arXiv:2601.05381v1 [math.QA] 8 Jan 2026

从图平面代数嵌入得到 TYPE G_2 量子子群

CALEB KENNEDY HILL

Abstract. 我们给出了两个 G_2 型量子子群的图示表示。为此，我们采用一种扩张张量范畴的方法：将一个由 $\otimes$ 生成的对象的平面代数嵌入该对象基本图的图平面代数中。这样便可运用计算方法揭示那些原本几乎无法推导出的关系。

1. Introduction

量子子群是张量范畴一个广为人知的来源。更准确地说，给定 VOAs 的共形嵌入 $\mathcal{V}(\mathfrak{g},\ k) \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{h},\ 1)$，如 [5], 所示，可得到相应的 étale 代数 A，它属于 Rep($U_q(\mathfrak{g})$)，其中 q 取决于 k.. 随后便可利用该代数考察右 A-模的范畴 Rep($U_q(\mathfrak{g})$)$_A$ 。 A 的交换性进而在 Rep($U_q(\mathfrak{g})$)$_A$上赋予张量积结构，我们可以将这个新范畴作为独立对象来研究。自由函子给出一个嵌入 Rep($U_q(\mathfrak{g})$) $\hookrightarrow$Rep($U_q(\mathfrak{g})$)$_A$，但一般而言它并非满。因此，要描述这个新构造的模范畴，仍需对 Rep($U_q(\mathfrak{g})$)$_A$ 中的新态射作出描述。Edie-Michell 和 Snyder 的近期研究 [6] 运用了这一思路及表示论方法，为对应于共形嵌入族 $\mathcal{V}(\mathfrak{sl}_N,\ N) \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{so}_{N^2-1},\ 1)$ 的模张量范畴给出了图示描述。

另一方面，也可以从一个已知范畴 $\mathcal{C}$ 出发，计算一个嵌入

$$\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{D}$$

到 $\mathcal{D}$ 某个范畴中，在该范畴内可以更容易地通过计算机进行显式计算。对于 $\mathcal{D}$，一种选择是某个图Γ的图平面代数 GPA(Γ)。根据 GPA 嵌入定理 [12], ，一个嵌入

$$\mathcal{C} \hookrightarrow \mathrm{GPA}(\Gamma)$$

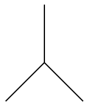
诱导出一个 $\mathcal{C}$的模范畴。这一方法已应用于 [3] 中的 Rep($U_q(\mathfrak{sl}_N)$)，以及 [12]中的扩展 Haagerup 范畴。

本文介绍了这两种技术的结合，其基础是以下两个共形嵌入

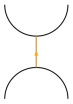
$$\mathcal{V}(\mathfrak{g}_2, 3) \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{e}_6, 1) \quad \text{and} \quad \mathcal{V}(\mathfrak{g}_2, 4) \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{d}_7, 1). \tag{1}$$

我们首先在对象 V_{Λ_1} 在 Rep($U_q(\mathfrak{g}_2)$)$_A$ 中的模融合图所对应的图平面代数上，寻找著名的三价范畴 $\mathcal{G}_2(q)$ of[17, 19] 的一个嵌入。范畴 $\mathcal{G}_2(q)$ 已知是 Rep($U_q(\mathfrak{g}_2)$) 的图示表示。通过自由函子，我们可以将我们的 GPA嵌入视为

$\mathrm{Rep}(U_q(\mathfrak{g}_2))_A$ 中一个由 $\otimes$ 生成的对象的平面代数的 GPA嵌入。用图表示，这给出了一个黑色股和一个三价顶点：



其辫图理论已知。随后，我们在 GPA嵌入中寻找新的态射。根据 [5]，应当存在一个投影，投影到 $\mathrm{Rep}(U_q(\mathfrak{g}_2))_A$ 中类似于 $\mathbb{Z}_k$ 的简单对象上，因此我们在 GPA 中寻找这一投影。我们将这个新态射看作一条带有定向红色竖直股线的 I：



在 $\mathcal{G}_2(q)$ 的情形中，除了一些由基础事实推导出的性质之外，我们对这个新态射一无所知；例如，它是投影到包含于 $\otimes$ 生成对象的张量平方中的一个简单对象上的投影。可是，一旦我们获得了该投影在 GPA 中的像，便可以通过显式计算来探究其性质。我们对上述共形嵌入执行这一扩展 GPA 嵌入的过程

$$\mathcal{V}(\mathfrak{g}_2,3)\subseteq\mathcal{V}(\mathfrak{e}_6,1)\quad\text{and}\quad\mathcal{V}(\mathfrak{g}_2,4)\subseteq\mathcal{V}(\mathfrak{d}_7,1)$$

如上所述。根据 [10]，这些共形嵌入对应于 $\mathrm{Rep}(U_q(\mathfrak{g}_2))$ 中唯一的 étale 代数对象。

现在，我们首先为一种辫图理论引入一些记号；该理论除无定向黑色股线外，还包含一条有定向的红色股线。由无定向黑色股线和有定向红色股线组成的图，将被称为删除所有红色股线后所得图的 **装饰**；这样的图称为**带装饰的**。

定义 1. 对于图 $\mathcal{E}$，记号 $\mathrm{Right}^i(\mathcal{E})$ 表示向右旋转 i次。例如，

$\mathrm{Right}^1\Big($  $\Big) =$  $\quad and \quad \mathrm{Right}^2\Big($ $\Big) =$.

假设图 $\mathcal{E}$ 有 m 个边界点。我们将$\mathrm{Dec}_i(\mathcal{E})$ 定义为 $\mathcal{E}$的第 i个外部单顺时针装饰。例如，

$\mathrm{Dec}_1\Big($  $\Big) =$  , $\quad and \quad \sum_{i=1}^{3} i\,\mathrm{Dec}_i\Big($  $\Big) =$ 

我们采用约定$\mathrm{Dec}_0(\mathcal{E})=\mathcal{E}$。

本文研究的两个范畴都是在三价范畴的基础上扩展而来，并加入了一条红色、有向、类似 $\mathbb{Z}_n$的线。这里我们定义将要研究的范畴类。稍后我们将证明，只要对底层辫图理论作出相对温和的假设，该类中的范畴一般都是可求值的。

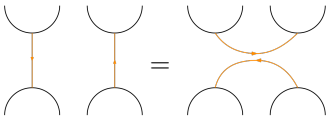
定义 2。设 $\mathcal{C}=\Big\langle$  $\Big\rangle$ 为一个三价范畴。若存在 $\mathcal{D}=\Big\langle$ 、  $\Big\rangle$，满足以下关系，则称 $\mathcal{D}$ 为 $\mathbb{Z}_n$**-型扩张**（或在理解 n 的情况下称为**循环**） $\mathcal{C}$：



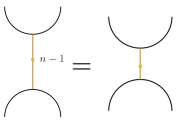
类型 G_2 量子子群，源自图平面代数嵌入 3

如下关系

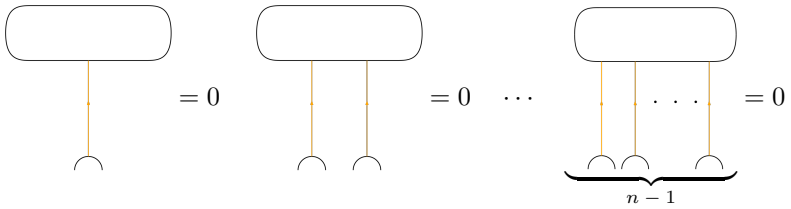
(重新耦合)



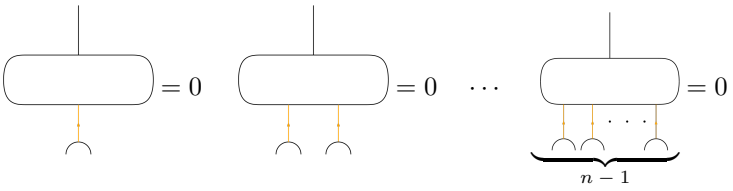
(反向)



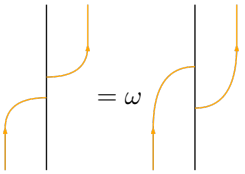
(舒尔 0)



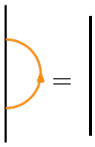
(舒尔 1)



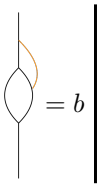
(交换)



(decStick)



(消去二边形)



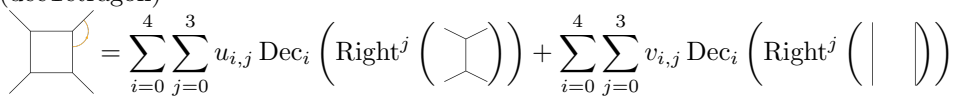
(基变换)

$$= \sum_{i=0}^{n-1} r_i$$

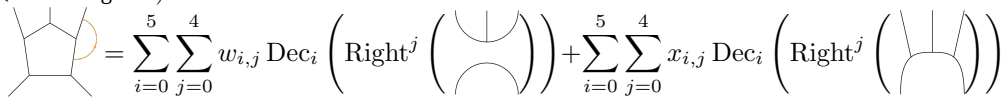
(decTrigon)

$$= \sum_{i=0}^{n-1} t_i$$

(decTetragon)



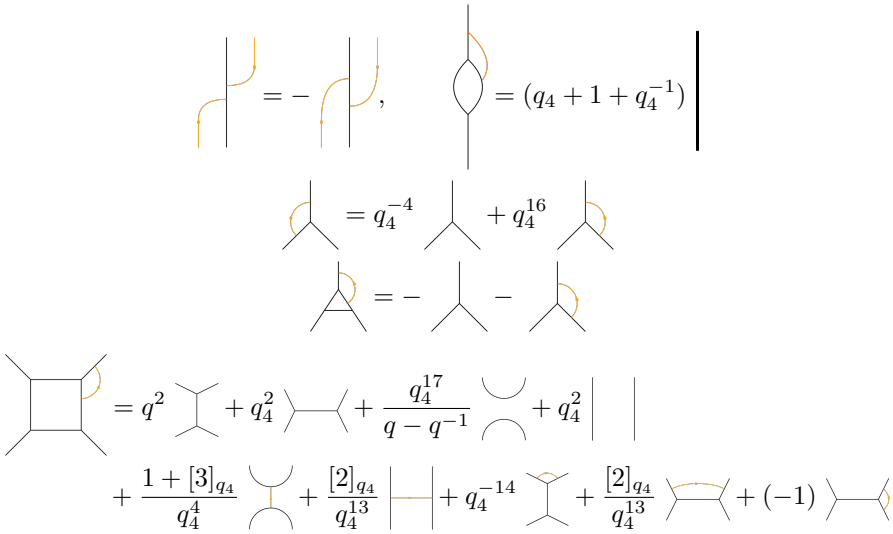
(decPentagon)



对于 $c, \omega, b, r_i, t_i, u_{i,\ j}, v_{i,\ j}, w_{i,\ j}, x_{i,\ j} \in \mathbb{C}$。此外，我们还要求 $i = 0$、.....、$n-1$ 的图张成 $2 \to 1$ 同态空间，并采用如下约定：标记为 i 的有向线表示存在 i条平行的有向线。



定义3。令 $q_4 = e^{\frac{2\pi i}{48}}$，并将 $\mathcal{D}_4$ 定义为 $\mathcal{G}_2(q_4)$ 的循环扩张，其结构常数如下：[1]



我们在此给出的两个主要结果之一是，$\mathcal{D}_4$ 是一个表示范畴的呈示，该范畴对应于 $\mathfrak{g}_2$的4 级共形嵌入所对应的模。

定理1。存在一个等价

$$\mathrm{Ab}(\overline{\mathcal{D}_4}) \cong \overline{\mathrm{Rep}(U_{q_4}(\mathfrak{g}_2))}_{A_4}$$

其中 A_4 是与方程*1*中给出的*4*级共形嵌入相对应的代数对象。

定理 9 是关于 3级的一个类似定理，其中 $\mathcal{D}_3$ 的定义方式与$\mathcal{D}_4$类似，结构常数见随附的 Mathematica 文件。

事先并不清楚，例如，$\mathcal{D}_4$ 的定义关系是否会导出一个非平凡的张量范畴。群的字问题普遍不可判定，这为

[1]为简洁起见，我们在此省略 (decPentagon) 方程。该方程包含 44 个非零加项，可在作者的 GitHub 上找到。

张量范畴的典型表示中的这个问题很难提供了一些证据。也就是说，不应指望一组关系能导出任何非平凡性。我们拥有 $\mathcal{D}_4$ 的非零 GPA嵌入这一事实，正说明了 $\mathcal{D}_4$本身是非平凡的。

本文其余部分的结构如下。第 2 节介绍了大部分所需理论，并引用了本文未详述的内容，包括无向平面代数、无向图平面代数、内部代数与模对象，以及一些其他理论工具和结果。第 3 节接着探讨循环扩张的一些一般性质。我们预计，这类范畴将有助于研究人员构造奇异张量范畴的实例。事实上，在一篇即将发表的论文中，本文作者与 Edie-Michell 将以图示方式展示若干近群范畴，它们是 $SO(3)_q$ 三价范畴的循环扩张。我们证明，在对底层三价 skein 理论作出相对温和的假设时，这类范畴具有可求值性。第 4 节讨论获得 GPA 嵌入的过程。我们详细介绍了获得三价范畴 GPA 嵌入所用的技巧，随后说明如何将这些嵌入扩展到循环扩张。最后，第 5 节证明，我们找到的表示实际上是相应量子子群的呈示。

本文其余部分将引用几本 Mathematica 笔记本。它们可在作者的 GitHub 上找到：

https://github.com/calebkennedyhill/量子子群 G_2.

复现这些验证所需的依赖项和说明见 README.md 文件；有关 3 级的内容见笔记本 /code/level-3/nb-1_setup-1.nb，有关 4 级的内容见笔记本 /code/level-4/nb-1_setup-1.nb。所有方程的形式化验证均已在提交 0cc217e 中完成。

致谢。 作者感谢 Cain Edie-Michell 提出开展本项目的想法，并感谢他在此过程中给予的无数有益交流。新罕布什尔大学在本稿准备期间通过提供多项奖学金和资助给予了经费支持。

2. Preliminaries

本节将定义我们要用到的工具，包括平面代数、图平面代数，以及内部代数和模对象。我们仅给出少数必要结果，并请读者参阅权威文献。关于张量范畴的一般理论，请参见 [7]。

2.1. 代数对象与模对象。 我们最终将证明，$\mathcal{D}_3$ 和 $\mathcal{D}_4$分别是代数对象 A_3 和 A_4 上的模范畴 $\mathrm{Rep}(U_{q_3}(\mathfrak{g}_2))^{A_3}$ 和 $\mathrm{Rep}(U_{q_4}(\mathfrak{g}_2))^{A_4}$ 的呈示；这些代数对象分别来自共形嵌入 $\mathcal{V}(\mathfrak{g}_2,3) \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{e}_6,1)$ 和 $\mathcal{V}(\mathfrak{g}_2,4) \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{d}_7,1)$。本小节回顾代数对象和模对象以及共形嵌入的基本事实。更完整的介绍见 [7, 20] 。适用于我们这一情形的理论见[6]。关于代数对象和模对象与幺半函子之间相互作用的一些基本性质，将用于证明我们的主要定理；相关内容见 [15]。我们在此重述若干定义和事实。除非另有说明，我们假设底层张量范畴都是编织的。

定义 4。设 A 是编织张量范畴 $\mathcal{C}$中的一个代数对象。若 A 是交换且可分的，则称其为 **étale** 代数。若 A 是 *étale* 且$\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1} \to A) = 1$，则称其为**连通的** 。

对于 $\mathcal{C}$ 中的 étale 代数对象 A，我们用 $\mathcal{C}_A$ 表示 $\mathcal{C}$ 内部右 A-模的集合。如 [6]，所述， A 的交换性会在 $\mathcal{C}_A$ 上诱导出张量积。 A 的可分性蕴含 $\mathcal{C}_A$ 的半单性，而 A 的连通性则意味着单位 $\mathbb{1}_{\mathcal{C}_A} = A$ 在 $\mathcal{C}_A$ [5] 中是简单的。

étale 条件恰好是对 A-模进行辫图理论、从而在 $\mathcal{C}_A$ 上定义张量积所需的条件。étale 等价于乘法存在一个截面，这意味着我们可以消去 A-双边形。连通意味着只有一个 A-帽和一个 A-杯。这使我们能够充分调整图形，从而证明 $M \otimes_A N$ 定义良好。

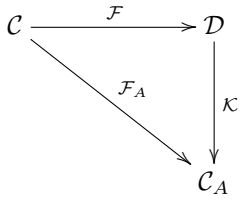
此外，当 $\mathcal{C}$ 是半单的时，自由函子

$$\mathcal{F}_A : \mathcal{C} \xrightarrow{X \mapsto A \otimes X} \mathcal{C}_A$$

是忠实幺半的，而且正如我们稍后将看到的，它并不总是满的。它的右伴随是遗忘函子 $\mathcal{F}^{\vee}$：$\mathcal{C}_A \to \mathcal{C}$，它对对象（$M$，$\mu_M$）的作用是去掉乘法映射 μ_M：$M \otimes A \to M$，对态射的作用则是恒等映射。

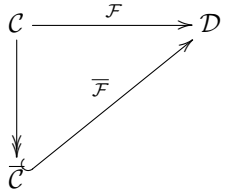
从下面这个引理开始，该引理改编自 [2]，；现在我们回顾一些有助于后续讨论的事实。这些内容包括若干结果，以及共形嵌入的基础知识。

引理 1. 设 $\mathcal{F}$：$\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个幺半函子，且其右伴随R忠实正合。若定义 $A := R(\mathbb{1})$，则存在一个等价 $\mathcal{K}$，使得该图



在自然同构意义下交换。

引理2. 设 $\mathcal{C}$ 具有简单单位对象， $\mathcal{D}$ 是酉的，且 $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个 †-函子。那么 $\mathcal{C}$ 是酉的，并且 F 下降为一个 †-嵌入 $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，使得

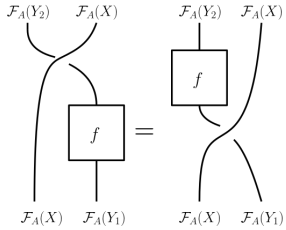


交换。

在得出 GPA 嵌入时，一项极为有用的结果如下，即 [6] 的引理 2.4。由于自由函子 $\mathcal{F}_A$ 给出了嵌入$\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}_A$， $\mathcal{C}$ 中的编织 $c_{X,\,Y}$ 会映射为 $\mathcal{F}_A(c_{X,\,Y})$，从而为 $\mathcal{C}_A$ 的子范畴 $\mathcal{F}_A(\mathcal{C})$定义了编织结构。由于自由函子通常不是满函子，我们无法将此结构扩展为 $\mathcal{C}_A$ 上的编织；不过，对于 $\mathcal{F}_A$ 像中的对象之间的任意态射，都存在半编织。

引理 3 (半编织)。 设 $\mathcal{C}$ 为一个编织张量范畴， A为一个 *étale* 代数对象。对于任意 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(\mathcal{F}_A(Y_1) \to \mathcal{F}_A(Y_2))$，以下关系成立：

（半编织）



注意， f 不一定属于自由函子的像。我们将利用这一结果，得到相当多的线性方程（3级时为 2970 个，4 级时为 7776 个），以约束不属于 $\mathcal{F}_A$ 像的态射的 GPA 坐标。因此，半编织关系将是我们方案的关键，尽管证明可求值性并不需要它。

我们的代数对象源自共形嵌入。关于更完整的论述，请读者参阅 [5] 。对于顶点算子代数 $\mathcal{V}(\mathfrak{g}, j)$，定义 $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, j) := \mathrm{Rep}(\mathcal{V}(\mathfrak{g}, j))$。

仿射李代数和共形嵌入仅用于获得代数对象和模融合图，因此我们简要回顾一下这种对应关系

$$\mathcal{C}(\mathfrak{g}_2, k) \cong \overline{\mathrm{Rep}(U_{q_k}(\mathfrak{g}_2))} \tag{2}$$

其中 k 是层级，而 q_k 由下式给出

$$q_k = e^{\frac{2\pi i}{3(4+k)}}.$$

我们从 [5,附录] 回顾对我们有用的共形嵌入：

$$\mathcal{V}(\mathfrak{g}_2, 3) \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{e}_6, 1) \quad \text{and} \quad \mathcal{V}(\mathfrak{g}_2, 4) \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{d}_7, 1).$$

在3级时，我们有$q_3 = e^{\frac{2\pi i}{42}}$；在4级时，我们有 $q_4 = e^{\frac{2\pi i}{48}}$。我们从 [4]得到 GPA 的代数对象和基本图：

$$A_3 = V_\emptyset \oplus V_{\Lambda_1} \quad \text{and} \quad A_4 = V_\emptyset \oplus V_{3\Lambda_1} \tag{3}$$

分别对应3级和4级。

此外，在3级和4级时，分别存在 $\mathbb{Z}_3$型和$\mathbb{Z}_2$型简单对象 g_3 和 g_4 [5]。从 [4] 可知，在这两个层级上， $k = 3$, 4 我们有

$$\dim \mathrm{Hom}_{\overline{\mathrm{Rep}(U_{q_k}(\mathfrak{g}_2))}_{A_k}}(\mathcal{F}_{A_k}(V_{\Lambda_1})^{\otimes 2} \to g_k) = 1.$$

注释 1. 由此可知存在幂等元

$$P_{g_k} : \mathcal{F}_{A_k}(V_{\Lambda_1})^{\otimes 2} \to \mathcal{F}_{A_k}(V_{\Lambda_1})^{\otimes 2}$$

将其投影到这些类群对象上。由于 g_i 是简单对象，我们有 $P_{g_k}^\dagger = P_{g_k}$。

P_{g_k} 的行为将由 *in* $\mathcal{D}_k$ 捕获。正如我们将看到的，描述 P_{g_k} 与自由函子的像之间的相互作用，就足以完整描述 表示$(U_{q_k}(\mathfrak{g}_2))_{A_k}$。

2.2. **无向平面代数**。回顾 [16]中详述的**刚性**幺半范畴理论。简而言之，刚性幺半范畴具有对偶对象。对偶对象以及与之相关的求值映射和余求值映射，为我们提供了杯和帽。我们还始终假设具有枢轴性，这使我们能够对图进行同痕变形

。我们将用于平面代数的生成元将是对称自对偶的。

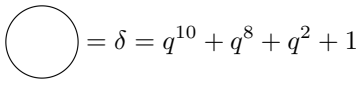
设 X 是张量范畴 $\mathcal{C}$ 的一个（对称自对偶）**张量生成元**；也就是说， $\mathcal{C}$ 的每个对象都同构于某个张量幂 $X^{\otimes n}$ 的子对象。设 $\mathcal{P}_{X;\mathcal{C}}$ 是 $\mathcal{C}$ 的满子范畴，其对象为张量幂 $\mathbb{1} = X^{\otimes 0}$， X， $X^{\otimes 2}$，.....；我们称其为 $\mathcal{C}$ 中由 X 生成的（无向）**平面代数**。若 $\dim \mathrm{End}^{\mathcal{P}_{X;\mathcal{C}}}(\mathbb{1}) = 1$，则平面代数 $\mathcal{P}_{X;\mathcal{C}}$ 是**可求值的**。

我们将按照 Kuperberg [17, 19] 的思路，把我们的两个量子子群表述为 $\mathcal{G}_2(q)$ 辫图理论的扩张。将其按 $\kappa = \sqrt{[7]-1}$ 的因子重新缩放后，我们使用与 [19] 相同的辫图理论（注意 [17] 的五边形关系中存在符号错误）。

定义 5。 对于 q 单位根， $\mathcal{G}_2(q)$ 辫图理论定义为由满足以下关系的无向三价顶点生成的理论

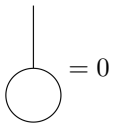


(Loop)



$= \delta = q^{10} + q^8 + q^2 + 1 + q^{-2} + q^{-8} + q^{-10}$

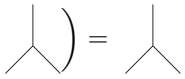
（棒棒糖）



$= 0$

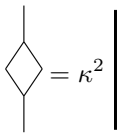
(Rotate)

Right^1



$=$

（双边形）



$= \kappa^2$

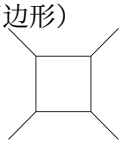
(Trigon)



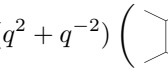
$= -(q^4 + 1 + q^{-4})$



（四边形）



$= (q^2 + q^{-2})$



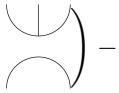
$+ (q^2 + 1 + q^{-2})$



(Pentagon)



$= -\sum_{i=0}^{4} \mathrm{Right}^i$



$- \sum_{i=0}^{4} \mathrm{Right}^i$



我们对平面代数的使用将完全依赖于柯西完备化的构造，下面对此作简要说明。更多细节请参阅 [6] ， [21] 则对该主题作了全面论述。回顾一下，枢轴张量范畴 $\mathcal{C}$ 的**幂等元完备化** 由数对(Z, p)构成，其中 $p \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(Z)$是一个幂等元。我们将 $\mathcal{C}$ 的幂等元完备化记作$\mathrm{Idemp}(\mathcal{C})$。此外，我们定义枢轴 $\mathbb{C}$-线性张量范畴 $\mathcal{C}$ 的**加性包络** ，其对象是 $\mathcal{C}$中对象 Z_j 的形式直和 $\bigoplus_j Z_j$ 。 $\mathcal{C}$ 的**柯西完备化** 定义为

by

$$\mathrm{Ab}(\mathcal{C}) \coloneqq \mathrm{Add}(\mathrm{Idemp}(\mathcal{C})).$$

如果我们再次假设 X 张成 $\mathcal{C}$，则可得 $\mathcal{C} \cong \mathbf{Ab}(\mathcal{P}_{X;\mathcal{C}})$ [21,定理3.4]。因此，$\mathbf{Ab}(\mathcal{P}_{X;\mathcal{C}})$的泛性质意味着，研究$\mathcal{P}_{X;\mathcal{C}}$ 就足以理解 $\mathcal{C}$。

根据 [1, 推论 2.20] 和 [18, 推论 6.7], , 范畴 $\mathcal{G}_2(q)$ 是范畴 $\mathbf{Rep}(U_q(\mathfrak{g}_2))$ 的一个**表示**，即

$$\overline{\mathrm{Rep}(U_q(\mathfrak{g}_2))} \cong \mathrm{Ab}(\overline{\mathcal{G}_2(q)}).$$

2.3. **无向图平面代数**。我们将通过将 G_2 型量子子群的编织理论嵌入适当的图平面代数（GPA）中来研究它们。这样做有两个目的：

- 为计算提供坚实基础，使我们能够通过在 GPA 同态空间中发现关系来揭示这些关系；以及
- 为编织理论赋予幺正性，

GPA 是 Vaughan Jones [14] 的发明。在本文中，我们不需要更一般的 GPA，因此只考虑无向情形。

定义 6。设 $\Gamma = (V, E)$ 为一个有限图。对于一条边 $e = (u, v) \in E$，令$e \coloneqq (v, u) \in E$。图 Γ 上的**图平面代数** 记为 $\mathrm{GPA}(\Gamma)$，它是一个严格带枢轴刚性幺半范畴，其对象为非负整数，同态空间的一组基为

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GPA}(\Gamma)}(m \to n) \coloneqq \mathbb{C}\left\{(p,q) \mid \begin{smallmatrix} p \text{ an } m\text{-path} & s(p) = s(q) \\ q \text{ and } n\text{-path}, & t(p) = t(q) \end{smallmatrix}\right\},$$

其复合律为[2]

$$(p,q) \circ (p',q') \coloneqq \delta_{q=p'}(p,q'),$$

刚性映射为

$$ev = \sum_e \sqrt{\frac{\lambda_{t(e)}}{\lambda_{s(e)}}} \langle e\bar{e}, s(e)\rangle, \quad coev = \sum_e \sqrt{\frac{\lambda_{t(e)}}{\lambda_{s(e)}}} \langle s(e) e\bar{e}\rangle$$

其中 λ 是 Γ的邻接矩阵的 *Frobenius-Perron* 特征向量。对象上的幺半积为加法，而态射上的幺半积定义为

$$(p,q) \otimes (p',q') \coloneqq \delta_{s(p')=t(p)}(pp', qq').$$

3. 循环扩张

本节旨在发展证明三价范畴的一般 $\mathbb{Z}_n$-型扩张具有可求值性所需的工具。我们认为，这类扩张将有助于寻找新颖的范畴。例如，本文作者与 Edie-Michell 正在运用本文的技术构造一类近群范畴的实例，定义见 [8]。这项关于近群范畴的工作扩展了一个底层的 $SO(3)_q$ 三价 skein 理论。本文作者还计算了两个 $SP(4)_q$ 型范畴的扩张；尽管其 skein 理论由编织生成，但其本质相同。

这不禁让人思考，在 [19]的“生命之树”上，哪些枝叶或许能结出更多这类果实。我们已经用类群对象扩展了 [19, 定理 A] 所涵盖的两个范畴（$SO(3)_q$ 和Fib）。本文讨论了

[2]按照约定 $f \circ g \coloneqq f(g)$。

[19, 定理 B]所涵盖的范畴中除一个之外的所有范畴。接下来可能尝试进行此类扩展的范畴包括：

- 定理 B]的剩余范畴 ABA [19,
- 定理 C]的范畴 H_3 [19,

证明辫图理论具有可求值性的一般方法，是为闭合图示确定某种复杂度度量，然后证明已知关系能够严格降低这一度量。对于我们所研究的基础三价范畴，欧拉可求值性使我们能够降低一种复杂度度量：内部面的数量。引入新的股线类型后，我们还有另一种度量：红色股线的数量。我们所研究的基础三价范畴，其求值算法基于标准的欧拉示性数论证。刻画这种可求值性的一种方法，是考察盒空间的维数。

定义 7. 在三价范畴中，我们将由具有内部面的图 $k \to 0$ 张成的空间定义为**盒空间** $B(k, f)$ f 。若是一个三价范畴，使得对于 $k = 1, \ldots, 5$，包含关系

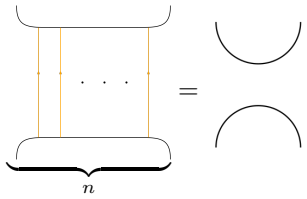
$$B(k, 1) \subseteq B(k, 0)$$

成立时，我们将 $\mathcal{C}$ 称为**欧拉可求值的。**

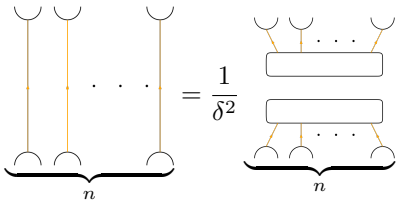
$\mathbb{Z}_n$型扩展中的图具有以下良好性质，这些性质对于证明其可求值性至关重要。基本上，我们使用以下引理，将带装饰的面替换为单外部装饰面。随后， $\mathbb{Z}_n$型扩展的定义关系会消去这些单装饰面。

引理 4。 *(1)*（$\mathbb{Z}_n$）由（重新耦合）和（反向）推出。*(2)*（分裂）由（重新耦合）和（$\mathbb{Z}_n$）推出。

($\mathbb{Z}_n$)



(Split)



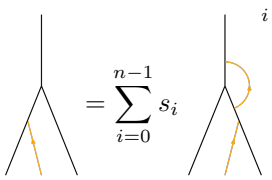
注 2。 前一个引理表明，将定义 *2* 中关系左侧的方向反向后，会得到类似的关系。这一事实将在引理 *6* 的证明中使用。

注 3。 值得注意的是，下面这种标准的语言滥用。以循环扩张为例，这类以图的方式呈现的范畴，其同态空间是图的形式张成。局部应用诸如 *(decTrigon)* 这样的关系时，结果是图的线性组合。不过，通常这个线性组合具有某种理想性质，例如每个加项中的内部面数量更少

在这种情况下，我们更倾向于说“应用 *(decTrigon)* 会减少内部面的数量”，而不是说“应用 *(decTrigon)* 将这个图变成内部面更少的图的线性组合”这种更冗长的话。

引理 5. 在一个类似 $\mathbb{Z}_n$ 的扩张中，存在 n标量 s_i，使得以下关系成立：

(Slide)



证明。 对三价顶点未装饰的下腿应用 (decStick)，生成一条向下定向的红色股线。然后使用 (重新耦合) 和 (基变换)。

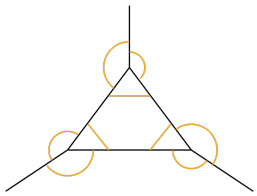
□

我们在以下引理的证明中使用这一事实。

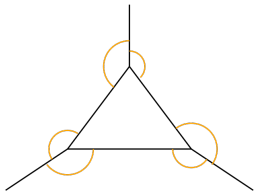
引理 6. 在循环扩张中，任何带有一个内部面的图的装饰都可以表示为单重外部装饰图的 $\mathbb{C}$-线性组合

证明。 我们证明装饰三边形的情形，其余情况留给读者。我们从极大装饰的三边形开始。分析过程中会一并涵盖所有装饰程度较低的情况。此外，根据注 2，我们知道，对于左侧图的两种股线方向，循环扩张的定义关系的类似关系均成立。因此，我们从红色股线无方向的图开始；这可以通过在需要时应用相应版本的关系来实现。基于同样的理由，我们可以省略红色股线的标签 1、.....、$n-1$：多个红色股线也满足类似的关系。

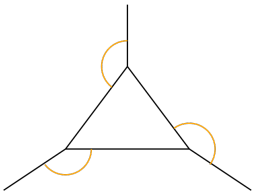
现在，极大装饰的三边形形式如下：



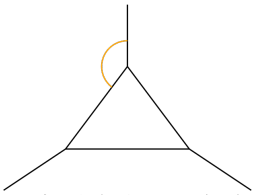
红色弦的方向任意。我们对内部红色弦应用关系式（交换）和（Slide），得到如下形式的图的线性组合



现在应用（基变换），将其化简为如下形式的图的线性组合



再次应用 (Slide) 和（基变换）后，我们得到如下形式的图



在这最后一步中，我们会在黑色“辐条”之间得到红色弦；可以放心地将它们移出图外。□

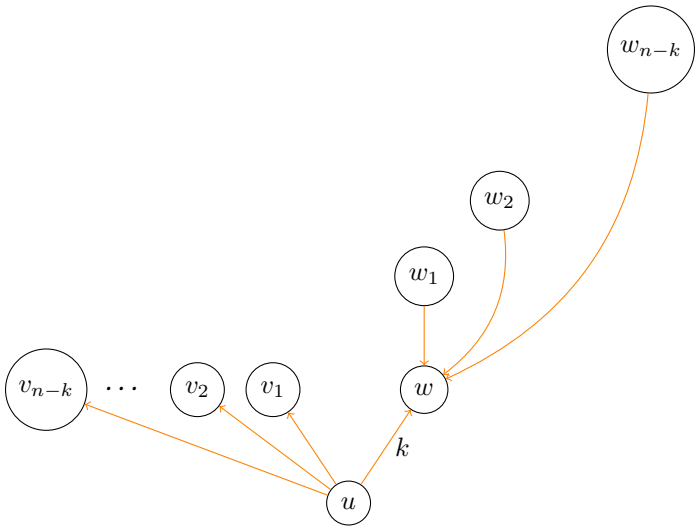
再一个引理就能使我们完成对 $\mathbb{Z}_n$ 类扩张中闭图的求值。

引理 7. 设图 $\mathcal{E}$ 在一个 $\mathbb{Z}_n$ 类扩张中仅由黑色环和其间的红色有向边组成。此外，设 $\mathcal{E}$ 的每个环要么恰有 n 条红色弦进入，要么恰有 n条红色弦离开。则图 $\mathcal{E}$ 的求值为一个标量。

证明。 我们将使用图论语言，其中黑色环充当节点，有向红色边充当有向边。

如果一个节点恰好只有一个邻点，则使用（$\mathbb{Z}_n$）将这两个节点同时移除，以得到一个 δ^2。因此，假设每个节点至少有两个邻点。任选一个节点，并将其称为 u。不失一般性地，假设离开 u的唯一有向边都是出边。将其一个邻点称为 w；由于 u 有多个邻点，因此有 $\deg(u \to w) = k < n$。简要回顾一下， u 实际上是一个环，我们可以从指向 u的出边开始沿逆时针方向遍历它。沿途还会有 $n - k$ 条出向红边；每条边都对应于 u的一个邻点。按照这一逆时针方向，将 u 的其余邻点称为 v_1、……、 v_{n-k}，注意这些邻点不一定互不相同。我们也可以用类似的方式标记 w 的邻点，但从来自 u 的入边开始沿顺时针方向遍历。将这些 w 的邻点称为w_1、……、 w_{n-k}，同样注意它们不一定互不相同。

该图是平面的，因此我们可以对其进行同痕变形，使其在局部看起来如下：



请注意，这里可能省略了一些边。也就是说，$\deg(v_i \to w_j) \neq 0$，或者还可能存在未画出的其他节点。这对我们来说不是问题。

现在应用（重新耦合），将边 $u \to v_i$ 和 $w_j \to w$ 的对与边 $u \to w$ 和 $w_j \to v_i$ 的对互换。这会使 $\deg(u \to w)$ 变为 n，从而允许我们使用（$\mathbb{Z}_n$）将一对节点换成一个标量。继续操作，直到只剩下节点对，再将每一对换成一个 δ^2。□

定理 2. 欧拉可求值三价范畴的一个 $\mathbb{Z}_n$ 类扩张是可求值的。

证明。 假设我们从一个由闭合的、带装饰的平面三价图给出的图开始。首先，对任何未装饰的面应用底层三价范畴求值算法中的关系；这会减少三价顶点的数量。根据标准的欧拉示性数计算，必定还存在某个黑色 m 边形，其带有 $m \in \{0, 1, \ldots, 5\}$。 $m = 0$ 情形将在本证明末尾处理。 $m = 1$ 情形则通过（基变换）和（舒尔 0）处理。选取这样一个面，并应用引理 6，将其化为一个仅带外部装饰的 m 边形。现在，（消去二边形）、（消去三角形）、（消去四边形）或（decPentagon）中的某个关系可以消去该面。每一步都会使图中面（不计红色股线）的数量至少减少 1，但也可能增加任意一个加项中的连通分支数。继续这一过程，直到只剩下装饰环，或由红色股线连接的装饰环。如果只剩下装饰环，则应用（decStick）。

我们的图现在由若干个黑色环组成，并由红色弦连接。使用（重新耦合）和（$\mathbb{Z}_n$），使每个黑色环上连接的股线要么全部是入股线，要么全部是出股线。现在，如果任何黑色环有多于或少于n 条股线进入或离开它，那么（分裂）、（$\mathbb{Z}_n$）和（舒尔 0）意味着整个图为零。因此，假设每个黑色环恰好有 n 条股线进入或离开。应用引理 7，将剩余的图计算为一个标量。□

与所有可求值性论证一样，只要有非平凡性，我们便可立即推出单位对象的简单性。

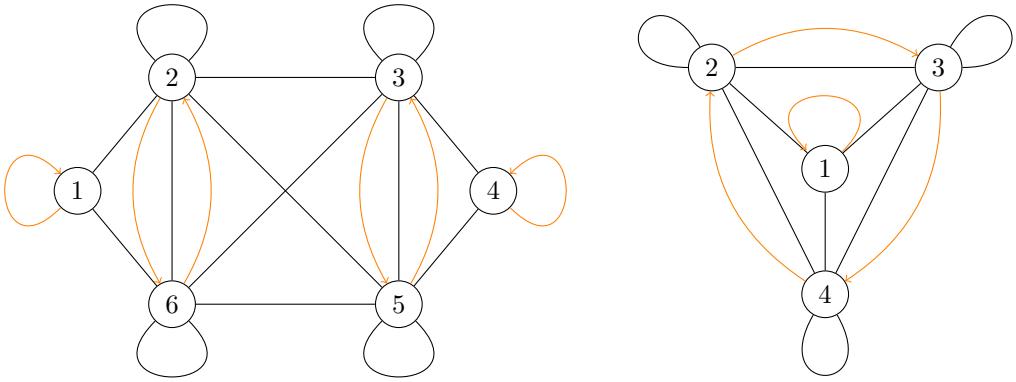


FIGURE 1. 层级 4 和层级 3 的融合图，分别对应 Y_4 和 Y_3 （黑色）以及 g_4 和 g_3 （橙色）。分别参见 [4]中的图 21b 和图 18b。

推论 1. 对于欧拉可求值三价范畴的一个 $\mathbb{Z}_n$ 类扩张 $\mathcal{D}$ ，我们有

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(0 \to 0) \leq 1.$$

4. GPA EMBEDDINGS

本节旨在探讨我们 GPA 嵌入的具体细节，包括用于求解定义方程的技巧，以及这些解所确定的坐标。第 4.2 小节将讨论一些表示论方面的内容，这些内容促使我们最初去寻找类似 $\mathbb{Z}_n$ 的扩张；在这方面，我们只讨论层级 4 的具体细节，而层级 3 的情况本质上相同。

我们通过对 [4] 中图 18b 和图 21b 的图进行轨形化，得到模融合图。这些图见图 1。

给定态射的像，即可定义一个幺半函子 F: $\mathcal{G}_2(q) \to$GPA(Γ)

$$F\left(\right) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{GPA}(\Gamma)}(2 \to 1).$$

这相当于列出一组 $M := tr(\Gamma^2 \cdot \Gamma)$复数[3]，，即 a_1、.....、 a_M。将 $\mathcal{G}_2(q)$的定义关系通过 F传递，我们看到这些复数满足关于 a_i 和 a_i的方程。暂且假设每个 a_i 都是实数，这样便可将方程组化简为关于 a_i的一组多项式。 [4] 一旦得到三价顶点的像，我们便找到了它所生成的平面代数的一个嵌入。接着，我们可以采用类似的方法求出其像

$$F\left(\right) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{GPA}(\Gamma)}(2 \to 2)$$

[3]我们会根据需要灵活地用 Γ 表示图本身或图的邻接矩阵。[4]只有当这一假设有助于我们求解方程组时，它才有用。事实上，我们对这个方程组所作的任何假设，只要能得出解，都是有效的。

以扩展 $\mathcal{G}_2(q)$的GPA嵌入。下面讨论我们的例子。

4.1. 4 级三价嵌入。 我们将从 4 级开始。设 Γ_4 为图 1 左侧的图。令 $q_4 := e^{2\pi i/48}$。下述定理表明，我们有一个从 $\mathcal{G}_2(q_4)$到 Γ_4上的 GPA 的嵌入。该定理的证明极其直接；只需验证一些方程。为什么这一验证足以构成证明，还需要作一些解释，详见定理下方的详细讨论。

定理3。 存在一个忠实幺半函子 F_4： $\mathcal{G}_2(q_4) \hookrightarrow \overline{\mathrm{GPA}}(\Gamma_4)$。

证明。 我们首先构造一个幺半函子 $F_4 : \mathcal{G}_2(q_4) \hookrightarrow$GPA($\Gamma_4$)，然后应用引理2。

Let

$$(p_1, q_1), \ldots, (p_M, q_M)$$

是 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GPA}(\Gamma_4)}(2 \to 1)$ 的定义基[5]；在 4 级时，我们有 $M = 88$。于是必然有

$$F_4\left(\right) = a_1(p_1, q_1) + \cdots + a_M(p_M, q_M)$$

对于某个 a_1，……， $a_M \in \mathbb{C}$。将双边形关系通过 F 映射后，变为方程组

$$\sum_{i=1}^{M} a_i(p_i, q_i) \circ \sum_{j=1}^{M} a_j(q_j, p_j) = k^2 \sum_{e \in E(\Gamma)} (e, e).$$

该方程组关于 a_i 是二次的，因为等式两边最多各涉及两个三价顶点。同样，（Schur 0, 1）关系和（Rotate）关系因此确定了一个线性方程组；（Trigon）、（Tetragon）和（Pentagon）分别给出三次、四次和五次方程。要证明 F_4 是一个幺半函子，就意味着证明由 $G_2(q_4)$ 中的关系所诱导的 a_i 中的方程全部成立。这一点已在 Mathematica 笔记本 /code/level-4/nb-6_verify-g.nb 中得到验证。□

上述证明没有提及得出 F_4 这一定义所使用的过程。我们在此简要说明。更多详情请参见作者的博士论文[13]。

为了解这些方程，通常可以先求解线性子方程组，再将所得线性解代入二次方程。例如，将线性解代入（Bigon）和（Tetragon）方程后，我们可以得到并分离出以下方程：

$$a_8^2 + a_{85}^2 = 4 - \sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6}$$

$$a_{69}^2 + \left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right) a_8^2 = \frac{3 + \sqrt{3} + \sqrt{6}}{\sqrt{2}}$$

$$a_{69}^2 \left(\left(2 + \sqrt{6}\right) a_8^2 + \left(2 + \sqrt{6}\right) a_{85}^2 - 2\sqrt{2 + \sqrt{3}} \right) = 5 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2\sqrt{6}$$

$$2a_{69}^4 + \left(5 + 2\sqrt{6}\right) a_{85}^4 = \left(3 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}\right) a_{85}^2 + 3\sqrt{6} + \sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 7$$

[5]具体采用的排序方式请参见所附的 Mathematica 文件。

除至多三个符号选择外，该方程组的解为

$$a_8 = \sqrt{2+\sqrt{3}-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$
$$a_{69} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}$$
$$a_{85} = \sqrt{2+\sqrt{3}-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

还会出现包含 a_{31}、 a_{55}和 a_{63} 的类似方程。我们重复这一过程，并得到其他数值

$$a_{31} = \sqrt{2+\sqrt{3}-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$
$$a_{55} = \sqrt{1-\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}}$$
$$a_{63} = \sqrt{2+\sqrt{3}-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

这六个数值开启了一连串的方程求解过程。它们与线性解一起，将许多原始高阶方程化简为线性方程。我们求解这些方程，然后重复这一过程，直到不得不面对非线性。遇到的非线性迫使我们提取平方根，最终得到几个16次代数数。例如，

$$a_{10} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sqrt{6-3\sqrt{3}}}+\sqrt{\sqrt{2+\sqrt{3}}-1}\right).$$

除符号外， $F_4\left(\right.$  $\left.\right)$ 的坐标取以下值：

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)}$$
$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}$$
$$\alpha_3 = \sqrt{\frac{3}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-1\right)}$$
$$\alpha_4 = \sqrt{2+\sqrt{3}-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$
$$\alpha_5 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-1\right)}$$
$$\alpha_6 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}$$

$$\alpha_7 = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}}$$
$$\alpha_8 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \sqrt{6 - 3\sqrt{3}}} - \sqrt{\sqrt{2 + \sqrt{3}} - 1}\right)$$
$$\alpha_9 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \sqrt{6 - 3\sqrt{3}}} + \sqrt{\sqrt{2 + \sqrt{3}} - 1}\right).$$

$F_4\left(\right.$  $\left.\right)$ 的这些坐标给出了 F_4的定义。

4.2. 4级扩张。 </style}有了我们对 $\mathcal{G}_2(q_4)$ 的嵌入，也就是 $F_4\left(\right.$  $\left.\right)$ 的坐标，

我们现在知道在哪里可以找到 GPA(Γ_4) 的一个与 $\mathcal{G}_2(q_4)$ 同构的子范畴。实际上，我们依赖于自由函子给出一个嵌入

$$\overline{\mathrm{Rep}(U_{q_4}(\mathfrak{g}_2))} \hookrightarrow \overline{\mathrm{Rep}(U_{q_4}(\mathfrak{g}_2))}_{A_4}$$

它将简单的 $\otimes$-生成元 X_4 映射为简单的 $\otimes$-生成元 $Y_4 := \mathcal{F}_{A_4}(X_4)$。[6]将此与以下事实结合起来：$\mathrm{Rep}(U_{q_4}(\mathfrak{g}_2))^{A_4}$ 包含一个与 $\mathrm{Vec}\,\mathbb{Z}_2$ 等价的子范畴，并且两个类群单对象都是 $\otimes$-生成元 Y_4 的平方的子对象。由此可得，$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(U_{q_4}(\mathfrak{g}_2))^{A_4}}(Y_4^{\otimes 2} \to Y_4^{\otimes 2})$ 包含

一个投影到类似 $\mathbb{Z}_2$ 的简单对象上，并满足与 (重新耦合)、(Schur 0, 1)、(交换) 和 (decStick) 类似的关系。现在，为了将我们的 $\mathcal{G}_2(q_4)$ 副本扩展为类似 $\mathbb{Z}_2$ 的扩张，我们首先寻找 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GPA}(\Gamma_4)}(2 \to 2)$ 中一个满足 (重新耦合)、(Schur 0, 1)、(交换) 和 (decStick) 这些关系的元素；该角色将由 承担。

为此，我们采用与上一小节类似的方法。我们可以将 $\mathcal{G}_2(q_4)$ 识别为 $\mathcal{D}_4$ 的三价子范畴，现在将 F_4 视为从该子范畴出发的函子。要完成 F_4 的定义，我们必须找到其像

$$F_4\left(\right.\text{  }\left.\right) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{GPA}(\Gamma_4)}(2 \to 2)$$

满足 (重新耦合)、(Schur 0, 1)、(交换) 和 (decStick)。我们采用与求解像 $F_4\left(\right.$  $\left.\right)$

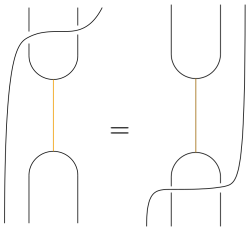
类似的过程。也就是说，我们假设对于某个 $b_1, \ldots, b_N \in \mathbb{C}$，其中 $N := tr(\Gamma_4^2 \cdot \Gamma_4^2)$ 在 4 级 $= 400$，有

$$F_4\left(\right.\text{  }\left.\right) = \sum_{i=1}^{N} b_i(p_i', q_i').$$

我们可以将关系式（舒尔 0）、（舒尔 1）和（decStick）代入 F_4，从而得到关于 b_i 的一组线性方程。此外，根据引理 3，我们还可以得到一个大型线性系统。在当前语境下，该引理表述为

[6]可以使用 $\mathrm{Rep}(U_{q_4}(\mathfrak{g}_2))$ 的 X_4 融合图轻松检验 Y_4 的简单性。

使得我们的投影  满足关系

（半编织） 

其中，无向红色股线表示：当我们为等式左右两边选取相同的方向时，该方程成立。解这些新方程即可得到投影 $F_4\left(\right.$  $\left.\right)$ 的坐标。

定理4. 存在一个元素 $P_4 \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{GPA}(\Gamma_4)}(2 \to 2)$ 满足关系（*Schur 0, 1*）、（*decStick*）和（半编织）

证明。 验证请参见 Mathematica 笔记本 /code/level-4/nb-6_verify-g.nb。□

表 1 和表 2 给出了非零投影坐标的数值近似。非零坐标分别组成长度为 4 和 25 的分块。当考虑注释 1 时，这些大小以及非零实坐标的位置便自然呈现出来。回想一下，各空间的定义基

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GPA}(\Gamma)}(m \to n)$$

是用路径对给出的。我们所使用的（无向）图中，任意两个顶点之间至多有一条边。因此，一条边等价于一对顶点，而一条路径等价于一个有序元组的顶点。例如，路径

$$p = v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow v_3$$

等价于有序三元组（v_1，v_2，v_3）。

GPA 中投影的唯一非零坐标位于那些基向量上

$$(i \to \_ \to j, i \to \_ \to j)$$

其中 $i \to j$ 是 g-融合图的一条有向边。对于 $i = j = 1$，4，有两个可能的取值；将它们配对可得到 4 个路径对。对于 i，$j \neq 1$，4，有五个可能的取值；将它们配对可得到 25 个路径对。表 1 和表 2 的各列给出了投影坐标的值，并按照这些值对的字典序排列。也就是说，标记为 $1 \to \quad \to 1$ 的列显示了有序基上的坐标

$$(1 \to 2 \to 1, 1 \to 2 \to 1)$$
$$(1 \to 2 \to 1, 1 \to 3 \to 1)$$
$$(1 \to 3 \to 1, 1 \to 2 \to 1)$$
$$(1 \to 3 \to 1, 1 \to 3 \to 1)$$

记住这一排列方式，并回想 GPA 的伴随运算会交换路径，共轭对便会出现在预期的位置。

$1 \to \_ \to 1$	$4 \to \_ \to 4$
2.22	2.22
-2.22	-2.22
-2.22	-2.22
2.22	2.22

TABLE 1. 非零投影坐标的大小为 4 的块。

$2 \to \_ \to 6$	$3 \to \_ \to 5$	$5 \to \_ \to 3$	$6 \to \_ \to 2$
0.44949	1	1	0.44949
$0.474073 - 0.474073i$	$0.825482 + 0.564429i$	$0.825482 - 0.564429i$	$0.474073 + 0.474073i$
$-0.123758 - 0.658919i$	$0.123758 + 0.658919i$	$0.123758 - 0.658919i$	$-0.123758 + 0.658919i$
$-0.123758 + 0.658919i$	-0.564429 + 0.825482i	-0.564429 $- 0.825482i$	$-0.123758 - 0.658919i$
$0.474073 + 0.474073i$	$0.931852 - 0.362839i$	$0.931852 + 0.362839i$	$0.474073 - 0.474073i$
$0.474073 + 0.474073i$	$0.825482 - 0.564429i$	$0.825482 + 0.564429i$	$0.474073 - 0.474073i$
1	1	1	1
$0.564429 - 0.825482i$	$0.474073 + 0.474073i$	$0.474073 - 0.474073i$	$0.564429 + 0.825482i$
$-0.825482 + 0.564429i$	i	$-i$	$-0.825482 - 0.564429i$
i	$0.564429 - 0.825482i$	$0.564429 + 0.825482i$	-i
$-0.123758 + 0.658919i$	$0.123758 - 0.658919i$	$0.123758 + 0.658919i$	$-0.123758 - 0.658919i$
$0.564429 + 0.825482i$	$0.474073 - 0.474073i$	$0.474073 + 0.474073i$	$0.564429 - 0.825482i$
1	0.44949	0.44949	1
$-0.931852 - 0.362839i$	$0.474073 + 0.474073i$	$0.474073 - 0.474073i$	$-0.931852 + 0.362839i$
$-0.825482 + 0.564429i$	$-0.123758 - 0.658919i$	$-0.123758 + 0.658919i$	$-0.825482 - 0.564429i$
$-0.123758 - 0.658919i$	-0.564429 $- 0.825482i$	-0.564429 $+ 0.825482i$	$-0.123758 + 0.658919i$
$-0.825482 - 0.564429i$	$-i$	i	$-0.825482 + 0.564429i$
$-0.931852 + 0.362839i$	$0.474073 - 0.474073i$	$0.474073 + 0.474073i$	$-0.931852 - 0.362839i$
1	1	1	1
$0.564429 - 0.825482i$	$-0.825482 - 0.564429i$	$-0.825482 + 0.564429i$	$0.564429 + 0.825482i$
$0.474073 - 0.474073i$	$0.931852 + 0.362839i$	$0.931852 - 0.362839i$	$0.474073 + 0.474073i$
$-i$	$0.564429 + 0.825482i$	$0.564429 - 0.825482i$	i
$-0.825482 - 0.564429i$	$-0.123758 + 0.658919i$	$-0.123758 - 0.658919i$	$-0.825482 + 0.564429i$
$0.564429 + 0.825482i$	$-0.825482 + 0.564429i$	$-0.825482 - 0.564429i$	$0.564429 - 0.825482i$
1	1	1	1

TABLE 2. 投影坐标中大小为 25 的非零块。

4.3. 4 级的新关系。本小节首先给出主要结果，然后介绍我们为得出该结果所采用的技巧。

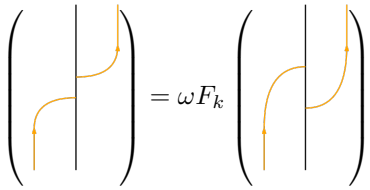
定理5。 元素 $P_4 \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{GPA}(\Gamma_4)}(2 \to 2)$ 满足定义*3*中给出的 $\mathcal{D}_4$ 的定义关系。

我们最初的发现——定理4——并未提及关系（交换）、（基变换）、（decTrigon）、（decTetragon）或（decPentagon）。也就是说，在探索 GPA 嵌入之前，这些关系中的结构常数尚不为人所知。

为了发现这些新关系，我们先假设关系应采取的形式，施加这一形式，并求解结构常数。例如

基于 Y_4 的简单性和 g_4的可逆性，我们可以假设方程具有以下形式

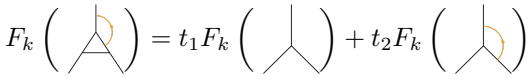
$$F_k\left(\right) = \omega F_k\left(\right)$$



对某个 ω成立。根据（$\mathbb{Z}_n$），ω 必定是 1 的一个 n次方根。掌握了投影的显式 GPA 嵌入后，确定 ω 的值便转化为求解一个含一个变量的线性方程组。

确定（decTrigon）结构常数，同样可归结为求解如下形式的线性方程组

$$F_k\left(\right) = t_1 F_k\left(\right) + t_2 F_k\left(\right)$$



其中 t_1 和 t_2。搜索（decTe- tragon）和（decPentagon）关系时，也适用同样的原理。实际上，要发现例如某个加项的系数
在（decPentagon）关系中为 $q^8 - q^4 + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^2}$，需要运用一些新颖的计算代数数论方法。详情请参阅作者的博士论文 [13]。

由定理 3 和定理 5 可立即得到以下推论。

推论 2. 范畴 $\mathcal{D}_4$ 是 $\mathcal{G}_2(q_4)$的一个非平凡的类 $\mathbb{Z}_2$ 扩张，且半单商$\mathcal{D}_4$ 是酉的。

证明。 由于 $\mathcal{D}_4$ 嵌入 GPA(Γ_4)的一个非零子范畴，因此可知 $\mathcal{D}_4$ 非零。注意到 GPA(Γ_4)的幺正性，并应用引理2，即可推出其半单商的幺正性。□

推论 3. 嵌入 $\mathcal{G}_2(q_4) \hookrightarrow \mathcal{D}_4$ 可下降为一个 †-嵌入 $\mathcal{G}_2(q_4) \hookrightarrow \mathcal{D}_4$。

证明。 再次应用引理2，并将诱导出的函子与以下函子复合

$$\mathcal{D}_4 \twoheadrightarrow \overline{\mathcal{D}_4}$$

到半单商上的函子。 □

稍后，我们将对这个嵌入取 Karoubi 完备化。现在，我们转而讨论如何得到 $\mathcal{D}_4$ 结构常数。

4.4. 第三级三价嵌入。 现在我们讲述一个类似的故事，但层级为 3。不过，这里三价系数采用数值近似，实际数值则收录在随附的 Mathematica 文件中。我们未能找到便于读者理解的 GPA 嵌入坐标或结构常数表示。三价 GPA 嵌入的坐标是 12 或 24 次代数数。更糟的是，关系式（基变换）、（decTrigon）、（decTetragon）和（decPentagon）的结构常数都具有如下形式

$$c_1 + c_2\alpha^2 + c_3 q_3 + c_4\alpha^2 q_3$$

其中 $c_i \in \mathbb{Q}(q_3 + q_3^{-1})$ 是 $\mathbb{Q}(q_3)$ 的最大实子域，而 α 是一个 24 次代数数，它是 $F_3\Bigg($  $\Bigg)$ 的一个坐标。对于关系式（基变换）和（decTrigon），c_i 的幂基坐标是最简形式的有理数，其分子为一位或两位数。对于（decTetragon），c_i 的幂基坐标的分子和分母平均约有 10 位数。在（decPentagon）关系中，这一位数会激增至约 135 位。

令 Γ_3 为图 1 右侧所示的图。设 $q_3 := e^{2\pi i/42}$。以下结果给出了 $\mathcal{G}_2(q_3)$ 的 GPA嵌入。

定理 6. 存在一个忠实幺半函子 $F_3 : \mathcal{G}_2(q_3) \to \mathrm{GPA}(\overline{\Gamma}_3)$。

证明。 与定理3类似。参见 Mathematica 笔记本

`/code/level-4/nb-6_verify-g.nb`

用于验证必要的方程。 □

尽管数值更加复杂，我们仍能从 GPA 坐标中恢复融合图的一些结构。给定一条路径 p，哪些路径 q 能与 p 有效配对，从而构成 GPA 的 $2 \to 1$ Hom 同态空间的基元素？根据定义，q 必须与 p 平行；也就是说，p 和 q 的起点与终点必须分别重合。因此，此类 p 唯一有效的配对是

$$q = v_1 \longrightarrow v_3,$$

它也可以表示为 (v_1, v_3)。因此，唯一包含 p 的 $2 \to 1$ 基元素是

$$\big((v_1, v_2, v_3), (v_1, v_3)\big).$$

但是，定义基元素的平行条件使得纳入 (v_1, v_3) 显得多余；我们不妨直接将该基元素记为

$$(v_1, v_2, v_3).$$

这就是我们表示 $2 \to 1$ GPA 基元素的方式。事实上，在表 3 中，前两列合起来说明了所指定的基元素，第三列则给出三价嵌入在该基元素上的近似坐标。例如，表 3 的第一行告诉我们，(2,2, 2) 基元素的坐标约为 1.08393；第二行告诉我们，(4, 2,3) 基元素的坐标约为 0.619371。

对于 $i,\ j \neq 1$ 形式为 $(i,\ j,\ i)$、$(i,\ i,\ j)$ 或 $(i,\ j,\ j)$ 的路径，需要更加仔细地描述。这里涉及图对称性对顶点 2 和 4 的交换，二者之间存在非平凡的相互作用。当这两个顶点交换时，坐标绝对值为 0.155691 的路径会映射为坐标绝对值为 1.69414 的路径。坐标绝对值为 0.155691 的九条路径如下：

$$(2,3,3),\ (3,3,2),\ (3,2,3),\ (2,4,2),\ (4,3,4),\ (2,2,4),\ (3,4,4),\ (4,2,2),\ (4,4,3)$$

可以利用对称性 $2 \leftrightarrow 4$ 来找出其余坐标。

4.5. **第3级的扩展**。 我们快速给出与定理5和推论2和推论3类似的结果。不过，我们略去定理4的中间版本。

顶点路径	条件	系数
$(i,\ i,\ i)$	$i \neq 1$	1.08393
$(i,\ j,\ k)$	$\{i,j,k\} = \{2,3,4\}$	0.619371
$(i,\ 1,\ k)$	$i,\ \ k \neq 1,\ \ i \neq k$	1.69414
$(i,\ 1,\ i)$	$i \neq 1$	0.861006
$(i,\ i,\ 1)$ 或 $(1,\ i,\ i)$	$i \neq 1$	0.967919

TABLE 3. 第三级三价嵌入系数 数。

$1 \to \_ \to 1$	$2 \to \_ \to 4$	$3 \to \_ \to 2$	$4 \to \_ \to 3$
1.26376	0.791288	0.791288	0.791288
$-0.631881 - 1.09445i$	$0.567622 - 0.684904i$	$0.876955 + 0.149123i$	$0.674406 + 0.580055i$
$-0.631881 + 1.09445i$	$0.674406 + 0.580055i$	$0.567622 - 0.684904i$	$0.876955 + 0.149123i$
$-0.631881 + 1.09445i$	$-0.876955 - 0.149123i$	$-0.674406 - 0.580055i$	$0.567622 - 0.684904i$
1.26376	$0.567622 + 0.684904i$	$0.876955 - 0.149123i$	$0.674406 - 0.580055i$
$-0.631881 - 1.09445i$	1	1	1
$-0.631881 - 1.09445i$	$-0.0182917 + 0.999833i$	$0.5 - 0.866025i$	$0.856735 - 0.515757i$
$-0.631881 + 1.09445i$	$-0.5 - 0.866025i$	$-0.856735 - 0.515757i$	$-0.0182917 - 0.999833i$
1.26376	$0.674406 - 0.580055i$	$0.567622 + 0.684904i$	$0.876955 - 0.149123i$
	$-0.0182917 - 0.999833i$	$0.5 + 0.866025i$	$0.856735 + 0.515757i$
	1	1	1
	$-0.856735 + 0.515757i$	$0.0182917 - 0.999833i$	$0.5 - 0.866025i$
	$-0.876955 + 0.149123i$	$-0.674406 + 0.580055i$	$0.567622 + 0.684904i$
	$-0.5 + 0.866025i$	$-0.856735 + 0.515757i$	$-0.0182917 + 0.999833i$
	$-0.856735 - 0.515757i$	$0.0182917 + 0.999833i$	$0.5 + 0.866025i$
	1	1	1

TABLE 4. 3级投影嵌入系数。

定理7。 存在一个元素 $P_3 \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{GPA}(\Gamma_3)}(2 \to 2)$ 满足 $\mathbb{Z}_3$- 型扩展关系，其结构常数见 *Mathematica* 笔记本`/code/level-3/nb-6_verify-g.nb`。

证明。 同样，通过直接验证所需方程即可证明这一结果。参见 Mathematica 笔记本 / code/level-3/nb-6_verify-g.nb。 □

与 4 级情形类似，定理6和定理7推出 $\mathcal{D}_3$ 的非平凡性和幺正性。

推论4。 范畴 $\mathcal{D}_3$ 是 $\mathcal{G}_2(q_3)$的一个非平凡 $\mathbb{Z}_3$-型扩张，而其半单商 $\mathcal{D}_3$ 是酉的。

推论5。 嵌入 $\mathcal{G}_2(q_3) \hookrightarrow \mathcal{D}_3$ 下降为一个 †-嵌入 $\mathcal{G}_2(q_3) \hookrightarrow \mathcal{D}_3$。

5. Equivalences

在本节中，我们证明范畴 $\mathcal{D}_3$ 和 $\mathcal{D}_4$ 确实分别是 $\mathcal{G}_2(q_3)$ 和 $\mathcal{G}_2(q_4)$ 的量子子群的呈示。需要注意的是，根据 [11]，我们知道 $\mathrm{Rep}(U_{q_3}(\mathfrak{g}_2))$ 和 $\mathrm{Rep}(U_{q_4}(\mathfrak{g}_2))$ 中唯一的非平凡 étale 代数分别是 A_3 和 A_4。

我们首先陈述并证明 4 级上的定理。

定理 8. 存在一个幺半等价

$$\mathrm{Ab}(\overline{\mathcal{D}_4}) \cong \overline{\mathrm{Rep}(U_{q_4}(\mathfrak{g}_2))}_{A_4}.$$

我们首先注意到，$\mathrm{Ab}(\overline{\mathcal{D}_4})$ 是某个 étale 代数的模范畴。

命题 1. 存在一个 *étale* 代数 B_4 使得

$$\mathrm{Ab}(\overline{\mathcal{D}_4}) \cong \overline{\mathrm{Rep}(U_{q_4}(\mathfrak{g}_2))}_{B_4}.$$

证明。回顾推论 3 中的 $\dagger$-嵌入 $\overline{\mathcal{G}_2(q_4)} \hookrightarrow \overline{\mathcal{D}_4}$。接下来，我们对其进行 Karoubi 完备化，从而得到一个函子

$$\mathrm{Ab}(\overline{\mathcal{G}_2(q_4)}) \hookrightarrow \mathrm{Ab}(\overline{\mathcal{D}_4})$$

它是忠实正合的。由引理 1 可得

$$\mathrm{Ab}(\overline{\mathcal{D}_4}) \cong \mathrm{Ab}(\overline{\mathcal{G}_2(q_4)})_{B_4}$$

对某个 étale 代数对象 B_4 成立。但众所周知，[17]

$$\mathrm{Ab}(\overline{\mathcal{G}_2(q_4)}) \cong \overline{\mathrm{Rep}(U_{q_4}(\mathfrak{g}_2))}.$$

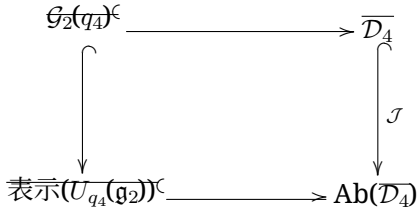
□

现在我们可以证明定理 8 了。

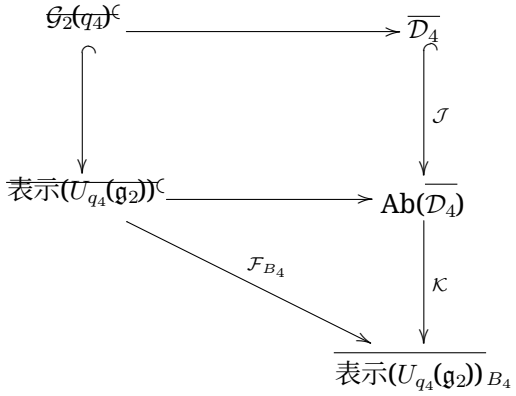
定理 *8* 的证明。如前所述，B_4 仅有的候选项是 A_4 和 $\mathbb{1}$。因此，只需证明

$$\mathrm{Ab}(\overline{\mathcal{D}_4}) \ncong \overline{\mathrm{Rep}(U_{q_4}(\mathfrak{g}_2))} \cong \overline{\mathrm{Rep}(U_{q_4}(\mathfrak{g}_2))}_{\mathbb{1}}.$$

我们在上文提到其存在的诱导函子 $\mathrm{Ab}(\overline{\mathcal{G}_2(q_4)}) \hookrightarrow \mathrm{Ab}(\mathcal{D}_4)$，定义为使下图交换：



由引理 1，存在一个等价 $\mathcal{K}$，使得该图在同构意义下



可交换。

现在沿着图中最左侧的路径追踪对象 $1_{\mathcal{G}_2(q_4)}$，我们得到

$$1_{\overline{\mathcal{G}_2(q_4)}} \mapsto V_{\Lambda_1} \mapsto B_4 \otimes V_{\Lambda_1}.$$

如果 $B_4 \cong \mathbb{1}$ 成立，那么我们将得到

$$\dim \mathrm{Hom}_{\overline{\mathrm{Rep}(U_{q_4}(\mathfrak{g}_2))}_{B_4}}((B_4 \otimes V_{\Lambda_1})^{\otimes 2} \to B_4 \otimes V_{\Lambda_1}) = 1.$$

现在沿着右上方最右侧的路径追踪对象 1，以说明情况并非如此。沿着这第二条路径，我们得到

$$1_{\overline{\mathcal{G}_2(q_4)}} \mapsto 1_{\overline{\mathcal{D}_4}} \mapsto \mathcal{J}(1_{\overline{\mathcal{D}_4}}) \mapsto \mathcal{K} \circ \mathcal{J}(1_{\overline{\mathcal{D}_4}}).$$

令 $\mathcal{C}_4 := \overline{\text{表示}(U_{q_4}(\mathfrak{g}_2))}$。现在注意到

$$\begin{aligned}
\dim \mathrm{Hom}_{(\mathcal{C}_4)_{B_4}}((B_4 \otimes V_{\Lambda_1})^{\otimes 2} \to B_4 \otimes V_{\Lambda_1}) &= \dim \mathrm{Hom}_{(\mathcal{C}_4)_{B_4}}((\mathcal{K} \circ \mathcal{J}(1_{\overline{\mathcal{D}_4}}))^{\otimes 2} \to \mathcal{K} \circ \mathcal{J}(1_{\overline{\mathcal{D}_4}})) \\
&= \dim \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}(\overline{\mathcal{D}_4})}((\mathcal{J}(1_{\overline{\mathcal{D}_4}}))^{\otimes 2} \to \mathcal{J}(1_{\overline{\mathcal{D}_4}})) \\
&= \dim \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{D}_4}}((1_{\overline{\mathcal{D}_4}})^{\otimes 2} \to 1_{\overline{\mathcal{D}_4}}) \\
&= \dim \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{D}_4}}(2_{\overline{\mathcal{D}_4}} \to 1_{\overline{\mathcal{D}_4}}) \\
&= 2.
\end{aligned}$$

由于 $B_4 \ncong \mathbb{1}$，我们必有 $B_4 \cong A_4$；定理得证。 □

范畴 $\mathcal{D}_3$ 的结构常数类似于 $\mathbb{Z}_3$，其数值见 Mathematicanotebook/code/level-3/nb-6_verify-g.nb；它在 3级上也满足一个类似的定理。

定理 9。存在一个幺半等价

$$\mathrm{Ab}(\overline{\mathcal{D}_3}) \cong \overline{\mathrm{Rep}(U_{q_3}(\mathfrak{g}_2))}_{A_3}.$$

定理 9 的证明与上文给出的论证类似。

References

[1] Elijah Bodish 和 Haihan Wu。 G_2的三重夹公式。2023。arXiv: 2112.01007 [math.RT]。 URL: https://arxiv.org/abs/2112.01007。[2] Alain Brugui`ères 和 Sonia Natale。张量范畴的正合列。2010。arXiv: 1006.0569 [math.QA]。 URL: https://arxiv.org/abs/1006.0569。[3] Daniel Copeland 和 Cain Edie-Michell。表$U_q(\mathfrak{sl}_N)$模范畴的胞腔系统。2023。arXiv: 2301.13172 [math.QA]。[4] R. Coquereaux、R. Rais 和 E. H. Tahri。《秩二李代数 B_2 和 G_2 的例外量子子群》。发表于: 《数学物理学杂志》51.9（2010 年 9 月）。 ISSN: 1089-7658。 DOI: 10.1063/1.3476319。 URL: http://dx.doi.org/10.1063/1.3476319。[5] Alexei Davydov 等。非退化编织融合范畴的 Witt 群。2011。arXiv: 1009.2117 [math.QA]。 URL: https://arxiv.org/abs/1009.2117。[6] Cain Edie-Michell、Noah Snyder 和 Hans Wenzl。共形嵌入的插值范畴。2024。[7] Pavel Etingof 等。《张量范畴》。英文。数学调查与专著。罗得岛州普罗维登斯: 美国数学学会，2015 年 8 月。[8] David E. Evans 和 Terry Gannon。近群融合范畴及其双范畴。2012。arXiv: 1208.1500 [math.QA]。 URL: https://arxiv.org/abs/1208.1500。[9] M. Finkelberg。《融合范畴的等价》。发表于: 《几何与泛函分析》6.2（1996），第 249–267 页。 URL: http://eudml.org/doc/58226。[10] Terry Gannon。奇异量子子群与仿射李代数顶点算子代数的扩张——第一部分。2025。arXiv: 2301.07287 [math.QA]。 URL: https://arxiv.org/abs/2301.07287。[11] Terry Gannon。奇异量子子群与仿射李代数顶点算子代数的扩张——第二部分。正在准备中。[12] Pinhas Grossman 等。扩展 Haagerup 融合范畴。2018。arXiv: 1810.06076 [math.QA]。 URL: https://arxiv.org/abs/1810.06076。[13] Caleb Hill。《张量范畴中的计算方法》。博士论文。新罕布什尔大学，进行中。[14] Vaughan Jones。《二分图的平面代数》。发表于: 《希腊结 '98》24（2000 年 7 月）。 DOI: 10.1142/9789812792679_0008。[15] Yigal Kamel。强幺半函子与模。2023。 URL: https://yigalkamel.web.illinois.edu/StrongFuncModules_Mar23.pdf。[16] David Kazhdan 和 Hans Wenzl。《重构幺半范畴》。发表于: （1993）。 URL: https://api.semanticscholar.org/CorpusID:125218067。[17] Greg Kuperberg。《秩二李代数的蜘蛛图》。发表于: 《数学物理通讯》180.1（1996 年 9 月），第 109–151 页。 ISSN: 1432-0916。 DOI: 10.1007/bf02101184。 URL: http://dx.doi.org/10.1007/BF02101184。[18] Lilit Martirosyan 和 Hans Wenzl。G_2型张量范畴的重构。2025。arXiv: 2510.09922 [math.QA]。 URL: https://arxiv.org/abs/2510.09922。[19] Scott Morrison、Emily Peters 和 Noah Snyder。由三价顶点生成的范畴。2016。arXiv: 1501.06869 [math.QA]。

[20] Viktor Ostrik。模范畴、弱霍普夫代数与模不变量。2001。arXiv: math / 0111139 [math.QA]。 URL: https : / / arxiv . org / abs / math/0111139.[21] Imre Tuba 和 Hans Wenzl。关于 *BCD* 型编织张量范畴。2020。arXiv: math/ 0301142 [math.QA]。 URL: https: / / arxiv. org / abs /math / 0301142。

Caleb Kennedy Hill, University of New Hampshire, Durham, New Hampshire
Email address: caleb.hill@unh.edu