根据命题 2.1 ，存在λ无关的常数 $C,\ \upsilon > 0$ 使得

$$\begin{aligned} \left\|\check{\mathcal{A}}(u_{\mathrm{f}}(-\xi);\lambda) - \check{\mathcal{A}}(u_2;\lambda)\right\|, \left\|\check{\mathcal{A}}(u_{\mathrm{b}}(-\xi);\lambda) - \check{\mathcal{A}}(\bar{u}_2;\lambda)\right\| &\le C\mathrm{e}^{-\upsilon\xi}, \\ \left\|\check{\mathcal{A}}(u_{\mathrm{f}}(\xi);\lambda) - \check{\mathcal{A}}(u_1;\lambda)\right\|, \left\|\check{\mathcal{A}}(u_{\mathrm{b}}(\xi);\lambda) - \check{\mathcal{A}}(\bar{u}_1;\lambda)\right\| &\le \frac{C}{1+\xi}, \end{aligned} \tag{5.4}$$

对于 $\xi \geq 0$和 $\lambda \in R_2(\mu,\varpi,\varrho)$。利用 $f'(u_2)\ f'(\bar{u}_2) < 0$, $f'(u_1)\ f'(\bar{u}_1) = 0$以及 $c > c_*(a) > 0$，我们推知，只要 $\varpi > 0$ 足够小，则对每个 $\lambda \in R_2(\mu,\varpi,\varrho)$ 和 $j = 1$，2 个渐近矩阵 $\check{\mathcal{A}}(u_j;\lambda)$ 和 $\check{\mathcal{A}}(\bar{u}_j;\lambda)$ 都是双曲的。因此，根据 [76, 引理 3.4]，系统 (5.3) 对 $i = \mathrm{f}, \mathrm{b}$ 在 $(-\infty, 0]$ 和 $[0,\infty)$ 上均具有指数二分性。固定 $i \in \{\mathrm{f}, \mathrm{b}\}$。由于 u_i' 是 Sturm– Liouville 问题 (5.2) 在 $\lambda = 0$ 处的一个解，且根据命题 2.1 它没有零点，由 [87, 第 344 页和定理 5.5] 可知，只要 $\varpi > 0$ 足够小，则对所有 $\lambda \in R_2(\mu,\varpi,\varrho)$，(5.2) 都不存在非平凡有界解。因此，对所有 $\lambda \in R_2(\mu,\varpi,\varrho)$，一阶形式 (5.3) 也不存在非平凡有界解。因此，[76, 命题 2.1] 意味着，对所有 $\lambda \in R_2(\mu,\varpi,\varrho)$，(5.3) 在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性，其投影为 $\check{P}_i(\xi;\lambda)$。由于 $R_2(\mu,\varpi,\varrho)$ 是紧的，且 $\check{\mathcal{A}}(u;\lambda)$ 关于 λ连续依赖，根据指数二分性的粗糙性，与此指数二分性相关的常数可以选取得与λ 无关，参见 [27, 命题 5.1]。最后，[76, 引理 3.4] 及其证明结合估计 (5.4)，给出与 λ无关的常数 K, $\alpha_0 > 0$，使得

$$\begin{aligned} \left\|\check{P}_{\mathrm{f}}(-\xi;\lambda) - \check{\mathcal{P}}(u_2;\lambda)\right\|, \left\|\check{P}_{\mathrm{b}}(-\xi;\lambda) - \check{\mathcal{P}}(\bar{u}_2;\lambda)\right\| &\leq K\mathrm{e}^{-\alpha_0\xi}, \\ \left\|\check{P}_{\mathrm{f}}(\xi;\lambda) - \check{\mathcal{P}}(u_1;\lambda)\right\|, \left\|\check{P}_{\mathrm{b}}(\xi;\lambda) - \check{\mathcal{P}}(\bar{u}_1;\lambda)\right\| &\leq \frac{K}{1+\xi}, \end{aligned} \tag{5.5}$$

对于 $\xi \geq 0$和 $\lambda \in R_2(\mu,\varpi,\varrho)$，其中 $\check{\mathcal{P}}(u;\lambda)$ 是矩阵 $\check{\mathcal{A}}(u;\lambda)$ 的稳定特征子空间上的谱投影。

我们将 (5.3) 在 $\mathbb{R}$ 上的指数二分性转化为 (5.1) 在区间 $\mathcal{I}_{\mathrm{f}} = [\log(\varepsilon)\chi, \frac{1}{\chi}]$ 和 $\mathcal{I}_{\mathrm{b}} = [L_{\mathrm{l},\varepsilon} + \log(\varepsilon)\chi, L_{\mathrm{l}}, \varepsilon + \frac{1}{\chi}]$上的指数二分性。若 $0 < \varepsilon \ll \chi \ll 1$，则命题 2.2 结合粗糙性结果（参见 [27, 命题 5.1]，）可推出，对于每个 $\lambda \in R_2(\mu,\varpi,\varrho)$，系统 (5.1) 在 $\mathcal{I}_i$ 上都存在指数二分性，其常数和投影 $\check{Q}_{i,\varepsilon}(\xi;\lambda)$ 与 λ 和 ε 无关，且适用于 $i = \mathrm{f}, \mathrm{b}$。此外，存在一个与 λ 和 ε 无关的常数 $C_\chi > 0$，使得以下估计成立

$$\begin{aligned} \left\|\check{Q}_{\mathrm{f},\varepsilon}(\xi;\lambda) - \check{P}_{\mathrm{f}}(\xi;\lambda)\right\| &\leq C_\chi \varepsilon^{\frac{2}{3}}, \qquad \xi \in \mathcal{I}_{\mathrm{f}}, \\ \left\|\check{Q}_{\mathrm{b},\varepsilon}(\xi;\lambda) - \check{P}_{\mathrm{b}}(\xi - L_{\mathrm{l},\varepsilon};\lambda)\right\| &\leq C_\chi \varepsilon^{\frac{2}{3}}, \qquad \xi \in \mathcal{I}_{\mathrm{b}} \end{aligned} \tag{5.6}$$

在 $\lambda \in R_2(\mu,\varpi,\varrho)$ 时成立。

接下来，我们在区间 log( ) 和 log( ) 上为 ($\mathcal{J}_{\mathrm{l}} = [\frac{1}{\chi}, L_{\mathrm{l},\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\chi}]$ $\mathcal{J}_{\mathrm{r}} =$.) 建立指数二分性。 $[\frac{1}{\chi} - L_{r,\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{\chi}]$ $0 < \varepsilon \ll \tilde{\chi} \ll 1$ 5 1 2 2

首先，在满足 的条件下，由命题 . 可知，(5.1) 的系数矩阵 $\check{A}_{\mathrm{f}}(\xi;\varepsilon,\lambda)$ 是双曲的，其谱隙与 ξ、λ、ε 和 $\tilde{\chi}$ 无关；并且对每个 $\xi \in \mathcal{J}_{\mathrm{l},\tilde{\chi}} \cup \mathcal{J}_{\mathrm{r},\tilde{\chi}}$ 和 $\lambda \in R_2(\mu,\varpi,\varrho)$，该矩阵都由一个与 ξ、λ、ε 和 $\tilde{\chi}$ 无关的常数界定。其次，由命题 2.2，存在一个与 ξ、λ、ε 和 $\tilde{\chi}$ 无关的常数 $C_0 > 0$，使得当 $\xi \in \mathcal{J}_{\mathrm{l},\tilde{\chi}} \cup \mathcal{J}_{\mathrm{r},\tilde{\chi}}$ 和 $\lambda \in R_2(\mu,\varpi,\varrho)$ 时，$\|\partial_\xi \check{A}_{\mathrm{f}}(\xi,\varepsilon,\lambda)\| \leq C_0\delta_0(\tilde{\chi})$。注意到对于 $0 < \varepsilon \ll \chi \ll 1$，$\{\xi + y : x \in \mathcal{J}_{i,\chi}, y \in [-1,1]\} \subset \mathcal{J}_{i,2\chi}$，结合上述后两点及命题 A.3] 可知，在满足 $0 < \varepsilon \ll \chi \ll 1$ 的条件下，系统 (5.1) 对于 $\lambda \in R_2(\mu,\varpi,\varrho)$ 和 $i = \mathrm{l}, \mathrm{r}$，在 $\mathcal{J}_{i,\chi}$ 上具有指数二分性，其常数和投影 $\check{Q}_{i,\varepsilon}(\xi;\lambda)$ 与 λ、ε 和 χ 无关，并满足

$$\left\|\check{Q}_{i,\varepsilon}(\xi;\lambda) - \check{\mathcal{P}}(u_\varepsilon(\xi);\lambda)\right\| \leq C_1\delta_0(2\chi), \qquad \xi \in \mathcal{J}_{i,\chi}, \tag{5.7}$$

其中，$C_1 > 0$ 是一个与 ξ、ε、λ 和 χ 无关的常数。

由于 (5.1) 是关于 $L_\varepsilon = L_{\mathrm{l},\varepsilon} + L_{\mathrm{r},\varepsilon}$ 的 L_ε-周期系统，因此，(5.1) 在区间 $\mathcal{I}$ 上的任何指数二分性都会导出其在 $\mathcal{I}$ 的 L_ε-平移区间上的指数二分性。我们的目标是借助 [14, 引理 B.2]，将 (5.1) 在区间 $\mathcal{J}_{\mathrm{r}}, \mathcal{I}_{\mathrm{f}}$, $\mathcal{J}_{\mathrm{l}}$ 和 $\mathcal{I}_{\mathrm{b}}$ 上的指数二分性及其 L_ε-平移区间上的指数二分性拼接起来，从而证明 (5.1) 在长度为 $2L_\varepsilon$ 的双周期区间上具有指数二分性。进而，应用 [77, 定理 1]，即可得到所需的 (5.1) 在 $\mathbb{R}$ 上的指数二分性。为此，我们将估计式 (5.5)、(5.6) 和 (5.7) 与命题 2.2 结合，并推得在 $0 < \varepsilon \ll \chi \ll 1$ 条件下，

$$\begin{aligned} &\left\|\check{Q}_{\mathrm{f},\varepsilon}\left(\tfrac{\log(\varepsilon)}{\chi};\lambda\right) - \check{Q}_{\mathrm{r},\varepsilon}\left(\tfrac{\log(\varepsilon)}{\chi};\lambda\right)\right\|, \left\|\check{Q}_{\mathrm{f},\varepsilon}\left(\tfrac{1}{\chi};\lambda\right) - \check{Q}_{\mathrm{l},\varepsilon}\left(\tfrac{1}{\chi};\lambda\right)\right\|, \\ &\left\|\check{Q}_{\mathrm{b},\varepsilon}\left(L_{\mathrm{l},\varepsilon} + \tfrac{\log(\varepsilon)}{\chi};\lambda\right) - \check{Q}_{\mathrm{l},\varepsilon}\left(L_{\mathrm{l},\varepsilon} + \tfrac{\log(\varepsilon)}{\chi};\lambda\right)\right\|, \left\|\check{Q}_{\mathrm{b},\varepsilon}\left(L_{\mathrm{l},\varepsilon} + \tfrac{1}{\chi};\lambda\right) - \check{Q}_{\mathrm{r},\varepsilon}\left(\tfrac{1}{\chi} - L_{\mathrm{r},\varepsilon};\lambda\right)\right\| < \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{5.8}$$

对于 $\lambda \in R_2(\mu,\varpi,\varrho)$。因此，应用 [14, 引理 A.1]，我们推得 $\check{Q}_{\mathrm{f},\varepsilon}(\frac{1}{\chi}\log(\varepsilon);\lambda)[\mathbb{C}^n]$ 与 $\ker(\check{Q}_{\mathrm{r},\varepsilon}(\frac{1}{\chi}\log(\varepsilon);\lambda))$ 是 $\lambda-\in R_2(\mu,\varpi,\varrho)$ 的互补子空间。特别地，这意味着沿着 $\ker(\check{Q}_{\mathrm{r},\varepsilon}(\frac{1}{\chi}\log(\varepsilon);\lambda))$ 投影到 $\check{Q}_{\mathrm{f},\varepsilon}(\frac{1}{\chi}\log(\varepsilon)\chi;\lambda)[\mathbb{C}^n]$ 的投影是良定义的，并且可由一个与 ε、$\bar{}\chi$ 和 λ 无关的常数控制，其中 $\lambda \in R_2(\mu,\varpi,\varrho)$；这是因为 (5.1) 在 $\mathcal{I}_{\mathrm{f}}$ 上的指数二分性的常数与 ε、χ 和 λ 无关。应用 [14, 引理 B.2]，我们发现，在 $0<\varepsilon\ll\chi\ll 1$ 条件下，对于每个 $\lambda\in R_2(\mu,\varpi,\varrho)$，(5.1) 在 $\mathcal{J}_{\mathrm{r}}\cup\mathcal{I}_{\mathrm{f}}$ 上具有指数二分性，其常数和投影 $\check{\mathcal{Q}}_{1,\varepsilon}(\xi;\lambda)$ 均与 ε、χ 和 λ 无关，并满足

$$\left\|\check{\mathcal{Q}}_{1,\varepsilon}(\tfrac{1}{\chi};\lambda)-\check{Q}_{\mathrm{f},\varepsilon}\left(\tfrac{1}{\chi};\lambda\right)\right\|\le\chi. \tag{5.9}$$

C将（5.8）与（5.9）结合起来可得，只要 $0<\varepsilon\ll\chi\ll 1$，估计 e

$$\left\|\check{\mathcal{Q}}_{1,\varepsilon}(\tfrac{1}{\chi};\lambda)-\check{Q}_{\mathrm{l},\varepsilon}\left(\tfrac{1}{\chi};\lambda\right)\right\|<\frac{1}{2}+\chi<1 \tag{5.10}$$

对 $\lambda\in R_2(\mu,\varpi,\varrho)$ 成立。仿照前面的推导，我们可以利用估计 (5.10) 以及 [14, 引理 A.1 和 B.2] 证明，只要 $0<\varepsilon\ll\chi\ll 1$，系统 (5.1) 对每个 $\lambda\in R_2(\mu,\varpi,\varrho)$ 都在 $\mathcal{J}_{\mathrm{r}}\cup\mathcal{I}_{\mathrm{f}}\cup\mathcal{J}_{\mathrm{l}}$ 上具有指数二分性，且其常数与 ε、χ 和 λ 无关。通过归纳推理并利用估计 (5.8)，我们由此发现，系统 (5.1) 对每个 $\lambda\in R_2(\mu,\varpi,\varrho)$ 都在长度为 $2L_\varepsilon$ 的区间上具有指数二分性，且其常数与 ε、χ 和 λ 无关。因此，利用 (5.1) 的 L_ε- 周期系数矩阵对于 $\lambda\in R_2(\mu,\varpi,\varrho)$ 和 $\xi\in\mathbb{R}$ 可由一个与 ε 和 λ 无关的常数界定这一事实（由命题 2.2 得出），根据 [77, 定理 1]，系统 (5.1) 对每个$\lambda\in R_2(\mu,\varpi,\varrho)$ 都在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性，且其常数与 λ 和 ε 无关。

□

5.2 区域 $R_{2,\ 1}(\mu,\ \varpi,\ \varrho)$

快子系统（5.1）的指数二分性已由命题 5.1确立，这使我们能够应用 Riccati 变换对重标度特征值问题（2.15）进行块对角化。通过计算对角化特征值问题的一维慢分量中的标量动力学的首项，并运用 Floquet 边界条件（2.16），我们排除了在区域 $R_{2,\ 1}(\mu,\ \varpi,\ \varrho)$ 中存在任何实部非负的谱。

命题 5.2。设 $0<a<\frac{1}{2}$。固定 $0<\gamma<\gamma_*(a)$ 以及 $c>c_*(a)$。取常数 μ、$\varrho>0$，其中$\mu<\varrho$。那么，只要 $0<\varepsilon\ll\varpi\ll 1$，关于 $\phi_\varepsilon(\xi)$ 的 (1.7) 线性化 $\mathcal{L}_\varepsilon$ 在紧集 $R_{2,\ 1}(\mu、\ \varpi、\ \varrho)$ 中不具有实部非负的谱。

证明。如 §2.2 中所述，只需证明特征值问题（2.15）-（2.16）对于 $\rho\in\mathbb{R}$ 和 $\lambda\in R_{2,\ 1}(\mu,\ \varpi,\ \varrho)$ 且 $\Re(\lambda)\ge 0$ 时不存在非平凡解。与命题 5.1 的证明一样，我们采用记号 $\mathcal{J}_{\mathrm{l}}=[\frac{1}{\chi},L_{\mathrm{l},\varepsilon}+\log(\varepsilon)\chi\ ]$ 和 $\mathcal{J}_{\mathrm{r}}=[\frac{1}{\chi}-L_{r,\varepsilon},\ \log(\varepsilon)\chi\ ]$。此外，在整个证明过程中，我们用$C\ge 1$ 表示任意与 ε-、λ-、χ-、ϖ- 和 ξ-无关的常数。

首先，命题 2.2 表明，只要 $0<\varepsilon\ll\chi\ll 1$，就有

$$\begin{aligned}\left\|A_{\mathrm{f}}(\xi;\varepsilon,\lambda)-\check{A}_{\mathrm{l}}(\varepsilon\xi;\lambda)\right\|&\le C\delta_0(\chi),\qquad \xi\in\mathcal{J}_{\mathrm{l}},\\ \left\|A_{\mathrm{f}}(\xi;\varepsilon,\lambda)-\check{A}_{\mathrm{r}}(\varepsilon\xi+L_{\mathrm{r},\varepsilon};\lambda)\right\|&\le C\delta_0(\chi),\qquad \xi\in\mathcal{J}_{\mathrm{r}}\end{aligned} \tag{5.11}$$

当 $\lambda\in R_{2,\ 1}(\mu,\ \varpi,\ \varrho)$ 时，其中记

$$\check{A}_i(y;\lambda)=\begin{pmatrix}-\frac{\lambda}{c} & 1\\ \lambda-f'(u_i(y)) & -\frac{\lambda}{c}\end{pmatrix}$$

对于 $i=\mathrm{l},\mathrm{r}$。随后，我们观察到谱投影

$$\begin{pmatrix}\check{A}_i(y;\lambda) & B_0\\ 0_{1\times 2} & 0\end{pmatrix}$$

到其中心特征子空间的投影为

$$\check{\mathcal{Q}}_i^{\mathrm{c}}(y;\lambda)=\begin{pmatrix}0 & 0 & \left(f'(u_i(y))-\lambda+\frac{\lambda^2}{c^2}\right)^{-1}\\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{c}\left(f'(u_i(y))-\lambda+\frac{\lambda^2}{c^2}\right)^{-1}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

对于 $y\in[0,L_i+1]$, $\lambda\in R_{2,1}(\mu,\varpi,\varrho)$ 以及 $i=\mathrm{l},\mathrm{r}$。根据估计（5.11），我们有

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{P}_{\varepsilon,\lambda}^{\mathrm{c}}(\xi)-\check{\mathcal{Q}}_{\mathrm{l}}^{\mathrm{c}}(\varepsilon\xi;\lambda)\right\|\le C\delta_0(\chi),\qquad \xi\in\mathcal{J}_{\mathrm{l}},\\ \left\|\mathcal{P}_{\varepsilon,\lambda}^{\mathrm{c}}(\xi)-\check{\mathcal{Q}}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{c}}(\varepsilon\xi+L_{\mathrm{r},\varepsilon};\lambda)\right\|\le C\delta_0(\chi),\qquad \xi\in\mathcal{J}_{\mathrm{r}},\end{aligned}\tag{5.12}$$

对于$\lambda\in R_{2,\ 1}(\mu,\ \varpi,\ \varrho)$，其中$\mathcal{P}_{\varepsilon,\ \lambda}^{\mathrm{c}}(\xi)$是系数矩阵 $A(\xi;\ \varepsilon,\ \lambda)$从（2.15）到其中心子空间的谱投影。

根据命题 5.1，若 $0<\varepsilon\ll\varpi\ll 1$，则快子系统 (5.1) 对每个 $\lambda\in R_{2,1}(\mu,\varpi,\varrho)$ 在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性，其常数 $K,\alpha>0$ 与 ε 和 λ 无关。因此，若 $0<\varepsilon\ll\varpi\ll 1$，则重标度快子系统 (3.9) 对每个 $\lambda\in R_{2,1}(\mu,\varpi,\varrho)$ 在 $\mathbb{R}$ 上也具有指数二分性，其常数 $K,\alpha-\frac{\varpi}{c}>0$ 与 ε 和 λ 无关。此外，根据命题 2.2，对于 $\lambda\in R_{2,1}(\mu,\varpi,\varrho)$，系统 (2.15) 的 L_ε-周期系数矩阵在 $\mathbb{R}$ 上可由一个与 ε 和 λ 无关的常数控制。因此，按照命题 3.3 的证明中的步骤，我们应用 Riccati 变换（参见 [31, 定理 5.1], ），得到连续的 L_ε-周期矩阵函数 $H_{\varepsilon,\lambda}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}^{3\times3}$ 和 $U_{\varepsilon,\lambda}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}^{2\times1}$，使得对于每个 $\xi\in\mathbb{R}$，$H_{\varepsilon,\lambda}(\xi)$ 都可逆，并且 $U_{\varepsilon,\lambda}$ 在 $\mathbb{R}$ 上可由一个与 λ 和 ε 无关的常数控制。此外，若 $\Psi(\xi)$ 是系统 (2.15) 的一个解，则 $\Phi(\xi)=H_{\varepsilon,\lambda}(\xi)\Psi(\xi)$ 满足对角化系统

$$\Phi_\xi=\begin{pmatrix}A_{\mathrm{f}}(\xi;\varepsilon,\lambda)-\varepsilon U_{\varepsilon,\lambda}(\xi)B_1 & 0_{2\times1}\\ 0_{1\times2} & \varepsilon A_{\mathrm{s}}+\varepsilon B_1U_{\varepsilon,\lambda}(\xi)\end{pmatrix}\Phi,\tag{5.13}$$

对于 $\xi\in\mathbb{R}$ 和 $\lambda\in R_{2,1}(\mu,\varpi,\varrho)$。类似于命题 3.3 的证明中估计式 (3.17) 的推导，可得以下估计

$$\begin{aligned}\left\|U_{\varepsilon,\lambda}(\xi)-\begin{pmatrix}\left(f'(u_{\mathrm{l}}(\varepsilon\xi))-\lambda+\frac{\lambda^2}{c^2}\right)^{-1}\\ \frac{\lambda}{c}\left(f'(u_{\mathrm{l}}(\varepsilon\xi))-\lambda+\frac{\lambda^2}{c^2}\right)^{-1}\end{pmatrix}\right\|\le C\delta_0(\chi),\qquad \xi\in I_{\mathrm{l},\chi},\\ \left\|U_{\varepsilon,\lambda}(\xi)-\begin{pmatrix}\left(f'(u_{\mathrm{r}}(\varepsilon\xi+L_{\mathrm{r},\varepsilon}))-\lambda+\frac{\lambda^2}{c^2}\right)^{-1}\\ \frac{\lambda}{c}\left(f'(u_{\mathrm{r}}(\varepsilon\xi+L_{\mathrm{r},\varepsilon}))-\lambda+\frac{\lambda^2}{c^2}\right)^{-1}\end{pmatrix}\right\|\le C\delta_0(\chi),\qquad \xi\in I_{\mathrm{r},\chi}\end{aligned}\tag{5.14}$$

对于 $\lambda\in R_{2,1}(\mu,\varpi,\varrho)$，这里我们使用 (5.12) 而非 (3.15)。此外，根据粗糙性结果，参见 [27,定理 5.1], 快速分块系统

$$\Phi_\xi=\left(A_{\mathrm{f}}(\xi;\varepsilon,\lambda)-\varepsilon U_{\varepsilon,\lambda}(\xi)B_1\right)\Phi\tag{5.15}$$

对于 $\lambda\in R$，存在$_{2,1}(\mu,\varpi,\varrho)$ 在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性，其常数与 λ 和 ε 无关 s.

现在假设 $\Psi(\xi)$ 是边值问题 (2.15)-(2.16) 的一个非平凡解，其中$\rho\in\mathbb{R}$ 且 $\lambda\in R_{2,1}(\mu,\varpi,\varrho)$。那么，$\Phi(\xi)=H_{\varepsilon,\lambda}(\xi)\Psi(\xi)$ 满足 (5.13) 且符合

$$\Phi(L_\varepsilon+\xi)=\mathrm{e}^{\left(\mathrm{i}\rho-\frac{\lambda}{c}\right)L_\varepsilon}\Phi(\xi)\tag{5.16}$$

对所有 $\xi\in\mathbb{R}$ 均成立，这里我们用到了 $H_{\varepsilon,\lambda}(0)=H_{\varepsilon,\lambda}(L_\varepsilon)$ 可逆这一事实。$\Phi(\xi)$ 的前两个分量满足快速分块系统 (5.15)，该系统在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性，其常数与 λ 和 ε 无关。因此，只要 $0<\varepsilon\ll\varpi\ll1$ 成立，条件 (5.16) 就意味着 $\Phi(\xi)$ 的前两个分量必定恒等于零。由于 $\Phi(\xi)$ 的最后一个分量 $\phi(\xi)$ 满足标量问题

$$\phi_\xi=\varepsilon\left(A_{\mathrm{s}}+B_1U_{\varepsilon,\lambda}(\xi)\right)\phi,$$

它对所有 $\xi\in\mathbb{R}$ 均非零，并且满足

$$\phi(L_\varepsilon)=\exp\left(\int_0^{L_\varepsilon}\varepsilon\left(A_{\mathrm{s}}+B_1U_{\varepsilon,\lambda}(\xi)\right)d\xi\right)\phi(0).$$

将后者代入（5.16）的最后一个分量中，取 $\xi=0$，再除以 $\phi(0)\neq0$，对等式两边取复对数并令实部相等，可得

$$\Re\left(\frac{\lambda L_\varepsilon}{c}+\int_0^{L_\varepsilon}\varepsilon\left(A_{\mathrm{s}}+B_1U_{\varepsilon,\lambda}(\xi)\right)d\xi\right)=0.$$

因此，利用近似（2.11）和（5.14），并注意到 $U_{\varepsilon,\,\lambda}$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界，且其上界是与 ε 和 λ 无关的常数，我们推得，只要 $0<\varepsilon\ll\chi\ll\varpi\ll1$，估计

$$\left|\Re(\lambda)\frac{L_\varepsilon}{c}+\frac{\gamma}{c}\left(L_{\mathrm{l}}+L_{\mathrm{r}}\right)-\int_0^{L_{\mathrm{l}}}\frac{f'(u_{\mathrm{l}}(y))-\Re(\lambda)+\frac{\Re(\lambda)^2-\Im(\lambda)^2}{c^2}}{c\left|f'(u_{\mathrm{l}}(y))-\lambda+\frac{\lambda}{c^2}\right|^2}\mathrm{d}y-\int_0^{L_{\mathrm{r}}}\frac{f'(u_{\mathrm{r}}(y))-\Re(\lambda)+\frac{\Re(\lambda)^2-\Im(\lambda)^2}{c^2}}{c\left|f'(u_{\mathrm{r}}(y))-\lambda+\frac{\lambda}{c^2}\right|^2}\mathrm{d}y\right|$$
$$\leq C\delta_0(\chi)$$

成立。因此，回想我们有 $\gamma,\ c>0$，且当 $y\in[0,L_i]$ 和 $i=\mathrm{l},\ \mathrm{r}$ 时，$f'(u_i(y))\leq0$，我们推得，只要 $0<\varepsilon\ll\chi\ll\varpi\ll1$，必有 $\Re(\lambda)<0$，由此证明得证。 □

5.3 区域 $R_{2,2}(\mu,\varpi,\varrho)$

现在我们证明，线性化 $\mathcal{L}_\varepsilon$ 在紧区域$R_{2,2}(\mu,\varpi,\varrho)$ 中没有谱，其中 $\varrho,\varpi,\mu>0$固定。通过为完整特征值问题（2.13）在 $\mathbb{R}$上建立指数二分性，即可得到这一结果。

命题 5.3. 设 $0<a<\frac{1}{2}$。固定 $0<\gamma<\gamma_*(a)$ 和 $c>c_*(a)$。取常数 $\mu,\varrho,\varpi>0$，满足$\mu<\varrho$。那么，只要 $0<\varepsilon\ll1$，线性化 $\mathcal{L}_\varepsilon$ 在 (1.7) 关于 $\phi_\varepsilon(\xi)$ 的区域 $R_{2,2}(\mu,\varpi,\varrho)$中就没有谱。

证明。 假设 $\check{}\Psi(\xi)$ 是（2.13）-（2.14）的一个解，且 $\rho\in\mathbb{R}$。那么，由标准的弗洛凯理论可知，参见 [48], ，有

$$\check{\Psi}(L_\varepsilon+\xi)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho L_\varepsilon}\check{\Psi}(\xi)$$

对所有 $\xi\in\mathbb{R}$ 均成立。考虑可逆矩阵

$$S_\varepsilon=\begin{pmatrix}I_2&0_{2\times1}\\0_{1\times2}&\sqrt{\varepsilon}\end{pmatrix}.$$

我们发现，$\check{}\Phi(\xi)=S_\varepsilon\check{}\Psi(\xi)$ 满足缩放后的问题

$$\check{\Phi}_\xi=\begin{pmatrix}\check{A}_{\mathrm{f}}(\xi;\varepsilon,\lambda)&\sqrt{\varepsilon}B_0\\\sqrt{\varepsilon}B_1&\frac{1}{c}\left(\varepsilon\gamma+\lambda\right)\end{pmatrix}\check{\Phi}\tag{5.17}$$

并且满足

$$\check{\Phi}(L_\varepsilon+\xi)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho L_\varepsilon}\check{\Phi}(\xi)\tag{5.18}$$

对于 $\xi\in\mathbb{R}$。显然，若 $0<\varepsilon\ll1$，则对角系统

$$\Phi_\xi=\begin{pmatrix}\check{A}_{\mathrm{f}}(\xi;\varepsilon,\lambda)&0\\0&\frac{\lambda}{c}\end{pmatrix}\Phi$$

根据命题 5.1，对于每个 $\lambda\in R_{2,2}(\mu,\varpi,\varrho)$，在 $\mathbb{R}$ 上都存在指数二分性，其常数与 λ 和 ε 无关。由指数二分性的粗糙性（参见 [27, 命题 5.1], ），可知只要满足 $0<\varepsilon\ll1$，对于每个 $\lambda\in R_{2,2}(\mu,\varpi,\varrho)$，方程 (5.17) 在 $\mathbb{R}$ 上都存在指数二分性，其常数与 λ 和 ε 无关。将后者与 (5.18) 结合可知，$\check{}\Phi$ 必恒等于 0。因此，对于每个 $\lambda\in R_{2,2}(\mu,\varpi,\varrho)$ 及 $\rho\in\mathbb{R}$，特征值问题 (2.13)-(2.14) 不存在非平凡解。根据 §2.2 中的论述，这意味着 $\mathcal{L}_\varepsilon$ 在 $R_{2,2}(\mu,\varpi,\varrho)$ 中没有谱。 □

5.4 命题的证明2.5

选择 ϱ，如命题 2.3 中所述，并令 μ 如命题 2.4 中所述，再取 ϖ 充分小，则由命题 5.2 和 5.3即可得出结果。

A 区域$R_{3,\ \varepsilon}(\varrho)$

在本节中，我们证明关于区域 $R_{3,\ \varepsilon}(\varrho)$ 内谱的命题 2.3 。

命题的证明　部分 *2.3*。的主部是对角扩散–平流算子 $\mathcal{L}_\varepsilon$，其　　r

$$L_0 = \begin{pmatrix} \partial_{\xi\xi} + c\partial_\xi & 0 \\ 0 & c\partial_\xi \end{pmatrix}$$

作用于 $Y := L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C}) \times L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$，稠密定义域为 $H^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C}) \times H^1(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$。希尔伯特空间 $L^2(\mathbb{R})$ 上、定义域为 $H^1(\mathbb{R})$ 的斜自伴算子$A_\alpha = \alpha\partial_\xi$ 根据 Stone 定理（参见 [41, 定理 II.3.24],），对任意 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$生成一个酉群。因此，根据 [41, 推论 II.4.9] 及其证明，平方 $\partial_{\xi\xi} = A_1^2$: $H^2(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ 是扇形算子。特别地，存在一个常数 $C_0 \geq 1$，使得任意满足 $\Re(\lambda) \geq 0$ 的 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 均属于 A_1^2 的预解集，并且我们有

$$\left\| (A_1^2 - \lambda)^{-1} \right\|_{L^2 \to H^2} \leq C_0 \left(1 + \frac{1}{|\lambda|} \right). \tag{A.1}$$

另一方面，根据 Sobole夫插值，对于任意 $\delta > 0$，存在一个常数 $C_\delta > 0$，使得 $\|u'\|_{L^2} \leq \delta \|u''\|_{L^2} + C_\delta \|u\|_{L^2}$ 对所有 $u \in H^2$（$\mathbb{R}$）均成立。因此，对于任意 $\delta > 0$，算子 A_c 是 A_1^2-有界的，其 A_1^2-界为 δ。因此，利用 A_1^2 是扇形算子这一事实，[41, 定理 III.2.10] 的证明给出了常数C_1，$r_1 > 0$，使得任意满足 $\Re$（λ）≥ 0 且 $|\lambda| > r_1$ 的 $\lambda \in \mathbb{C}$ 都属于 $A_1^2 + A_c = \partial_{\xi\xi} + c\partial_\xi$的预解集，并且我们有

$$\left\| (A_1^2 + A_c - \lambda)^{-1} \right\|_{L^2 \to L^2} \leq \frac{C_1}{|\lambda|}. \tag{A.2}$$

此外，由于 A_c 生成一个酉群，[41, 推论 II.3.7] 表明，任意满足 $\Re$（λ）> 0的 $\lambda \in \mathbb{C}$ 都属于 A_c 的预解集，并且有

$$\left\| (A_c - \lambda)^{-1} \right\|_{L^2 \to L^2} \leq \frac{1}{\Re(\lambda)}. \tag{A.3}$$

余项算子 $\mathcal{L}_\varepsilon - L_0$: $Y \to Y$根据命题，其由命题 2.2 可知，被一个与A.2）和（A.3）的估计与 [66, 定理 IV.1。16] 结合，可得一个与 ε无关的常数 $\varrho_1 > 0$，使得 $\mathcal{L}_\varepsilon - \lambda$ 对所有满足 $\lambda \in \mathbb{C}$ 的 $\Re(\lambda) > \varrho_1$均可逆。

现在我们考虑特征值问题

$$(\mathcal{L}_\varepsilon - b - \mathrm{i}\kappa\Omega) \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = 0 \tag{A.4}$$

其中 $b \in [-\frac{3}{4}\varepsilon\gamma, \varrho_1]$，$\kappa \in \{\pm 1\}$，以及 $\Omega \geq 1$。受 [8, 附录 A], 中的分析启发，我们将（A.4）左乘对角矩阵 $\mathrm{diag}(\Omega^{-1},\ \varepsilon^{-1}\Omega^{-1/2})$，并引入缩放后的空间变量$X = \sqrt{\Omega}\xi$ 和 $W = \varepsilon^{-1}w$。由此得到

$$(\mathcal{L}_{1,\varepsilon,\mu} + \mathcal{L}_{2,\varepsilon,\mu}) \begin{pmatrix} u \\ W \end{pmatrix} = 0,$$

其中，我们记 $\mu=\Omega^{-1/2}\in(0,\ 1)$，算子 $\mathcal{L}_{1,\ \varepsilon,\ \mu}$：$H^2(\mathbb{R})\times H^1(\mathbb{R})\ \subset Y\to Y$以及 $\mathcal{L}_{2,\ \varepsilon,\ \mu}$：$H^1(\mathbb{R})\times L^2(\mathbb{R})\ \subset Y\to Y$定义如下

$$\mathcal{L}_{1,\varepsilon,\mu}=\begin{pmatrix}A_1^2-i\kappa & 0\\ 0 & A_c-(b+\varepsilon\gamma)\mu-\frac{i\kappa}{\mu}\end{pmatrix},\qquad \mathcal{L}_{2,\varepsilon,\mu}=\begin{pmatrix}A_{\mu c}+\mu^2\left(f'(u_\varepsilon(\mu X))-b\right) & -\varepsilon\mu^2\\ \mu & 0\end{pmatrix}.$$

利用 $b\in[-\frac{3}{4}\varepsilon\gamma,\varrho_1]$，由（A.1）和（A.3）可知 $\mathcal{L}_{1,\ \varepsilon,\ \mu}$可逆，因此可找到一个与 μ 和ε 无关的常数 $C_0>0$，使得

$$\left\|\mathcal{L}_{2,\varepsilon,\mu}\mathcal{L}_{1,\varepsilon,\mu}^{-1}\right\|_{L^2\to L^2}\le C_0\mu$$

对于 $\mu\in(0,1)$。因此，存在一个与 ε 无关的常数 $\mu_0>0$，使得若 $\mu\in(0,\mu_0)$，则算子 $I+\mathcal{L}_{2,\varepsilon,\mu}\mathcal{L}_{1\ \varepsilon,}^{-1}$,μ 可利用 Neumann 级数求逆。因此，$(I+\mathcal{L}_{2,\varepsilon,\mu}\mathcal{L}_{1\ \varepsilon,}^{-1},\mu)\mathcal{L}_{1,\varepsilon,\mu}=\mathcal{L}_{1,\varepsilon,\mu}+\mathcal{L}_{2,\varepsilon,\mu}$ 在 $\mu\in(0,\mu_0)$ 时可逆。进行重标度后，我们推知存在一个与 ε 无关的常数 $\varrho_2>0$，使得 $\underline{\mathcal{L}}_\varepsilon-b-\mathrm{i}\kappa\Omega$ 在 $b\in[-\frac{3}{4}\varepsilon\gamma,\varrho_1]$，$\kappa\in\{\pm1\}$ 且 $\Omega\ >\varrho_2$ 时可逆，由此完成证明。 □

B 指数二分性与三分性

指数二分性与三分性在线性微分算子的谱分析中起着核心作用，可用于刻画可逆性和 Fredholm性质 [27, 75, 76, 82]。

当线性非自治常微分方程具有一个基本解组，且该解组在正向或反向时间中呈现指数衰减时，该方程具有指数二分性。

定义 B.1。设 $n\in\mathbb{N}_0$, $J\subset\mathbb{R}$ 为一个区间，且 $A\in C(J,\mathbb{C}^{n\times n})$。记 $T(x,y)$ 为其演化算子

$$\phi_x=A(x)\phi,\qquad \phi\in\mathbb{C}^n. \tag{B.1}$$

方程 (B.1) 在 J上具有指数二分性，其常数为 $K,\alpha>0$，投影为 $P(x)\in\mathbb{C}^{n\times n}$，若对所有 $x,y\in J$ 均有

- $P(x)T(x,y)=T(x,y)P(y)$;
- $\|T(x,y)P(y)\|\le K\mathrm{e}^{-\alpha(x-y)}$ for $x\ge y$;
- $\|T(x,y)(I_n-P(y))\|\le K\mathrm{e}^{-\alpha(y-x)}$ for $y\ge x$.

指数三分性描述的是这样一类线性系统：除了在正向和反向时间中呈现指数衰减外，还具有一个与有界或中性动力学相对应的中心子空间。

定义 B.2. 设 $n\in\mathbb{N}_{>0}$, $J\subset\mathbb{R}$ 为一个区间，且 $A\in C(J,\mathbb{C}^{n\times n})$。用 $T(x,y)$ 表示方程 (B.1) 的演化算子。方程 (B.1) 在 J 上具有指数三分性，其常数为 $K,\alpha>0$，投影为 $P^{\mathrm{u}}(x)$ $P_{\mathrm{s}}(x)$ $P_{\mathrm{c}}(x)\in\mathbb{C}^{n\times n}$，如果对所有 $x,y\in J$，均有

- $P_{\mathrm{u}}(x)+P_{\mathrm{s}}(x)+P_{\mathrm{c}}(x)=I$;
- $P_{\mathrm{s,u/c}}(x)T(x,y)=T(x,y)P_{\mathrm{s,u/c}}(y)$;
- $\|T(x,y)P_{\mathrm{s}}(y)\|,\|T(y,x)P_{\mathrm{u}}(x)\|\le K\mathrm{e}^{-\alpha(x-y)}$ 对于 $x\ge y$;
- $\|T(x,\ y)P_{\mathrm{c}}(y)\|\le K$。

C 艾里函数 $\mathrm{Ai}(s)$

本节汇集了有关艾里函数 $\mathrm{Ai}(s)$ 的若干事实。我们从 [35,§9] 中的以下结果开始。

引理 C.1. 艾里函数 $\mathrm{Ai}:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足以下性质：

（*i*） $\mathrm{Ai}''(s)=s\mathrm{Ai}(s)$ 对 $s\in\mathbb{R}$

（*ii*） $\mathrm{Ai}(s)$ 有无穷多个零点，且全部为负数，其中最大的零点为单零点，记为 $-\Omega_0<0$。

（*iii*） 存在一个常数 $C>0$ 使得

$$0\le \mathrm{Ai}(s)\le Ce^{-\frac{2}{3}|s|^{3/2}},\qquad |\mathrm{Ai}'(s)|\le C\left(1+|s|^{\frac14}\right)e^{-\frac{2}{3}|s|^{3/2}}$$

当 $s\in[-\Omega_0,\infty)$ 时。

利用引理 C.1，我们得到以下结果。

命题 C.2. 考虑由下式给出的整函数 $I_0:\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}$

$$I_0(z)=\frac{z}{\mathrm{Ai}'(-\Omega_0)^2}\int_{-\Omega_0}^{\infty}e^{-z(s+\Omega_0)}\left(\mathrm{Ai}'(s)^2-s\mathrm{Ai}(s)^2\right)\mathrm{d}s, \tag{C.1}$$

其中 $-\Omega_0<0$ 是艾里函数 $\mathrm{Ai}(s)$的最大零点。存在一个常数 $C>0$，使得以下结论成立：

(i) $I_0(z)=\frac{2}{3}\Omega_0^0 z+\mathcal{O}(|z|^2)$ 对于 $z\in\mathbb{C}$ 且 $|z|\ll 1$。

(ii) $I_0(0)=0, I_0'(z)>0$ 对于 $z\in\mathbb{R}$，并且 $I_0(z)=1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right)$ 对于 $z\in\mathbb{R}$ 且 $z\gg 1$。

(iii) $I_0(z)=1-\dfrac{1}{\mathrm{Ai}'(-\Omega_0)^2}\displaystyle\int_{-\Omega_0}^{\infty}e^{-z(s+\Omega_0)}\mathrm{Ai}(s)^2\mathrm{d}s$ 对每个 $z\in\mathbb{C}$。

(iv) $|I_0'(z)|\le C$ 对所有满足 $z\in\mathbb{C}\ \Re(z)\ge -1$的 $\Re$.

证明。 利用分部积分和引理 C.1，可得

$$\begin{aligned}\int_{-\Omega_0}^{\infty}\mathrm{Ai}'(s)^2-s\mathrm{Ai}(s)^2\mathrm{d}s&=2\int_{-\Omega_0}^{\infty}\mathrm{Ai}'(s)^2\mathrm{d}s=2s\mathrm{Ai}'(s)^2\Big|_{-\Omega_0}^{\infty}-4\int_{-\Omega_0}^{\infty}s^2\mathrm{Ai}'(s)\mathrm{Ai}(s)\mathrm{d}s\\&=2\Omega_0\mathrm{Ai}'(-\Omega_0)^2+4\int_{-\Omega_0}^{\infty}s\mathrm{Ai}(s)^2\mathrm{d}s=2\Omega_0\mathrm{Ai}'(-\Omega_0)^2-4\int_{-\Omega_0}^{\infty}\mathrm{Ai}'(s)^2\mathrm{d}s\end{aligned}$$

从而

$$\frac{1}{\mathrm{Ai}'(-\Omega_0)^2}\int_{-\Omega_0}^{\infty}\mathrm{Ai}'(s)^2-s\mathrm{Ai}(s)^2\mathrm{d}s=\frac{2\Omega_0}{3}.$$

结合引理 C.1，可得 $I_0(0)=0$ 以及 $I_0'(0)=2\Omega_0/3$，由此便完成了 (i) 的证明以及 (ii) 中的第一条陈述。对于其余结论，我们利用分部积分得到

$$\begin{aligned}I_0(z)&=-\frac{1}{\mathrm{Ai}'(-\Omega_0)^2}\int_{-\Omega_0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[e^{-z(s+\Omega_0)}\right]\left(\mathrm{Ai}'(s)^2-s\mathrm{Ai}(s)^2\right)\mathrm{d}s\\&=-\frac{1}{\mathrm{Ai}'(-\Omega_0)^2}e^{-z(s+\Omega_0)}\left(\mathrm{Ai}'(s)^2-s\mathrm{Ai}(s)^2\right)\Big|_{-\Omega_0}^{\infty}-\frac{1}{\mathrm{Ai}'(-\Omega_0)^2}\int_{-\Omega_0}^{\infty}e^{-z(s+\Omega_0)}\mathrm{Ai}(s)^2\mathrm{d}s\\&=1-\frac{1}{\mathrm{Ai}'(-\Omega_0)^2}\int_{-\Omega_0}^{\infty}e^{-z(s+\Omega_0)}\mathrm{Ai}(s)^2\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{C.2}$$

对于 $z\in\mathbb{C}$，这就证明了 (iii)。对 (C.2) 求导并利用引理 C.1，可得

$$I_0'(z)=\frac{1}{\mathrm{Ai}'(-\Omega_0)^2}\int_{-\Omega_0}^{\infty}\mathrm{e}^{-z(s+\Omega_0)}\,(s+\Omega_0)\,\mathrm{Ai}(s)^2\mathrm{d}s$$

对于 $z\in\mathbb{C}$，这意味着 $I_0'(z)>0$ 对于 $z\in\mathbb{R}$。取绝对值后，我们得到

$$|I_0'(z)|\le\frac{1}{\mathrm{Ai}'(-\Omega_0)^2}\int_{-\Omega_0}^{\infty}\mathrm{e}^{s+\Omega_0}\,(s+\Omega_0)\,\mathrm{Ai}(s)^2\mathrm{d}s$$

对所有 $z\in\mathbb{C}$ 满足 $\Re(z)\ge-1$，由此根据引理 C.1可得 (iv)。最后，对于 $z\in\mathbb{R}$ 满足 $z\gg1$，通过分部积分并利用引理 C.1，由 (C.2) 可得

$$\begin{aligned}I_0(z)&=1-\frac{2}{\mathrm{Ai}'(-\Omega_0)^2z}\int_{-\Omega_0}^{\infty}\mathrm{e}^{-z(s+\Omega_0)}\mathrm{Ai}(s)\mathrm{Ai}'(s)\mathrm{d}s\\&=1-\frac{2}{\mathrm{Ai}'(-\Omega_0)^2z^2}\int_{-\Omega_0}^{\infty}\mathrm{e}^{-z(s+\Omega_0)}\left(\mathrm{Ai}'(s)^2+s\mathrm{Ai}(s)^2\right)\mathrm{d}s=1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right),\end{aligned}$$

如所述。 □

D 谱的数值延拓

本节介绍用于获得图 6 中绘图的谱数值计算细节。为验证临界谱曲线在原点处的（负）二次相切及其渐近标度，我们对首项二次系数 $\lambda_\varepsilon''(0)$ 进行数值计算，并将其与预测的首阶行为 (2.18) 进行比较。我们遵循 [38, §4] 推导系数 $\lambda_\varepsilon''(0)$ 的表达式。回顾一下，波列解 $\phi_\varepsilon(\xi;\,c)=(u_\varepsilon,w_\varepsilon)(\xi;\,c)$ 是行波常微分方程 (1.8) 的一个 $L_\varepsilon(c)$-周期解。由于 L_ε 是 c 的单调递增函数，我们也可以将解 ϕ_ε 和波速 c 表示为周期 L_ε 的函数。定义空间波数 $\ell=\frac{2\pi}{L_\varepsilon}$，并令 $\omega(\ell):=\ell c(\ell)$，则 $(u_*,w_*)(\theta;\,\ell)=(u_\varepsilon,w_\varepsilon)(\theta/\ell;\,c(\ell))$ 是方程的一个 2π-周期解

—

$$\begin{aligned}0&=\ell^2u_{\theta\theta}+f(u)-w+\omega u_\theta,\\0&=\varepsilon(u-\gamma w-a)+\omega w_\theta.\end{aligned}\tag{D.1}$$

根据定理 1.2，平移特征值是单重的，因此导数 $(\partial_\theta u_*,\ \partial_\theta w_*)$ 张成了该算子的核

$$\mathcal{L}_*=\begin{pmatrix}\ell^2\partial_{\theta\theta}+f'(u_*(\theta;\ell))u+\omega\partial_\theta & -1\\ \varepsilon & -\varepsilon\gamma w+\omega\partial_\theta\end{pmatrix}.$$

伴随算子

$$\mathcal{L}_*^{\mathrm{ad}}=\begin{pmatrix}\ell^2\partial_{\theta\theta}+f'(u_*(\theta;\ell))u-\omega\partial_\theta & \varepsilon\\ -1 & -\varepsilon\gamma w-\omega\partial_\theta\end{pmatrix}$$

存在一个非平凡解，记为 $(u_{\mathrm{ad}},\ w_{\mathrm{ad}})(\theta;\ \ell)$。对 ℓ 求 $((\partial_\ell u_*,\ \partial_\ell w_*)$ 关于 D.1 求导，我们得到其满足方程

$$\mathcal{L}_*\begin{pmatrix}\partial_\ell u_*\\ \partial_\ell u_*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\ell\partial_{\theta\theta}u_*-\omega'(\ell)\partial_\theta u_*\\ -\omega'(\ell)\partial_\theta w_*\end{pmatrix},\tag{D.2}$$

其中，对等式两边与 $(u_{\mathrm{ad}},\ w_{\mathrm{ad}})(\theta;\ \ell)$ 取 L^2 内积，可得

$$\omega'(\ell) = -\frac{\left\langle \begin{pmatrix} -2\ell\partial_{\theta\theta}u_* \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_{\mathrm{ad}} \\ w_{\mathrm{ad}} \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} \partial_\theta u_* \\ \partial_\theta w_* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_{\mathrm{ad}} \\ w_{\mathrm{ad}} \end{pmatrix} \right\rangle}.$$

按照 [38, §4.2], 中的讨论，通过在 θ 中平移，我们可以令解 $(\partial_\ell u_*, \partial_\ell w_*)$ 满足 (D.2)

$$\left\langle \begin{pmatrix} \partial_\ell u_* \\ \partial_\ell w_* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_{\mathrm{ad}} \\ w_{\mathrm{ad}} \end{pmatrix} \right\rangle = 0. \tag{D.3}$$

转而考虑特征值问题 (1.10)，临界谱曲线 $\lambda_\varepsilon(\rho)$ 满足重新表述后的特征值问题

$$\mathcal{L}_{\rho,*} \begin{pmatrix} u_\rho \\ w_\rho \end{pmatrix} = \lambda_\varepsilon(\rho) \begin{pmatrix} u_\rho \\ w_\rho \end{pmatrix} \tag{D.4}$$

当 $\rho \in \left[-\frac{\pi}{L_\varepsilon}, \frac{\pi}{L_\varepsilon}\right)$ 时，其中算子

$$\mathcal{L}_{\rho,*} = \begin{pmatrix} \ell^2\left(\partial_\theta + \mathrm{i}\frac{\rho}{\ell}\right)^2 + \omega\left(\partial_\theta + \mathrm{i}\frac{\rho}{\ell}\right) + f'(u_*(\theta;\ell)) & -1 \\ \varepsilon & \omega\left(\partial_\theta + \mathrm{i}\frac{\rho}{\ell}\right) - \varepsilon\gamma \end{pmatrix},$$

以及 $(u_\rho, w_\rho) = (\partial_\theta u_*, \partial_\theta w_*)$ 在 $\rho = 0$ 处。对 (D.4) 关于 ρ 求导，并按照 [38, §4.2]，我们得到

$$\lambda_\varepsilon''(0) = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 4\ell\partial_\theta\partial_\ell u_* + 2\partial_\theta u_* \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_{\mathrm{ad}} \\ w_{\mathrm{ad}} \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} \partial_\theta u_* \\ \partial_\theta w_* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_{\mathrm{ad}} \\ w_{\mathrm{ad}} \end{pmatrix} \right\rangle}. \tag{D.5}$$

我们在 AUTO 中通过求解以下方程，数值计算 (D.5)：将 $(\partial_\theta u_*, \partial_\theta w_*)$ 和 $(u_{\mathrm{ad}}, w_{\mathrm{ad}})$ 作为其解

$$\mathcal{L}_* \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = 0,$$

and

$$\mathcal{L}_*^{\mathrm{ad}} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = 0,$$

分别归一化后，并令 $(\partial_\ell u_*, \partial_\ell w_*)$ 为满足 (D.3) 的 (D.2) 的解。随后可通过数值计算 (D.5) 中的内积来确定 $\lambda_\varepsilon''(0)$。图 6 展示了当 ε 逐渐减小时，针对 $a = 0.2$、$\gamma = 1$ 且波速为 $c = 2$ 的 (1.1) 波列解，对 $\lambda_\varepsilon''(0)$ 进行数值延拓所得的结果。数值计算得到的表达式 (D.5) 与命题 2.4 中解析求得的首阶系数 $-k\varepsilon^{2/3}$ 吻合良好。对这两个表达式之差作双对数图表明，误差确实是高阶的：虽然我们尚未在命题 2.4 的证明中进行捕捉该误差所需的高阶分析，但我们推测该误差近似按 $\sim \varepsilon\log\varepsilon$ 标度变化。这与折叠点处慢穿越所伴随的 $\varepsilon^{2/3}$ 分岔延迟中的下一阶误差项为 $\varepsilon\log\varepsilon$ [69] 这一事实相符。图 6 似乎印证了这一标度关系。

E 直接数值模拟

图2和图3的直接数值模拟采用四阶指数时间差分格式 [28]，经谱离散后，利用快速傅里叶变换计算线性部分。典型的离散参数为 $dx = 0.1$ 和 $dt = 0.1$。区域大小的选择使区域恰好容纳 20 个重复的相位波和 60 个重复的触发波。该格式在 Matlab 中实现，计算在 Nvidia Quadro GV100 GPU 上进行。我们首先在一个基本周期内进行模拟，采用空间弛豫型初始剖面，直至解随时间的变化很小，由此求得波列。随后将该结果用于初始化牛顿法，使用相同的谱离散，并采用波速近似取自直接数值模拟的共动坐标系导数。然后将所得波列重复 20 次（相位波）或 60 次（触发波），从而在大区域中得到精确平衡态。我们分别在稳态坐标系和共动坐标系中，在大区域内对系统进行模拟，初始扰动为空间随机分布或局域分布（分别见图2和图3）。我们通过寻找最近的精确波列解，确定解 u_* 第一分量中的扰动大小 u_{pert}。为此，我们利用谱插值构造波列的平移族 $u_{\mathrm{wt}}(\cdot + \xi_0)$，然后寻找最小值位置 $\xi_0^* = \mathrm{argmin}_{\xi_0} \int_\xi |u_*(\xi, t) - u_{\mathrm{wt}}(\xi + \xi_0)|^{0.1} d\xi$。寻找最小值位置时使用的指数 0.1 实际上会惩罚失配在整个区域内的分布，使误差集中在误差实际较大的区域。图3所示的扰动，以及用于计算振幅大于 10^{-5} 的区域宽度的扰动，为 $u_*(t, \xi) - u_{\mathrm{wt}}(\xi + \xi_0)$。

参考文献

[1] J. A. Acebrón、L. L. Bonilla、C. J. Pérez Vicente、F. Ritort 和 R. Spigler。Kuramoto模型：同步现象的一个简单范式。现代物理评论，77：137–185，2005年4月。[2] J. Alexander、R. Gardner 和 C. Jones。行波稳定性分析中产生的一个拓扑不变量。*J. Reine Angew. Math.*，410：167–212，1990年。[3] J. Alexopoulos 和 B. de Rijk。FitzHugh-Nagumo系统中周期波列对完全非局域扰动的非线性稳定性。微分方程杂志，457：114013，2026年。[4] I. S. Aranson 和 L. Kramer。复Ginzburg-Landau方程的世界。现代物理评论，74：99–143，2002年2月。[5] D. G. Aronson 和 H. F. Weinberger。群体遗传学中产生的多维非线性扩散。数学进展，30(1)：33–76，1978年。[6] M. Avery、P. Carter 和 B. de Rijk。FitzHugh–Nagumo 系统中推动型图案形成前沿的选择。准备中，2025年。[7] M. Avery、P. Carter、B. de Rijk 和 A. Scheel。反应扩散系统中耦合弛豫振荡的稳定性与不稳定性。准备中。，2025年。[8] M. Avery、P. Carter、B. de Rijk 和 A. Scheel。FitzHugh-Nagumo系统中入侵过程中的相干图案形成稳定性。欧洲数学学会杂志，2025年。[9] M. Avery 和 A. Scheel。拉动型前沿的普适选择。美国数学会通讯，2：172–231，2022年。[10] D. Avitabile、M. Desroches、R. Veltz 和 M. Wechselberger。时空鸭跃与延迟分岔的局部理论。*SIAM*数学分析杂志，52(6)：5703–5747，2020年。[11] N. M. Awal、I. R. Epstein、T. J. Kaper 和 T. Vo。耦合的相同快慢振子中的对称性破缺节律。《混沌》，33(1)：论文编号011102，共14页，2023年。

[12] D. Barkley。简化管流的复杂性。《物理评论E辑》，84：016309，2011年7月。[13] M. Beck、C. K. R. T. Jones、D. Schaeffer 和 M. Wechselberger。一维心脏组织模型中的电波。SIAM应用动力系统杂志，7(4)：1558–1581，2008年。[14] L. Bengel 和 B. de Rijk。空间周期系统中的多重前沿解与脉冲解。arXiv预印本 arXiv:2502.02467，2025年。[15] G. Bordiougov 和 H. Engel。从触发到相位波，再回到触发。《物理学D辑：非线性现象》，215(1)：25–37，2006年。[16] F. Buchholtz、M. Dolnik 和 I. R. Epstein。鸭解附近的扩散诱导不稳定性。《物理化学杂志》，99(41)：15093–15101，1995年。[17] G. A. Carpenter。奇异摄动问题的几何方法及其在神经冲动方程中的应用。《微分方程杂志》，23(3)：335–367，1977年。[18] P. Carter 和 A. R. Champneys。波动鸭解：行波列如何在一族快子系统焦点中增长。《离散与连续动力系统-S》，2022年。[19] P. Carter、B. de Rijk 和 B. Sandstede。FitzHugh–Nagumo系统中具有振荡尾部的行波脉冲的稳定性。《非线性科学杂志》，26(5)：1369–1444，2016年。[20] P. Carter 和 B. Sandstede。具有振荡尾部的快脉冲。《SIAM数学分析杂志》，47(5)：3393–3441，2015年。[21] P. Carter 和 B. Sandstede。剥开FitzHugh-Nagumo系统中的同宿香蕉。《SIAM应用动力系统杂志》，17(1)：236–349，2018年。[22] P. Carter 和 A. Scheel。入侵前沿对FitzHugh-Nagumo方程中波列的选择。《非线性》，31(12)：5536–5572，2018年。[23] K. W. Chang。关于奇异摄动中某个假设的评注。美国数学会会刊，23：41–45，1969年。[24] H. Chiba。对无限维Kuramoto模型分岔结构中Kuramoto猜想的证明。《遍历理论与动力系统》，35(3)：762–834，2015年。[25] Y.-P. Choi、S.-Y. Ha 和 S.-B. Yun。具有有限惯性的Kuramoto振子的完全同步。《物理学D辑》，240(1)：32–44，2011年。[26] S.-N. Chow 和 Y. Yi。斜积流的中心流形与稳定性。《动力系统与微分方程杂志》，6：543–582，1994年。[27] W. A. Coppel。《稳定性理论中的二分性》，数学讲义第629卷。施普林格，柏林-纽约，1978年。[28] S. M. Cox 和 P. C. Matthews。刚性系统的指数时间差分法。《计算物理学杂志》，176(2)：430–455，2002年。[29] M. Cross 和 P. Hohenberg。非平衡态下的图案形成。现代物理评论，65：851，1993年。[30] B. de Rijk。空间周期脉冲图样的谱与稳定性II：临界谱曲线。SIAM数学分析杂志，50(2)：1958–2019，2018年。[31] B. de Rijk、A. Doelman 和 J. Rademacher。空间周期脉冲图样的谱与稳定性：通过Riccati 变换进行Evans函数分解。SIAM数学分析杂志，48(1)：61–121，2016年。

[32] G. Dee 和 J. S. Langer。传播性图案选择。《物理评论快报》，50:383–386，1983年。[33] J. Delgado、N. Li、M. Leda、H. O. González-Ochoa、S. Fraden 和 I. R. Epstein。一维乳液中别洛乌索夫–扎博廷斯基液滴的耦合振荡。《软物质》，7:3155–3167，2011年。[34] B. Deng。FitzHugh–Nagumo方程组中无穷多个行进前向波和后向波的存在性。*SIAM*数学分析杂志，22(6):1631–1650，1991年。[35] *NIST*数学函数数字图书馆。http://dlmf.nist.gov/，2021-03-15发布的1.1.1版。编者：F. W. J. Olver、A. B. Olde Daalhuis、D. W. Lozier、B. I. Schneider、R. F. Boisvert、C. W. Clark、B. R. Miller、B. V. Saunders、H. S. Cohl 和 M. A. McClain。[36] S. Dodson 和 T. J. Lewis。可激发介质中的波反射与一维螺旋波的存在性和稳定性相关。*SIAM*应用动力系统杂志，21(2):1631–1659，2022年。[37] A. Doelman、R. A. Gardner 和 T. J. Kaper。一维 Gray-Scott 模型中奇异图案的稳定性分析：一种匹配渐近展开方法。《物理学*D*辑：非线性现象》，122(1-4):1–36，1998年。[38] A. Doelman、B. Sandstede、A. Scheel 和 G. Schneider。调制波列的动力学。《美国数学学会回忆录》，199(934):viii+105，2009年。[39] F. Dörfler、M. Chertkov 和 F. Bullo。复杂振荡器网络和智能电网中的同步。《美国国家科学院院刊》，110(6):2005–2010，2013年。[40] B. Eckhardt、E. Ott、S. H. Strogatz、D. M. Abrams 和 A. McRobie。千禧桥上的行人同步建模。《物理评论*E*辑》*(3)*，75(2):021110，10，2007年。[41] K.-J. Engel 和 R. Nagel。线性演化方程的单参数半群，《数学研究生教材》第194卷。施普林格出版社，纽约，2000年。S. Brendle、M. Campiti、T. Hahn、G. Metafune、G. Nickel、D. Pallara、C. Perazzoli、A. Rhandi、S. Romanelli 和 R. Schnaubelt 参与撰写。[42] E. G. Eszter。与*FitzHugh-Nagumo*系统相关的周期行波解稳定性的*Evans*函数分析。马萨诸塞大学阿默斯特分校，1999年。[43] J. W. Evans。神经轴突方程：III. 神经冲动的稳定性。《印第安纳大学数学杂志》，22(6):577–593，1972年。[44] N. Fenichel。常微分方程的几何奇异摄动理论。微分方程杂志，31(1):53–98，1979年。[45] R. J. Field 和 R. M. Noyes。化学系统中的振荡。IV. 真实化学反应模型中的极限环行为。《化学物理学杂志》，60(5):1877–1884，1974年03月。[46] G. Flores。FitzHugh-Nagumo系统中慢行波脉冲的稳定性分析。*SIAM*数学分析杂志，22(2):392–399，1991年。[47] T. Gallay 和 A. Scheel。反应扩散系统中振荡的扩散稳定性。《美国数学学会汇刊》，363(5):2571–2598，2011年。[48] R. A. Gardner。周期行波谱的结构。《纯粹与应用数学杂志》*(9)*，72(5):415–439，1993年。[49] R. Goh 和 A. Scheel。增长图案。《非线性》，36(10):R1–R51，2023年。

[50] G. H. Goldsztein、A. N. Nadeau 和 S. H. Strogatz。时钟与节拍器的同步：基于多重时间尺度的摄动分析。《混沌》，31(2):论文编号 023109，16，2021年。[51] J. Guckenheimer 和 C. Kuehn。FitzHugh–Nagumo方程的同宿轨道：完整系统中的分岔。《*SIAM*应用动力系统杂志》，9(1):138–153，2010年。[52] C. Hammond、H. Bergman 和 P. Brown。帕金森病中的病理性同步：网络、模型和治疗方法。《神经科学趋势》，30(7):357–364，2007年7月。[53] S. Hastings。Nagumo方程周期解的存在性。《数学季刊》，25(1):369–378，1974年。[54] S. Hastings。FitzHugh-Nagumo方程组中同宿轨道和周期轨道的存在性。《数学季刊》，27(1):123–134，1976年。[55] S. P. Hastings。FitzHugh–Nagumo系统的单脉冲波与多脉冲波。《*SIAM*应用数学杂志》，42(2):247–260，1982年。[56] M. Holzer、A. Doelman 和 T. J. Kaper。反应–扩散–力学系统中行波脉冲的存在性与稳定性。《非线性科学杂志》，23(1):129–177，2013年。[57] H. Hupkes 和 B. Sandstede。离散FitzHugh–Nagumo系统中脉冲解的稳定性。《美国数学会会刊》，365(1):251–301，2013年。[58] R. Jencks、A. Doelman、T. J. Kaper 和 T. Vo。布鲁塞尔模型系统中奇异亚临界图灵分岔所产生的稳定与不稳定空间周期鸭解。*arXiv* 预印本 *arXiv:2509.04835*，2025年。[59] P. Jiruska、M. de Curtis、J. G. R. Jefferys、C. A. Schevon、S. J. Schiff 和 K. Schindler。癫痫中的同步与去同步：争议与假说。《生理学杂志》，591(4):787–797，2013年。[60] M. A. Johnson、P. Noble、L. M. Rodrigues 和 K. Zumbrun。周期性反应扩散波的非局域调制：非线性稳定性。《数学分析档案》，207(2):693–715，2013年。[61] M. A. Johnson 和 K. Zumbrun。反应扩散方程组空间周期行波解的非线性稳定性。《庞加莱研究所年刊*C*辑：非线性分析》，28(4):471–483，2011年。[62] C. Jones、N. Kopell 和 R. Langer。利用微分形式构造FitzHugh-Nagumo脉冲。载于《反应介质中的模式与动力学》，第101–115页。施普林格，1991年。[63] C. K. Jones。FitzHugh-Nagumo系统行波解的稳定性。《美国数学学会会刊》，286(2):431–469，1984年。[64] T. J. Kaper 和 T. Vo。局部耦合振子中一类新型奇美拉态：小振幅高频异步与大振幅低频同步。《混沌：非线性科学跨学科杂志》，31(12)，2021年。[65] T. Kapitula 和 K. Promislow。非线性波的谱稳定性与动力学稳定性。《应用数学科学丛书》。施普林格纽约，纽约州，2013年。[66] T. Kato。线性算子的摄动理论。《数学经典丛书》。施普林格出版社，柏林，1995年。1980年版重印。[67] C. A. Klausmeier。半干旱植被中的规则与不规则斑图。《科学》，284(5421):1826–1828，1999年。

[68] R. Kollár and A. Scheel. 振荡介质中由非均匀性产生的相干结构。*SIAM*应用动力系统杂志, 6(1):236–262, 2007年.[69] M. Krupa and P. Szmolyan. 将几何奇异摄动理论扩展至非双曲点——二维中的折叠点和鸭点。*SIAM*数学分析杂志, 33(2):286– 314, 2001.[70] Y. Kuramoto. 理论物理数学问题国际研讨会。物理学讲义, 30:420, 1975.[71] J. Li, K. Wang, Q. Wu, and Q. Yu. FitzHugh-Nagumo方程中从异宿环分岔的大周期行波的非线性稳定性，2025年.[72] X.-B. Lin. 用Melnikov方法解决Silnikov问题。爱丁堡皇家学会学报*A*辑：数学, 116(3-4):295–325, 1990.[73] W. Liu and E. Van Vleck. FitzHugh–Nagumo型方程中的转向点与行波。微分方程杂志, 225(2):381–410, 2006.[74] A. Mielke. Ginzburg-Landau方程作为调制方程的作用。载于动力系统手册，第*2*卷，第759–834页。North-Holland，阿姆斯特丹，2002.[75] K. Palmer. 指数二分性与Fredholm算子。美国数学会会刊, 104:149–156, 1988.[76] K. J. Palmer. 指数二分性与横截同宿点。微分方程杂志, 55(2):225–256, 1984年.[77] K. J. Palmer. 几乎周期方程的指数二分性。美国数学会会刊, 101(2):293–298, 1987.[78] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths. 同步。剑桥大学出版社, 12, 2001.[79] M. I. Rabinovich, P. Varona, A. I. Selverston, and H. D. I. Abarbanel. 神经科学中的动力学原理。现代物理评论, 78:1213–1265, 2006年11月.[80] M. Reed and B. Simon. 现代数学物理方法*IV*：算子分析。Academic Press, Inc., 1978.[81] B. Sandstede. 同宿倍周期分岔理论。博士论文，斯图加特大学，1993年.[82] B. Sandstede. 第18章—行波稳定性。载于B. Fiedler编，动力系统手册，动力系统手册第2卷，第983–1055页。爱思唯尔科学出版社，2002.[83] B. Sandstede and A. Scheel. 大空间周期周期行波的稳定性。微分方程杂志, 172(1):134–188, 2001.[84] B. Sandstede and A. Scheel. 振荡介质中的缺陷：迈向分类。*SIAM*应用动力系统杂志, 3:1–68, 2004.[85] B. Sandstede and A. Scheel. 螺旋波：线性与非线性理论。《美国数学学会回忆录》, 285(1413):v+126, 2023年.[86] B. Sandstede, A. Scheel, G. Schneider, and H. Uecker. 反应扩散系统中周期波列的扩散混合。微分方程杂志, 252(5):3541–3574, 2012.

[87] D. H. Sattinger. 非线性抛物型系统中波的稳定性。*Adv. Math.*, 22:312–355, 1976年.[88] G. Schneider. Swift-Hohenberg方程空间周期解的扩散稳定性。*Comm.Math. Phys.*, 178(3):679–702, 1996.[89] C. Soto-Treviño. 奇异摄动系统中周期轨道的几何方法。载于多时间尺度动力系统，第141–202页。施普林格，2001.[90] M. Stich and A. S. Mikhailov. 二维非均匀振荡反应扩散系统中的靶图案。*Phys. D*, 215(1):38–45, 2006.[91] J. J. Tyson and J. P. Keener. 心肌模型中的螺旋波。《物理学*D*辑：非线性现象》, 29(1-2):215–222, 1987.[92] H. van der Ploeg and A. Doelman. 一类奇异摄动反应扩散方程中空间周期脉冲图样的稳定性。*Indiana Univ. Math. J.*, 54(5):1219–1301, 2005.[93] A. van Harten. 调制的调制方程。载于*IUTAM/ISIMM* 流体中非线性波结构与动力学研讨会（汉诺威，*1994*年），非线性动力学进阶系列第7卷，第117–130页。World Sci. Publ.，新泽西州里弗埃奇，1995.[94] P. van Heijster, A. Doelman, and T. J. Kaper. 三组分系统中的脉冲动力学：稳定性与分岔。《物理学*D*辑：非线性现象》, 237(24):3335–3368, 2008.[95] W. van Saarloos. 向不稳定态传播的前沿。*Phys. Rep.*, 386:29–222, 2003.[96] F. Veerman and A. Doelman. 具有慢非线性的Gierer–Meinhardt方程中的脉冲。《*SIAM*应用动力系统杂志》, 12(1):28–60, 2013.[97] T. Vo, A. Doelman, and T. J. Kaper. 图灵鸭。《*SIAM*应用动力系统杂志》, 24(4):2618–2684, 2025年.[98] Z. Zhu and X. Liu. 含空间扩散的奇异摄动捕食者-猎物方程中行波解的存在性。离散与连续动力系统, 44(1):78–115, 2024.