arXiv:2601.05382v1 [math.DS] 8 Jan 2026

向量场的方差——定义与性质

JACKY CRESSON

Université de Pau et des Pays de l'Adour - E2S，数学及其应用实验室，*UMR CNRS 5142*，*IPRA* 大楼，大学大道，*64000 Pau*，法国

JORDY PALAFOX

CY Tech，*CY Cergy Paris Université*，*2 Bd Lucien*，*64000 Pau*，法国

摘要。本文对 Jean Ecalle 和 Bruno Vallet 在 [8]中提出的向量场方差概念作了完整介绍，该概念源自 Jean Ecalle 和 Dana Schlomiuk 在 [7]中的先前研究。我们对这些文章中陈述的各种结果给出了完整证明和定义。遵循 J. Ecalle 和 D. Schlomiuk 的思路，我们通过完整证明定义共振向量场幂零部分的模的公式，展示方差的价值。

目录

1. 引言 2 2. 向量场与无穷小自同构 3 3. 普适虫积与模的作用 4 4. 普适虫积的方差 6 5. 与方差相关的导子 9 6. 方差与共振向量场的幂零部分 12 6.1. 共振向量场的幂零部分 12 6.2. 模 $Nil^\bullet$ 15 的显式计算 7. 结论与展望 19 参考文献 20

电子邮件地址：jacky.cresson@univ-pau.fr、jordy.palafox@cyu.fr。1

1. 引言

在 [7], 中，J. Ecalle 和 D. Schlomiuk 研究了附属于给定局部向量场（或微分同胚）的经典对象如何受到无穷小自同构作用的影响。尽管这种方法在获取向量场幂零部分的信息方面发挥着根本作用，但这一概念甚至没有被命名。J. Ecalle 和 B. Vallet 在 [8] 中将这种方法完全形式化，并引入了向量场（或微分同胚）的 方差 概念。方差概念背后的主要思想是：“模的几何意义越直观，其‘方差’往往就越简单”（[8], 第270页）。尽管这一概念十分重要，但文献（[8], 第269页）中给出的定义是通过公式表述的（见 [8], （3.28）—（3.30）），而论文并未对这些公式作出完整证明。然而，这些公式对于证明向量场修正项及其修正形式的解析性至关重要（见 [8], 第258页问题2及第271页注释1），而这正是 [8] 的主要结果。特别是，关于修正项方差所得的公式，主要用于证明：通过纯代数方式消去“虚幻分母”，便可避免 Eliasson 的小分母补偿现象（见 [8], 第257页注释2）。

本文对向量场方差这一概念作了完整介绍，并对主要公式给出完整证明。所有计算均在模形式主义 框架下进行，该形式主义由 J. Ecalle 在 [6] 中引入（另见 [3]）。作为方差的应用，我们对定义向量场幂零部分的模所满足的模方程给出完整证明，并进行显式计算。

本文的结构安排如下：第 2 节回顾预备形式的向量场、与给定向量场相关的字母表以及无穷小自同构的概念。第 3 节回顾模的定义及其普适性，并介绍普适模的作用这一概念。第 4 节定义向量场的方差以及相关的模方差概念，并给出模方差公式的完整证明。第 5 节定义一族与方差相关的模上的导子，并证明经典导子 ∇与这族导子之间的联系。第 6 节展示如何应用向量场的方差，计算与共振向量场的幂零部分相关的模。第 7 节展望了本研究的后续方向。

2. 向量场与无穷小自同构

我们考虑一个预备形式的向量场 X of $\mathbb{C}^d$，即在一个坐标系中，使得

$$X = X_{lin} + \sum_{n \in A(X)} B_n, \tag{1}$$

其中线性部分假设为对角形式，具体为

$$X_{lin} = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{2}$$

其中 $\lambda_i \in \mathbb{C}$ for $i = 1,\ldots,d$，字母表 $(X) \subset \mathbb{Z}^d$, $n = (n_1, \ldots, n_d)$ 满足：除一个可以等于 -1 的项外，所有 $n_i \in \mathbb{N}$，且 B_n 是一个齐次的一阶、$\mid n \mid = n_1 + \cdots + n_d$次算子，即对所有单项式 x^m, $m \in \mathbb{N}^d$，都满足等式

$$B_n(x^m) = \beta_{n,m} x^{n+m}, \tag{3}$$

其中 $\beta_{n,m} \in \mathbb{C}$。

我们用 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in \mathbb{C}^d$ 表示；对所有 $n \in Z^d$，用 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 $\mathbb{C}^d$ 上通常的数量积。

当且仅当字母 $n \in A(X)$ 满足以下条件时，称其为共振的

$$\langle n, \lambda \rangle = 0. \tag{4}$$

设 θ 为一个向量场。我们用 $\Theta = \exp(\theta)$ 表示对所有向量场 Y 定义的指数映射：

$$\exp(\theta)(Y) = \sum_{r \geq 0} \frac{1}{r!} ad_\theta^r(Y), \tag{5}$$

其中 ad_θ 对所有 Y 均有定义：

$$ad_\theta(Y) = [Y, \theta]. \tag{6}$$

我们有 $\Theta^{-1} = \exp(-\theta)$。

若 Y 属于 ad_θ 的核，即 $[Y, \theta] = 0$，则

$$\exp(\theta)(Y) = Y. \tag{7}$$

特别地，若向量场 Y 满足共振的 关于 X_{lin}，则

$$[Y, X_{lin}] = 0. \tag{8}$$

如果 θ 是共振向量场，那么我们有 $\exp(\theta)(X_{lin}) = X_{lin}$。

令 B_c 为任意一个次数为 c的齐次向量场。我们用 $U_{\epsilon,\ c}$ 表示由 $\mathbb{C}[[x]]$ 定义的无穷小自同构，其定义如下：

$$U_{\epsilon,C} = \exp(\epsilon B_c), \tag{9}$$

其中指数函数定义为:

$$\exp(\epsilon B_c) = \sum_{r\geq 0} \frac{1}{r!}\epsilon^r B_c^r, \tag{10}$$

与微分算子 B_c 的 r 次复合。

我们用 X_ϵ 表示向量场

$$X_\epsilon = U_{\epsilon,c} X\, U_{\epsilon,c}^{-1}. \tag{11}$$

我们用 $\Psi_\epsilon : g \to g$ 表示映射

$$\Psi_\epsilon(X) = U_{\epsilon,c} X\, U_{\epsilon,c}^{-1}. \tag{12}$$

3. 普适虫积与模的作用

模的概念由 J. Ecalle 在其开创性的讲义《Les fonctions résurgentes》 [6]中提出。具体而言，模被用于研究 [5] 中的局部向量场或微分同胚，以及后续的相关研究。在 [3]中可以找到对这一形式体系的完整介绍，其中 J. Ecalle 的序言阐述了模的总体地位及其主要应用。

给定字母表 A 上的模，可形式化地定义为一个函数，记作 $M^\bullet$，它从 A^* 映射到 $\mathbb{C}$，其中 A^* 表示由 A构成的词集，包括记作 $\emptyset$的空词。我们用 $\mathscr{M}(A)$表示 A上的模集。集合 $\mathscr{M}(A)$具有自然的线性空间结构。两个模 $M^\bullet$、$N^\bullet$在 $\mathscr{M}(A)$中的模乘法记作 $P^\bullet = M^\bullet \times N^\bullet$，对所有$\mathbf{n} \in A^*$定义如下:

$$P^{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{n}=\mathbf{ab}} M^{\mathbf{a}} N^{\mathbf{b}}. \tag{13}$$

模的集合（$\mathscr{M}(A)$ $+$， $\times$）于是构成了一个在 $\mathbb{C}$ 上的结合代数。

在我们对向量场的应用中， $A \subset \mathbb{Z}^d$ 以及我们所考虑的所有模，都可以看作从 $\mathbb{Z}^d$ 到 $\mathbb{C}$ 的映射，规定对所有$\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d \setminus A$均有 $M^{\mathbf{n}} = 0$ 。

向量场方差的定义从根本上利用了某些模是普适的这一点。这个概念在（[3],第374–375页）中作了形式化讨论。若存在一族复函数 F_r : $\mathbb{C}^r \to \mathbb{C}$ 以及一个映射 $\omega : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}$，使得对于所有$\mathbf{n} \in A^*$，$\mathbf{n} = n_1 \dots n_r$，都有.....则称模 $M^\bullet \in \mathscr{M}(A)$， $A \subset \mathbb{Z}^d$是普适的 。

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{n}) = (\omega(n_1), \dots, \omega(n_r)), \tag{14}$$

and

$$M^{\mathbf{n}} = F_r(\boldsymbol{\omega}(\mathbf{n})). \tag{15}$$

例如，预备形式下向量场的线性化 *mould* （见 [3],第375页）记作 $Na^{\bullet}$ ，它与以下复值函数族$\mathbf{La} = (La_r)_{r\geq 1}$, $r \in \mathbb{N}$ 相关；这些函数对所有 $r \geq 1$ 都有定义，且满足$La_r : \mathbb{C}^r \to \mathbb{C}$,

$$La_r(x_1, \ldots, x_r) = \frac{1}{(x_1 + \cdots + x_r)(x_1 + \cdots + x_{r-1}) \ldots x_1}, \tag{16}$$

对所有 $x = (x_1, \ldots\ldots, x_r) \in \mathbb{C}^r \setminus Sa_r$，其中

$$Sa_r = \{x_1 = 0\} \cup \{x_1 + x_2 = 0\} \cup \ldots \{x_1 + \cdots + x_r = 0\}. \tag{17}$$

对于一个非共振字母表 A ，即对于所有 $\mathbf{n} \in A^*$，都有 $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{n}) = \langle \mathbf{n}\ \lambda \rangle \neq 0$，对于长度为 r 的词 $\mathbf{n} \in A^*$ ，有

$$Na^{\mathbf{n}} = La_r(\boldsymbol{\omega}(\mathbf{n})). \tag{18}$$

普适虫积即使字母表不同，也能保持其形式。事实上，设 $M^{\bullet} \in \mathscr{M}(A)$ 是一个满足普适性的模。那么，模 $M^{\bullet}$ 对任意字母表 $\tilde{A} \subset \mathbb{Z}^d$ 都有意义。˜对于任意长度为 r 的词 $\mathbf{w} \in A^*$ ，有

$$M^{\mathbf{w}} = F_r(\boldsymbol{\omega}(\mathbf{w})), \tag{19}$$

这是定义良好的。

这一性质可通过引入由模诱导的作用这一概念来利用。

设 $M^{\bullet}$ 是满足普适性的模。对于任意字母表$A \subset \mathbb{Z}^d$，定义在 A 上的 $M^{\bullet}$ 的生成函数为

$$\Psi_{M^{\bullet}}(A) := \sum_{\mathbf{n} \in A^*} M^{\mathbf{n}} \mathbf{n}. \tag{20}$$

由于满足普适性的模 $M^{\bullet}$ 的生成函数对任意字母表 $A \subset \mathbb{Z}^d$都有定义，因此我们可以如下定义$M^{\bullet}$ 对任意向量场 X 的作用（见 [8], 第260页）。

定义 1（模对向量场的作用）。 设 X 是生成字母表 A（X）和微分算子族$\{B_n\}_{n \in A(X)}$的向量场。 $M^{\bullet}$ 对 X 的作用记作 $Act^{M^{\bullet}}$（X），它是微分算子

$$Act^{M^{\bullet}}(X) := \sum_{\mathbf{n} \in A(X)^*} M^{\mathbf{n}} B_{\mathbf{n}}, \tag{21}$$

其中，对于给定的词$\mathbf{n} \in A^*$，$\mathbf{n} = n_1 \ldots n_r$，有

$$B_{\mathbf{n}} = B_{n_r} \ldots B_{n_1}, \tag{22}$$

其中，乘积应理解为微分算子的复合。

根据模所满足的对称性（参见 [3], 第 346-350 页）， X 在 $M^\bullet$ 作用下的像具有不同的性质。

下文中，我们考虑模 $M^\bullet$，它们是交替的（见 [3], 4.1，第331页），即满足 $M^\emptyset = 0$，并且对于所有$\mathbf{a}$、$\mathbf{b} \in A^* \setminus \{\emptyset\}$，都有

$$\sum_{\mathbf{n} \in sh(\mathbf{a},\mathbf{b})} M^{\mathbf{n}} = 0, \tag{23}$$

其中， sh(**a**、**b**)称为洗牌：它是**a** 和**b** 的“序列**n** 的集合，这些序列可通过交错排列序列**a** 和**b** 得到，同时保持它们各自的内部顺序”（见 [8],第261页）。

如果模 $M^\bullet$ 满足普适性且是交替的，那么$Act^{M^\bullet}$ 会将一个向量场变换为一个向量场。

4. 普适模的方差

我们可以如下定义普适交替模的方差 $M^\bullet$：

定义 2（向量场的方差）。 令 $A_\epsilon(X)$ 表示由 X_ϵ生成的字母表。 $M^\bullet$ 对 X_ϵ 的作用可写为

$$X_{M,A_\epsilon} := Act^{M^\bullet}(X_\epsilon) = X_{M,A} + \epsilon \mathrm{Var_C(X_{M,A})} + \mathrm{o}(\epsilon^2), \tag{24}$$

其中，定义的向量场 $\mathrm{Var_c(X_{M,A})}$称为 $X_{M,A}$在 U_{ϵ,B_c}下的方差。

我们证明以下结果，该结果陈述于（[8], (3.30) 第269页）。

定理 1（普适模的方差）。 设 X 处于预备形式，且$A(X)$ 为其对应的字母表。记 B_c 为一个次数至少为2的齐次向量场。设 $A_c = A(X) \cup \{c\}$。我们有

$$\mathrm{Var_c(X_{M,A})} = \sum_{\mathbf{n} \in \mathrm{A_c^*}} \mathrm{Var_c(M^\bullet)^n B_n}, \tag{25}$$

with

$$Var_c(M^\bullet)^{\mathbf{n}} = \left(\sum_{i=1}^{l(\mathbf{n})} \mathrm{Var_{c,i}(M)^n} \right) \tag{26}$$

其中，对于 $i = 1, .., l(\mathbf{n})$，我们有

$$Var_{c,i}(M^\bullet)^{\mathbf{n}} = \begin{cases} 0 & \text{if } n_i \neq c, \\ \omega(c) M^{\mathbf{n}} + M^{conf_i(\mathbf{n})} - M^{conb_i(\mathbf{n})} & \text{if } n_i = c, \end{cases} \tag{27}$$

其中，两个算子 $conf_i$ 和 $conb_i$ 分别是位置 i 的前向（分别为后向）收缩，定义如下：

$$conf_i(\mathbf{n}) = \mathbf{n}^{<i}(n_i + n_{i+1})\mathbf{n}^{>i+1} \text{ 和 } conb_i(\mathbf{n}) = \mathbf{n}^{<i-1}(n_{i-1} + n_i)\mathbf{n}^{>i}, \tag{28}$$

with

$$\mathbf{n}^{<i} = n_1 \dots n_{i-1} \quad and \quad \mathbf{n}^{>i} = n_{i+1} \dots n_r. \tag{29}$$

此外，如果 $c \notin A(X)$ 并且$\mathbf{n}$ 至少包含两个字母 c，那么

$$Var_{c,i}(M^\bullet)^{\mathbf{n}} = 0. \tag{30}$$

必须注意，由于模 $M^\bullet$ 的普适性，按照定义，模 $M^\bullet$ 的方差不依赖于字母表，这与 $X_{M,\ A}$ 的方差相反。

证明。为了计算 $Var_c(X_{M,\ A})$，我们首先得到由 X_ϵ 生成的新字母表中的字母。根据定义，我们有

$$\begin{aligned} X_\epsilon &= X + \epsilon[B_c, X] + o(\epsilon^2), \\ &= X_{lin} + \sum_{n\in A} B_n + \epsilon\left([B_c, X_{lin}] + \sum_{n\in A}[B_c, B_n]\right) + o(\epsilon^2). \end{aligned} \tag{31}$$

我们有

$$[B_c, X_{lin}] = \omega(c)B_c, \tag{32}$$

且李括号 $[B_c, B_n]$ 是一个阶数为 $n + c$ 的齐次向量场。

因此，根据 c 的性质，我们有四种齐次算子 $B_{\epsilon,m}$,$m \in A_\epsilon$:

首先，我们当然有

$$B_{\epsilon,c} = \epsilon\omega(c)B_c. \tag{33}$$

我们用 $D(c)$ 表示由以下内容定义的集合

$$D(c) = \{n \in A,\ c - n \in A\}, \tag{34}$$

如果 $n \in D(c)$，我们用 $B_{\epsilon,n}$ 表示向量场

$$B_{\epsilon,n} = B_n + \epsilon[B_c, B_{n-c}] + o(\epsilon^2). \tag{35}$$

如果 $n \notin D(c)$，则有

$$B_{\epsilon,n} = B_n + o(\epsilon^2), \tag{36}$$

以及阶数为 $m = n + c$ 的算子，由下式给出

$$B_{\epsilon,m} = \epsilon[B_c, B_n] + o(\epsilon^2). \tag{37}$$

其他齐次向量场 $B_{\epsilon,\ m}$ 满足 $m \in A_\epsilon$，其阶数至少为ϵ^2。

根据定义

$$X_{M,A_\epsilon} = \sum_{\mathbf{m}\in A_\epsilon} M^{\mathbf{m}} B_{\epsilon,\mathbf{m}}. \tag{38}$$

由于 $Var_c(X_\epsilon)$ 是 $X_{M,\epsilon}$ 的 ϵ 中的一阶部分，我们可以着重考察前面四个算子的复合。因此有

$$\begin{aligned} X_{M,A_\epsilon} &= X_{M,A} \\ &+\epsilon \sum_{n\in D(c),\mathbf{m}\in A^*} \sum_{\mathbf{ab}=\mathbf{m}} M^{\mathbf{a}n\mathbf{b}} B_{\mathbf{a}}[B_c, B_{n-c}]B_{\mathbf{b}} \\ &+\epsilon \sum_{n\notin D(c),\mathbf{m}\in A^*} \sum_{\mathbf{ab}=\mathbf{m}} M^{\mathbf{a}(n+c)\mathbf{b}} B_{\mathbf{a}}[B_c, B_n]B_{\mathbf{b}} \\ &+\epsilon \sum_{\mathbf{m}\in A^*} \sum_{\mathbf{ab}=\mathbf{m}} M^{\mathbf{a}c\mathbf{b}} B_{\mathbf{a}}(\omega(c)B_c)B_{\mathbf{b}} \\ &+o(\epsilon^2). \end{aligned} \tag{39}$$

展开李括号 $[B_n, B_c]$，其中 $n \in A$ 为 $B_nB_c - B_cB_n$，我们看到得到一个由如下形式的算子构成的表达式

$$B_{\mathbf{a}}B_cB_{\mathbf{b}} \tag{40}$$

其中 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b} \in A^*$。因此，我们有

$$Var_c(X_{M,a}) = \sum_{\mathbf{n}\in A^*} \sum_{i=0}^{r} Var_c(M)^{\mathbf{n}^{\le i}c\mathbf{n}^{>i}} B_{\mathbf{n}^{\le i}c\mathbf{n}^{>i}}, \tag{41}$$

它可以改写为关于 A_c^* 的求和，如下所示

$$Var_c(X_{M,a}) = \sum_{\mathbf{n}\in A_c^*} Var_c(M)^{\mathbf{n}} B_{\mathbf{n}}, \tag{42}$$

如果 $\mathbf{n} = \mathbf{n}^{<i}c\mathbf{n}^{>i}$，也就是说，$\mathbf{n}$ 的第 i 个字母是 c，那么算子 $B_{\mathbf{n}^{<i}c\mathbf{n}^{>i}}$ 有两种来源。算子$B_{\mathbf{n}^{<i}c\mathbf{n}^{>i}}$ 可以表示为

$$\omega(c)M^{\mathbf{n}^{<i}c\mathbf{n}^{>i}} B_{\mathbf{n}^{<i}}B_cB_{\mathbf{n}^{>i}} \tag{43}$$

或者来自形如

$$M^{\mathbf{a}(n+c)\mathbf{b}} B_{\mathbf{a}}[B_c, B_n]B_{\mathbf{b}}, \tag{44}$$

的项，其中 $n \in A$。将算子 $B_{\mathbf{a}}[B_c, B_n]B_{\mathbf{b}}$ 展开为

$$M^{\mathbf{a}(n+c)\mathbf{b}} B_{\mathbf{a}}B_cB_nB_{\mathbf{b}} - M^{\mathbf{a}(n+c)\mathbf{b}} B_{\mathbf{a}}B_nB_cB_{\mathbf{b}}, \tag{45}$$

取$\mathbf{a} = \mathbf{n}^{<i}$ 和 $n\mathbf{b} = \mathbf{n}^{>i}$，我们看到有一项

$$M^{\mathbf{n}^{<i}(c+n_{i+1})\mathbf{n}^{>i+1}} B_{\mathbf{n}^{<i}}B_cB_{\mathbf{n}^{>i}} \tag{46}$$

取$\mathbf{a}n = \mathbf{n}^{<i}$ 和 $\mathbf{b} = \mathbf{n}^{>i}$，我们得到一项

$$-M^{\mathbf{n}^{<i-1}(n_{i-1}+c)\mathbf{n}^{>i}} B_{\mathbf{n}^{<i}}B_cB_{\mathbf{n}^{>i}}. \tag{47}$$

设$\mathbf{n}$ 为一个仅包含字母 c 一次的词。那么算子 $B_{\mathbf{n}}$ 前面的系数为

$$\omega(c)M^{\mathbf{n}} + M^{\mathbf{n}^{<i}(n_i+n_{i+1})\mathbf{n}^{>i+1}} - M^{\mathbf{n}^{<i-1}(n_{i-1}+n_i)n_{>i}}. \tag{48}$$

量 $Var_{c,\ i}(M^\bullet)$ 以统一的方式编码了先前计算。

要完成证明，我们分两种情况讨论：

- 如果 $c \notin A$ 且 $\mathbf{n}$ 至少包含两个字母 c，那么 $Var_c(M)_{\mathbf{n}} = 0$，同样适用于 $\mathbf{n}$不包含字母 c的情况。
- 如果 $c \in A$，那么对于给定的一个形如$\mathbf{n}^1 c \mathbf{n}^2 c \dots \mathbf{n}^{k-1} c \mathbf{n}^k$的词，我们必须对来自括号 $B_{\epsilon,c}$ 的所有贡献求和，这些贡献对应于序列中 c 出现的不同位置，也就是说， $Var_c(M)$ 将由下式给出

$$Var_c(M)^{\mathbf{n}} = \sum_{i=1}^{r} Var_{c,i}(M)^{\mathbf{n}}. \tag{49}$$

证明至此结束。 □

5. 与方差相关的导子

根据 J. Ecalle 和 D; Schlomiuk 的工作（[7], p.1421, (3.9)），我们定义算子 Var_c: $\mathscr{M}(A_c^*) \to \mathscr{M}(A_c^*)$ 如下：

$$Var_c(M^\bullet)^{\mathbf{n}} := \sum_{i=1}^{l(\mathbf{n})} Var_{c,i}(M^\bullet)^{\mathbf{n}}. \tag{50}$$

设 A 为一个字母表。算子 D 作用于 $\mathscr{M}(A)$，若对所有$M^\bullet$， $N^\bullet$属于 $\mathscr{M}(A)$，均有

$$D(M^\bullet \times N^\bullet) = D(M^\bullet) \times N^\bullet + M^\bullet \times D(N^\bullet). \tag{51}$$

下述定理在 [7]中给出，但未附证明：

定理 2. 算子 Var_c是 $\mathscr{M}(A_c^*)$上的导子。

证明。 我们需要计算 $\mathscr{M}(A_c^*)$ 中任意两个模 $M^\bullet$和 $N^\bullet$的量 $Var_c($ $M^\bullet \times N^\bullet)$。我们有

$$Var_c(M^\bullet \times N^\bullet)^{\mathbf{n}} := \sum_{i=1}^{l(\mathbf{n})} Var_{c,i}(M^\bullet \times N^\bullet)^{\mathbf{n}}. \tag{52}$$

设 $\mathbf{n}$ 满足 $n_i = c$ 且 $n_j \neq c$，对于 $j \neq i$，则

$$Var_{c,j}(M^\bullet \times N^\bullet)^{\mathbf{n}} = 0 \tag{53}$$

对于 $j \neq i$，且

(54)
$$Var_{c,i}(M^\bullet \times N^\bullet)^{\mathbf{n}} = \omega(c)(M^\bullet \times N^\bullet)^{\mathbf{n}} + (M^\bullet \times N^\bullet)^{conf_i(\mathbf{n})} - (M^\bullet \times N^\bullet)^{conb_i(\mathbf{n})}$$

因此，我们得到

(55)
$$Var_c(M^\bullet \times N^\bullet)^{\mathbf{n}} = \omega(c)(M^\bullet \times N^\bullet)^{\mathbf{n}} + (M^\bullet \times N^\bullet)^{conf_i(\mathbf{n})} - (M^\bullet \times N^\bullet)^{conb_i(\mathbf{n})}.$$

记 $\mathbf{n}$ 的长度为 $r = l(\mathbf{n})$，则有

(56)

$$(M^\bullet \times N^\bullet)^{conf_i(\mathbf{n})} = \sum_{\mathbf{ab}=conf_i(\mathbf{n})} M^{\mathbf{a}} N^{\mathbf{a}} = \sum_{j=1}^{i-1} M^{\mathbf{n}^{<j}} N^{conf_{i-j+1}(\mathbf{n}^{\geq j})} + \sum_{j=i}^{r} M^{conf_i(\mathbf{n}^{<j})} N^{\mathbf{n}^{\geq j}}$$

此外，我们得到

(57)

$$\begin{aligned}(Var_c(M^\bullet) \times N^\bullet)^{\mathbf{n}} &= \sum_{j=1}^{r} Var_c(M^\bullet)^{\mathbf{n}<j} N^{\mathbf{n}^{\geq j}}, \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} Var_c(M^\bullet)^{\mathbf{n}<j} N^{\mathbf{n}^{\geq j}} + \sum_{j=i}^{r} Var_c(M^\bullet)^{\mathbf{n}<j} N^{\mathbf{n}^{\geq j}}.\end{aligned}$$

由于$\mathbf{n}^{<j}$对于 $j \leq i-1$不包含字母 c，因此有 $Var_C(M^\bullet)^{\mathbf{n}^{<j}} = 0$，并得到

(58)
$$(Var_c(M^\bullet) \times N^\bullet)^{\mathbf{n}} = \sum_{j=i}^{r} Var_c(M^\bullet)^{\mathbf{n}^{<j}} N^{\mathbf{n}^{\geq j}}.$$

由于对于 $j \geq i$，在 $n^{<j}$ 的第 i位只有一个字母 c ，因此得到

(59)
$$Var_{c,k}(M^\bullet)^{\mathbf{n}^{<j}} = 0 \text{ for } k = 1, \ldots, j-1, \quad j \neq i,$$

and

(60)
$$Var_{c,i}(M^\bullet)^{\mathbf{n}^{<j}} = \omega(c) M^{\mathbf{n}^{<j}} + M^{conf_i(\mathbf{n}^{<j})} - M^{conb_i(\mathbf{n}^{<j})}.$$

因此，对于 $j \geq i$ ，我们得到等式

(61)
$$Var_c(M^\bullet)^{\mathbf{n}^{<j}} = \omega(c) M^{\mathbf{n}^{<j}} + M^{conf_i(\mathbf{n}^{<j})} - M^{conb_i(\mathbf{n}^{<j})}.$$

将 $Var_c(M^\bullet)^{\mathbf{n}^{<j}}$ 替换为其表达式后，我们得到

(62)

$$\begin{aligned}(Var_c(M^\bullet) \times N^\bullet)^{\mathbf{n}} &= \sum_{j=i}^{r} \left(\omega(c) M^{\mathbf{n}^{<j}} + M^{conf_i(\mathbf{n}^{<j})} - M^{conb_i(\mathbf{n}^{<j})} \right) N^{\mathbf{n}^{\geq j}}, \\ &= \omega(c) \sum_{j=i}^{r} M^{\mathbf{n}^{<j}} N^{\mathbf{n}^{\geq j}} + \sum_{j=i}^{r} \left(M^{conf_i(\mathbf{n}^{<j})} - M^{conb_i(\mathbf{n}^{<j})} \right) N^{\mathbf{n}^{\geq j}}.\end{aligned}$$

同理，我们可以计算 $(M^\bullet \times Var_c(N^\bullet))^{\mathbf{n}}$。事实上，我们有

(63)
$$(M^\bullet \times Var_c(N^\bullet))^{\mathbf{n}} = \sum_{j=i}^{r} M^\bullet)^{\mathbf{n}^{<j}} Var_c(N^\bullet) \mathbf{n}^{\geq j}.$$

由于对于 $j \leq i$， $n^{\geq j}$ 中在第 $i-j+1$ 个位置只有一个字母 c，我们得到

(64)
$$Var_{c,k}(N^\bullet)^{\mathbf{n}^{\geq j}} = 0 \text{ for } k = 1, \ldots, r-j+1, \quad j \neq i-j+1,$$

and

(65) $Var_{c,i-j+1}(M^\bullet)^{\mathbf{n}^{\geq j}} = \omega(c)N^{\mathbf{n}^{<j}} + N^{conf_{i-j+1}(\mathbf{n}^{<j})} - N^{conb_{i-j+1}(\mathbf{n}^{<j})}.$

因此，对于 $j \leq i$，我们得到等式

(66) $Var_c(N^\bullet)^{\mathbf{n}^{\geq j}} = \omega(c)N^{\mathbf{n}^{\geq j}} + N^{conf_{i-j+1}(\mathbf{n}^{\geq j})} - N^{conb_{i-j+1}(\mathbf{n}^{\geq j})}.$

将 $Var_c(N^\bullet)^{\mathbf{n}^{\geq j}}$ 替换为其表达式，可得

(67)

$$\begin{aligned}(M^\bullet \times Var_c(N^\bullet))^{\mathbf{n}} &= \sum_{j=1}^{i} M^{\mathbf{n}^{<j}} \left(\omega(c)N^{\mathbf{n}^{\geq j}} + N^{conf_{i-j+1}(\mathbf{n}^{\geq j})} - N^{conb_{i-j+1}(\mathbf{n}^{\geq j})}\right), \\ &= \omega(c)\sum_{j=1}^{i} M^{\mathbf{n}^{<j}} N^{\mathbf{n}^{\geq j}} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{i} M^{\mathbf{n}^{<j}} M^{\mathbf{n}^{<j}} \left(N^{conf_{i-j+1}(\mathbf{n}^{\geq j})} - N^{conb_{i-j+1}(\mathbf{n}^{\geq j})}\right).\end{aligned}$$

将（62）和（67）重新组合，得

(68)

$$(Var_c(M^\bullet) \times N^\bullet + M^\bullet \times Var_c(N^\bullet))^{\mathbf{n}} = \omega(c)\,(M^\bullet N^\bullet)^{\mathbf{n}} + (M^\bullet \times N^\bullet)^{conf_i(\mathbf{n})} - (M^\bullet \times N^\bullet)^{conb_i(\mathbf{n})}$$

利用（55）可得

(69) $(Var_c(M^\bullet) \times N^\bullet + M^\bullet \times Var_c(N^\bullet))^{\mathbf{n}} = Var_c(M^\bullet \times N^\bullet)^{\mathbf{n}}$

证明到此结束。 □

在（[7],第1421页）中，J. Ecalle 和 D. Schlomiuk 指出了两个算子之间的一个等式。具体而言，他们引入了记作 ∇ 的算子，并将其定义为

(70) $$\nabla(M^\bullet)^{\mathbf{n}} = \omega(\mathbf{n})M^\bullet.$$

该算子在线性化向量场问题中起着核心作用（更多详情请见 [5, 3] ）。

以下结果在（[7],第1421页）中陈述，但未给出证明:

定理 3. 我们有等式

(71) $$\nabla := \sum_{a\in A} Var_a.$$

已知算子 ∇ 是 $\mathscr{M}(A)$ 上的一个导子（例如，直接通过计算可得，参见[3]）。另一种证明可由公式（71）以及 Var_a 对所有 $a \in A$ 都是导子的事实得出。

证明。 设$\mathbf{n} \in A^*$已给定，$\mathbf{n} = n_1 \ldots n_r$。对于所有 $a \neq n_i$, $i = 1 \ldots, r$, 有 $Var_a(M^\bullet)^{\mathbf{n}} = 0$。考虑到一个字母可以在词中出现多次

，我们便得到$\mathbf{n}$：

$$\sum_{a\in A} Var_a(M^\bullet)^{\mathbf{n}} = \sum_{j=1}^{r} Var_{j,n_j}(M^\bullet)^{\mathbf{n}}. \tag{72}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\sum_{a\in A} Var_a(M^\bullet)^{\mathbf{n}} &= \sum_{j=1}^{r}\omega(n_j)M^{\mathbf{n}} + M^{\mathbf{n}^{<r-1}(n_{r-1}+n_r)} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{r-1} M^{\mathbf{n}^{<j}(n_j+n_{j+1})\mathbf{n}^{>j+1}} - \sum_{j=2}^{r} M^{\mathbf{n}^{<j-1}(n_{j-1}+n_j)\mathbf{n}^{<j}} \\ &\quad - M^{\mathbf{n}^{<r-1}(n_{r-1}+n_r)}.\end{aligned} \tag{73}$$

极端项也相互抵消，第二行中的两个求和项也如此。于是我们得到

$$\sum_{a\in A} Var_a(M^\bullet)^{\mathbf{n}} = \omega(\mathbf{n})M^{\mathbf{n}}. \tag{74}$$

由此可得，对于所有的 $\mathbf{n}\in A^*$，我们有

$$\sum_{a\in A} Var_a(M^\bullet)^{\mathbf{n}} = \nabla(M^\bullet)^{\mathbf{n}}. \tag{75}$$

证明至此完成。 □

6. 共振向量场的方差与幂零部分

6.1. 共振向量场的幂零部分。设 X 已处于预备形式。存在一个将 X 分解为

$$X = X_{dia} + X_{nil}, \tag{76}$$

X_{dia} 和 X_{nil} 为形式向量场，且

$$[X_{dia}, X_{nil}] = 0, \tag{77}$$

一个 可对角化部分 X_{dia} 和一个幂零部分 X_{nil}。可对角化部分 X_{dia} 在形式上可线性化，而 X_{nil} 没有线性分量。该分解具有图表不变量，即对于任意代换算子 Θ，都有

$$(\Theta X\Theta^{-1})_{dia} = \Theta X_{dia}\Theta^{-1} \text{ and } (\Theta X\Theta^{-1})_{nil} = \Theta X_{nil}\Theta^{-1}. \tag{78}$$

在 [7], 中，J. Ecalle 和 D. Schlomiuk 证明，幂零部分和可对角化部分具有如下形式的模展开

$$X_{dia} = \sum_{\mathbf{n}\in A^*} Dia^{\mathbf{n}} B_{\mathbf{n}} \text{ and } X_{nil} = \sum_{\mathbf{n}\in A^*} Nil^{\mathbf{n}} B_{\mathbf{n}}, \tag{79}$$

其中模 $Dia^\bullet$ 和 $Nil^\bullet$ 需要计算。

分解式 (76) 意味着

$$I^\bullet = Dia^\bullet + Nil^\bullet. \tag{80}$$

在（[7], 第1422页）中，他们未加证明地陈述了以下结果，并在（[7],第1424页）中给出了一些论证:

定理4。 模 $Nil^\bullet$ 满足函数方程

$$Var_c(Nil^\bullet) = I_c^\bullet \times Nil^\bullet - Nil^\bullet \times I_c^\bullet \tag{81}$$

其中 $Nil^\emptyset = 0$ 和 $Nil^n = 1$，若 $n \in Res（A）$。

我们还有

$$\nabla(Nil^\bullet) = I^\bullet \times Nil^\bullet - Nil^\bullet \times I^\bullet. \tag{82}$$

证明。 使用上一节中的相同记号，我们有

$$(X_{nil})_\epsilon = X_{nil} + \epsilon[B_c, X_{nil}] + o(\epsilon), \tag{83}$$

and

$$(X_\epsilon)_{nil} = X_{nil} + \epsilon Var_c(X_{nil}) + o(\epsilon). \tag{84}$$

由于幂零部分（以及可对角化部分）是图表不变量，我们有

$$(X_{nil})_\epsilon = (X_\epsilon)_{nil}. \tag{85}$$

因此，我们得到

$$Var_c(X_{nil}) = [B_c, X_{nil}]. \tag{86}$$

B_c 和 X_{nil} 的李括号可以使用关于 A_c^*的模形式主义来表示。事实上，我们有

$$[B_c, X_{nil}] = B_c X_{nil} - X_{nil} B_c. \tag{87}$$

由于 $X_{nil} = \sum_{\mathbf{n}\in A^*} Nil^{\mathbf{n}} B_{nn}$，我们得到

$$[B_c, X_{nil}] = \sum_{\mathbf{n}\in A^*} Nil^{\mathbf{n}} B_c B_{\mathbf{n}} - \sum_{\mathbf{n}\in A^*} Nil^{\mathbf{n}} B_{\mathbf{n}} B_c. \tag{88}$$

我们将对所有$\mathbf{w} \in A_c^*$ 定义的模记为 $M^\bullet$

$$M^{\mathbf{w}} = \begin{cases} Nil^{\mathbf{n}} & \text{if } \mathbf{w} = c\mathbf{n},\ \mathbf{n} \in A^*, \\ -Nil^{\mathbf{n}} & \text{if } \mathbf{w} = \mathbf{n}c,\ \mathbf{n} \in A^*, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{89}$$

设 $I_c^\bullet$ 为定义在 A_c^* 上的模

$$I_c^{\mathbf{w}} = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{w} = c, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{90}$$

于是我们得到以下等式

$$M^\bullet = I_c \times Nil^\bullet - Nil^\bullet \times I_c^\bullet. \tag{91}$$

由此可得

$$Var_c(X_{nil}) = \sum_{\mathbf{w}\in A_c^*} (I_c \times Nil^\bullet - Nil^\bullet \times I_c^\bullet)^{\mathbf{w}}\, B_{\mathbf{w}}. \tag{92}$$

As

$$Var_c(X_{nil}) = \sum_{\mathbf{w}\in A_c^*} Var_c(Nil^\bullet)^{\mathbf{w}} B_{\mathbf{w}}, \tag{93}$$

最终得到

$$Var_c(Nil^\bullet)^\bullet = I_c \times Nil^\bullet - Nil^\bullet \times I_c^\bullet. \tag{94}$$

这就完成了第一个公式的证明。第二个公式使用导子 ∇，由定理 3 得出。

对于模 $Nil^\bullet$ 的初始条件，由于 X_{nil} 与 X_{dia} 对易，它只包含共振项；又由于 $X = X_{dia} + X_{nil}$，我们必须施加

$$Nil^\emptyset = 0 \ \text{ and } \ Nil^n = 1 \text{ if } n \in Res(A) \text{ and } 0 \text{ otherwise.} \tag{95}$$

□

我们可以直接验证，模 $Dia^\bullet$ 必须满足方程

$$Var_c(Dia^\bullet) = I_c^\bullet \times Dia^\bullet - Dia^\bullet \times I_c^\bullet \tag{96}$$

但初始条件不同。事实上，我们有

$$Var_c(Dia^\bullet) = Var_c(I^\bullet) - Var_c(Nil^\bullet) \tag{97}$$

由导子 Var_c 的线性性可得。于是我们得到

$$\begin{aligned} Var_c(Dia^\bullet) &= Var_c(I^\bullet) - I_c^\bullet \times Nil^\bullet + Nil^\bullet \times I_c^\bullet, \\ &= Var_c(I^\bullet) - I_c^\bullet \times I^\bullet + I_c^\bullet \times Dia^\bullet + I^\bullet \times I_c^\bullet - Dia^\bullet \times I_c^\bullet. \end{aligned} \tag{98}$$

我们有

$$Var_c(I^\bullet)^{\mathbf{n}} = \begin{cases} \omega(c) \text{ if } \mathbf{n} = c, \\ 1 \text{ if } \mathbf{n} = cm, \\ -1 \text{ if } \mathbf{n} = mc, \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases} \tag{99}$$

and

$$(I_c^\bullet \times I^\bullet)^{\mathbf{n}} = \begin{array}{l} 1 \text{ if } \mathbf{n} = cm, \\ 0 \text{ otherwise.} \end{array} \quad (I^\bullet \times I_c^\bullet)^{\mathbf{n}} = \begin{array}{l} 1 \text{ if } \mathbf{n} = mc, \\ 0 \text{ otherwise.} \end{array} \tag{100}$$

若 c 满足 $\omega(c) = 0$，且 $Var_c(I^\bullet) = 0$，则对所有 $\mathbf{n} = A_c$，我们有

$$Var_c(I^\bullet) - I_c^\bullet \times I^\bullet + I^\bullet \times I_c^\bullet = 0. \tag{101}$$

因此，对于所有的 $c \in Res(A)$，我们得到

$$Var_c(Dia^\bullet) = I_c \times Dia^\bullet - Dia^\bullet \times I_c^\bullet. \tag{102}$$

6.2. 模的显式计算 $Nil^\bullet$。即使有模方程（81），模 $Nil^\bullet$ 也不容易计算。我们来计算长度为 ≤ 4 的序列；J. Ecalle 和 D. Schlomiuk 给出了这些序列的表格（见 [7],第 1481–1482 页），但没有提供计算细节。然而，这些计算本身很有意思，因为它们将方差规则作为关键要素。本节将为所有公式给出显式证明。

正如 J. Ecalle 和 B. Vallet 在（[8],第271页）中所指出的，方差为模的计算提供了一种“超定归纳”，因为它可以应用于同一个词的不同字母。

事实上，对于一个词 $\mathbf{n} = n_1 \dots n_r$，我们可以在方差公式中取 $c = n_1$，因此，如果对于 $i = 2\ n_i \neq n_1$，……，r，我们得到

$$\omega(n_1) Nil^{n_1 \dots n_r} + Nil^{(n_1+n_2)n_3 \dots n_r} = Nil^{n_2 \dots n_r}. \tag{103}$$

同样的计算也可以对 $c = n_r$ 和 $n_i \neq n_r$ 以及 $i = 1$，……，$r-1$ 进行，从而得到

$$\omega(n_r) Nil^{n_1 \dots n_r} - Nil^{n_1 \dots n_{r-2}(n_{r-1}+n_r)} = -Nil^{n_1 \dots n_{r-1}}. \tag{104}$$

对于 $i \neq \{1, r\}$, $c = n_i$ 和 $n_j \neq n_i$, $j = 1, \dots, r$, $j \neq i$，我们得到

$$\omega(n_i) Nil^{n_1 \dots n_r} - Nil^{n_1 \dots (n_{i-1}+n_i) \dots n_r} + Nil^{n_1 \dots (n_i+n_{i+1}) \dots n_r} = 0. \tag{105}$$

对于所有的 $\mathbf{n} \in A^*$，我们有

$$\omega(\mathbf{n}) Nil^{\mathbf{n}} = Nil^{\mathbf{n}^{>1}} - Nil^{\mathbf{n}^{<r}}. \tag{106}$$

下文中，对于给定的词 $\mathbf{n} = n_1 \dots n_r$，我们用 $\boldsymbol{\omega}$ 表示权向量 $(\omega_1, \dots, \omega_r)$，其中 $\omega_i = \omega(n_i)$，并用 $|\boldsymbol{\omega}|$ 表示量 $|\boldsymbol{\omega}| = \omega_1 + \dots + \omega_r$。

注 1. 在 [7] 和 [8] 以及其他文章（如 [5, 6], ）中，*J. Ecalle* 写的模不是定义在由向量场生成的字母表 A 上，而是定义在Ω上；Ω 是由字母 $n \in A$生成的权的集合，即

$$\Omega = \{\omega(n),\ n \in A\}. \tag{107}$$

。于是我们用 F_ω, $\omega \in$Ω表示微分算子

$$F_\omega = \sum_{n \in A,\ \omega(n)=\omega} B_n. \tag{108}$$

然而，字母与权之间并不存在一一对应关系。例如，对于线性部分为$\lambda = (i, -i)$的二维向量场 $i^2 = -1$，权0 可以由任意阶数为$(m, m$<*style*>*)* 的齐次微分算子实现，其中 $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$。因此，只要要处理齐次算子的复合，在Ω^* 上使用模就会使计算和公式变得混乱。

然而，在 A^* 上证明的关于向量场线性化或预正规化的大多数公式，在 Ω^*上仍然成立。这是因为该公式（见 [3], *Corollaire V.74*，第*369*页）

$$X_{lin}B_{\mathbf{n}} =\mid \omega(\mathbf{n}) \mid B_{\mathbf{n}} + B_{\mathbf{n}}X_{lin} \tag{109}$$

在Ω^*上保持不变，即记 $B_{\boldsymbol{\omega}}$ 为微分算子

$$F_{\boldsymbol{\omega}} = F_{\omega_r} \dots F_{\omega_1}, \tag{110}$$

对于 $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \dots \omega_r$，我们有

$$X_{lin}F_{\boldsymbol{\omega}} =\mid \boldsymbol{\omega} \mid F_{\boldsymbol{\omega}} + F_{\boldsymbol{\omega}}X_{lin}, \tag{111}$$

利用 X_{lin}的线性性。

因此，向量场共轭的模方程从 A^* 到Ω^* 保持原有形式，这可从*(*[3] *Théorème V.72 p.368)*的证明中看出，该证明见*(*[3], *p.370)*。

必须注意，对于一个完整的共振词，即一个词 $\mathbf{n} = n_1 \dots n_r$，满足 $\boldsymbol{\omega} =(0,\dots,0)$，前面这组方程无法计算模 $Nil^{\mathbf{n}}$ 的值。因此，我们必须将其值作为初始条件固定下来。

这可以通过假设模 $Nil^\bullet$ 是交替的（参见（??））来实现，从而使 X_{nil} 成为向量场。在这种情况下，我们必须有

$$Nil^{\emptyset} = 0, \tag{112}$$

and

$$\sum_{\mathbf{n}\in sh(0,0^r)} Nil^{\mathbf{n}} = 0 \tag{113}$$

对所有 $r \geq 1$, $0^r = \underbrace{0 \dots 0}$ 都成立。由于对于任意 $\mathbf{n} \in sh(0, 0^r)$，都有 $\mathbf{n} = 0^{r+1}$，我们$_{r\ 次}$推得

$$(r + 1)M^{0^{r+1}} = 0, \tag{114}$$

这意味着

$$M^{0^{r+1}} = 0. \tag{115}$$

这些关系提供了一种灵活的方法来计算模 $Nil^\bullet$。我们给出长度为 1 到 3 的词的显式公式。

引理 1。设 $n \in A$ 则

$\mathbf{n}$	$Nil^\bullet$
$\omega(n) \neq 0$	*0*
$\omega(n) = 0$	*1*

证明。 如果 $n \in A$ 满足 $\omega(n) \neq 0$, 则我们得到 $Nil^{\emptyset} = 0$, 即

$$\omega(n) Nil^{n} = 0, \tag{116}$$

因此, $Nil^{n} = 0$。 □

引理 2. 设$\mathbf{n}$ 是一个长度为2的词。对于非共振词，即 $|\boldsymbol{\omega}| \neq 0$，我们有

$\mathbf{n}$	$Nil^{\bullet}$
$\omega_1 \neq 0, \omega_2 \neq 0$	0
$\boldsymbol{\omega} = (0, \omega), \ \omega \neq 0$	$-\omega^{-1}$
$\boldsymbol{\omega} = (\omega, 0), \ \omega \neq 0$	ω^{-1}

对于共振词，即 $|\boldsymbol{\omega}| = 0$，我们有

$\mathbf{n}$	$Nil^{\bullet}$
$\boldsymbol{\omega} = (0, 0)$	0
$\boldsymbol{\omega} = (\omega, -\omega), \ \omega \neq 0$	$-\omega^{-1}$

证明。 设 $\mathbf{n} = n_1 n_2$ 是一个非共振词，满足 $|\boldsymbol{\omega}| = \omega \neq 0$。那么若 $n_1 \in Res(A)$，即 $\omega_1 = 0$, 则 $n_2 \in A$ 满足 $\omega_2 = \omega$, 利用 (104) 可得

$$\omega Nil^{\mathbf{n}} - Nil^{n_1 + n_2} = -Nil^{n_1}, \tag{117}$$

由此得到

$$Nil^{\mathbf{n}} = \omega^{-1} \left(-Nil^{n_1} + Nil^{n_1 + n_2} \right). \tag{118}$$

由于 $\omega_1 = 0$ 且 $\omega(n_1 + n_2) = \omega$，我们推得 $Nil^{n_1} = 1$ 且 $Nil^{n_1 + n_2} = 0$。因此，我们得到

$$Nil^{\mathbf{n}} = -\omega^{-1}. \tag{119}$$

同理，当 $\boldsymbol{\omega} = (\omega, 0)$ 时，利用 $\omega \neq 0$ 和（103），我们得到

$$\omega Nil^{\mathbf{n}} + Nil^{n_1 + n_2} = Nil^{n_2}. \tag{120}$$

由于 $Nil^{n_2} = 1$ 且 $\omega(n_1 + n_2) = \omega \neq 0$，我们有 $Nil^{n_1 + n_2} = 0$ 且

$$Nil^{\mathbf{n}} = \omega^{-1}. \tag{121}$$

对于共振词，有两种情况。若 $\boldsymbol{\omega} = (0, 0)$，则根据假设有 $Nil^{\mathbf{n}} = 0$。否则，我们有 $\boldsymbol{\omega} = (\omega, -\omega)$，其中 $\omega \neq 0$。利用（103），我们得到

$$\omega Nil^{\mathbf{n}} + Nil^{n_1 + n_2} = Nil^{n_2}. \tag{122}$$

由于 $\omega(n_1 + n_2) = 0$ 且 $\omega(n_2) \neq 0$，我们有 $Nil^{n_1 + n_2} = 1$ 且 $Nil^{n_2} = 0$, 因此

$$Nil^{\mathbf{n}} = -\omega^{-1}. \tag{123}$$

□

引理 3. 设$\mathbf{n}$ 是一个长度为3的词。对于非共振词，即 $|\boldsymbol{\omega}| \neq 0$，我们有:

$\mathbf{n}$	$Nil^{\bullet}$
$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\omega_3),\ \omega_1,\omega_2,\omega_3\neq 0,\ \omega_1+\omega_2\neq 0,$ $\omega_1+\omega_3\neq 0,\ \omega_2+\omega_3\neq 0$	0
$\boldsymbol{\omega}=(\omega,\tilde{\omega},-\tilde{\omega}),\ \omega\neq 0,\ \tilde{\omega}\neq 0,\ \omega+\tilde{\omega}\neq 0$	$-\omega^{-1}\tilde{\omega}^{-1}$
$\boldsymbol{\omega}=(\tilde{\omega},\omega,-\tilde{\omega}),\ \omega\neq 0,\ \tilde{\omega}\neq 0,\ \omega+\tilde{\omega}\neq 0$	0
$\boldsymbol{\omega}=(\omega,-\omega,\tilde{\omega}),\ \omega\neq 0,\ \tilde{\omega}\neq 0,\ \omega+\tilde{\omega}\neq 0$	$\omega^{-1}\tilde{\omega}^{-1}$
$\boldsymbol{\omega}=(0,\omega,\tilde{\omega}),\ \omega+\tilde{\omega}\neq 0,\ \omega\neq 0,\ \tilde{\omega}\neq 0$	$\omega^{-1}(\omega+\tilde{\omega})^{-1}$
$\boldsymbol{\omega}=(\omega,0,\tilde{\omega}),\ \omega+\tilde{\omega}\neq 0,\ \omega\neq 0,\ \tilde{\omega}\neq 0$	$-\omega^{-1}\tilde{\omega}^{-1}$
$\boldsymbol{\omega}=(\omega,\tilde{\omega},0),\ \omega+\tilde{\omega}\neq 0,\ \omega\neq 0,\ \tilde{\omega}\neq 0$	$\tilde{\omega}^{-1}(\omega+\tilde{\omega})^{-1}$
$\boldsymbol{\omega}=(\omega,0,0),\ \omega\neq 0$	ω^{-2}
$\boldsymbol{\omega}=(0,\omega,0),\ \omega\neq 0$	$2\omega^{-2}$
$\boldsymbol{\omega}=(0,0,\omega),\ \omega\neq 0$	$-\omega^{-2}$

对于共振词 $\mathbf{n}$，即 $|\boldsymbol{\omega}|=0$，我们有：

$\mathbf{n}$	$Nil^{\bullet}$
$\boldsymbol{\omega}=(0,0,0)$	0
$\boldsymbol{\omega}=(0,\ \omega,\ -\omega)$	$-\omega^{-2}$
$\boldsymbol{\omega}=(\omega,\ 0,\ -\omega)$	$2\omega^{-2}$
$\boldsymbol{\omega}=(\omega,-\omega,0)$	$-\omega^{-2}$

证明。我们通过寻找非共振词和共振词来分解研究。首先，我们考虑**非共振词**。设$\mathbf{n}=n_1n_2n_3$满足 $\omega(\mathbf{n})\neq 0$，然后使用公式：

$$\omega(\mathbf{n})Nil^{\mathbf{n}}=Nil^{n_2n_3}-Nil^{n_1n_2}.$$

将其分解为两个词 n_2n_3 和 n_1n_2来处理时，注意到 n_1和 n_3 彼此不相互作用，因此我们考虑：

情形1：若 $\omega(n_2n_3)=0$，则 $\omega(n_1)\neq 0$，并且需要考虑两个子情形。

(1) 若 $\omega(n_2)=0$，则 $\omega(n_3)=0$，且 $Nil^{n_2n_3}=0$和 $Nil^{n_1n_2}=-\omega_1^{-1}$。对于权为 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,0,0)$ 且 $\omega_1\neq 0$的 $\mathbf{n}$，我们得到$Nil^{n_1n_2n_3}=\omega_1^{-2}$。
(2) 若 $\omega(n_2)\neq 0$，则 $\omega(n_3)=-\omega(n_2)$，且 $\omega(n_1)\neq 0$，于是有两个子情形：(a) 若 $\omega(n_1n_2)\neq 0$，则 $Nil^{n_2n_3}=-\omega_2^{-1}$和 $Nil^{n_1n_2}=0$。对于权为 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,-\omega_2)$ 且 $|\boldsymbol{\omega}|\neq 0$ 的 $\mathbf{n}$，我们得到 $Nil^{\mathbf{n}}=-\omega_1^{-1}\omega_2^{-1}$。(b) 若 $\omega(n_1n_2)=0$，则 $Nil^{n_2n_3}=-\omega_2^{-1}$和 $Nil^{n_1n_2}=\omega_2^{-1}$，并得到：$\omega(\mathbf{n})Nil^{\mathbf{n}}=-2(\omega_2)^{-2}$。

情形 2：如果 $\omega(n_2n_3)\neq 0$，则必须考虑两种子情形。

（1）如果 $\omega(n_1)=0$，我们有三种情况。

（a）如果 $\omega(n_2) = 0$ 且 $\omega(n_3) \neq 0$，那么 $\omega(n_3) \neq 0$，并且我们有 $Nil^{n_2n_3} = -\omega_3^{-1}$和 $Nil^{n_1n_2} = 0$，因此对于一个权为 $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega_3)$ 且满足 $\omega_3 \neq 0$ 的词 n，我们有 $Nil^{\mathbf{n}} = -\omega_3^{-2}$。（b）如果 $\omega(n_2) \neq 0$ 且 $\omega(n_3) = 0$，那么我们有 $Nil^{n_1n_2} = -\omega_2^{-1}$和$Nil^{n_2n_3} = \omega_2^{-1}$。我们得到 $Nil^{\mathbf{n}} = -2\omega_2^{-2}$，因为 $\omega(\mathrm{n}) = \omega_2$。(c) 如果 $\omega(n_2) \neq 0$ 且 $\omega(n_3) \neq 0$，那么我们有 $Nil^{n_1n_2} = -\omega_2^{-1}$和$Nil^{n_2n_3} = 0$。我们得到 $Nil^{\mathbf{n}} = -\omega_2^{-1}(\omega_2 + \omega_3)^{-1}$。

(2) 若 $\omega(n_1) \neq 0$，则有以下四种子情形：

(a) 若 $\omega_1 + \omega_2 = 0$，则必有 $\omega_3 \neq 0$（$\omega_3 = 0$ 是共振情形）且 $Nil^{\mathbf{n}} = -\omega_1^{-1}\omega_3^{-1}$。(b) 若 $\omega_1 + \omega_2 \neq 0$ 使得 $\omega_2 \neq 0$ 且 $\omega_3 = 0$，则得到$Nil^{n_1n_2} = Nil^{n_2n_3} = 0$ 且 $Nil^{\mathbf{n}} = 0$。(c) 若 $\omega_1 + \omega_2 \neq 0$ 使得 $\omega_2 = 0$ 且 $\omega_3 \neq 0$，则得 到 $Nil^{n_2n_3} = -\omega_3^{-1}$且 $Nil^{n_1n_2} = \omega_1^{-1}$。我们得到 $Nil^{\mathbf{n}} = -2\omega_1^{-1}\omega_3^{-1}$。(d) 若 $\omega_1 + \omega_2 \neq 0$ 且 $\omega_1 + \omega_3 \neq 0$，则有 $Nil^{n_1n_2} = 0$ 且$Nil^{n_2n_3} = 0$ 且 $Nil^{\mathbf{n}} = 0.$

现在，我们考虑**n 共振的**，也就是说 $|\ \omega(\mathbf{n})| = 0$ 我们可以使用方差公式，将计算按共振字母的数量分类整理，该公式应用于模 $Nil^{\bullet}$ (见定理4)。

如果有两个共振字母，由于 $|\ \boldsymbol{\omega}| = 0$ 这三个字母都是共振的，并且 $Nil^{\mathbf{n}} = 0$ 根据假设。

如果有一个共振字母，其余两个字母的权互为相反数。我们有三种情况：

- 如果 $\boldsymbol{\omega} = (0,\ \omega,\ -\omega)$，那么 $Nil_{(n_1+n_2)^{n_3}} = -\omega^{-1}$ 并且 $Nil^{n_1}{}_{(n_2+n_3)} = 0$ 因此 $Nil_{\mathbf{n}} = -\omega^{-2}$ 使用 Var_2。
- 如果 $\boldsymbol{\omega} = (\omega,\ 0,\ -\omega)$，那么 $Nil_{(n_1+n_2)^{n_3}} = -\omega^{-1}$ 并且 $Nil^{n_2n_3} = \omega^{-1}$。我们使用 Var_1得到 $Nil_{\mathbf{n}} = 2\omega^{-2}$。
- 若 $\boldsymbol{\omega} = (\omega,\ -\omega,\ 0)$，则 $Nil_{(n_1+n_2)^{n_3}} = 0$ 且 $Nil^{n_1}{}_{(n_2+n_3)} = -\omega^{-1}$。我们利用 Var_1得到 $Nil_{\mathbf{n}} = -\omega^{-2}$。

证明完毕。

□

7. 结论与展望

本文给出了向量场的方差的定义及其基本性质，并尽可能紧密地遵循了 J. Ecalle 和 D.Schlomiuk [7] 的先前工作；在该工作中，这一概念虽已被引入，但尚未命名为方差；以及 J. Ecalle and B. Vallet [8] 的工作，在该工作中，这一概念得到了形式化，并被充分用于分析一种称为向量场修正项的新对象。

然而，这两篇文章中陈述的若干结果仍需加以讨论，并通过完整证明予以支持。特别是，以下两个问题

需要进行分析：

- 在（[7],第 1432 页）中，研究了模 $Nil^\bullet$ 的解析性质。特别是，文中证明了模的形式在树化下保持不变。关于模上函数方程的树化导论以及这一结果的完整证明，请参阅 [4]。

- 为证明修正项的解析性以及修正后形式的解析线性化性， [8] 中所展示的“多个小分母不出现”现象，建立在对修正项的模所满足的方差规则 （见 [8],第 290 页）及其在树化下的行为进行细致研究的基础上。对修正项的模及其在树化下的性质的研究，将是即将发表的一篇文章的主题。

参考文献

[1] V. Arnold, 《常微分方程理论补充章节》, 第 3 版, MIR 出版社、环球书店, 1996 年。[2] A. D. Brjuno, 《微分方程的解析形式》, 《莫斯科数学会会刊》, 第 25 卷, 1971 年。[3] J. Cresson, 《模计算》, 《图卢兹大学理学院数学学报》第 XVIII 卷第 2 期, 2009 年, 第 307–395 页。[4] J. Cresson、D. Manchon、J. Palafox, 《模在树化下的不变性、函数方程与多项式不等式》, 23 页, 2024 年。[5] J. Ecalle, 《几何无法处理的奇点》, 《傅里叶研究所年刊》42（1–2）, 73–164, 1992 年。[6] J. Ecalle, 《Les fonctions résurgentes》, 第 1–3 卷, 《Les algèbres de fonctions résurgentes》, 奥赛数学出版物, 1981–1985 年。[7] J. Ecalle、D. Schlomiuk, 《共振向量场或微分同胚的幂零形式与特征形式》, 《傅里叶研究所年刊》43（5）, 1407–1483, 1993 年。[8] J. Ecalle、B. Vallet, 《共振向量场和微分同胚的修正与线性化》, 《数学杂志》229, 249–318, 1998 年。[9] J. Ecalle、B. Vallet, 《树化—反树化变换：解析、组合与代数方面》, 《图卢兹大学理学院数学学报》（6）4, 575–657, 2004 年。[10] C. Reutenauer, 自由李代数, 《伦敦数学会专著》新系列第 7 卷, 1993 年。[11] W. R. Schmitt, 关联霍普夫代数, 《纯粹与应用代数杂志》**96**, 299–330, 1994 年。[12] J.-P. Serre, 李代数与李群, W. C. Benjamin 出版公司, 1965 年。