通过 Kuramoto-Sivashinsky 方程研究受驱系统的热力学

E. Hansen，[1,1,2] W. Barham 和 P.J. Morrison[1)] 德克萨斯大学奥斯汀分校聚变研究所[2)] 洛斯阿拉莫斯国家实验室理论部

（*电子邮箱：ehansen99@utexas.edu）

（日期：2026年1月12日）

我们考察 Kuramoto-Sivashinsky（KS）方程所描述的受驱湍流与热力学第二定律之间的差异。我们利用度量辛动力学的统一热力学算法，分析一个由速度和熵密度构成的一般系统，并表明，由于外部能量源的作用，KS方程具有正谱，这使其无法进行度量辛描述。我们构造了KS方程的一种变体，该变体能够单调地产生熵，但此变体系统的平衡态仅为空间常数。我们通过数值实验比较KS方程及其热力学变体的演化。KS方程的驱动效应进一步增加了这一热力学系统的熵，从而使熵的产生与KS方程的能量源相协调。我们还进行了进一步的数值实验，限制KS方程中的正谱，以确定其对系统时间演化的影响。对不稳定性的增长率进行缩放，可在较慢的时间尺度上复现相似行为；而引入单个正谱，则可复现平衡态、相对平衡态的形成以及向混沌的转变。

arXiv:2601.05389v1 [nlin.CD] 8 Jan 2026

I. 引言

热力学第二定律通常与无序的普遍增加联系在一起。在流体的语境中，这被解释为流体性质的均匀分布。[1] 然而，许多物理系统的实例表明，图样会自发涌现，并形成非平凡解。这里列举其中四个例子。在热燃烧研究中，火焰前沿会呈现复杂的运动。热膨胀与扩散相互作用形成褶皱，其振幅受到气体中湍流的限制。[2] 在聚变反应堆中的等离子体研究中，一种称为俘获离子模的不稳定性会自发发展，并对等离子体约束产生重大影响。俘获离子模的稳态表现为振荡，这些振荡由离子与电子碰撞激发，并通过 Landau 阻尼过程衰减。[3] 在研究沿倾斜平面流动的薄膜时，重力加速度与黏性耗散之间的竞争会形成波状图样。[4–6] 在化学湍流和反应扩散系统的研究中，扩散为某些反应平衡态提供能量，而高阶黏性阻尼使稳定图样得以形成。[7] 在上述每个例子中，我们都观察到热力学第二定律所预期的耗散与促使振荡增长的机制之间的竞争。我们试图理解，在图样形成的情形下，熵是如何演化的。

通过分离长波长和短波长行为，对描述上述各个例子的模型系统进行了渐近分析。在所有情况下，这都会得到相同的约化模型，即 Kuramoto-Sivashinksy（KS）方程，[8]

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v v_x = -v_{xx} - \nu v_{xxxx}\,, \qquad 0 \le x \le L\,. \tag{1}$$

这里，$v(x,\ t)$ 是一个因变量，取决于空间区域中的位置 x 和时间 t。在本研究中，我们假设空间区域具有周期性。对于燃烧，$v(x,\ t)$ 表示火焰前沿表面扰动的梯度。对于俘获离子模，v 表示按比例缩放的电势。对于薄膜，v 表示流函数。对于化学湍流，v 表示振幅相位的梯度。

KS方程通过二阶导数项体现不稳定性，并通过超黏性项体现耗散，v_{xxxx}；这些项与非线性对流导数相互作用，其平衡决定了系统的行为。此外，KS方程足够简单，因此可以运用通常用于离散映射的非线性动力学工具。随着KS方程的长度尺度增大，非平凡的驻波逐渐形成，并发生分岔，转变为行波和更高波数的胞状解。[9–12] 随着波解的形成，还会观察到混沌和奇异吸引子的出现；许多傅里叶模态会发生耗散，这使得人们能够估算该奇异吸引子的维数。[8, 13–15] 因此，KS方程展现了具有强迫和耗散的系统所需的多种行为，可作为受驱动湍

流体。

在此，我们考察KS方程所描述的非线性动力学和图样形成如何与普适熵的增长相一致。这可以通过度量辛形式实现；该形式描述了满足热力学第一定律和第二定律的系统。[16–18] 具体而言，度量辛系统采用对称括号（这意味着退化梯度流），将耗散项加入能量守恒的哈密顿描述中。耗散会单调地产生某种由哈密顿动力学守恒的量，从而将热力学可逆系统转变为不可逆系统。近期提出的统一热力学（UT）算法运用非平衡热力学原理，为特定系统选择双向量，以构造这一对称括号。已有多个系统以这种方式配备了度量辛括号，其中包括具有热传导的流体 Navier–Stokes–Fourier 系统。[19,20] 去除耗散性和强迫性的高阶导数项后，KS方程与Burgers方程和一维 Navier–Stokes 方程相一致，因此也以相同方式满足热力学第一定律。鉴于它与度量辛流体系统的相似性，我们提出疑问：能否运用UT算法找出KS方程所需的生成熵?

正如我们将要展示的，答案是否定的，原因恰恰在于驱动会导致不稳定性出现。然而，由于 KS 系统存在小尺度耗散，可以为仅包含耗散的度量辛 KS 方程构造一种熵。随后，我们对这个度量辛 KS 系统进行了一系列数值实验。围绕 KS 方程的文献十分丰富，其中提供了许多稳态解和行波解的实例，也展示了波相互作用如何形成混沌，以及能量的生成与耗尽。这些实例将在度量辛 KS 系统中进行检验，以确定其中是否保留了任何混沌行为。我们还可以利用 KS 方程的演化，确定当不稳定模态受到驱动时，正定的度量辛熵会发生什么。去除不稳定模态的修改也启发了一种改变 KS 方程不稳定性的新方法；我们将检验当所有正谱的振幅发生变化，或仅保留某些模态时，会形成何种解。

II. KS方程的度量辛结构 TION

如前所述，UT 算法将度量辛系统的耗散动力学与该系统的热力学通量 J^α 和力 Z_α 联系起来。

考虑一个速度为 v 、熵密度为 σ的系统。随后，UT 算法将该系统的动力学规定为[20]

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t}-\{v,H\}&=\mathcal{L}^v(J^v)\,,\\ \frac{\partial \sigma}{\partial t}-\{\sigma,H\}&=\mathcal{L}^\sigma(J^\sigma)+Z_\alpha\tilde{L}^{\alpha\beta}Z_\beta\,,\end{aligned}\tag{2}$$

其中， $\{,\}$ 是一个泊松括号，

$$H=\int_0^L\left(\frac{1}{2}v^2+\sigma T\right)dx\tag{3}$$

是系统的总能量，[21] $\tilde{L}^{\alpha\beta}$ 是定义系统耗散动力学的现象学系数张量， $\mathcal{L}^\alpha$ 是一个伪微分算子。下文中，符号 $H_\alpha=\delta H/\delta\alpha$ 表示 H 关于场 α的泛函导数。若将力和通量取为

$$Z_\alpha=\mathcal{L}^\alpha_* H_\alpha\quad\text{and}\quad J^\alpha=-H_\sigma\tilde{L}^{\alpha\beta}Z_\beta\,,\tag{4}$$

若 $\mathcal{L}^\alpha_*$ 是算子 $\mathcal{L}^\alpha$的对偶，则系统的总能量将守恒。[20] UT算法将系统的度量辛括号定义为双向量的 Kulkarni-Nomizu 积[18]

$$\begin{aligned}&\int_0^L\Sigma(dF,dG)M(dK,dN)+\Sigma(dK,dN)M(dF,dG)\\ &-\Sigma(dF,dN)M(dG,dK)-\Sigma(dG,dK)M(dF,dN)dx\end{aligned}\tag{5}$$

的双向量

$$\begin{aligned}\Sigma(dF,dG)&=(\mathcal{L}^\alpha_*F_\alpha)\tilde{L}^{\alpha\beta}(\mathcal{L}^\beta_*G_\beta)\,,\\ M(dF,dG)&=F_\sigma G_\sigma\,.\end{aligned}\tag{6}$$

接下来，我们将尝试定义一种熵，使得与该熵耦合的KS方程构成一个度量辛系统。为此，我们希望恢复熵平流，因此将Burger方程的李-泊松括号修改为[21]

$$\begin{aligned}\{F,G\}=\int_0^L&-\frac{1}{3}v(F_v\partial_x G_v-G_v\partial_x F_v)\\ &-\sigma(F_v\partial_x G_\sigma-G_v\partial_x F_\sigma)dx\,.\end{aligned}\tag{7}$$

注意，总熵 $S=\int_0^L\sigma dx$ 对于任意泛函 F都满足 $\{F,S\}=0$，因为度量辛形式要求 S是一个Casimir不变量。[18] 除了熵平流之外，我们不希望改变KS方程的任何动力学，因此除 L^{vv} 外，我们令唯象系数 ˜为零。随后，UT算法给出一个系统

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t}+vv_x&=-\mathcal{L}^v(T\tilde{L}^{vv}\mathcal{L}^v_*(v))\,,\\ \frac{\partial \sigma}{\partial t}+\partial_x(\sigma v)&=\tilde{L}^{vv}(\mathcal{L}^v_*(v))^2\,,\end{aligned}\tag{8}$$

只要将温度视为常数即可。（这允许KS方程的速度单向耦合到熵中。）

我们注意到，在假设 $T > 0$、 $L^{vv} > 0$下，式（8）中速度方程右端的算子具有负谱˜，因为$\mathcal{L}^v\mathcal{L}^v_*$ 对于任意选取的伪微分算子都是正的。然而，算子 $T_{KS} \equiv -\partial_{xx} - \nu\partial_{xxxx}$ 的谱中有一个正元素，因为它作用于傅里叶空间中的一个元素 e^{ikx}时，结果为（$k^2 - \nu k^4$）e^{ikx}，且当$k \le k_c \equiv \sqrt{\nu^{-1}}$ 足够小时， $k^2 - \nu k^4 \ge 0$ 。这表明，KS方程在长波长下的不稳定性阻碍了通过UT 算法定义熵。

为了保留KS方程中符合热力学一致性的部分，我们发现必须移除系统的不稳定模态。若将速度剖面写作

$$v(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k e^{2\pi ikx/L}$$

用其傅里叶分量 v_k表示，对 $v(x)$应用算子 T_{KS} 的结果为

$$T_{KS}v(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k^2 - \nu k^4) v_k e^{2\pi ikx/L} . \tag{9}$$

为排除 KS 系统中的不稳定性，我们将 T_{KS} 的作用限制在耗尽的模态上，从而定义一个滤波耗散算子

$$T_{diss}v(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k^2 - \nu k^4)\Theta(|k| - k_c) v_k e^{2\pi ikx/L} , \tag{10}$$

其中 $\Theta(|k|-k_c)$ 是 Heaviside 阶跃函数，仅当 $|k| \ge k_c$ 时才取非零值。该算子只有非正谱，因此符合 UT 算法所要求的形式。事实上，写作 $T_{diss} = -\mathcal{L}^v\mathcal{L}^v_*$ 后，我们甚至可以通过在傅里叶基上计算其平方根，写出 $\mathcal{L}^v$

$$\mathcal{L}^v v(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{k^2 - \nu k^4}\,\Theta(|k| - k_c) v_k e^{2\pi ikx/L} . \tag{11}$$

注意到， $\mathcal{L}^v = \mathcal{L}^v_*$ 是自伴算子。通过使用 T_{diss}和 $\mathcal{L}^v$ 作为系统的新微分算子，我们可以得到符合热力学一致性的 KS 方程约化形式

$$\frac{\partial v}{\partial t} + vv_x = T_{diss} v , \tag{12}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \partial_x(\sigma v) = \frac{1}{T}(\mathcal{L}^v v)^2 . \tag{13}$$

鉴于我们主要关注全局熵 $S = \int_0^L \sigma dx$的发展，对式 (13) 在空间域上积分可得

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \int_0^L \frac{1}{T}(\mathcal{L}^v v)^2 dx , \tag{14}$$

这就是总熵产生率。

本节最后，我们转而讨论另一种视角，来看 KS 方程如何与度量-辛观点相冲突。我们可以得到一个能够重现 KS 系统行为的对称括号。为此，我们可以对这些双向量取 Kulkarni-Nomizu 积

$$M(dF, dG) = F_\sigma G_\sigma \tag{15}$$

and

$$\Sigma(dF, dG) = -\frac{\partial F_v}{\partial x}\frac{\partial G_v}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 F_v}{\partial x^2}\frac{\partial^2 G_v}{\partial x^2} , \tag{16}$$

由此得到速度和熵的方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + vv_x &= -v_{xx} - \nu v_{xxxx} , \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \partial_x(\sigma v) &= -\frac{1}{T}(v_x)^2 + \frac{\nu}{T}(v_{xx})^2 . \end{aligned} \tag{17}$$

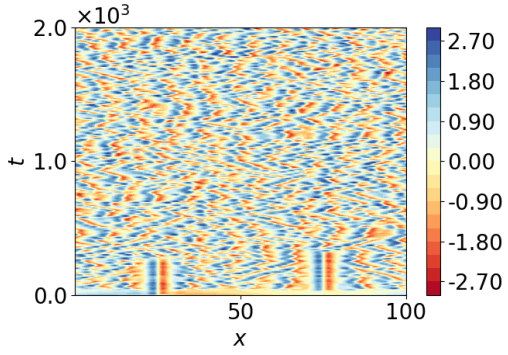
这样便能恢复 KS 方程，但请注意，此时总熵的变化方式为

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{T}\int_0^L \nu(v_{xx})^2 - (v_x)^2 dx , \tag{18}$$

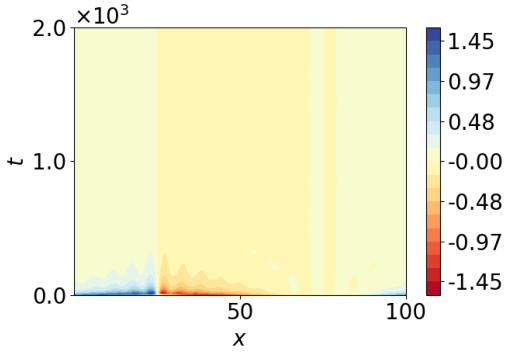
它不再严格非负。这是因为双向量 Σ 不再是正定的，而正定性是产生熵的系统所必须具备的。

III. 耗散性 KS 系统的数值研究

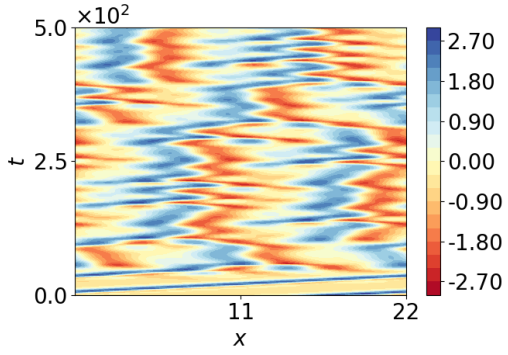
我们已经定义了热力学一致的 KS 方程，现在进行数值研究，以确定热力学一致的系统中的解如何变化。使用傅里叶基定义 T_{diss} 和 $\mathcal{L}$ ，使伪谱空间离散尤为方便。vv_x 非线性卷积采用 3/2去混叠规则通过伪谱方法计算，快速傅里叶变换则使用 SciPy Python 软件包进行。[22]由于 KS 方程具有刚性，我们采用 Cox 和 Matthews 开发、Kassam、Trefethen 以及 Cvitanovic 等人用于研究 KS 方程的四阶指数时间积分器。[14,15,23] 指数方法的局部截断误差不会随刚性特征值缩放，因此



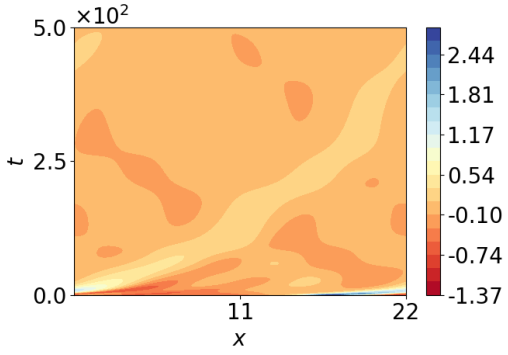
(a)



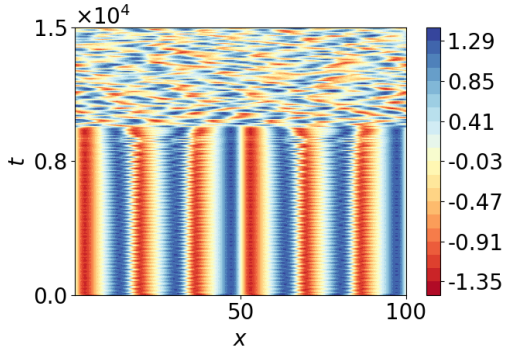
(b)



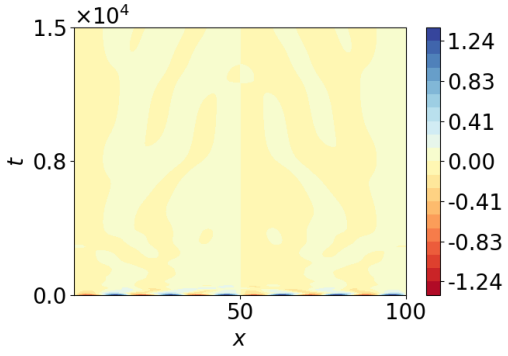
(c)



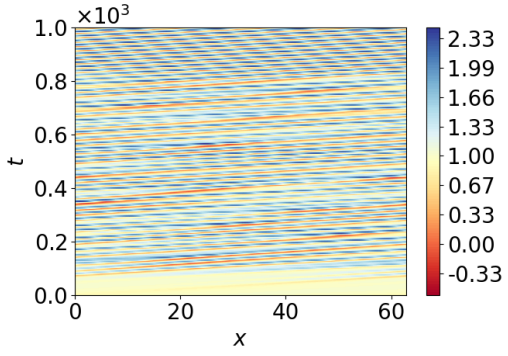
(d)



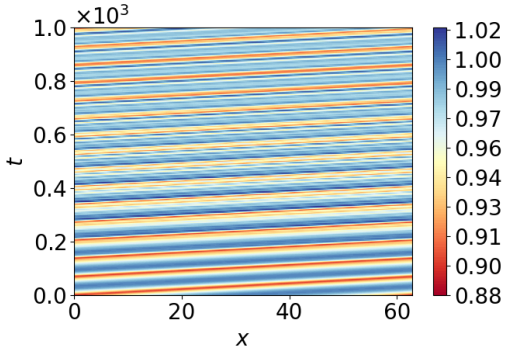
(e)



(f)

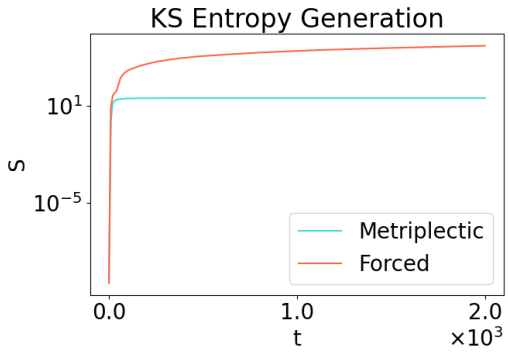


(g)

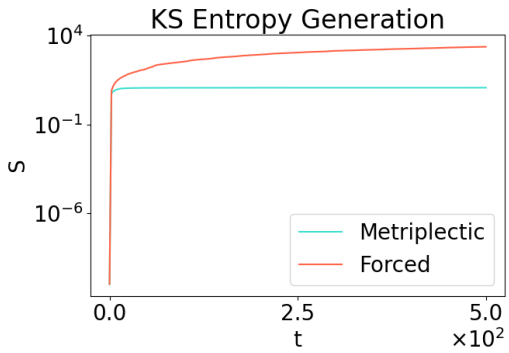


(h)

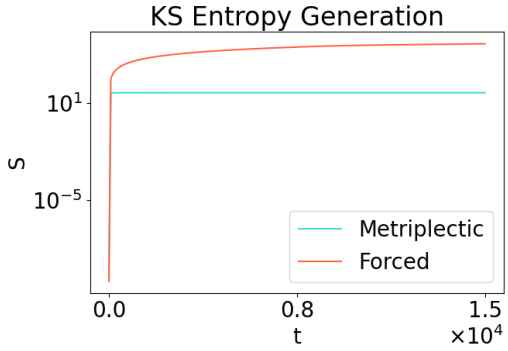
图 1：KS 方程的解（左）在度量辛动力学作用下耗散（右）。每一行对应不同的初始条件（详情见正文）。



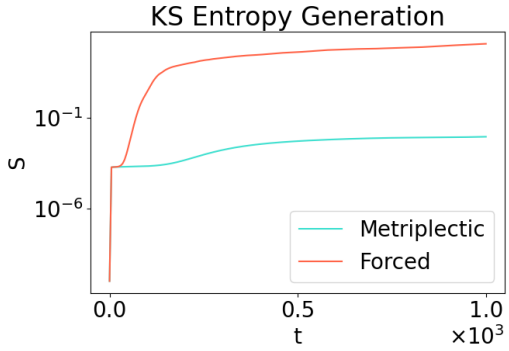
(a) $\cos(\frac{x}{16})(1+\sin(\frac{x}{16}))$



(b) 行波



(c) 奇异双曲点



(d) 双曲正割剖面

图 2：与 Kassam Trefethen 基准测试条件、行波解、奇异双曲点和双曲正割剖面的度量辛动力学相关的熵产生。

与类似方法相比，这种方法表现良好。

为了评估热力学一致性的影响，我们选取了多种初始条件，用于研究文献中已有探讨的 KS方程。这些条件呈现出初始的波状行为及相互作用，随后逐渐瓦解为混沌和湍流。这里所说的是，运动在时间和空间上定性地呈现出大振幅振荡，但没有明显的周期。我们仔细考察了 Kassam 和 Trefethen 使用的基准初始条件，[14]

$$v(x,0) = \cos\left(\frac{x}{16}\right)\left(1+\sin\left(\frac{x}{16}\right)\right), \qquad (19)$$
$$0 \le x \le 32\pi\,,\ \nu = 1\,.$$

另一个被混沌和奇异吸引子吸收的已确立行波，是 Hyman、Nicolaenko 和 Zareski 观测到的奇异双曲点，其初始剖面为[8]

$$v(x,0) = \frac{-21\sin\left(12\pi x/\sqrt{253}\right) - \sin\left(2\pi x/\sqrt{253}\right)}{\sqrt{253}}\,, \qquad (20)$$
$$0 \le x \le 2\pi\sqrt{253}\,,\ \nu = 4\,.$$

我们还通过 Cvitanovic 等人发现的受扰行波以及一个演化为行波的双曲正割剖面来考察相对平衡解。受扰行波的初始条件通过对 Cvitanovic 等人给出的剖面进行插值得到；[15] 我们在图 3 中展示了这一剖面。这类解被用-

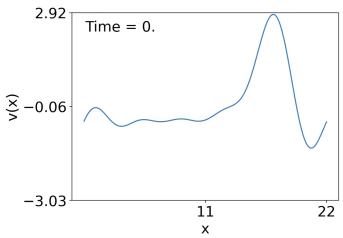


图 3：用于初始化的 TW1 插值剖面。

了解 KS方程所表现出的哪些行为可能出现在度量辛设定中，将很有帮助。

我们在图 1 中综述了这些情形在度量辛系统下的演化。

Kassam 和 Trefethen 在图 1a 中展示的基准初始条件开始出现非线性拍频并形成高阶波，但在图 1b 中形成大梯度后，波动便逐渐衰减。从这一阶段起，运动局限于微小波动，直至波形收缩至零。图 1c 中，一个受扰的KS方程行波解原本在解体前绕计算域两圈；而在图 1d 中，它以类似方式大幅减速并失去能量。图 1e 所示奇异双曲点的特征是向混沌的迟发转变，但在图 1f 的危机发生之前，运动早已衰减殆尽，因此这种转变从未发生。这些此前复杂的解在度量辛动力学过程中都逐渐衰减至零。双曲正割波形与这些情形略有不同。在KS方程的动力学下，该波形经历混沌并快速振荡，直至在图 1g 中形成四周期行波。当度量辛系统中的强迫被消除时，波形则在图 1h 中绕计算域传播，同时经历非线性拍频并形成高阶波。该模态并未完全衰减，也尚未达到常数值。不过，从这些例子中我们得出结论：度量辛系统动力学会降低KS方程振荡的振幅。

我们对所定义的度量辛 KS 系统进行一些分析，以刻画其平衡态以及行波的可能性。通过拉格朗日乘子法，使熵最大化的度量辛系统平衡态必须满足[24]

$$\frac{\delta S}{\delta v} - \lambda \frac{\delta H}{\delta v} = -\lambda v = 0\,, \tag{21}$$
$$\frac{\delta S}{\delta \sigma} - \lambda \frac{\delta H}{\delta \sigma} = 1 - \lambda T = 0\,,$$

这表明最大熵解满足 $v = 0$。KS方程的伽利略不变性意味着，常数 v 解也可能具有最大熵。[15] 然而，平衡态不必满足这一变分原理，而且上述双曲正割剖面似乎并不满足。

为刻画 KS方程的所有平衡态，我们考察 KS方程解相对于其空间平均值的偏差

$$\bar{v} = \frac{1}{L}\int_0^L v(x,t)dx\,. \tag{22}$$

通过对 KS方程进行空间积分，我们得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^L v dx + \int_0^L v v_x dx = \int_0^L -\mathcal{L}^v\mathcal{L}^v_* v dx\,, \tag{23}$$

or

$$L\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\int_0^L \mathcal{L}^v\mathcal{L}^v_* v dx - \left[\frac{1}{2}v^2\right]_0^L = 0\,, \tag{24}$$

因为 $\mathcal{L}^v\mathcal{L}^v_*$ 仅作用于取平均后为零的高频模态。这表明 $\bar{v}$ 在空间和时间上均为常数。因此，我们可以将 KS方程改写为

$$\frac{\partial (v-\bar{v})}{\partial t} + (v-\bar{v})\partial_x(v-\bar{v}) + \bar{v}\partial_x(v-\bar{v}) \tag{25}$$
$$= -\mathcal{L}^v\mathcal{L}^v_*(v-\bar{v})\,.$$

乘以 $v-\bar{v}$ 并在空间上积分，得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^L (v-\bar{v})^2 dx = -\int_0^L (v-\bar{v})\mathcal{L}^v\mathcal{L}^v_*(v-\bar{v})dx \tag{26}$$
$$-\int_0^L ((v-\bar{v})^2 + \bar{v}(v-\bar{v}))\partial_x(v-\bar{v})dx$$
$$= -\int_0^L (\mathcal{L}^v_*(v-\bar{v}))^2 dx \le 0\,,$$

这里我们进行了分部积分，并利用了第二个积分为零这一事实。结合 $\bar{v}$的守恒，这一结果意味着度量辛 KS 系统会将任意初始条件演化至其平均值。若解是平衡态或随时间周期变化，则该不等式必须对所有时间取等号，即 $\mathcal{L}^v_*(v-\bar{v}) = 0$。但此时平衡态满足

$$v v_x = -\mathcal{L}^v\mathcal{L}^v_* v = 0\,, \tag{27}$$

并对空间积分，得到

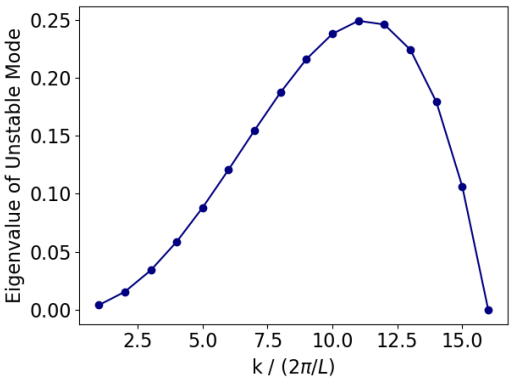
$$\frac{1}{2}v(x)^2 = \frac{1}{2}v(0)^2\,. \tag{28}$$

因此，我们得出结论：度量辛 KS 系统唯一的平衡态是常数。

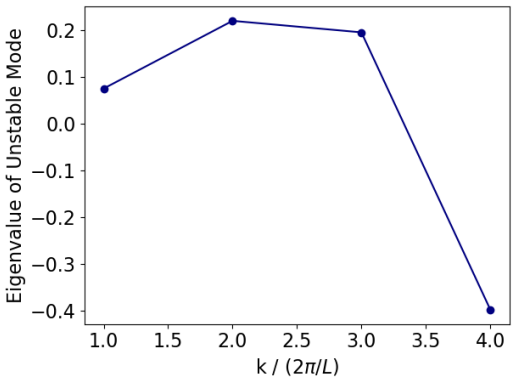
现在，我们展示图 2 所示各情形下与度量辛动力学相关的熵。既然已根据 $v(x,t)$ 定义了总熵的演化，我们便可以让 v 由原始 KS 方程决定，从而得到正定熵。我们的主要结果聚焦于这种受强迫的系统熵与纯粹度量辛动力学之间的区别。按照我们的方法，度量辛动力学表现出正定的熵增长。但我们发现，在所有情形下，原始 KS 方程的动力学都会使熵增加得比单独的耗散动力学更多。与我们的预期相反，导致 KS 方程中出现非平凡图样的强迫效应并不会降低度量辛熵。这一观点确立了图样形成与热力学第二定律的一致性。

IV. 强迫强度的变化

上一节对 KS方程及其度量辛约化的分析，促使我们研究 KS 方程

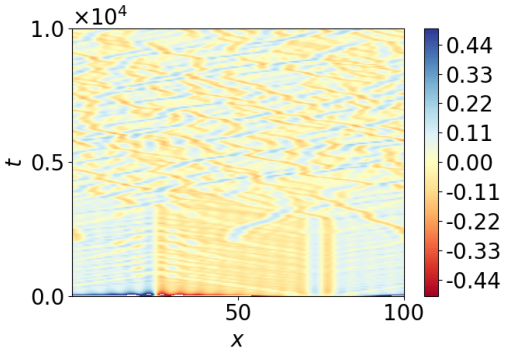


(a) $\nu = 1$和 $L = 32\pi$的谱。

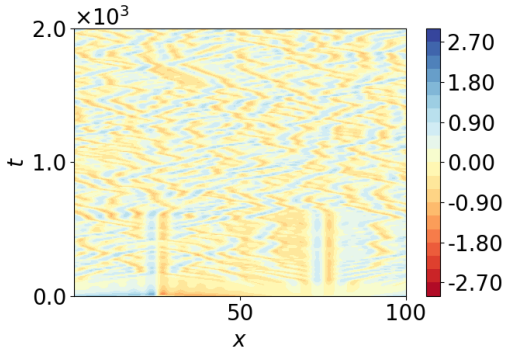


(b) $\nu = 1$和 $L = 22$的谱。

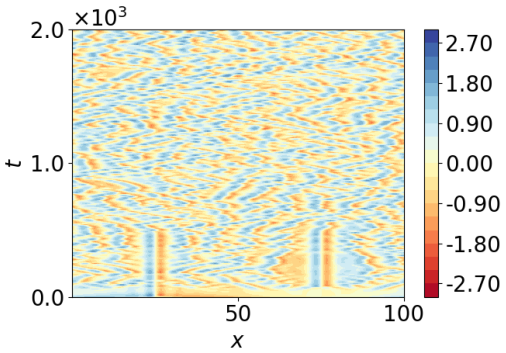
图 4：Kassam Trefethen 基准测试和 Cvitanovic 等人的 TW1 条件参数对应的正谱。



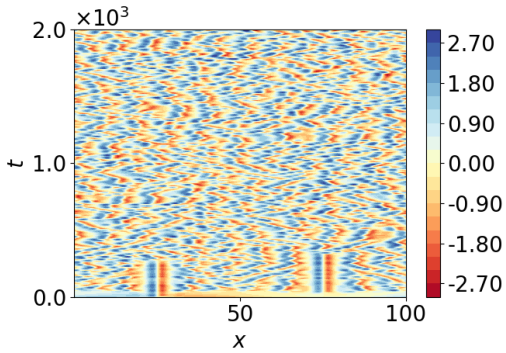
(a) $\epsilon = 0.01$



(b) $\epsilon = 0.2$



(c) $\epsilon = 0.5$



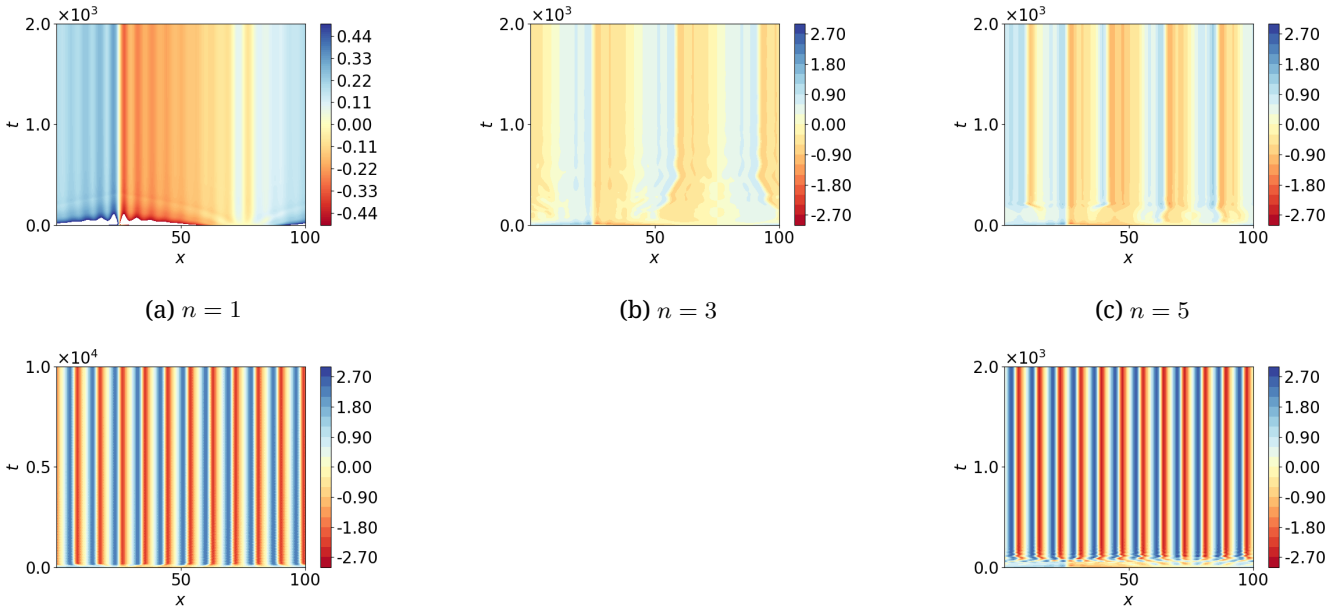
(d) $\epsilon = 1$

图 5：随着 T_{KS} 正谱的增长率线性增加， $v(x,\ t)$发生的时空变化。随着参数 ϵ 减小，向混沌的转变仍然存在，但在动力学过程中发生得更晚，且振荡的振幅减小。

作为度量辛系统的一种外部扰动时所产生的不稳定性。现在，我们将分析正谱对前文提到的两组初始条件的影响。在前几节定义度量辛 KS 系统时，这些谱均已被移除。在

为了研究加入能量注入的影响，我们可以考虑两种方法。我们将 T_{KS} 重写为耗散傅里叶分量与驱动傅里叶分量之和

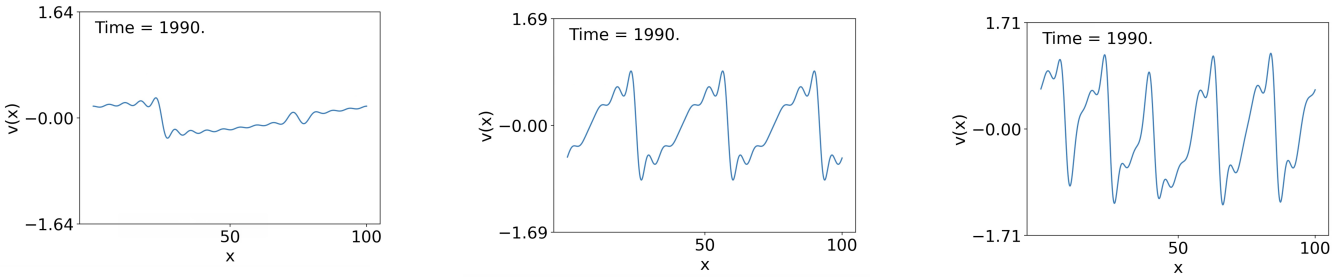
$$T_{KS} = -\mathcal{L}^v \mathcal{L}_*^v + \epsilon(T_{KS} + \mathcal{L}^v \mathcal{L}_*^v)\,, \tag{29}$$



(a) $n = 1$ (b) $n = 3$ (c) $n = 5$

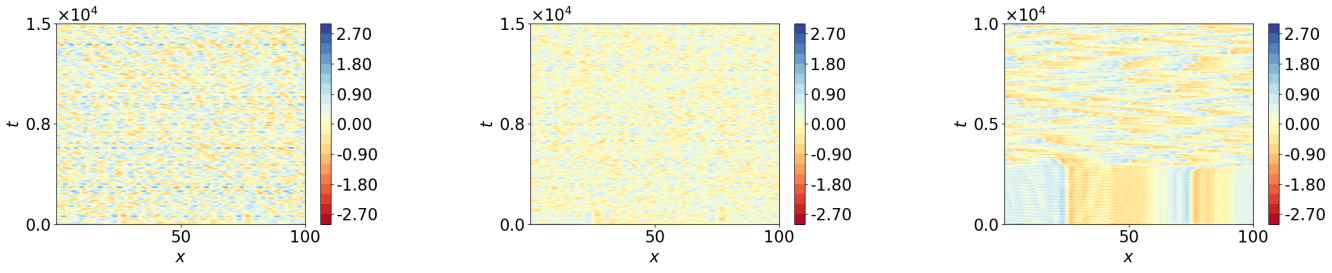
(d) $n = 11$ (e) $n = 12,\ 13$

图 6： $v(x,\ t)$ 平衡态的等高线，这些平衡态由一个或多个带标签的受驱正谱注入度量辛 KS 系统而形成。



(a) $n = 1$ (b) $n = 3$ (c) $n = 5$

图 7：由 $n = 1,3,5$ 个受驱谱得到的平衡态剖面。

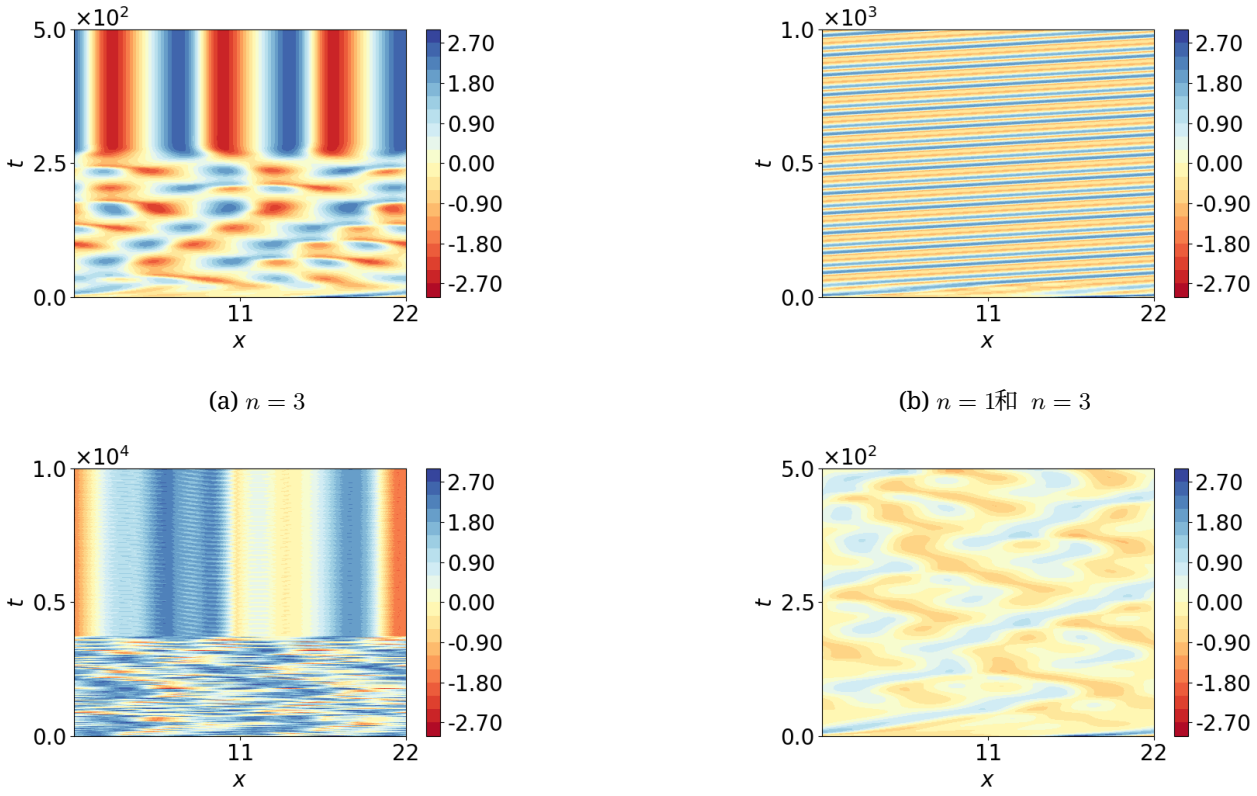


(a) $n = 14$ (b) $n = 15$ (c) $n = 1$,2、3、4

图 8：不稳定波数注入的混沌解。

其中 $T_{KS} + \mathcal{LL}_*$ 表示 KS 反扩散和超黏性的正谱，例如图 4 所示。一种重新引入注

使度量辛 KS 系统保持稳定的方法是缓慢增大 ϵ，从而一次性允许所有正傅里叶系数，尽管增长率较低。另一种——



(a) $n = 3$

(b) $n = 1$和 $n = 3$

(c) $n = 2$ 和 $n = 3$

(d) $\epsilon = 0.2$

图 9：行波解 TW1 的平衡态。

种方法是将正谱中的一部分小波数作为子集，分别驱动它们。通过选择允许进入 KS 方程的模态，可以研究哪些驱动组合能使 KS 系统呈现某些特定行为。

向哈密顿系统或度量辛系统中添加强迫分量的方法，可以与端口哈密顿（pH）系统的概念相比较。pH 系统描述了一个原本为哈密顿系统的系统与其环境之间的相互作用。[25] 这是通过狄拉克结构以及额外的功率变量对来实现的，用以描述系统边界，并描述通过边界的能量流、哈密顿动力学的外部影响以及能量耗散。不可逆 pH 系统还能够通过引入接触向量场来考虑熵产生。[26] 这与我们的方法类似，因为它会产生熵并守恒系统的总能量。然而，尽管我们研究中的正谱对应于外部强迫，但它们并不被解释为经由系统的空间边界传入。

我们对 Kassam-Trefethen 初始条件进行了数值研究。如其中所研究的，这一初始条件由 15 个波数定义，其正谱由给定的相关参数 $L = 32\pi$和 $\nu = 1$确定，如图 4a 所示。这使我们能够考虑模态的许多子集，以确定这一初始条件如何过渡到混沌。在未经修改的 KS方程动力学下，(20) 演化为由传播波构成的有序图样，并在较晚时刻过渡到混沌吸引子。然而，度量辛系统耗散了该模态的能量，在波纹逐渐消退之前，仅有微小的波纹出现。因此，必须对该系统施加强迫，才能维持非平凡图样。

我们首先同时提高所有正谱的增长率。图 5 展示了这一过程；图 5d 展示了原始 KS 方程的动力学，其中有 $\epsilon = 1$。将 ϵ降至原始 KS 方程驱动力的二分之一后，我们看到，随着运动的推进，会出现相似的图样，并从 KS 方程的动力学崩解为奇异吸引子。然而，我们注意到，向非线性动力学的转变发生得更晚。当 ϵ 继续降至 0.2 和 0.01 时，这一图样仍然持续，表明无论增长率大小如何，所有正谱的存在最终都会导致向混沌的转变

速率。

在分析了同时控制所有模态驱动时发生的情况后，我们通过图 6 考察向动力学中注入单个波数的影响。首先，我们加入最弱的模态，它对应于谱取略大于零的正值时的第一个 $n = 1$ 非零波数。此时，动力学受到耗散，但最终达到稳态，如图 6a 和图 7a 所示。第三个和第五个正谱 $n = 3$ 和 $n = 5$也呈现出这一图样：稳态振幅增大，达到稳态所需的时间也随之延长。驱动最不稳定的模态时也会形成平衡态。当 $n = 11$时，该模态似乎在振荡，但在很长的时间尺度内，动力学仍保持频率 11。模态 $n = 12$和 $n = 13$的组合也会形成平衡态。所得稳态的结构也遵循受驱动波数的周期，不过会出现小幅波动。最后一种情况下，平衡态的周期性遵循 $n = 12$ 模态；我们可以将其理解为较强的模态决定了动力学。

上述注入一个或两个正谱的情形产生了稳定的平衡态。然而，如果我们在 $n = 14$ 或 $n = 15$ 处注入最后两个不稳定模态，就会看到图 8a 和 8b 中混沌的发展。值得注意的是，这些模态会引发向混沌的转变，而更强的模态 $n = 11$ 和 $n = 12$ 却不会。如果我们也能注入前四个波数，并找到一个随时间推移而瓦解的不稳定周期解，那么也会出现混沌，如图 8c 所示。这与注入最不稳定模态的情形形成了有趣的对比：在后一种情形中，我们看到一个起初似乎可能不稳定、但随后趋于稳定的平衡态。此处的对比表明，导致混沌的是不稳定性之间的相互作用，而不是不稳定性的存在本身。

在分析了强迫该系统的各种可能性之后，我们转而研究 Cvitanovic 等人的受扰行波 TW1。由于这一初始条件的长度尺度小得多 $L = 22$，可注入系统的正谱只有三个，但我们仍能观察到非平凡行为。逐个注入波数时，我们会得到一个平衡态；作为示例，图 9a 展示了注入最后一个不稳定波后的结果。这与前一种情况有一个共同点，不过在此情况下，所有模态都会产生稳定的平衡态。考察模态的组合时，加入 $n = 1$和 $n = 3$ 会得到图 9b 所示的相对平衡态，它能长时间持续，且不会向混沌转变。同时注入 $n = 2$ 和 $n = 3$ 时，则会出现一些混沌，如图 9c 所示，但最终会形成一个周期轨道。我们还观察到一种

当所有不稳定谱都存在，且通过缩放因子 $\epsilon = 0.2$ 和 $\epsilon = 0.5$降低增长率时，向混沌的转变仍会继续。在 $\epsilon = 0.2$ 情况下，我们看到行波开始传播，但尚未完成一个周期便瓦解了。这个例子进一步说明，KS 方程的解对能量注入机制非常敏感，因此，要维持给定的行波或其他平衡态，必须施加恰当的强迫。

V. 讨论

为了在度量辛框架下分析 Kuramoto–Sivashinsky 方程，我们移除了能量注入机制所产生的所有正谱。将强迫与耗散分离，实现了多个目标。我们发现，KS方程的混沌解在度量辛动力学下既会耗散，也会呈现非平凡行为。当 KS 方程受到强迫时，UT 算法规定的熵会进一步增加，从而使有序系统与熵产生相一致。模态滤波表明，当不稳定性较少时，KS 系统中的不稳定行为可简化为平衡态和相对平衡态。即使所有不稳定模态的强度都降低，最终向混沌的转变仍会发生。因此，我们的方法不仅从度量辛动力学角度，也从 KS 方程所蕴含的著名动力系统意义上，提供了独特的视角。

鉴于我们的许多分析都依赖于对 KS 系统进行数值求解，我们在此讨论该方法的一些局限性及其扩展方向。与以往针对 Navier–Stokes–Fourier 系统的研究不同，本次模拟并未采用能量守恒离散化。[19] 进一步的分析可以考虑采用辛指数方法或离散梯度方法，以严格守恒系统的能量。除了利用 KS 系统的守恒性质外，我们的模拟还利用连续傅里叶基来计算熵中包含的伪微分算子。因此，我们的模拟无法分辨以行波解形式出现的振荡激波。[12] 若要完成对 KS 方程解的分析，我们还需要通过间断伽辽金格式或其他激波捕捉格式进行计算。 $\mathcal{L}$

最后，我们讨论 KS方程所依托系统的热力学。在 KS方程推导出来后的几十年间，人们发现其若干推导背景具有热力学一致性。具体而言，我们知道不可压缩纳维–斯托克斯系统是度量辛的，而引力是一种保守力，

因此，沿平面向下流动的薄膜具有热力学一致性，并且存在相应的熵。[27] 此外，具有 Landau 碰撞算子的双组分等离子体的 Vlasov-Maxwell 系统是度量辛的。[28] 这包括电子–离子碰撞和 Landau 阻尼，它们是俘获离子模的 LMRT 描述的关键组成部分。尽管我们从所定义的熵中观察到了有趣的行为，但基于消除不稳定模态而定义的熵本质上是人为的。将我们的熵度量与这些背景中的物理熵进行比较，或许能为本研究的意义提供支持。对这些环境进行另一种渐近分析，也可能得到一个保留热力学一致性的约化模型，从而构造出真正具有度量辛结构的 KS方程。

致谢

本研究获得美国能源部资助，资助编号为 DE-FG02-04ER-54742。WB 获得洛斯阿拉莫斯国家实验室实验室指导研究与开发计划的支持，项目编号为 20251151PRD1。洛斯阿拉莫斯实验室报告 LA-UR-25-32124。

数据可用性声明

支持本研究结论的数据可在提出合理请求后向通讯作者获取。

[1]P. K. Kundu、I. M. Cohen 和 H. H. Hu。《流体力学》。Academic Press，圣迭戈，第2版，2002年。[2]G. I. Sivashinsky。层流火焰中流体动力学不稳定性的非线性分析——I. 基本方程的推导。《Acta Astronautica》，4(11):1177–1206，1977年。[3]R. E. LaQuey、S. M. Mahajan、P. H. Rutherford 和 W. M. Tang。俘获离子模的非线性饱和。《物理评论快报》，34:391–394，1975年2月。[4]D. J. Benney。液膜上的长波。《数学与物理学杂志》，45:150–155，1966年。[5]G. M. Homsy。波状黏性液膜流的模型方程。《应用数学讲义》，15，1974年。[6]A. A. Nepomnyashchii。倾斜平面上液膜流的波状状态稳定性。《流体动力学》，9:354–359，1974年。[7]Y. Kuramoto 和 T. Tsuzuki。远离热平衡的耗散介质中浓度波的持续传播。《理论物理进展》，55(2):356–369，1976年2月。[8]J. M. Hyman、B. Nicolaenko 和 S. Zaleski。弱湍流界面的 Kuramoto-Sivashinsky 模型中的有序与复杂性。《Physica D: Nonlinear Phenomena》，23(1):265–292，1986年。[9]J. M. Greene 和 J.-S. Kim。Kuramoto-Sivashinsky方程的稳态。《Physica D: Nonlinear Phenomena》，33(1):99–120，1988年。[10]U. Frisch、Z. S. She 和 O. Thual。Kuramoto-Sivashinsky 模型胞状解的黏弹性行为。流体力学杂志，168:221–240，1986年。[11]D. Michelson。Kuramoto-Sivashinsky方程的稳态解。《Physica D: Nonlinear Phenomena》，19(1):89–111，1986年。[12]A. P. Hooper 和 R. Grimshaw。Kuramoto-Sivashinsky方程的行波解。Wave Motion，10 420，1988 5 405( ): – 。[13]B. Nicolaenko、B. Scheurer 和 R. Temam。Kuramoto-Sivashinsky方程的一些整体动力学性质：非线性稳定性与吸引子。《Physica D: Nonlinear Phenomena》，16(2):155–183，1985年。[14]A.-K. Kassam 和 L. N. Trefethen。刚性偏微分方程的四阶时间步进。SIAM科学计算杂志，26(4):1214–1233，2005年。[15]P. Cvitanović、R. L. Davidchack 和 E. Siminos。周期域中 Kuramoto–Sivashinsky流的状态空间几何。《SIAM应用动力系统杂志》，9(1):1–33，2010年。[16]P. J. Morrison。关于括号与耗散的一些观察。加利福尼亚大学伯克利分校纯粹与应用数学中心报告 PAM-228，1984年。可见 arXiv:2403.14698v1 [math-ph], 15 2024年3月。[17]P. J. Morrison。统一哈密顿系统与耗散系统的范式。《Physica D: Nonlinear Phenomena》，18(1):410–419，1986年。[18]P. J. Morrison 和 M. H. Updike。描述耗散的包容性类曲率框架：度量辛四重括号动力学。《物理评论E》，109:045202，2024年4月。[19]W. Barham、P. J. Morrison 和 A. Zaidni。利用一维热流体模型的度量辛四重括号结构，对其进行热力学一致离散化。《非线性科学与数值模拟通讯》，145:108683，2025年。[20]A. Zaidni 和 P. J. Morrison。用于构造热力学一致动力系统的度量辛四重括号算法。《物理评论E》，112:025101，2025年8月。[21]P. J. Morrison。理想流体的哈密顿描述。《现代物理学评论》，70:467–521，1998年4月。[22]C. Canuto、M. Y. Hussaini、A. Quarteroni 和 T. A. Zang。《谱方法：单一区域基础》。科学计算。施普林格，柏林、海德堡，第1版，2006年。[23]S. M. Cox 和 P. C. Matthews。刚性系统的指数时间差分。《计算物理学杂志》，176 455，2002 2 430( ): – 。[24]C. Bressan、M. Kraus、O. Maj 和 P. J. Morrison。向平衡态的度量辛弛豫。arXiv:2506.09787v*1 [* math-ph*]*, 2025。[25]A. J. van der Schaft 和 B. M. Maschke。具有边界能流的分布参数系统的哈密顿表述。《几何与物理学杂志》，42(1):166–194，2002年。[26]D. Eberard、B. M. Maschke 和 A. J. van der Schaft。将哈密顿系统扩展至热力学相空间：迈向不可逆过程的几何。《数学物理报告》，60(2):175–198，2007年。[27]M. Materassi 和 E. Tassi。耗散磁流体动力学的度量辛框架。《Physica D: Nonlinear Phenomena》，241(6):729–734，2012年。[28]M. Kraus 和 E. Hirvijoki。Landau碰撞算子的度量辛积分器。《等离子体物理学》，24 102311，2017年10月 10( ): 。