arXiv:2601.05422v1 [math.FA] 8 Jan 2026

对 Cabrelli 两部作品的变体

ELONA AGORA、JORGE ANTEZANA 和 DIANA CARBAJAL

献给我们亲爱的朋友 *Carlos Cabrelli*

摘要。本文在平移不变理论框架下探讨两个不同的问题。首先，我们为作用于有限生成平移不变空间的平移保持算子构造三角形式。对于正规算子，我们得到了对角分解。结果表明，特别是，任意有限生成平移不变空间都可以分解为主平移不变空间的正交和，并且这些空间在平移保持算子作用下还具有额外的不变性。其次，我们给出一种新的刻画，针对正测度的多重平铺集 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$，其中 $L^2(\Omega)$ 存在由环境空间 $\mathbb{T}^{k\times k}$ 中的指数函数构成的结构化 Riesz 基。此外，我们还给出一个更简单的充分条件，它推广了可容许性性质；对于二重铺砌集，该条件也是必要的。

1. 引言

本文探讨两个不同但彼此相关的问题，它们都与平移不变空间理论有关，并受到 CABRELLI 丰富研究成果中若干进展的启发 [2, 1, 9, 10]。

本文中，平移不变空间是 V 的一个子空间 $L^2(\mathbb{R}^d)$，它在某个格 $H \subset \mathbb{R}^d$ 的平移下保持不变；也就是说，$T_h V \subset V$ 对每个 $h \in H$，都有 $T_h f = f(\cdot - h)$。这些空间在调和分析的诸多领域中发挥着核心作用，例如小波与 Gabor理论、逼近理论、采样理论和信号处理。对于平移不变空间中提出的许多问题，可以借助诸如纤维化映射和值域函数(参见定义2.2 和2.3）[20, 6, 31, 7]等工具来处理。当空间由有限个函数的平移生成时，其整体复杂性基本上编码在一个由可测有限维空间（即纤维空间）构成的、以紧致区域为指标的场中。这一视角将无限维问题转化为参数化的有限维问题族，从而能够运用线性代数方法来解决这些问题。

本文着重探讨以下两个问题：

(P1) 为作用于有限生成平移不变空间的平移保持算子构造一种三角形式。

(P2) 为正测度的多重平铺集 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 提供一种新的刻画，使得 $L^2(\Omega)$ 存在一个具有周期频率集的指数函数 *Riesz* 基。

第一个问题（P1）建立在平移保持算子理论的基础之上。这类算子作用于平移不变空间，并与底层格的平移算子交换。对这类算子的分析可归结为通过值域算子（参见定义 3.2）研究它们的纤维表示；值域算子是作用于底层平移不变空间的纤维空间上的线性变换场

。平移保持算子的许多整体性质，都会反映在值域算子的逐点性质上，并且几乎处处一致成立 [7, 8]。

这种纤维视角的一个优点是，可以通过分析值域算子的局部分解，推导出作用于有限生成平移不变空间上的算子的全局规范分解。我们在 [2]，中首次提出了这一问题的一种处理方法，并构造了正规平移保持算子的对角型分解。更具体地，设 L 是在格 $H \subset \mathbb{R}^d$ 的平移作用下的有限生成平移不变空间 $V \subset L^2(\mathbb{R}^d)$，且 $L : V \to V$ 是一个正规平移保持算子。那么， L 可以分解为以下算子的正交和，这些算子在稠密定义域上定义为

$$\Lambda_a = \sum_{h \in H} a(h) T_h,$$

其中 $a = a(h)_{h \in H} \in l^2(H)$ 且其傅里叶变换本质有界。这些算子通常称为 s-特征值在 L 中的 [2](参见定义 3.11)。

在 (P1) 中，我们为作用于有限生成平移不变空间上的（不一定是正规）平移保持算子引入了一种新型的典范分解，称为 三角化。我们的主要结果（定理 3.6）表明，存在 V 的平移不变子空间，

$$V = V_\ell \supsetneq \cdots \supsetneq V_1,$$

使得对于每个 $1 \le j \le l$， $\mathcal{L}(V_j) = j$，且 $L(V_j) \subseteq V_j$。这里，$\mathcal{L}(W)$表示一个平移不变空间的最小生成元数W 证明借鉴了有限维线性代数中经典舒尔分解的思路。对于算子为正规的特殊情形，我们利用三角形式推导出一种对角分解（推论 3.8）。具体而言，我们证明存在一个将 V 分解为若干主平移不变子空间的正交分解，这些子空间对于是约化的。 L因此，我们得以重新得到 [2]的主要结果。我们的典范分解结果将 [7] 的经典分解定理推广到了有限生成空间，同时纳入了由某个平移保持算子下的不变性所诱导的附加结构。

第二个问题（P2）涉及指数函数基是否存在这一核心问题。研究这一问题的主要意义源于 Paley-Wiener 空间中的经典采样理论。给定可测集 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$，空间 PW_Ω 表示由 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中傅里叶变换支撑在 Ω 上的函数所构成的子空间， Ω通常称为谱。这些空间是平移不变空间的一个特例，因为它们在任意平移下都保持不变。当且仅当系统

$$E(\Gamma) := \left\{ e_\gamma : \gamma \in \Gamma \right\} \quad \text{where} \quad e_\gamma(\omega) := e^{2\pi i \gamma \omega}$$

是 $L^2(\Omega)$ 的指数函数 *Riesz* 基。 这意味着 $E(\Gamma)$ 在$L^2(\Omega)$ 中是完备的，并且满足

$$A \sum_{\gamma \in \Gamma} |c_\gamma|^2 \le \left\| \sum_{\gamma \in \Gamma} c_\gamma e^{2\pi i \gamma \omega} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \le B \sum_{\gamma \in \Gamma} |c_\gamma|^2, \quad \forall \{c_\gamma\} \in \ell^2(\Gamma),$$

对于某些正数 A， B。从采样的角度来看，集合 Γ 具有这样的性质：对于任意函数 $f \in PW_\Omega$，如果我们知道函数f 在 Γ 中各点处的取值，就有足够的信息唯一地重建该函数。

虽然指数函数正交归一系是 $L^2(\Omega)$最理想的基类型，但它们的存在会对 Γ 和 Ω施加非常严格的结构限制。事实上，已有证明表明，存在一些集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 不允许存在这样的基 [17,23, 28]。对这类系统的研究与 Fuglede 猜想 [16],密切相关。该猜想认为，集合 Ω 存在指数函数正交基，当且仅当它能沿某个离散集中的平移平铺空间 $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$，也就是说，

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \chi_\Omega(\omega+\lambda) = 1 \quad \text{for a.e. } \omega \in \mathbb{R}^d.$$

然而，对于维数为 $d \geq 3$[32, 24, 14, 15] 的情形，该猜想的两个方向都已被推翻；而对于 $d = 1$， 2，该问题仍未解决。尽管存在这些反例，该猜想在若干重要情形下仍然成立 [28, 21, 29]。值得注意的是，Fuglede 本人证明了：若 Λ 是 $\mathbb{R}^d$中的满格，则 Ω 能通过沿 Λ平移而平铺 $\mathbb{R}^d$，当且仅当系统 $E(H)$ 构成 $L^2(\Omega)$的指数函数正交基，其中 H是 Λ [16]的对偶格。

鉴于这些局限性，转向更灵活的系统是很自然的。指数函数 Riesz 基为正交归一集提供了一种稳健的替代方案：尽管它们不具备正交性，却仍能在 $L^2(\Omega)$ 中实现稳定且唯一的表示。然而，判断给定集合是否具有这样的基仍然极具挑战性。迄今为止，已知的正例寥寥无几 [30, 18, 22, 25, 26, 19,13], ，而令人惊讶的是，仅发现了一个不具有指数函数 Riesz 基的例子 [27]。

本文聚焦于一类已知具有指数函数 Riesz 基的特殊集合：多重平铺 集合。如果一个集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 在离散集 Λ 上的平移作用下以层级 k 进行 $\mathbb{R}^d$ 多重平铺（即 k-平铺 $\mathbb{R}^d$），则称其满足

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \chi_\Omega(\omega+\lambda) = k \quad \text{for a.e. } \omega \in \mathbb{R}^d.$$

已证明，在 [19] 中，每个黎曼可积 集合 Ω，若其在满格 Λ 上的平移作用下进行 k-多重平铺 $\mathbb{R}^d$，则都具有指数函数 Riesz 基。在 [22], 中，Kolountzakis 对每个具有这一平铺性质的有界 集合 Ω得出了同样的结论。此外，他还证明，该基可以选择为具有周期频率集

$$\{e_{a_j+h} : h \in H,\ j = 1, \ldots, k\},$$

对于某些 a_1，……， $a_k \in \mathbb{R}^d$，其中 H是 Λ的对偶格。我们将其称为指数函数的结构化系统。后来， [1]将这一结果推广到局部紧阿贝尔（LCA）群的情形。该推广建立在平移不变空间理论和纤维化技术的基础上。这一视角还使作者能够在 [1] 中证明逆命题成立；也就是说，对于 $L^2(\Omega)$，结构化指数 Riesz 基的存在性意味着 Ω 是一个多重平铺集。

关于这一结果是否仍适用于有限测度的无界多重平铺集， [1], 也给出了否定答案：作者构造了一个明确的例子，即在 $\mathbb{Z}$ 上，由 $\mathbb{R}$ 的平移构成的无界二重平铺集，它不具有结构化指数 Riesz 基。然而，

作者在 [9] 指出，某一类特殊的（不一定有界的）多重平铺集，即满足可容许(7)条件的多重平铺集，始终存在结构化 Riesz 基。可容许多重平铺集这一类特别包含所有有界多重平铺集。

然而，正如 [9] 中所指出的，可容许性仅是一个充分条件。这引出了一个问题：如何精确刻画那些支持结构化指数 Riesz 基的多重平铺集。[10] 通过一种涉及底层格的 Bohr 紧化的刻画，彻底解决了这一问题。虽然这一结果既一般又优雅，但该条件要求验证紧化空间中的非平凡性质，而这个空间具有高度抽象的性质。

本文提出了一种替代性刻画，用以描述那些存在结构化指数 Riesz 基的多重平铺集。尽管我们的研究受到 [10], 中的方法启发，但我们能够在更易处理的环境空间 $\mathbb{T}^{k\times k}$ 中表述一个等价条件（见定理 4.10）。该条件要求验证行列式函数在 $\mathbb{T}^{k\times k}$的一个闭子空间上不恒为零；该闭子空间取决于 Ω 和向量 a_1、……、$a_k \in \mathbb{R}^d$。此外，我们还引入一种新的简单几何性质（见定义 4.4），它放宽了可容许性条件；并证明，满足该性质的多重平铺集存在结构化指数 Riesz 基（定理 4.5）。值得注意的是，对于特殊情形的2重平铺集，这一条件也是必要条件（定理 4.7）。

我们指出，本文中的所有结果只需稍作修改，便可推广到局部紧阿贝尔群的情形。

本文的结构安排如下。在第 2节中，我们回顾平移不变空间理论的主要思想，这些思想将在全文中用到。在第3节中，我们聚焦于第一个提出的问题（P1）。最后，我们在第 4 节讨论问题（P2）。

2. 平移不变空间

本节回顾平移不变空间（SIS）的一些基本事实，这些内容将在本文中用到。感兴趣的读者可参阅 [7, 6, 11, 12]，其中包含相关证明以及关于这些空间的更多信息。

设 $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ 是一个满格，即存在 $M \in GL_d$（$\mathbb{R}$）使得 $\Lambda = M\mathbb{Z}^d$。相对于一个格 Λ 而言的基本域，是商群 $\mathbb{R}^d/\Lambda$的一组博雷尔集代表元。在本文的设定中，我们总是取集合 $I = M\left([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^d\right)$作为基本域。 Λ 的对偶格为集合

$$H := \{h \in \mathbb{R}^d \,:\, \langle h, \lambda\rangle \in \mathbb{Z}, \text{ for all } \lambda \in \Lambda\},$$

它与 $H = (M^t)^{-1}\mathbb{Z}^d$ 重合。在本文余下部分中，我们将固定一个格 Λ，而 H 始终表示它的对偶。

定义 2.1. 如果闭子空间 $V \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ 在 H 的平移下不变，或称为 H-不变，是指对每个 $f \in V$，都有 $T_h f \in V, \forall\, h \in H$，其中 $T_h f(x) = f(x-h)$ 表示平移 h。

Given a countable set of functions $\Phi \subset L^2(\mathbb{R}^d)$, we denote by

$$S(\Phi) := \overline{\text{span}}\,\{T_h\varphi \,:\, \varphi \in \Phi,\, h \in H\}$$

由 Φ 生成的 H-不变空间。当集合 Φ 的平移经 H 后构成 $S(\Phi)$ 的Parseval框架时，我们简称 Φ 为帕塞瓦尔框架生成元

$S(\Phi)$。当 Φ 是有限集时，我们称 $V = S(\Phi)$ 为有限生成平移不变空间；当对于某个函数 φ，$\Phi = \{\varphi\}$ 时，我们称 V 为主平移不变空间。有限生成平移不变空间 $V \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ 的长度记作 $\mathrm{L}(V)$，定义为满足存在 $\varphi_1, ..., \varphi_\ell \in V$，且 $V = S(\varphi_1, ..., \varphi_\ell)$ 的最小自然数 l。

$L^2(\mathbb{R}^d)$ 的平移不变子空间的许多结构，都可以通过纤维化映射来理解。这一关键变换将每个函数 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 与定义在 I 上的 $l^2(\Lambda)$ 值平方可积函数关联起来。具体而言，我们考虑希尔伯特空间

$$L^2\left(I, \ell^2(\Lambda)\right),$$

该空间由所有满足下述条件的向量值可测函数 $\psi: I \to l^2(\Lambda)$ 构成：

$$\|\psi\| = \left(\int_I \|\psi(\omega)\|_{\ell^2}^2 \, d\omega\right)^{1/2} < \infty.$$

映射定义如下。

定义 2.2。纤维化映射 $\mathcal{T}: L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2\left(I, l^2(\Lambda)\right)$ 定义为

$$\mathcal{T} f(\omega) = \{\hat{f}(\omega + \lambda)\}_{\lambda \in \Lambda},$$

其中，$\hat{} f$ 表示 f 的傅里叶变换。序列 $\mathcal{T} f(\omega)$ 称为 f 在 $\omega \in I$ 处的纤维。

注意到，纤维化映射是一个等距同构，这与周期化恒等式有关。

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx = \int_I \sum_{\lambda \in \Lambda} f(\omega + \lambda)\, d\omega, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^d).$$

这种逐纤维的视角自然引出了值域函数这一概念。

定义 2.3. 值域函数是一个映射

$$\begin{aligned} J : I &\to \{\, \textit{closed subspaces of } \ell^2(\Lambda) \,\} \\ \omega &\mapsto J(\omega). \end{aligned}$$

将 $l^2(\Lambda)$ 的子空间与相应的正交投影算子相对应，我们称 J 是可测的，如果对于每个 $u, v \in l^2(\Lambda)$，标量函数 $\omega \mapsto \langle P_{J(\omega)} u, v\rangle$ 都是可测的。这里，$P_{J(\omega)}$ 是将 $l^2(\Lambda)$ 正交投影到 $J(\omega)$ 上的正交投影算子。

值域函数的重要性体现在一个基本的刻画定理中，该定理最初由 Helson 提出 [20, 定理 8]。该定理指出，每个平移不变空间都可以描述为这样一类函数的集合：其纤维属于一个可测的子空间族，具体而言，就是由值域函数定义的子空间族。我们在此给出 [7,命题 1。5]所述的刻画。

定理 2.4. $V \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ 是闭子空间，当且仅当存在一个可测值域函数使得该子空间平移不变

$$V = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) : \mathcal{T} f(\omega) \in J(\omega) \text{ for a.e. } \omega \in I\}.$$

此外，如果对于某个可数集 $\Phi \subset L^2(\mathbb{R}^d)$，$V = S(\Phi)$，那么

$$J(\omega) = \overline{\operatorname{span}}\{\mathcal{T} f(\omega) \,:\, f \in \Phi\}$$

对几乎处处的 $\omega \in I$ 都成立。按照如下约定：若两个值域函数在几乎处处的 $\omega \in I$ 上相等，则视为相同；在此约定下，V 与 J 之间存在一一对应关系。我们称子空间 $J(\omega)$ 为 V 在 ω 处的纤维空间 。

与其直接在 V中分析 $L^2(\mathbb{R}^d)$，不如通过其在 $l^2(\Lambda)$中的值域函数来研究其性质。以下引理概述了一些经典结果，说明了这一视角的优势。详细证明见 [6] 和 [3]。

引理 2.5。设 V, U 是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中的平移不变空间，其对应的值域函数分别为 J_V, J_U。则：

i) 正交补 $V^\perp$ 是平移不变的，并且对几乎处处的 $\omega \in I$，$J_{V^\perp}(\omega) = (J_V(\omega))^\perp$。 ii) 空间 $V \cap U$ 是平移不变的，且其值域函数满足：对几乎处处的 $\omega \in I$，$J_{V\cap U}(\omega) = J_V(\omega) \cap J_U(\omega),$。 iii) 若 V 和 U 正交，则 $V \oplus U$ 是平移不变的，其值域函数为：对几乎处处的 $\omega \in I$，$J_{V\oplus U}(\omega) = J_V(\omega) \oplus J_U(\omega),$。 iv) V 的长度可如下刻画：

$$\mathcal{L}(V) = \operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in I} \dim J(\omega).$$

最后一项指出了平移不变空间的一个关键性质。若空间 V 是有限生成的，则相应的纤维空间 $J(\omega)$ 对几乎处处的 $\omega \in I$都是有限维的。

我们将 V 的谱记为

$$\sigma(V) := \{\omega \in I \,:\, J(\omega) \neq \{0\}\}.$$

下一个引理由 [6,命题 2.9 和引理 3.6] 得出。

引理 2.6。设 V 是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 的一个平移不变空间。那么，存在 $\varphi \in V$，使得 $\operatorname{supp} \|\mathrm{T}\ \varphi(\cdot)\|_{\ell^2} = \sigma(V)$。

最后，由于 $J(\omega)$ 的维数可能随 $\omega \in I$ 而变化，因此将 I 划分为若干可测集会很方便，在这些集合上 $J(\omega)$ 的维数保持不变。下面的引理直接由函数$\omega \mapsto \operatorname{tr}(J(\omega))$ 的可测性得出，其中 tr 表示迹映射。

引理 2.7。设 V是长度为 $\mathrm{L}\,(V) = l$ 且对应值域函数为 J 的平移不变空间。那么，这些集合

$$A_n := \{\omega \in I \,:\, \dim J(\omega) = n\}, \quad n = 0, \dots, \ell,$$

是可测的，并满足

$$I = \bigcup_{n=0}^{\ell} A_n.$$

3. 平移保持算子的典范形式

纤维化映射不仅有助于深入理解平移不变空间的结构，也是研究作用于这些空间上的算子的有力工具。特别是，与沿格平移可交换的平移保持算子，在这一背景下发挥着基础性作用。借助纤维化的视角，这类算子可以用值域算子来理解，后者逐点作用于各个纤维。当平移不变空间是有限生成时，这一视角

使我们能够运用有限维线性代数技术，深入开展谱分析，并构造三角表示和对角表示等典范形式。

本节聚焦于引言中提到的第一个问题（P1）。我们证明，作用于有限生成平移不变空间的任意平移保持算子都存在三角分解。当算子为正规算子时，我们可推出对角分解。这些结果最终导出了一种对 [2]的谱分解定理的另一种证明，并扩展了分解定理 [7, 定理 3。3]。

3.1. **平移保持算子**。本节回顾平移保持算子的若干定义和性质。

定义 3.1。设 $V \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ 为一个 H-不变空间，且 $L: V \to L^2(\mathbb{R}^d)$为一个有界算子。若 L 与平移可交换，即，则称其为平移保持的，或称为 H-保持的。

$$LT_h = T_h L, \quad \text{for all } h \in H.$$

在 [7]，中，Bownik 通过引入值域算子这一概念，分析了这些算子的性质；该概念提供了一种通过纤维化映射理解平移保持算子行为的方法。

定义 3.2. 给定两个可测值域函数 J, J'，值域算子$R: J \to J'$是线性算子 $R(\omega): J(\omega) \to J'(\omega)$, $\omega \in I$的一种选取。若对于每个 $u, v \in l^2(\Lambda)$, R满足 $\omega \mapsto \langle R(\omega) P_{J(\omega)} u, v\rangle$是可测标量函数，则称其为可测的。

这一概念导出了以下基本对应关系。

定理 3.3 ([7, 定理 4.5]). 设 $V, V' \subseteq L^2(\mathbb{R}^d)$ 是两个平移不变子空间，其值域函数分别为 J 和 J'。给定一个有界的保平移算子 $L: V \to V'$，存在一个可测值域算子 $R: J \to J'$，使得

$$(\mathcal{T} \circ L) f(\omega) = R(\omega) (\mathcal{T} f(\omega)), \tag{1}$$

对于几乎处处的 $\omega \in I$和 $f \in V$。

反过来，给定一个可测值域算子 $R: J \to J'$，满足

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\omega \in I} \|R(\omega)\| < \infty,$$

存在一个有界平移保持算子 $L: V \to V'$ 使得（1）成立。在约定两个值域算子几乎处处相等时将其视为相同的前提下，L 与 R 之间存在一一对应关系 $\omega \in I$。

正如预期，平移保持算子的整体性质反映在相应值域算子的逐点性质上。下面的定理概述了这种关系。有关详细证明，请参阅 [7] 和 [8]（从乘法不变算子的角度出发）。

定理 3.4. 设 $V, V' \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ 是两个平移不变空间，其值域函数分别为 J_V和 $J_{V'}$。设 $L: V \to V'$是一个平移保持算子，对应的值域算子为 $R: J_V \to J_{V'}$。则有以下结论：

i) $\|L\|_{\text{op}} = \operatorname{ess\,sup}_{\omega \in I} \|R(\omega)\|_{\text{op}}$.

ii) 伴随算子 $L^*\colon V' \to V$ 也是平移保持算子，对应的值域算子 $R^*\colon J_{V'} \to J_V$ 由 $R^*(\omega) = (R(\omega))^*$ 给出，对几乎处处的 $\omega \in I$ 成立。iii) L 是正规（自伴）算子，当且仅当对几乎处处的 $\omega \in I$，$R(\omega)$ 是正规（自伴）算子。iv) L 是单射，当且仅当对几乎处处的 $\omega \in I$，$R(\omega)$ 是单射。v) L 是（部分）等距算子，当且仅当对几乎处处的 $\omega \in I$，$R(\omega)$ 是（部分）等距算子。vi) 空间 $V'' = L(V) \subseteq L^2(\mathbb{R}^d)$ 是平移不变空间，其值域函数对几乎处处的 $\omega \in I$ 由下式给出。

$$J_{V''}(\omega) = \overline{R(\omega)J_V(\omega)},$$

vii) 空间 $\ker(L)$ 是平移不变的，其值域函数由 $K(\omega) = \ker(R(\omega))$ 对几乎处处的 $\omega \in I$ 给出。

3.2. **保持平移算子的三角形式**。因此，我们接下来重点讨论作用于有限长度平移不变空间上的平移保持算子，即$L\colon V \to V$ with $\mathrm{L}(V) = l < \infty$。于是，对于几乎处处的 ω，纤维空间 $J(\omega)$ 是 $l^2(\Lambda)$ 的有限维子空间，而算子 $R(\omega)$ 作用于有限维空间。通过在纤维域内进行研究，我们建立了一种典范三角形式，它与经典的舒尔分解相呼应。这一分解为理解此类算子的谱结构奠定了基础。

核心思想是，值域算子的特征值的可测选取会产生在该算子作用下保持不变的平移不变子空间。为此，我们先陈述并证明以下命题。

命题 3.5. 设 V 是有限生成平移不变空间，且 $L\colon V \to V$ 是一个平移保持算子，其对应的值域算子为 R。那么，存在一个可测函数 $\lambda\colon I \to \mathbb{C}$，使得对几乎处处的$\omega \in I$，$\lambda(\omega)$是 $R(\omega)$的特征值。此外，存在一个函数 $\psi_\lambda \in V$，使得 $\operatorname{supp} \|\mathcal{T}\psi_\lambda(\omega)\| = \sigma(V)$，并且

$$R(\omega)\mathcal{T}\psi_\lambda(\omega) = \lambda(\omega)\mathcal{T}\psi_\lambda(\omega), \quad \text{for a.e. } \omega \in I. \tag{2}$$

证明. 设 $\mathrm{l} = \mathrm{L}(V)$，并令 $A_n = \{\omega \in I\colon \dim J(\omega) = n\}$，其中 $n = 0, \dots, \mathrm{l}$。由引理 2.7，这些集合是可测的，并构成集合 I的一个划分。固定 $1 \le n \le \mathrm{l}$。存在一个可测函数 $\lambda_n\colon A_n \to \mathbb{C}$，使得对几乎处处的 $\omega \in A_n$，$\lambda_n(\omega)$是 $R(\omega)$的特征值；这一点源自 Azoff [4, 推论 4]（另见 [2, 定理 5.4]）。将它们拼接起来，便得到所需的函数 $\lambda\colon I \to \mathbb{C}$，如下所示：

$$\lambda(\omega) := \begin{cases} \lambda_n(\omega) & \text{if} \quad \omega \in A_n, \\ 0 & \text{if} \quad \omega \in A_0. \end{cases}$$

定义可测值域函数 $J_\lambda(\omega) := \ker(R(\omega) - \lambda(\omega)\mathrm{I}_\omega) \subset J(\omega)$，其中 I_ω 表示 $J(\omega)$ 上的恒等算子，并将 $V_\lambda \subset V$ 视为根据定理 2.4 的意义与 J_λ 相关联的唯一平移不变空间。根据构造，$\sigma(V) = \sigma(V_\lambda)$。由引理 2.6 可知，存在一个函数 $\psi_\lambda \in V_\lambda$，使得 $\operatorname{supp} \|\mathcal{T}\psi_\lambda(\omega)\| = \sigma(V)$，并满足 (2)。■

现在我们可以陈述并证明三角分解。

定理 3.6. 设 $L : V \to V$ 是长度为 l 的有限生成平移不变空间 V 上的有界平移保持算子。那么， V 存在平移不变子空间，

$$V = V_\ell \supsetneq \cdots \supsetneq V_1,$$

使得对于每个 $1 \le j \le l$，$\mathrm{L}(V_j) = j$，且每个 V_j对于算子L都是不变 的，即 $L(V_j) \subseteq V_j$。此外， V具有一个正交分解

$$V = S(\psi_1) \oplus \cdots \oplus S(\psi_\ell),$$

其中每个 ψ_j都是 $S(\psi_j)$ 的 Parseval框架生成元，且谱满足包含关系 $\sigma(S(\psi_{j+1})) \subset \sigma(S(\psi_j))$，以及

$$V_j = \bigoplus_{i=1}^{j} S(\psi_i), \quad 1 \le j \le \ell.$$

证明。 我们对 l 进行归纳法。若 $l = 1$，结论成立，因为 V 已经是一个主子空间。现在假设$l = n > 1$，并且对于长度严格小于 n的所有空间，结论均成立。设 R 为对应于 L的值域算子。根据命题 3.5，存在一个可测函数 $\lambda_1 : I \to \mathbb{C}$ 以及一个非零函数 $\psi_1 \in V$ 使得

$$R(\omega)\mathcal{T}\psi_1(\omega) = \lambda_1(\omega)\,\mathcal{T}\psi_1(\omega), \qquad \text{for a.e. } \omega \in I,$$

and

$$\operatorname{supp} \|\mathcal{T}\psi_1(\cdot)\| = \sigma(V).$$

特别地， $\sigma(S(\psi_1)) = \sigma(V)$。因此， ψ_1 定义了我们正交分解的第一个生成元。此外，不失一般性，我们可以假设

$$\|\mathcal{T}\psi_1(\omega)\| = 1, \qquad \text{for a.e. } \omega \in \sigma(S(\psi_1)),$$

从而 ψ_1 是 $S(\psi_1)$的帕塞瓦尔框架生成元。主平移不变空间 $S(\psi_1) \subset V$ 也在 L下不变。令$W := V \ominus S(\psi_1)$根据引理2.5，W 是平移不变的，且算子 $L_W : W \to W$ 定义为

$$L_W := P_W L P_W$$

是保持平移的。此外，由于对几乎处处的 $\omega \in \sigma(V)$，$\operatorname{span}\{\mathrm{T}\ \psi_1(\omega)\} \neq \{0\}$，且$\mathrm{L}(V) = l$，因此$\mathrm{L}(W) = l - 1$。将归纳假设应用于$L_W : W \to W$ 可得正交归一生成元 $\psi_2, \ldots, \psi_\ell$ 属于 W，使得

$$W = S(\psi_2) \oplus \cdots \oplus S(\psi_\ell),$$

以及包含关系

$$\sigma(S(\psi_{i+1})) \subset \sigma(S(\psi_i)), \qquad 1 \le i \le \ell - 1,$$

成立。此外，这些空间

$$W_j := \bigoplus_{i=2}^{j} S(\psi_i), \quad j \in \{2, \ldots, \ell\},$$

在 L_W 下不变，因此在 L 下不变。现在定义 $V_1 = S(\psi_1)$，并且

$$V_j = S(\psi_1) \oplus W_j = \bigoplus_{i=1}^{j} S(\psi_i), \quad j \in \{2, \ldots, \ell\}.$$

根据构造可知

$$V = V_\ell \supsetneq V_{\ell-1} \supsetneq \cdots \supsetneq V_1,$$

其中每个 V_j都是平移不变的，在 L作用下不变，并且满足 $\mathrm{L}(V_j) = j$。由于$\sigma(S(\psi_1)) = \sigma(V)$，$\sigma(S(\psi_2)) \subseteq \sigma(S(\psi_1))$，我们还有

$$\sigma(S(\psi_{i+1})) \subset \sigma(S(\psi_i)), \qquad 1 \le i \le \ell - 1.$$

■

现在我们证明，当作用算子 $L\colon V \to V$ 是正规算子时，平移不变空间可以分解为若干主平移不变空间的正交和，且每个空间对 L都是约化的。首先，我们证明下面的引理。回顾一下，若子空间 U 满足 {style id='5'}约化 {/style}条件，则对于算子 L 有 $L(U) \subseteq U$ 且 $L(U^\perp) \subseteq U^\perp$。

引理 3.7。设 $L\colon V \to V$ 是作用于平移不变空间 V 上的正规有界平移保持算子，且该空间具有有限长度 $\mathrm{L}(V) = l$。设 U 是 V 的一个平移不变子空间，且在 L作用下不变，则 U 对 L是约化的。

证明。在有限维情形中，正规算子的每个不变子空间都是该算子的约化子空间。设 J 是与 V 和 R 相对应的值域函数：$J \to J$ 是 L 对应的值域算子。根据引理 2.5，$R(\omega)\colon J(\omega) \to J(\omega)$ 是一个作用于有限维空间上的正规算子，对几乎处处的 $\omega \in I$ 都成立。设 J_U 是与 U 相对应的值域算子，则对几乎处处的 $\omega \in I$，$J_U(\omega)$ 和 $(J_U(\omega))^\perp$ 都是 $R(\omega)$ 的不变子空间。但是 $(J_U(\omega))^\perp = J_{U^\perp}(\omega)$，因此我们推得 $U^\perp$ 是 L 的不变子空间。■

推论 3.8。设 $L\colon V \to V$ 是作用于平移不变空间 V 上、长度有限且为 $\mathrm{L}(V) = l$ 的正规有界平移保持算子。则 V 可分解为正交和

$$V = S(\psi_1) \oplus \cdots \oplus S(\psi_\ell),$$

其中，每个主平移不变子空间 $S(\psi_i)$ 都是 L 的约化子空间，每个函数 ψ_i 都是 $S(\psi_i)$ 的帕塞瓦尔框架生成元，并且对每个 $1 \le i \le l$，$\sigma(S(\psi_{i+1})) \subset \sigma(S(\psi_i))$。

证明。考虑由定理 V_1、.....、V_ℓ 3.6给出的子空间。由于这些子空间对 L 不变，且 L 是正规算子，根据上述引理，它们是 L 的约化子空间。于是，子空间 $V_j \ominus V_{j-1} = S(\psi_j)$ 对 $2 \le j \le l$ 而言是 L 的约化子空间，并满足所需性质。对 $V_1 = S(\psi_1)$ 也同样成立。■

这一推论为正规平移保持算子给出了对角形式，与 [2] 中定义的对角化概念一致。事实上，将算子正交分解为约化的主平移不变子空间，从纤维的角度来看，便得到相应值域算子的可测对角化。每个主子空间都对应一个一维不变纤维空间，在该空间上，值域算子通过乘以一个可测特征值函数来作用。在下一小节中，我们将深入探讨这一联系，并更详细地说明这一分解如何得出 [2] 中的主要谱定理。

3.3. **正规平移保持算子的对角形式**。 给定一个序列$a = \{a(h)\}_{h\in H} \in l^1(H)$，我们将其傅里叶变换记为

$$\hat{a}(\omega) = \sum_{h\in H} a(h)e^{-2\pi i\omega\cdot h}, \quad \omega \in I.$$

这可推广至$l^2(H)$，并且当且仅当 $\hat{a} \in L^2(I)$ 时，有 $a \in l^2(H)$。此外，若 $\hat{a} \in L^\infty(I)$，我们称 a 具有有界谱。

定义 3.9. 给定有界谱的 $a \in l^2(H)$，乘法算子

$$M_{\hat{a}} : L^2(I, \ell^2(\Lambda)) \to L^2(I, \ell^2(\Lambda))$$

定义为 $M_{\hat{a}} f = \hat{a} f$。我们将算子 $\Lambda_a \colon L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ 记作

$$\Lambda_a := \mathcal{T}^{-1} M_{\hat{a}} \mathcal{T},$$

它定义良好且有界。

命题 3.10 ([5, 命题 3.2])**.** 设 $a = \{a(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda} \in l^2(\Lambda)$ 具有有界谱。设

$$\mathfrak{B} := \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d) \,:\, \{T_h\varphi\}_{h\in H} \text{ is a Bessel sequence}\},$$

then

$$\Lambda_a f = \sum_{h\in H} a(h)T_h f, \quad \forall f \in \mathfrak{B},$$

在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中收敛。

由于 $\mathfrak{B}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 的稠密子集，且紧支撑函数在$L^2(\mathbb{R}^d)$ 中属于 $\mathfrak{B}$（见 [12, 命题 9.3.4]），因此可以将 Λ_a 另行定义为有界算子 $\tilde{\Lambda}_a \colon \mathfrak{B} \to L^2(\mathbb{R}^d)$ 的连续延拓，

$$\tilde{\Lambda}_a f := \sum_{h\in H} a(h)T_h f.$$

定义 3.11. 设 $V \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ 是一个平移不变空间，且 $L \colon V \to V$是一个有界平移保持算子。给定 $a \in l^2(H)$ 为一个有界谱序列，我们称 Λ_a 是 L 的一个 s-特征值，当

$$V_a := \ker(L - \Lambda_a) \neq \{0\}.$$

[2] 中的主要结果如下。

定理 3.12 ([2, 定理 6.16])**.** 设 $L \colon V \to V$ 是有限生成平移不变空间 V. 上的正规有界平移保持算子。那么存在$l \in \mathbb{N}$以及有界谱序列 $a_1, \ldots, a_\ell$，使得

$$V = V_{a_1} \oplus \cdots \oplus V_{a_\ell} \quad \text{and} \quad L = \sum_{j=1}^{\ell} \Lambda_{a_j} P_{V_{a_j}},$$

其中，P_S 表示到闭子空间 S上的正交投影。

我们证明，利用推论 3.8，可以给出定理 3.12的另一种证明。

定理 3.12的另一种证明。 设 $l = \mathcal{L}(V)$。考虑由推论 $S(\psi_1), \dots, S(\psi_\ell)$ 给出的分解中的主子空间 3.8。由于这些子空间对 L约化，算子 L 在每个子空间上诱导出有界正规算子 L_j。由于每个子空间都是主子空间，因此与 R_j 相关联的值域算子 L_j是一个标量。更确切地说，对于任意 $f \in S(\psi_j)$

$$R_j(\omega)(\mathcal{T}f)(\omega) = R(\omega)(\mathcal{T}f)(\omega) = \lambda_j(\omega)(\mathcal{T}f)(\omega),$$

对于某个可测函数 $\lambda_j : I \to \mathbb{C}$，且对几乎所有 $\omega \in I$ 都成立。令$a_j \in l^2(H)$ 满足 $\widehat{a_j} = \lambda_j$，对每个 $1 \le j \le l$ 都成立。现在，取

$$\Lambda_{a_j} = \sum_{h \in H} a_j(h) T_h \quad \text{and} \quad V_{a_j} = S(\psi_j).$$

■

4. 多重平铺谱 Paley-Wiener 空间中频率集为周期集的指数函数基

如引言中所述，本文的第二个目标（P2）是提出一种新的刻画方法，用以描述那些存在结构化指数 Riesz 基的多重平铺集。与 [10]，中的结果不同，后者通过相关格的 Bohr 紧化来刻画这类集合；我们的方法则在环境空间 $\mathbb{T}^{k\times k}$中表述，给出了一项更易处理的条件。此外，我们提出了一个简单的几何判据，放宽了可容许性假设，并证明任何满足该判据的多重平铺集都存在结构化指数 Riesz 基。

4.1. 具有多重平铺谱的 Paley-Wiener 空间。我们重点研究一类重要的平移不变空间，即 Paley-Wiener 空间。给定一个有限测度的可测子集 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$，*Paley-Wiener*空间 PW_Ω 定义为

$$PW_\Omega = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) : \operatorname{supp} \hat{f} \subset \Omega\}.$$

这些空间在所有平移下均保持不变，尤其在格 H 的平移下也保持不变。

在本文中，我们研究谱具有多重平铺集这一几何结构的 Paley-Wiener 空间。可测集 Ω 是多重平铺集，或者更确切地说，若它通过格 Λ 的平移平铺 k 次，则称其为 $\mathbb{R}^d$，如果

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \chi_\Omega(\omega - \lambda) = k, \quad \text{a.e. } \omega \in \mathbb{R}^d. \tag{3}$$

通过将条件限制在基本域 $I \subset \mathbb{R}^d$ 上即可检验该条件。注意，若 Ω 是 k 个互不相交集合的并，且每个集合都是 1-平铺集，则条件（3）成立。事实上，反过来也成立，正如以下引理所证明的；该引理最初在欧几里得情形下由 [22, 引理 1]证明，后来又推广至局部紧阿贝尔群的情形，见 [1, 引理 2。4]。

引理 4.1。 设 $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ 是一个可数离散子群。当且仅当可测集 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, k 通过 Λ 的平移形成平铺时，

$$\Omega = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_k \cup R,$$

其中， R是一个零测集，而集合 Ω_j和 $1 \le j \le k$均为可测集，互不相交，且每个集合都由 Λ的平移来平铺 $\mathbb{R}^d$。

该引理表明，对于几乎所有的 $\omega \in I$，集合

$$\Lambda_\omega := \{\lambda \in \Lambda : \lambda + \omega \in \Omega\}$$

具有基数 k。为简单起见，我们假设这对每个 $\omega \in I$ 都成立。与 [10]，中一样，按照 $\mathbb{R}^d$ 中的字典序，我们为每个集合 Λ_ω关联向量

$$\vec{\lambda}(\omega) := (\lambda_1(\omega), \ldots, \lambda_k(\omega)) \in (\mathbb{R}^d)^k,$$

此外，给定集合 $J \subseteq I$，我们定义

$$\Lambda_\Omega(J) := \{\, \vec{\lambda}(\omega) : \omega \in J \,\} \subset (\mathbb{R}^d)^k.$$

现在，设 PW_Ω 是与 $\mathbb{R}^d$ 中的 k-平铺子集 Ω 相关联的 Paley-Wiener空间。若 J_Ω 表示与 PW_Ω 相关联的值域函数，则前述观察表明，对于每个 $\omega \in I$，$\dim J_\Omega(\omega) = k$。换言之，

$$J_\Omega(\omega) \simeq \mathbb{C}^k,$$

例如，参见 [9, 命题 2.12]。这使我们能够通过在有限维空间 $\mathbb{C}^k$ 中表述的一个简单条件，研究刻画平移不变空间 PW_Ω 的 Riesz基生成元这一问题。

定理 4.2([1, 定理 2.13])。设 Ω 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个 k-平铺可测子集。给定 $\phi_1, \ldots, \phi_k \in PW_\Omega$，我们定义

$$T_\omega = \begin{pmatrix} \widehat{\phi_1}(\omega + \lambda_1) & \ldots & \widehat{\phi_k}(\omega + \lambda_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{\phi_1}(\omega + \lambda_k) & \ldots & \widehat{\phi_k}(\omega + \lambda_k) \end{pmatrix},$$

其中 $\vec{\lambda}(\omega) = (\lambda_1(\omega), \ldots, \lambda_k(\omega))$。则以下陈述等价：

i) 集合 $\{T_h \phi_j : h \in H, \ j = 1, \ldots, k\}$ 是 PW_Ω 的 Riesz基。

ii) 存在 $A, \ B > 0$，使得对于几乎处处的 $\omega \in I$，

$$A||x||^2 \le \|T_\omega x\|^2 \le B||x||^2, \tag{4}$$

对于每个 $x \in \mathbb{C}^k$均成立。

此外，在此情形下，Riesz基的常数为

$$A = \inf_{\omega \in I} \|T_\omega^{-1}\|^{-1} \quad \text{and} \quad B = \sup_{\omega \in I} \|T_\omega\|.$$

将这一结果与指数函数 Riesz 基的背景联系起来的思想由 [1] 提出。为简便起见，我们令 $e_a(x) := e^{2\pi i a x}$ 对每个$a, \ x \in \mathbb{R}^d$ 均成立，并在本节剩余部分交替使用这一记号。关键步骤在于考虑生成元为 PW_Ω 的再生核的情形，即函数 ϕ_j 满足

$$\hat{\phi}_j = e_{a_j} \chi_\Omega,$$

对于某些 a_1、……、$a_k \in \mathbb{R}^d$。在这种情况下，由于 $\mathrm{F}(T_h \phi_j) = e_h e_{a_j} \chi_\Omega$，集合

$$\{e_{a_j + h} : h \in H, \ j = 1, \ldots, k\} \tag{5}$$

是 $L^2(\Omega)$的 Riesz基，当且仅当 $\{T_h \phi_{a_j} : h \in H, \ j = 1, \ldots, k\}$是 PW_Ω 的指数函数基，其形式如（5）所示，称为结构化 *Riesz* 基。

因此，存在一组适用于 $L^2(\Omega)$ 的结构化指数 Riesz 基，等价于找到一个向量 $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in (\mathbb{R}^d)^k$，使得存在

$A,\ B>0$ 使得对几乎处处的 $\omega\in I$，式（4）中的不等式对每个 $x\in\mathbb{C}^k$都成立。仔细观察矩阵 T_ω 可以发现，它们能够分解为

$$\begin{aligned}T_\omega &= \begin{pmatrix}\widehat{\phi}_1(\omega+\lambda_1) & \dots & \widehat{\phi}_k(\omega+\lambda_1)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \widehat{\phi}_1(\omega+\lambda_k) & \dots & \widehat{\phi}_k(\omega+\lambda_k)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e_{a_1}(\omega+\lambda_1) & \dots & e_{a_k}(\omega+\lambda_1)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ e_{a_1}(\omega+\lambda_k) & \dots & e_{a_k}(\omega+\lambda_k)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}e_{a_1}(\lambda_1) & \dots & e_{a_k}(\lambda_1)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ e_{a_1}(\lambda_k) & \dots & e_{a_k}(\lambda_k)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_{a_1}(\omega) & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & e_{a_2}(\omega) & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & e_{a_{k-1}}(\omega) & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & e_{a_k}(\omega)\end{pmatrix}\\ &= E_\omega U_\omega,\end{aligned}$$

其中 U_ω 是一个酉矩阵。因此，要检验条件（4），只需考虑矩阵

$$E_\omega = E_{\vec{a},\vec{\lambda}} = \begin{pmatrix}e_{a_1}(\lambda_1) & \dots & e_{a_k}(\lambda_1)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ e_{a_1}(\lambda_k) & \dots & e_{a_k}(\lambda_k)\end{pmatrix} \quad \text{where } \vec{\lambda}(\omega)=(\lambda_1(\omega),\dots,\lambda_k(\omega)),$$

并证明对几乎处处的 $\omega\in I$,

$$A||x||^2 \le \|E_{\vec{a},\vec{\lambda}(\omega)}x\|^2 \le B||x||^2$$

对每个 $x\in\mathbb{C}^k$均成立。这就证明了以下关于集合 Ω 的刻画：空间 $L^2(\Omega)$ 存在结构化指数 Riesz 基。该结果在 [1] 中已基本得到证明，甚至适用于更一般的局部紧阿贝尔群。

定理 4.3。设 $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ 是格 Λ 的平移所构成的一个 k-平铺集，并设$\vec{a}=(a_1,\dots,a_k)\in(\mathbb{R}^d)^k$。以下陈述等价：

i) 集合 $\{e_{a_j+h}:h\in H,\ j=1,\dots,k\}$ 是 $L^2(\Omega)$ 的结构化指数 Riesz 基。 ii) 存在常数 $A,B>0$，使得不等式

$$A||x||^2 \le \|E_{\vec{a},\vec{\lambda}(\omega)}x\|^2 \le B||x||^2 \tag{6}$$

对每个 $x\in\mathbb{C}^k$ 以及几乎处处的 $\omega\in I$ 都成立。

4.2. **结构化指数函数 Riesz 基存在的充分必要条件**。为陈述我们的第一个结果，我们先引入分离这一新概念。

定义 4.4。给定 $\alpha\in\mathbb{R}^d$ 和 $\delta>0$，若子集 $\Gamma\subseteq(\mathbb{R}^d)^k$ 是(α,δ)-分离的，则对于每个 $\vec{\gamma}=(\gamma_1,\dots\dots,\gamma_k)\in\Gamma$ 和 $j\neq l$

$$|e^{2\pi i\alpha\gamma_j}-e^{2\pi i\alpha\gamma_\ell}|\ge\delta.$$

利用这一术语，我们可以证明以下定理，该定理的灵感来源于 [10, 推论 4.2]。

定理 4.5。设 Ω 是一个多重平铺集，使得集合 $\Lambda_\Omega(J)$ 是 $(\alpha,\ \delta)$-分离的，其中 $\alpha\in\mathbb{R}^d$、$\delta>0$ 和满测度子集 $J\subseteq I$ 满足相应条件。那么，$L^2(\Omega)$ 存在一个结构化指数 Riesz 基。

我们将此结果的证明推迟到本节末尾。该定理可视为 [9, 定理 1。1] 的推广。实际上，沿用 [9], 的术语，我们称 Ω 对 可容许（Λ，如果存在 $v \in \mathbb{R}^d$ 和一个数 $n \in \mathbb{N}$，使得对几乎所有 $\omega \in I$

$$v \cdot \lambda_1(\omega), \ldots, v \cdot \lambda_k(\omega) \tag{7}$$

是两两不同的整数（模 n），其中 $\lambda(\omega) = (\lambda_1(\omega), \ldots, \lambda_k(\omega))$. 请注意，在这种情况下，对于 $\delta = |1 - e^{2\pi i \frac{1}{n}}|$ 和某个全测度集 $J \subseteq I$， $\Lambda_\Omega(J)$ 是 $(v/n, \delta)$-分离的。作为定理 4.5 的推论，我们得到了 [9] 中的主要结果。

定理 4.6. 设 Ω 是一个对 Λ 可容许的多重平铺集。那么， $L^2(\Omega)$ 具有指数函数的结构化 Riesz 基。

众所周知，可容许性并非多重平铺集 Ω 具有指数函数的结构化 Riesz 基的必要条件（参见 [9, 例 3.3]）。值得注意的是，尽管如此，对于 2-重平铺集，(α, δ)-分离仍是必要条件，正如我们将在下述定理中证明的那样。

定理 4.7。 设 Ω 是一个 2-平铺集，且 $L^2(\Omega)$ 存在一个结构化指数 Riesz 基。则存在满测度子集 $J \subseteq I$, $\alpha \in \mathbb{R}^d$ 和$\delta > 0$，使得 $\Lambda_\Omega(J)$ 是 (α, δ)-分离的。

证明。 由定理 4.3，我们知道存在 $\vec{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$，以及一个满测度子集 $J \subseteq I$，使得这些矩阵

$$E_{\vec{a},\vec{\lambda}(\omega)} = \begin{pmatrix} e^{2\pi i a_1 \lambda_1} & e^{2\pi i a_2 \lambda_1} \\ e^{2\pi i a_1 \lambda_2} & e^{2\pi i a_2 \lambda_2} \end{pmatrix}$$

对每个 6) $\omega \in J$均成立。这些矩阵可分解为

$$E_{\vec{a},\vec{\lambda}(\omega)} = \begin{pmatrix} e^{2\pi i a_1 \lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i a_2 \lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e^{2\pi i (a_2 - a_1) \lambda_1} \\ e^{2\pi i (a_1 - a_2) \lambda_2} & 1 \end{pmatrix} =: V_{\vec{a},\vec{\lambda}(\omega)} \widetilde{E}_{\vec{a},\vec{\lambda}(\omega)}.$$

由于矩阵 $V_{\vec{a},\,\vec{\lambda}(\omega)}$是酉矩阵，因此矩阵 $E_{\vec{a},\,\vec{\lambda}(\omega)}$ 也对 J 一致地满足 (6)。特别地，由于 A 是矩阵 $|\widetilde{E}_{\vec{a},\,\vec{\lambda}(\omega)}|^2$的最小特征值的一个下界，我们得到

$$\det\left(\left|\widetilde{E}_{\vec{a},\vec{\lambda}(\omega)}\right|^2\right) \geq A^2 > 0,$$

还关于 J 一致。根据行列式的性质

$$\det\left(\left|\widetilde{E}_{\vec{a},\vec{\lambda}(\omega)}\right|^2\right) = \left|\det\left(\widetilde{E}_{\vec{a},\vec{\lambda}(\omega)}\right)\right|^2 = \left|1 - e^{2\pi i (a_2 - a_1)(\lambda_1 - \lambda_2)}\right|^2.$$

因此，取 $\alpha = a_2 - a_1$，我们得到

$$\left|e^{2\pi i \alpha \lambda_2} - e^{2\pi i \alpha \lambda_1}\right| \geq A,$$

对每个 $\omega \in J$ 都一致。因此， $\Lambda_\Omega(J)$ 是 $(\alpha,\ A)$-分离的。 ∎

现在，我们为子集 $\Gamma \subseteq (\mathbb{R}^d)^k$ 的 $(\alpha,\ \delta)$-分离给出另一个条件，并将其表述为一个直接的引理。为此，给定 $\alpha \in \mathbb{R}^d$，我们定义 $\mathbb{T}$ 的以下子集：

$$\Delta_\alpha(\Gamma) := \{e^{2\pi i \alpha(\gamma_j - \gamma_\ell)} : j \neq \ell,\ \vec{\gamma} \in \Gamma\}.$$

需要注意的是，差值 $\gamma_j - \gamma_\ell$ 是同一个 $\vec{\gamma} \in \Gamma$ 中两个不同项之间的差。我们不会比较 Γ 中两个不同元素的项。

引理 4.8。 集合 $\Gamma \subseteq (\mathbb{R}^d)^k$ 是 (α, δ)-分离的，当且仅当 $1 \notin \Delta_\alpha(\Gamma)$，其中闭包取自 $\mathbb{T}$。

引理 4.8 中的条件与 [10] 中给出的刻画更为密切相关。在该工作中，作者给出了关于一个k-平铺集 Ω 的充分且必要条件，以确保 $L^2(\Omega)$具有一个结构化指数 Riesz 基。该条件涉及 Λ^k的 Bohr 紧化，记为 Λ^k。更确切地说，它表述为：将矩阵 $E_{\vec{a},\vec{\lambda}}$提升为定义在 Λ^k的 Bohr 拓扑下的 $\Lambda_\Omega(I)$ 的闭包上的矩阵函数。按照通常的做法，我们通过规范嵌入将 $\Lambda_\Omega(I)$ 与其在 Λ^k 中的像等同起来。

最后，我们将给出关于 k-铺砌集 Ω 的另一种充要条件，使得 $L^2(\Omega)$ 存在结构化指数 Riesz 基。我们的条件在理念上更接近 (α, δ)- 分离或可容许性。我们先给出以下定义。

定义 4.9. 给定 $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in (\mathbb{R}^d)^k$，考虑函数 $\varphi_{\vec{a}} \colon \Lambda^k \to \mathbb{T}^{k\times k}$，其定义如下：

$$\varphi_{\vec{a}}(\vec{\lambda}) = \begin{pmatrix} e^{2\pi i a_1 \lambda_1} & \cdots & e^{2\pi i a_k \lambda_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{2\pi i a_1 \lambda_k} & \cdots & e^{2\pi i a_k \lambda_k} \end{pmatrix}$$

显然，$\mathbb{T}^{k\times k}$ 是矩阵的一个紧子集；赋予其逐项乘积后，它可视为一个局部紧阿贝尔群。在这种情况下，$\varphi_{\vec{a}}$ 成为一个群同态。由于行列式在该集合上连续，我们得到另一种刻画方式，用以描述那些使 $L^2(\Omega)$ 存在结构化 Riesz 基的 k-铺砌集 Ω。

此外，与 [10], 中的情况类似，我们定义以下两个辅助集合。对于向量 $\vec{v} \in \Lambda^k$，记

$$I_{\vec{v}} := \left\{\omega \in I \,:\, \vec{\lambda}(\omega) = \vec{v}\right\},$$

and

$$Q := \bigcup \left\{I_{\vec{v}} \,:\, \vec{v} \in \Lambda^k \text{ such that } |I_{\vec{v}}| > 0\right\} \subseteq I.$$

容易验证，$|I \setminus Q| = 0$。

定理 4.10。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是格 Λ 经平移得到的一个 k-铺砌集，且$\vec{a} = (a_1、\ldots\ldots、a_k) \in (\mathbb{R}^d)^k$。则以下陈述等价：

i) 集合$\{e_{a_j+h} : h \in H, j = 1, \ldots, k\}$是 $L^2(\Omega)$的结构化指数 Riesz 基。ii) 在 $\varphi_{\vec{a}}(\Lambda_\Omega(J))$中，行列式不为零；其中闭包是在 $\mathbb{T}^{k\times k}$ 中取的，且 $J \subseteq Q$ 是一个满测度子集。

证明。 首先注意，$\varphi_{\vec{a}}(\Lambda_\Omega(J))$中的矩阵的弗罗贝尼乌斯范数恰好等于 k。因此，它们在谱范数下也一致有界。由于矩阵$E_{\vec{a},\,\vec{\lambda}}$属于该集合，故式（6）中的上界总是成立。令 B 表示这个一致上界。

现在假设命题 i) 成立。由定理 4.3，可知下界 (6) 对几乎所有 $\omega \in I$ 以及每个 $x \in \mathbb{C}^k$都成立。我们

假设存在一个矩阵 $M \in \varphi_{\vec{a}}(\Lambda_\Omega(J))$，使得 $\det(M) = 0$，并证明这会导致矛盾。存在这样的 M 意味着存在一个序列 $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，满足 $M_n \in \varphi_{\vec{a}}(\Lambda_\Omega(J))$ 和 $M_n \to M$。每个 M_n 都可以写成 $M_n = E_{\vec{a},\vec{\lambda}_n}$，其中 $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\Lambda_\Omega(J)$ 中的一个序列。利用行列式的标准性质，我们得到：

$$\det\left(\left|E_{\vec{a},\vec{\lambda}_n}\right|^2\right) = \left|\det\left(E_{\vec{a},\vec{\lambda}_n}\right)\right|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} |\det(M)|^2 = 0.$$

令 $\mu_{\vec{\lambda}_n}$ 表示 $|E_{\vec{a},\vec{\lambda}_n}|^2$ 的最小特征值。由上文可知，$\mu_{\vec{\lambda}_n} \to 0$。取满足 $\mu_{\vec{\lambda}_n} < A$ 的 $n \in \mathbb{N}$，并令 $x \in \mathbb{C}^k$ 为与 $\mu_{\vec{\lambda}_n}$ 对应的 $|E_{\vec{a},\vec{\lambda}_n}|^2$ 的一个特征值。于是

$$\left\|E_{\vec{a},\vec{\lambda}_n} x\right\|^2 = \mu_{\vec{\lambda}_n}\|x\|^2 < A\|x\|^2.$$

由于 $\lambda_n \in \Lambda_\Omega(J)$ 且 $J \subseteq Q$，我们得出结论：存在一个正测度集，即 $I_{\vec{\lambda}_n}$，使得式（6）中的下界不成立。这就产生了矛盾。

反过来，假设命题 ii）成立。因此，存在 $\delta > 0$，使得对每个矩阵 $M \in \varphi_{\vec{a}}(\Lambda_\Omega(J))$，均有 $|\det(M)|^2 \geq \delta$,。给定任意 $\omega \in J$，令 $\mu_{\vec{\lambda}(\omega)}$ 表示矩阵 $|E_{\vec{a},\vec{\lambda}(\omega)}|^2$ 的最小特征值。于是得到

$$\delta \leq \det\left(\left|E_{\vec{a},\vec{\lambda}(\omega)}\right|^2\right) \leq \mu_{\vec{\lambda}(\omega)} B^{k-1}.$$

因此可得 $\mu_{\vec{\lambda}(\omega)} \geq A$ 其中 $A = \delta/B^{(k-1)}$，对每个 $\omega \in J$ 均成立。这意味着不等式（6）左侧对几乎处处的 $\omega \in I$ 以及每个 $x \in \mathbb{C}^k$ 都成立，正如我们所要证明的。 ■

与 [10], 的主要结果相比，该定理给出了一个更易处理的条件，因为这里的闭包是在 $\mathbb{T}^{k\times k}$ 中取的，而不是在 Λ 的 Bohr 紧化中取的。另一个区别如下。在 [10], 的定理 3.3 和 4.1 中，$\Lambda_\Omega(Q)$ 到 Λ 的嵌入是固定的，而不同的向量 $\vec{a} \in (\mathbb{R}^d)^k$ 会导出不同的（连续）函数，这些函数必须在 Λ 内 $\Lambda_\Omega(Q)$ 的闭包上进行检验。在我们的结果中，对于不同的向量 $\vec{a} \in (\mathbb{R}^d)^k$，我们有 $\Lambda_\Omega(Q)$ 到 $\mathbb{T}^{k\times k}$ 内不同的态射，但在闭包上必须处处非零的连续函数是固定的。

作为本节的总结，我们运用定理 4.10，给出定理 4.5的一个简明证明。

定理 4.5 的证明。假设集合 $\Lambda_\Omega(J)$ 对某些 $\alpha \in \mathbb{R}^d$, $\delta > 0$ 以及一个满测度子集 $J \subseteq I$ 是 (α, δ)-分离的。我们可以假设 $J \subseteq Q$；否则，将 J 替换为 $J \cap Q$，后者也是 I 的一个满测度子集。考虑向量 $\vec{a} = (\alpha, 2\alpha, \ldots, k\alpha) \in (\mathbb{R}^d)^k$。那么，对于任意 $\vec{\lambda} \in \Lambda_\Omega(J)$，我们有

$$\varphi_{\vec{a}}(\vec{\lambda}) = \begin{pmatrix} e^{2\pi i\alpha\lambda_1} & \cdots & e^{2\pi i(\alpha\lambda_1)k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{2\pi i\alpha\lambda_k} & \cdots & e^{2\pi i(\alpha\lambda_k)k} \end{pmatrix},$$

这是一个范德蒙德矩阵。特别地，根据关于 $\Lambda_\Omega(J)$ 的$(\alpha,\ \delta)$-分离的假设，我们得到

$$\left|\det(\varphi_{\vec{a}}(\vec{\lambda}))\right|^2 = \prod_{j\neq\ell}\left|e_\alpha(\lambda_j) - e_\alpha(\lambda_\ell)\right| \geq \delta^{k(k-1)} > 0.$$

由于行列式作为作用于 $k \times k$矩阵群上的函数是连续的，我们得到行列式在$\varphi_{\vec{a}}(\Lambda_\Omega(J))$处不为零。由定理4.10即可完成证明。■

致谢

E.A. 得到了资助项目 PID2022-142202NB-I00 的支持，该项目由 MICIU/AEIMCIN/AEI/10.13039/501100011033 以及 /10.13039/501100011033欧洲区域发展基金、欧盟和 PIP 11220210100954CO 资助。J.A. 得到了资助项目 PID2024-160033NB-I00 的支持，该项目由 MICIU/AEIMCIN/AEI/10.13039/501100011033 以及 /10.13039/501100011033欧洲区域发展基金、欧盟、PIP 11220210100954CO 和 UNLP11X829 资助。D.C. 得到了欧盟地平线欧洲计划、HORI- ZON MSCA 2021 PF 01、资助协议编号 101064206 的支持。

参考文献

[1] Elona Agora、Jorge Antezana 和 Carlos Cabrelli. “局部紧阿贝尔群中临界密度附近的多重平铺集、里斯基和采样”. 载于：《数学进展》285（2015年），第454–477页。doi: 10.1016/j.aim.2015.08.006.[2] A. Aguilera、C. Cabrelli、D. Carbajal 和 V. Paternostro. “平移保持算子的对角化”. 载于：《数学进展》389（2021年），论文编号107892，共32页。doi: 10.1016/j.aim.2021.107892.[3] Magalí Anastasio 和 Carlos Cabrelli. “由框架生成子空间并集上的采样”. 载于：Sampl. Theory Signal Image Process. 8.3（2009年），第261–286页。[4] Edward A. Azoff. “线性代数中的博雷尔可测性”. 载于：美国数学会会刊42（1974年），第346–350页。doi: 10.2307/2039503.[5] D. Barbieri、C. Cabrelli、D. Carbajal、E. Hernández 和 U. Molter. “群保持算子的结构”. 载于：Sampl. Theory Signal Process. Data Anal. 19.1（2021年），论文编号5，共28页。doi: 10. 1007/ s43670- 021- 00005-3.[6] Carl de Boor、Ronald A. DeVore 和 Amos Ron. “实数集 $L_2(\mathrm{R}^d)$上有限生成平移不变空间的结构”. 载于：J. Funct. Anal. 119.1（1994年），第37–78页。doi: 10.1006/jfan.1994.1003.[7] Marcin Bownik. “实数集 $L^2(\mathrm{R}^n)$上平移不变子空间的结构”. 载于：J. Funct. Anal. 177.2（2000年），第282–309页。doi: 10.1006/jfan.2000.3635.[8] Marcin Bownik 和 Joseph W. Iverson. “乘法不变算子与局部紧阿贝尔群框架的分类”. 载于：J. Funct. Anal. 280.2（2021年），论文编号108780，共59页。doi: 10.1016/j.jfa.2020.108780.[9] Carlos Cabrelli 和 Diana Carbajal. “无界多重平铺集上的指数函数 Riesz 基”. 载于：美国数学会会刊146.5（2018年），第1991–2004页。doi: 10.1090/proc/13980。

[10] Carlos Cabrelli、Kathryn E. Hare 和 Ursula Molter. “指数函数 Riesz 基与 Bohr 拓扑”. 载于：美国数学会会刊149.5（2021年），第2121–2131页。DOI：10.1090/proc/15395。[11] Carlos Cabrelli 和 Victoria Paternostro. “局部紧阿贝尔群上的移位调制不变空间”. 载于：《数学研究》211.1（2012年），第1–19页。DOI：10.4064/sm211-1-1。[12] Ole Christensen。《框架与里斯基导论》。第二版。应用与数值调和分析。Birkhäuser/Springer，[Cham], 2016, 第xxv页+70

4.

doi: 10.1007/978-3-319-25613-9.[13] Alberto Debernardi 和 Nir Lev。《具有对称面的凸多面体的指数函数 Riesz 基》。载于：《欧洲数学会杂志》24.8（2022年），第 3017–3029 页。doi: 10.4171/jems/1158.[14] Bálint Farkas、Máté Matolcsi 和 Péter Móra。《关于 Fuglede 猜想与通用谱的存在性》。载于：《傅里叶分析与应用杂志》12.5（2006年），第 483–494 页。doi: 10.1007/s00041-005-5069-7.[15] Bálint Farkas 和 Szilárd Gy. Révész。《四维中没有谱的平铺》。载于：《斯堪的纳维亚数学》98.1（2006年），第 44–52 页。doi: 10.7146/math.scand.a- 14982.[16] Bent Fuglede。《交换的自伴偏微分算子与一个群论问题》。载于：《泛函分析杂志》16（1974年），第 101–121 页。doi: 10.1016/0022-1236(74)90072-x.[17] Bent Fuglede。《球上的正交指数函数》。载于：《数学展望》19.3（2001年），第 267–272 页。doi: 10.1016/S0723-0869(01)80005-0.[18] Sigrid Grepstad 和 Nir Lev。《多重平铺与 Riesz 基》。载于：《数学进展》252（2014年），第 1–6 页。doi: 10.1016/j.aim.2013.10.019.[19] Sigrid Grepstad 和 Nir Lev。《Riesz基、Meyer 准晶与有界余数集》。载于：《美国数学会汇刊》370.6（2018年），第 4273–4298 页。doi: 10.1090/tran/7157.[20] Henry Helson。《不变子空间讲义》。学术出版社，纽约—伦敦，1964年，第 xi+130 页。[21] Alex Iosevich、Nets Katz 和 Terence Tao。《Fuglede 谱猜想对凸平面区域成立》。载于：《数学研究快报》10.5-6（2003年），第 559–569 页。doi: 10.4310/MRL.2003.v10.n5.a1.[22] Mihail N. Kolountzakis。《多重格子平铺与指数函数 Riesz 基》。载于：《美国数学会会刊》143.2（2015年），第 741–747 页。doi: 10.1090/S0002-9939-2014-12310-0.[23] Mihail N. Kolountzakis。《非对称凸区域没有指数函数基》。载于：《伊利诺伊数学杂志》44.3（2000年），第 542–550 页。[24] Mihail N. Kolountzakis 和 Máté Matolcsi。《没有谱的平铺》。载于：《数学论坛》18.3（2006年），第 519–528 页。doi: 10.1515/FORUM.2006.026.[25] Gady Kozma 和 Shahaf Nitzan。《组合 Riesz 基》。载于：《数学创刊》199.1（2015年），第 267–285 页。doi: 10.1007/s00222-014-0522-3.[26] Gady Kozma 和 Shahaf Nitzan。《在 $\mathbb{R}^d$中组合 Riesz 基》。载于：《伊比利亚美洲数学评论》32.4（2016年），第 1393–1406 页。doi: 10.4171/RMI/922。˘[27] Gady Kozma、Shahaf Nitzan 和 Alexander Olevskii。《一个没有指数函数 Riesz 基的集合》。载于：《伊比利亚美洲数学评论》39.6（2023年），第 2007–2016 页。doi: 10.4171/rmi/1411。

[28] I. Łaba。《两个区间并的 Fuglede 猜想》。载于：《美国数学会会刊》129.10（2001年），第 2965–2972 页。doi: 10.1090/S0002-9939-01-06035-X.[29] Nir Lev 和 Máté Matolcsi。《凸区域的 Fuglede 猜想在所有维数中均成立》。载于：《数学学报》228.2（2022年），第 385–420 页。doi: 10.4310/acta.2022.v228.n2.a3.[30] Jordy Marzo。《 $\mathbb{R}^d$中立方体并的指数函数 Riesz基》。载于：arXiv:math/0601288（2006年）。[31] Amos Ron 和 Zuowei Shen。《 $L_2(\mathrm{R}^d)$的平移不变子空间的框架与稳定基》。载于：《加拿大数学杂志》47.5（1995年），第 1051–1094 页。doi: 10.4153/CJM-1995-056-1.[32] Terence Tao。《Fuglede 猜想在五维及更高维中不成立》。载于：《数学研究快报》11.2-3（2004年），第 251–258 页。doi: 10.4310/MRL.2004. v11.n2.a8。

CUNEF大学，马德里，西班牙电子邮箱：elona.agora@cunef.edu

巴塞罗那大学，巴塞罗那，西班牙电子邮箱：jorge.antezana@ub.edu

维也纳大学，维也纳，奥地利电子邮箱：diana.agustina.carbajal@univie.ac.at