arXiv:2601.05424v1 [math.SG] 8 Jan 2026

关于拉格朗日协边与 Chekanov-Eliashberg 微分分次代数

SIERRA KNAVEL 和 THOMAS RODEWALD

摘要。本文研究精确拉格朗日协边，以及 Ekholm、Honda 和 Kalman 所定义的、由此类协边在其 Legendrian 端的 Chekanov-Eliashberg 微分分次代数之间诱导的映射。具体而言，我们说明如何利用增广将此映射推广到微分分次代数的线性化。随后，我们证明，在适当的温和假设下，该映射在线性化 Legendrian 接触同调上诱导的映射在拉格朗日同痕下保持不变；其在高阶乘积结构上诱导的映射也具有这一性质。

1. 引言

Legendrian 纽结之间的拉格朗日协边是接触几何与辛几何中的核心研究领域，过去几十年来一直受到广泛研究。已有许多构造此类协边的实例 [2, 6, 8, 15, 16], ，也有许多关于其存在性的障碍 [3, 6, 7, 14]。本文研究拉格朗日协边，尤其是它们在线性化 Legendrian 接触同调上诱导的微分分次代数（DGA）映射。文献 [21], 证明了此类映射的存在性；而采用生成族同调语言的一个类似版本也已在文献 [23]中得到证明。自然地，我们可能会问，在拉格朗日子流形构成的路径中对精确拉格朗日协边进行同痕变形，会如何影响这一映射。在明确给出链层次上的 DGA 映射后，我们证明，在适当的温和假设下，该映射在同调上诱导的映射在拉格朗日同痕下保持不变。

为确立这一不变性，我们来考察 Chekanov-Eliashberg 微分分次代数。Chekanov [4]和 Eliashberg [9] 分别独立地定义了一个与 $(\mathbb{R}, \xi_{std})$ 中的 Legendrian Λ 相关联的微分分次代数（$\mathcal{A}_\Lambda, \partial$），用以区分那些无法通过其经典不变量 tb 和 r [4]区分的 Legendrian 纽结。自这一结果问世以来，该微分分次代数一直是研究 Legendrian 纽结的重要工具，参见 [10, 13, 19, 20, 22]。由于该微分分次代数及其推广——同调——是一个非交换环，因此计算起来很困难。不过，在某些情况下，可以通过使用增广将该微分分次代数线性化，从而区分一对 Legendrian 纽结。

Chekanov [4] 将增广定义为一个链映射

$$\epsilon : (\mathcal{A}_\Lambda, \partial) \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 0)$$

以便将微分分次代数的微分修改为一种称为 ∂_ϵ 的新微分。随后可以对 ∂_ϵ 进行“线性化”，从而在有限维向量空间 F_Λ上得到微分 ∂_ϵ^ℓ。该微分所产生的链复形的同调就是 Λ的线性化接触同调。对于给定的 Legendrian Λ，若存在增广，则线性化接触同调更容易计算，并且所有线性化接触同调组成的集合在 Legendrian 同伦下保持不变。基环 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 后来推广为含幺环[13]；本文使用 $\mathbb{Z}$。

令 L 为一个精确拉格朗日协边 L，它从一个 Legendrian 纽结 Λ_1 延伸至一个 LegendrianΛ_2。Eckholm、Honda 和 Kalman [8] 定义了它们相应的微分分次代数之间的以下链映射。

$$\Phi_L : (\mathcal{A}_{\Lambda_2}, \partial_{\Lambda_2}) \to (\mathcal{A}_{\Lambda_1}, \partial_{\Lambda_1})$$

再一次，这个映射的非交换性使计算变得困难，因此我们旨在将其线性化 Φ_L，证明它在归一化接触同调上诱导一个同态，并通过直接计算将其应用于实例。也就是说，给定一个增广 ϵ_1，对于 Λ_1，我们考虑 $\epsilon_1 \circ \Phi_L$ 的增广 Λ_2，然后定义复形之间的映射 F_{Λ_i}（见第3节），

$$(\Phi_L^{\epsilon_1})^\ell : F_{\Lambda_2} \to F_{\Lambda_1}.$$

我们证明这给出了一个链映射，从而在归一化接触同调上诱导一个同态。

命题 1.1。设 L 是一个从 Λ_1 到 Λ_2 的精确拉格朗日协边，且 ϵ_1 是$(\mathcal{A}_{\Lambda_1},\partial_{\Lambda_1})$ 的一个增广，并且 $\epsilon_2 = \epsilon_1 \circ \Phi_L$。那么

$$(\Phi_L^{\epsilon_1})^\ell \circ \partial_{\epsilon_2}^\ell = \partial_{\epsilon_1}^\ell \circ (\Phi_L^{\epsilon_1})^\ell.$$

我们提醒读者，该映射的存在性已在 [21]，中得到证明，并且在 [23] 中以不同的语言进行了阐述。为了利用 $(\Phi_L^{\epsilon_1})^\ell$ 研究拉格朗日协边，我们需要证明该映射的一些基本事实，以及它在拉格朗日同痕等几何现象下的行为。本质上，我们得到了 [8, 定理 1.3 第 1 部分）和 1.4] 的线性化版本。

定理 1.2. 由恰当拉格朗日协边 L 从 Λ_1 到 Λ_2诱导的 *DGA* 映射，

$$(\Phi_L^{\epsilon_1})^\ell : (F_2, \partial_{\epsilon_2}^\ell) \to (F_1, \partial_{\epsilon_1}^\ell),$$

具有以下性质：

1) 若 $L = \Lambda \times \mathbb{R}$，则 $(\Phi_L^{\epsilon_1})^\ell = Id_{\mathcal{A}_\Lambda}$。

2) 设 L_1 和 L_2 是分别从 Λ_1 和 Λ_2 出发的恰当拉格朗日协边，且它们可通过恰当拉格朗日协边之间的同伦变形相互变形。若 $\epsilon_1 \circ \Phi_{L_1} = \epsilon_1 \circ \Phi_{L_2}$，并且$\partial_{\epsilon_2}$ 的像不含带有分次为 -1的 ***Reeb*** 弦的二次项，则 $(\Phi_{L_1}^{\epsilon_1})^\ell$ 和$(\Phi_{L_2}^{\epsilon_1})^\ell$ 链同伦。

注记 1.3. 自然会认为，既然映射 Φ_L 在 L经历恰当拉格朗日同痕时会发生链同伦等价的变化，那么线性化映射也应如此；但上述定理表明，要做到这一点还需要额外信息。特别是，我们需要对所涉及的微分分次代数施加额外假设，以确保能够在它们的线性化上定义不变于恰当拉格朗日同痕的映射（见注记 3.5）。我们不知道这些假设是否必要，但不借助它们，似乎无法确立 $(\Phi_L^{\epsilon_1})^\ell$ 所需的性质。

给定 Legendrian 纽结 Λ 的微分分次代数 ϵ 的一个增广，可以在对偶化线性接触同调 [5] 上定义一种乘积结构，事实上是一种 A_∞ 结构。[5] 中证明了，乘积结构以及整个 A_∞ 结构是比单纯线性化更强的 Legendrian 纽结不变量。Pan 展示了 A_∞ 的存在性

其间的态射 A_∞ 结构，该结构定义在它们的 Legendrian 端上，见 [21]，；我们在链层面运用自己的论证，重现了这一结果。

定理 1.4。 设$(F_1^*, \{m_k^{\epsilon_1}\}_{k\geq 1})$和$(F_2^*, \{m_k^{\epsilon_2}\}_{k\geq 1})$是线性化*Legendrian*上链群上的 A_∞ 结构。那么，映射族 $\{((\Phi_L^{\epsilon_1})^k)^* : (F_1^*)^{\otimes k} \to F_2^*\}_{k\geq 1}$ 是一个 A_∞态射。

定理 1.4 的一个推论是，$((\Phi_L^{\epsilon_1})^\ell)^*$ (即定理 $((\Phi_L^{\epsilon_1})^1)^*$ 中使用的记号 1.4 ）保持了第 2.4 节所述的高阶乘积结构。作为定理 1.2和定理 1.4的推论，在一定条件下，我们的线性化增广 DGA 映射在拉格朗日协边下保持这些结构的不变性。

推论1.5。 设 L_1 与 L_2拉格朗日同痕， ϵ_1 是 Λ_1的一个增广， $\epsilon_1 \circ \Phi_{L_1} = \epsilon_1 \circ \Phi_{L_2}$，且 ∂_{ϵ_2} 像中的二次项不包含次数为 -1 的*Reeb* 弦。那么$((\Phi_{L_1}^{\epsilon_1})^\ell)^*$ 和$((\Phi_{L_2}^{\epsilon_1})^\ell)^*$ 所诱导的映射在高阶乘积结构上相等。

由于 Pan 证明了精确拉格朗日协边会诱导一个 A_∞ 态射，Sabloff 和 Ma 已表明，其 Legendrian 端的 A_∞ 结构可以赋予弱相对 *Calabi-Yau*结构 [17]，；Ng 则证明了勒让德接触同调 [18]上存在一种 L_∞ 结构。作者希望在未来的工作中证明，也可以对 Φ_L 进行修改，使其保留这些结构。

从 Legendrian 纽结的微分分次代数中提取的另一个有用代数对象是 Ng 在 [20]中定义的特征代数 。文中证明，特征代数是一个Legendrian同痕类不变量。该不变量可用于区分同一光滑纽结类型的不同Legendrian代表。容易证明， Φ_L 也会在特征代数上诱导一个定义良好的映射。在未来的工作中，作者希望证明，这个诱导映射在拉格朗日同痕下也保持不变。

致谢：作者谨向 John Etnyre 致以谢意，感谢他给予的宝贵建议和指导。我们也感谢 Josh Sabloff 和 Lenny Ng 的热心讨论以及他们指出的参考文献 [21, 23]。本研究部分由美国国家科学基金会资助，项目编号为 DMS-2203312。

2. 背景

我们假设读者熟悉接触几何和辛几何的基本概念，例如 [11]，，以及勒让德接触同调的基础知识，例如 [12]。为方便起见并确立记号，我们在此回顾其中一些内容。在第2.1节中，我们回顾有关 Legendrian 纽结的基本概念以及精确拉格朗日协边的定义。在第2.2节中，我们讨论 Chekanov-Eliashberg 微分分次代数。最后，在第2.3节中，我们回顾 Eckholm、Honda 和 Kalman 从精确拉格朗日协边诱导出的微分分次代数映射。

2.1. 预备知识。

在 $\mathbb{R}^3$ 中，标准接触结构 ξ_{std} 是由 1-形式 $\alpha = dz - ydx$ 的核给出的二维平面场。本文将只使用这一种接触结构。$(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ 中的 Legendrian 纽结可以通过两种方式观察：前投影，

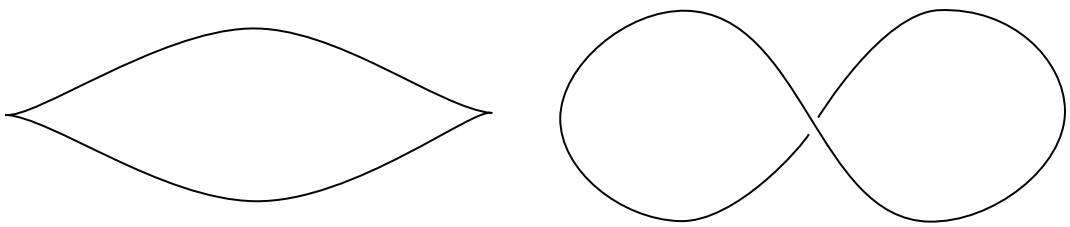


图1. 最大 tb 平凡结的前投影（左）及其拉格朗日投影（右）。

它将纽结投影到 xz-平面上，即 $\Pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y,z) \mapsto (x,z)$；以及拉格朗日投影，它将纽结投影到 xy-平面上，即 $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y,z) \mapsto (x,y)$。$(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ 中的 Legendrian 纽结可由两个经典不变量加以区分：瑟斯顿-贝内昆数 (tb) 和旋转数 (r)。有关 Legendrian 纽结及这些经典不变量的计算，读者可参阅以下综述文章 [11]。除非另有说明，本文中的 Legendrian 纽结（及链环）均为闭合且定向的。

恰当辛流形是配备了一个 1-形式λ 、满足 $\lambda = d\omega$的辛流形 (M^{2n}, ω)。若 L 是 M 中的一个 n 维子流形，且 $\omega|_L = 0$，则称其为拉格朗日子流形。若还满足 $\lambda|_L$ 是一个恰当 1-形式，则称该拉格朗日子流形是恰当的。我们可以研究恰当拉格朗日协边这一类特别有趣的非闭恰当拉格朗日子流形，它们位于 $\left(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3, d(e^t\alpha)\right)$中，其中 t 是第一个 $\mathbb{R}$因子的坐标。我们称这一对为 $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ 的辛化，它是一个恰当辛流形。辛化在 Legendrian 子流形上具有柱状端。假设拉格朗日协边是从 Legendrian Λ_1 到 Legendrian Λ_2的协边，见图2。拉格朗日子流形不像 Legendrian 纽结那样常见，而恰当拉格朗日协边更是少之又少。

形式上，从 Λ_1 到 Λ_2 的精确拉格朗日协边 L 是 $\left(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3, d\left(e^t\alpha\right)\right)$ 中的一个嵌入的、可定向拉格朗日曲面，并且存在某个 $T\in\mathbb{R}^+$使得以下条件成立：

- $L\cap\left([-T,T]\times\mathbb{R}^3\right)$ 是紧的
- $L\cap\left((T,\infty)\times\mathbb{R}^3\right) = (T,\infty)\times\Lambda_2$
- $L\cap\left((-\infty,-T)\times\mathbb{R}^3\right) = (-\infty,-T)\times\Lambda_1$，并且
- 存在一个函数 $f\colon L\to\mathbb{R}$，当$df = \lambda|_L$时，该函数在 L的每个端上均为常数。

给定两个 Legendrian 纽结 Λ_1 和 Λ_2之间的拉格朗日协边 L，Chantraine[3] 证明，它们的 Thurston-Bennequin 数之差与协边的欧拉示性数有关，并且它们的旋转数相同。也就是说，

$$tb(\Lambda_2) - tb(\Lambda_1) = -\chi(L),$$

and

$$r(\Lambda_1) = r(\Lambda_2).$$

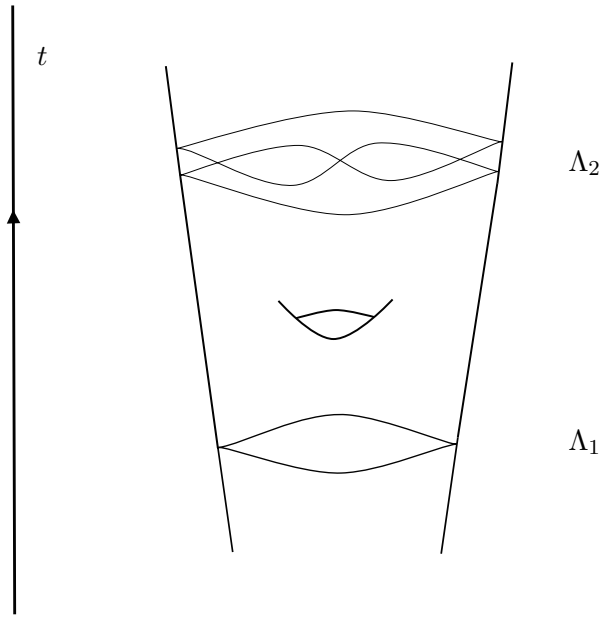


图2. 从 Legendrian 无结到勒让德三叶结的拉格朗日协边示意图，位于 $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ 的辛化中。

对于同痕这种零亏格余边情形，欧拉示性数 $\chi(L) = 0$意味着 $tb(\Lambda_1) = tb(\Lambda_2)$。希望进一步了解拉格朗日协边的读者可参阅 [1]。

2.2. **Chekanov-Eliashberg 微分分次代数**。经典不变量 tb 和 r 可用于区分某些但并非所有 Legendrian 纽结的 Legendrian 同伦变形类。不过，一些非经典不变量能够区分这些纽结，包括勒让德接触同调（LCH），即 Chekanov-Eliashberg 微分分次代数（微分分次代数）的同调，以及线性化接触同调。Chekanov-Eliashberg 微分分次代数由 Eliashberg [9]和 Chekanov [4], 独立发展，他们证明，与 5_2 及其镜像相关联的微分分次代数并非稳定驯顺同构，因此它们并非 Legendrian 同伦变形。这里，稳定驯顺同构是微分分次代数之间的一种等价概念 [4]。我们不详述稳定驯顺同构的定义，而是强调两个 Legendrian 同伦变形的纽结具有等价的微分分次代数。Legendrian 纽结的 Chekanov-Eliashberg 微分分次代数为每个 Legendrian 纽结 $\Lambda \in (\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ 配备一个微分分次代数，其生成元为***Reeb* 弦**，也就是 Reeb向量场的轨迹，其起点和终点都位于 Λ [4] 上。

设 Λ 是一个 Legendrian 纽结。Chekanov-Eliashberg 微分分次代数（记作 $\mathcal{A}_\Lambda$）最初是定义在 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上的代数，如今则指将其提升为定义在环 $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ 上、分次取值于 $\mathbb{Z}$ 的代数，其中 $r(\Lambda) = 0$。该代数是由有限集 Reeb 弦 $\mathcal{C}_\Lambda = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ 生成的自由含幺结合代数。也就是说，$\mathcal{A}_\Lambda = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$。除去 $2r(\Lambda)$，$\mathcal{A}_\Lambda$ 上的分次定义在这些生成元上。我们

在拉格朗日投影 Π(Λ) 中描述它，其中 Λ 的 Reeb 弦是投影中的双重点。设 $a_i \in \mathcal{C}_\Lambda$，并在 Λ 上取基点 $*$。设 λ_i 是一条从 a_i 的上交叉点通往其下交叉点且避开 $*$ 的路径。可以对 Π(Λ) 作微扰，使得 λ_i 的切向量逆时针旋转的分数圈数（记作 $r(\lambda_i)$）是 $\frac{1}{4}$ 的整数倍。于是，a_i 上的分次为

$$|a_i| = 2r(\lambda_i) - \frac{1}{2}.$$

t 和 t^{-1} 的分次分别为 $-2r$（Λ）和 $2r$（λ）。那么，$\mathcal{A}_\Lambda$中字的分次就是该字中各生成元分次之和。

关于使用拉格朗日投影对微分进行完整组合描述，∂ 请参阅 [12]。本文将用到它满足莱布尼茨法则这一性质，即对于任意两个字 w 和 w'，其中 $\mathcal{A}_\Lambda$，

$$\partial(ww') = \partial(w)w' + (-1)^{|w|}w\partial(w').$$

由于 Chekanov-Eliashberg 微分分次代数是无限维的，其同调也可能是无限维的。再加上代数的非交换性，这一障碍使计算变得困难。为克服这一问题，Chekanov [4]考虑具有增广的微分分次代数，以便使用有限维线性复形；其同调称为线性化接触同调，是一个有限维向量空间。

链群是环 $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ 上由 Reeb 弦生成的自由模，其分次与 Chekanov-Eliashberg 微分分次代数中使用的相同。令 $\epsilon : (\mathcal{A}_\Lambda, \partial) \to (\mathbb{Z}, 0)$ 为一个增广。映射 $\phi^\epsilon : \mathcal{A}_\Lambda \to \mathcal{A}_\Lambda$ 称为驯 *tame* 同构，由其对 Reeb 弦的作用定义。令 $c \in \mathcal{C}_\Lambda$。那么

$$\phi^\epsilon(c) = c + \epsilon(c),$$

同时保持常数不变。利用驯 tame 同构，我们定义该复形的边界算子，记为 ∂_ϵ^ℓ，即 $\partial_\epsilon = \phi^\epsilon \circ \partial \circ \phi^{-\epsilon}$ 的线性项。给定一个 Legendrian Λ 和一个增广 ϵ，我们将该复形记为 $(F_\Lambda, \partial_\epsilon^\ell)$。线性化接触同调记为 $LCH_*^\epsilon(\Lambda)$，它本身并非一个不变量。然而，Chekanov 证明了以下定理。

定理 2.1。 *(Chekanov [4])* 集合 $\{LCH_*^\epsilon(\Lambda) : \epsilon$ 是一个增广 $(\mathcal{A}_\Lambda, \partial) \to$ 在 $(\mathbb{Z}, 0)\}$ *Legendrian* 同伦变形下是不变量。

关于 $LCH_*^\epsilon(\Lambda)$构造的更多细节，请参见 [12]。

2.3. **Chekanov-Eliashberg DGA 协边映射**。 给定两个 Legendrian 子流形之间的精确拉格朗日协边L，Ekholm、Honda 和 Kalman [8] 在它们的 Chekanov-Eliashberg 微分分次代数上引入了一个 DGA 映射。他们进一步证明了以下结果。

定理 2.2。 *(Ekholm-Honda-Kalman [8,* 定理 1.3 和 1.4*])* 一个从 Λ_1 到 Λ_2 的精确拉格朗日协边 L 诱导出一个 *DGA* 映射 $\Phi_L : (\mathcal{A}_2, \partial_2) \to (\mathcal{A}_1, \partial_1)$，并具有以下性质：*1)* 如果 $L = \Lambda \times \mathbb{R}$ 是一个平凡的拉格朗日圆柱，则 $\Phi_L = Id_{\mathcal{A}_\Lambda}$。

2) 如果 L_1、L_2 具有相同的端点 Λ_1 和 Λ_2，并且可以通过恰当拉格朗日子流形同伦变形相互得到，那么 Φ_{L_1} 和 Φ_{L_2} 是链同伦的。

3) 如果 L_1 和 L_2 分别是从 Λ_0 到 Λ_1 以及从 Λ_1 到 Λ_2 的恰当拉格朗日协边，那么 Φ_L 和 $\Phi_{L_1} \circ \Phi_{L_2}$ 是链同伦的。

2.4. 代数 A_∞ 结构。设 V 是域 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$上的分次向量空间。A_∞ 上的一个代数是由一列次数为1的分次映射 $\{m_k\colon V^{\otimes k} \to V\}_{1\leq k}$ 组成的无限序列，并满足：

$$\sum_{i+j+k=l} m_{i+1+k} \circ (1^{\otimes i} \otimes m_j \otimes 1^{\otimes k}) = 0$$

对所有 $1 \leq l \leq n$均成立。取 $l = 1$ 时，得到方程 $m_1 \circ m_1 = 0$，因此 m_1 是 V上的余微分。取 $l = 2$ 时，得到方程

$$m_1 \circ m_2(a, b) = m_2(m_1(a), b) + m_2(a, m_1(b)).$$

因此，m_2 在 $H^*(V)$上诱导出良定义的乘积。完整的 A_∞ 结构无法在 $H^*(V)$ 上通过令映射 m_k、$k \geq 3$在上同调上诱导映射来定义。m_k 相反，高阶$(k \geq 3)$ 乘积是在上同调的商空间上归纳定义的。详情请参见 [5]。文献 [5] 证明了，在 A_∞ 上存在一个代数$(F^*_\Lambda,\ (\partial^\ell_\epsilon)^*)$。

定理 2.3。*(Civan-Etnyre-Koprowski-Sabloff-Walker* [5]*)* 对于每个增广 ϵ，*Legen*-德里安接触同调微分分次代数 $(\mathcal{A}_\Lambda, \partial_\Lambda)$ 在其线性化上链复形$(F^*_\Lambda, (\partial^\ell_\epsilon)^*)$上诱导出一个 A_∞ 结构。

设 $(V, \{m_k\colon V^{\otimes k} \to V\}_{1\leq k})$ 和 $(W, \{n_k\colon W^{\otimes k} \to W\}_{1\leq k})$ 是 A_∞ 代数。一个 A_∞态射 是一个由无穷多个次数为 0 的映射 $\{\phi_n\colon V^{\otimes n} \to W\}_{n\geq 1}$ 组成的集合，并满足

$$\sum_{i+j+k=n} \phi_{i+1+k} \circ (1^{\otimes i} \otimes m_j \otimes 1^{\otimes k}) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{i_1+\ldots+i_r} n_r \circ (\phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{i_r})$$

对所有 $n \geq 1$。$\{\phi_n\colon V^{\otimes n} \to W\}_{n\geq 1}$ 是一个 A_∞ 态射的一个推论是，ϕ_1保持乘积结构，即

$$\phi_1 \circ m_k([c_{i_1}], \ldots, [c_{i_k}]) = n_k(\phi_1[c_{i_1}], \ldots, \phi_1[c_{i_k}])$$

在上同调层面上。

3. 线性化协边映射

本节将展示如何从一个精确拉格朗日协边得到 Legendrian 纽结的线性化接触同调上的映射。随后，我们将探讨当该映射为平凡圆柱，或通过同伦变形在精确拉格朗日协边中改变时，它所具有的性质。

设 L 是从 Λ_1 到 Λ_2 的精确拉格朗日协边，Φ_L 是其诱导的微分分次代数映射。设 $\epsilon_1\colon (\mathcal{A}_{\Lambda_1}, \partial_1) \to (\mathbb{Z}, 0)$ 是一个增广，且 $\epsilon_2 = \epsilon_1 \circ \Phi_L$。我们将增广微分分次代数映射 $\Phi^{\epsilon_1}_L\colon (\mathcal{A}_{\Lambda_2}, \partial_{\epsilon_2}) \to (\mathcal{A}_{\Lambda_1}, \partial_{\epsilon_1})$ 定义为 $\Phi^{\epsilon_1}_L = \phi^{\epsilon_1} \circ \Phi_L \circ \phi^{-\epsilon_2}$。回顾一下，$\phi^{\epsilon_i}\colon \mathcal{A}_{\Lambda_i} \to \mathcal{A}_{\Lambda_i}$ 已在第2.2节中定义。我们首先证明，$\Phi^{\epsilon_1}_L$ 是从 $(\mathcal{A}_{\Lambda_2}, \partial_{\epsilon_2})$ 到 $(\mathcal{A}_{\Lambda_1}, \partial_{\epsilon_1})$ 的链映射，其中 $\partial_{\epsilon_i} = \phi^{\epsilon_i} \circ \partial \circ \phi^{-\epsilon_i}, i = 1, 2$，我们将其称为增广微分。

引理 3.1。设 L 是从 Λ_1 到 Λ_2 的精确拉格朗日协边。则 $\Phi^{\epsilon_1}_L \circ \partial_{\epsilon_2} = \partial_{\epsilon_1} \circ \Phi^{\epsilon_1}_L$。

证明。 计算可得

$$\begin{aligned}\Phi_L^{\epsilon_1} \circ \partial_{\epsilon_2} &= \phi^{\epsilon_1} \circ \Phi_L \circ \phi^{-\epsilon_2} \circ \phi^{\epsilon_2} \circ \partial_2 \circ \phi^{-\epsilon_2} \\ &= \phi^{\epsilon_1} \circ \Phi_L \circ \partial_2 \circ \phi^{-\epsilon_2} \\ &= \phi^{\epsilon_1} \circ \partial_1 \circ \Phi_L \circ \phi^{-\epsilon_2} \\ &= \phi^{\epsilon_1} \circ \partial_1 \circ \phi^{-\epsilon_1} \circ \phi^{\epsilon_1} \circ \Phi_L \circ \phi^{-\epsilon_2} \\ &= \partial_{\epsilon_1} \circ \Phi_L^{\epsilon_1},\end{aligned}$$

其中第三个等号由定理 2.2 因此我们看到 $\Phi_L^{\epsilon_1}$ 与增广微分可交换。 □

为了对引理 3.1中的方程进行“线性化”，我们需要以下两个引理。第一个引理表明 $\Phi_L^{\epsilon_1}$ 没有常数项。

引理 3.2。 设 c 是一条 *Reeb* 弦。那么 $\Phi_L^{\epsilon_1}(c)$ 没有常数项。

证明。 设 $\mathcal{C}_{\Lambda_1} = \{c_1, \dots, c_m\}$ 是 Λ_1 的 Reeb 弦， c 是 Λ_2 的一条 Reeb 弦。我们首先证明 $\phi^{\epsilon_1} \circ \Phi_L(c)$ 的常数项为 $\epsilon_1 \circ \Phi_L(c)$。存在常数 a_0、 $a_{i_1,\dots,i_j} \in \mathbb{Z}$，对应于 $j \geq 1$ 和 $i_k \in \{1, \dots, n\}$，其中只有有限个非零，使得

$$\Phi_L(c) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i_1,\dots,i_j} a_{i_1,\dots,i_j} c_{i_1} \cdots c_{i_j} \right).$$

Then

$$\phi^{\epsilon_1} \circ \Phi_L(c) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i_1,\dots,i_j} a_{i_1,\dots,i_j} (c_{i_1} + \epsilon(c_{i_1})) \cdots (c_{i_j} + \epsilon_1(c_{i_j})) \right).$$

这个和式的常数项为

$$\phi^{\epsilon_1} \circ \Phi_L(c) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i_1,\dots,i_j} a_{i_1,\dots,i_j} \epsilon(c_{i_1}) \cdots \epsilon_1(c_{i_j}) \right) = \epsilon_1 \circ \Phi_L(c).$$

现在我们证明 $\Phi_L^{\epsilon_1}(c)$ 没有常数项。我们有

$$\begin{aligned}\Phi_L^{\epsilon_1}(c) &= \phi^{\epsilon_1} \circ \Phi_L \circ \phi^{-\epsilon_2}(c) \\ &= \phi^{\epsilon_1} \circ \Phi_L(c - \epsilon_2(c)) \\ &= \phi^{\epsilon_1}(\Phi_L(c) - \Phi_L(\epsilon_2(c))) \\ &= \phi^{\epsilon_1}(\Phi_L(c) - (\epsilon_2(c))) \\ &= \phi^{\epsilon_1}(\Phi_L(c) - (\epsilon_1 \circ \Phi_L(c))) \\ &= \phi^{\epsilon_1} \circ \Phi_L(c) - \epsilon_1 \circ \Phi_L(c).\end{aligned}$$

如上一段所示， $\phi^{\epsilon_1} \circ \Phi_L(c)$ 的常数项恰好是 $\epsilon_1 \circ \Phi_L(c)$。

□

众所周知，增广微分满足莱布尼茨法则。我们在此给出证明，因为下文将需要这一结果，而且文献中尚未出现该证明。

引理 3.3。 增广边界映射 ∂_ϵ 满足莱布尼茨法则，即

$$\partial_\epsilon(c_1\cdots c_m)=\partial_\epsilon(c_1)c_2\cdots c_m+(-1)^{|c_1|}c_1\partial_\epsilon(c_2)c_3\cdots c_m+\ldots+(-1)^{|c_1\cdots c_{m-1}|}c_1\cdots c_{m-1}\partial_\epsilon(c_m).$$

证明。 我们首先证明

$$\partial(\phi^{-\epsilon}(c_1\cdots c_m))=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{|c_1\cdots c_{i-1}|}\phi^{-\epsilon}(c_1\cdots c_{i-1})\partial(\phi^{-\epsilon}(c_i))\phi^{-\epsilon}(c_{i+1}\cdots c_m)$$

用归纳法。假设对 $m-1$成立。那么对于长度为 m 的字，我们有

$$\begin{aligned}\partial(\phi^{-\epsilon}(c_1\cdots c_m))&=\partial((c_1-\epsilon_1(c_1))\phi^{-\epsilon}(c_2\cdots c_m))\\&=\partial(c_1\phi^{-\epsilon}(c_2\cdots c_m))-\epsilon(c_1)\partial(\phi^{-\epsilon}(c_2\cdots c_m)).\end{aligned}$$

令 $\sum_{i=1}^{n}w_i$ 为展开 $\phi^{-\epsilon}(c_2\cdots c_m)$ 后长度不超过 $m-1$ 的字之和。那么

$$\begin{aligned}\partial(c_1\phi^{-\epsilon}(c_2\cdots c_m))&=\partial(c_1\sum_{i=1}^{n}w_i)\\&=\sum_{i=1}^{n}\partial(c_1w_i)\\&=\sum_{i=1}^{n}\partial(c_1)w_i+(-1)^{|c_1|}c_1\partial(w_i)\\&=\partial(c_1)\sum_{i=1}^{n}w_i+(-1)^{|c_1|}c_1\partial(\sum_{i=1}^{n}w_i).\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}&\partial(c_1\phi^{-\epsilon}(c_2\cdots c_m))-\epsilon(c_1)\partial(\phi^{-\epsilon}(c_2\cdots c_m))\\&=\partial(c_1)\phi^{-\epsilon}(c_2\cdots c_m)+(-1)^{|c_1|}c_1\partial(\phi^{-\epsilon}(c_2\cdots c_m))-\epsilon(c_1)\partial(\phi^{-\epsilon}(c_2\cdots c_m))\\&=\partial(\phi^{-\epsilon}(c_1))\phi^{-\epsilon}(c_2\cdots c_m)+(-1)^{|c_1|}\phi^{-\epsilon}(c_1)\partial(\phi^{-\epsilon}(c_2\cdots c_m)),\end{aligned}$$

其中 $(-1)^{|c_1|}c_1-\epsilon(c_1)=(-1)^{|c_1|}\phi^{-\epsilon}(c_1)$，因为 ϵ 在非零分次 Reeb 弦上为零。由于我们假设 $m-1$ 成立，最后一项变为

$$\sum_{i=2}^{m}(-1)^{|c_1\cdots c_{i-1}|}\phi^{-\epsilon}(c_1\cdots c_{i-1})\partial(\phi^{-\epsilon}(c_i))\phi^{-\epsilon}(c_{i+1}\cdots c_m),$$

因此我们得到了所需的等式。

现在我们证明这个引理。计算可得

$$\begin{aligned}\partial_\epsilon(c_1...c_m) &= \phi^\epsilon \circ \partial \circ \phi^{-\epsilon}(c_1...c_m)\\ &= \phi^\epsilon \circ (\sum_{i=1}^{m}(-1)^{|c_1\cdots c_{i-1}|}\phi^{-\epsilon}(c_1\cdots c_{i-1})\partial(\phi^{-\epsilon}(c_i))\phi^{-\epsilon}(c_{i+1}\cdots c_m)\\ &= \sum_{i=1}^{m}(-1)^{|c_1\cdots c_{i-1}|}\phi^\epsilon\circ\phi^{-\epsilon}(c_1\cdots c_{i-1})\partial_\epsilon(c_i)\phi^\epsilon\circ\phi^{-\epsilon}(c_{i+1}\cdots c_m)\\ &= \partial^\epsilon(c_1)c_2\cdots c_m + (-1)^{|c_1|}c_1\partial_\epsilon(c_2)c_3\cdots c_m + \ldots + (-1)^{|c_1\cdots c_{m-1}|}c_1\cdots c_{m-1}\partial_\epsilon(c_m)\end{aligned}$$

□

现在我们考虑 $\Phi_L^{\epsilon_1}$的线性化版本。令 $(F_i, \partial_{\epsilon_i}^\ell)$ 表示第2.2节中定义的线性化链群。我们将线性化增广 DGA 映射 定义为

$$(\Phi_L^{\epsilon_1})^\ell : (F_2, \partial_{\epsilon_2}^\ell) \to (F_1, \partial_{\epsilon_1}^\ell),$$

其中，对于 F_2 的生成元 c，$(\Phi_L^{\epsilon_1})^\ell(c)$ 是 $\Phi_L^{\epsilon_1}(c)$ 中的线性项。现在我们证明 $(\Phi_L^{\epsilon_1})^\ell$ 是一个 DGA 映射。

命题*1.1*的证明。 设 Λ_2中的 c 是一个 Reeb 弦。首先注意到， $\Phi_L^{\epsilon_1}(\partial_{\epsilon_2}(c))$ 的线性部分，是 $\partial_{\epsilon_2}(c)$ 的线性部分在 $\Phi_L^{\epsilon_1}$作用下的像的线性部分。令$\mathcal{C}_{\Lambda_1} = \{c_1, \ldots, c_m\}$为 Λ_1的 Reeb 弦，并令 $a_{i_1,\ldots,i_j} \in \mathbb{Z}$。回想一下，$\partial_{\epsilon_1}(c)$ 没有常数项。如果

$$\partial_{\epsilon_2}(c) = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i_1,\ldots,i_j} a_{i_1,\ldots,i_j}c_{i_1}\cdots c_{i_j}\right),$$

只有有限多个 i_k 非零，那么

$$\Phi_L^{\epsilon_1}(\partial_{\epsilon_2}(c)) = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i_1,\ldots,i_j} a_{i_1,\ldots,i_j}\Phi_L^{\epsilon_1}(c_{i_1})\cdots\Phi_L^{\epsilon_1}(c_{i_j})\right).$$

我们知道，对于 $j > 1$， $\Phi_L^{\epsilon_1}(c_{i_1})\cdots\Phi_L^{\epsilon_1}(c_{i_j})$ 根据引理 3.2，必定是长度大于 1 的字之和。因此，$\Phi_L^{\epsilon_1}(\partial_{\epsilon_2}(c))$ 的所有线性部分 $j = 1$都必须来自 $\partial_{\epsilon_2}(c)$ 的线性部分。我们刚刚已经证明

$$(\Phi_L^{\epsilon_1}\circ\partial_{\epsilon_1})^\ell(c) = (\Phi_L^{\epsilon_2})^\ell\circ\partial_{\epsilon_2}^\ell(c).$$

现在令

$$\Phi_L^{\epsilon_1}(c) = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i_1,\ldots,i_j} a'_{i_1,\ldots,i_j}c'_{i_1}\cdots c'_{i_j}\right),$$

其中只有有限多个 i_k 非零，且 $c'_{i_1},\dots,c'_{i_j}\in\mathcal{C}_{\Lambda_1}$ 以及 $a'_{i_1,\dots,i_j}\in\mathbb{Z}$。然后对等式两边取增广微分 ∂_{ϵ_1}，得到

$$\partial_{\epsilon_1}(\Phi_L^{\epsilon_1}(c))=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i_1,\dots,i_j}a'_{i_1,\dots,i_j}\partial_{\epsilon_1}(c'_{i_1}\cdots c'_{i_j})\right).$$

根据引理3.3 长度为 $j\geq 2$ 的任意字都将映射为若干个字之和，其中每个字都含有 $j-1$ 个 Reeb 弦，并乘以某个 $\partial_{\epsilon_1}(c_i)$。由于 $\partial_{\epsilon_1}(c_i)$ 没有常数项，这些字的长度至少为 2。因此，$\partial_{\epsilon_1}(\Phi_L^{\epsilon_1}(c))$ 的线性部分，就是 $\Phi_L^{\epsilon_1}(c)$ 的线性部分在 ∂_{ϵ_1}下的像的线性部分，由此可得

$$(\partial_{\epsilon_1}\circ\Phi_L^{\epsilon_1})^{\ell}(c)=\partial_{\epsilon_1}^{\ell}\circ(\Phi_L^{\epsilon_1})^{\ell}(c).$$

利用前面各段中证明的事实和引理3.1，我们有

$$\begin{aligned}\partial_{\epsilon_1}^{\ell}\circ(\Phi_L^{\epsilon_1})^{\ell}(c)&=(\partial_{\epsilon_1}\circ\Phi_L^{\epsilon_1})^{\ell}(c)\\&=(\Phi_L^{\epsilon_1}\circ\partial_{\epsilon_2})^{\ell}(c)\\&=(\Phi_L^{\epsilon_1})^{\ell}\circ\partial_{\epsilon_2}^{\ell}(c).\end{aligned}$$

因此 $(\Phi_L^{\epsilon_1})^{\ell}$ 是一个链映射。 □

现在我们已经证明，线性化增广 DGA 映射$(\Phi_L^{\epsilon_1})^{\ell}$ 确实是一个良定义的 DGA 映射，接下来我们要考察不同的几何现象（例如拉格朗日同痕）如何影响$(\Phi_L^{\epsilon_1})^{\ell}$。为此，我们将证明定理2.2第 1）和第 2）部分的线性化版本。令$\mathcal{C}_{\Lambda_2}$ 表示 Λ_2的 Reeb 弦集合。在 [8], 定理2.2 第 2）部分中的链同伦定义在 Reeb 弦字上，是如下的 $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$-线性映射

$$\Omega(c_1...c_m)=\sum_{j=1}^{m}\Phi_{L_1}(c_1...c_{j-1})K(c_j)\Phi_{L_2}(c_{j+1}...c_m)$$

其中 $c_i\in\mathcal{C}_{\Lambda_2}$ 对于 $1\leq i\leq m$ 和 K 是一个次数为 1 的映射，它将 c_j 映射为 Reeb 弦中次数为 $|c_j|+1$的字的有限和。对于定理 1.2，我们定义 Ω的线性化版本，在下述引理中将其用作链同伦。为此，我们还将 K 定义为其线性化版本 $K^{\epsilon_1}=\phi^{\epsilon_1}\circ K\circ\phi^{-\epsilon_2}$。

引理 3.4. 设 $c_1\cdots c_m$ 是 $(\mathcal{A}_{\Lambda_2},\partial_{\Lambda_2})$ 中的一个字，并定义 Ω^{ϵ_1} 为

$$\Omega^{\epsilon_1}(c_1\cdots c_m)=\sum_{j=1}^{m}\Phi_{L_1}^{\epsilon_1}(c_1\cdots c_{j-1})K^{\epsilon_1}(c_j)\Phi_{L_2}^{\epsilon_1}(c_{j+1}\cdots c_m).$$

Then

$$\Omega^{\epsilon_1}(c_1\cdots c_m)=\phi^{\epsilon_1}\circ\Omega\circ\phi^{-\epsilon_2}(c_1\cdots c_m).$$

证明。 设 $c_i \in \mathcal{C}_{\Lambda_2}$ 对于 $1 \leq i \leq m$。首先注意到

$$\begin{aligned}\Omega^{\epsilon_1}(c_1 \cdots c_m) &= \sum_{j=1}^{m} (\phi^{\epsilon_1} \circ \Phi_{L_1} \circ \phi^{-\epsilon_2}(c_1 \cdots c_{j-1}))(\phi^{\epsilon_1} \circ K \circ \phi^{-\epsilon_2}(c_j))(\phi^{\epsilon_1} \circ \Phi_{L_2} \circ \phi^{-\epsilon_2}(c_{j+1} \cdots c_m)) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \phi^{\epsilon_1} \circ (\Phi_{L_1} \circ \phi^{-\epsilon_2}(c_1 \cdots c_{j-1}) K \circ \phi^{-\epsilon_2}(c_j) \Phi_{L_2} \circ \phi^{-\epsilon_2}(c_{j+1} \cdots c_m)) \\ &= \phi^{\epsilon_1} \circ (\sum_{j=1}^{m} \Phi_{L_1} \circ \phi^{-\epsilon_2}(c_1 \cdots c_{j-1}) K \circ \phi^{-\epsilon_2}(c_j) \Phi_{L_2} \circ \phi^{-\epsilon_2}(c_{j+1} \cdots c_m)).\end{aligned}$$

因此，要证明该引理，我们只需证明

$$\Omega \circ \phi^{-\epsilon_2}(c_1 \cdots c_m) = \sum_{j=1}^{m} \Phi_{L_1} \circ \phi^{-\epsilon_2}(c_1 \cdots c_{j-1}) K \circ \phi^{-\epsilon_2}(c_j) \Phi_{L_2} \circ \phi^{-\epsilon_2}(c_{j+1} \cdots c_m).$$

我们通过证明左侧的任意一个字都在右侧的和式中唯一出现，反之亦然，来做到这一点。

Let

$$\phi^{-\epsilon_2}(c_1 \cdots c_m) = c_1 \cdots c_m + \sum_{i=1}^{m} c_1 \cdots \hat{c}_i \cdots c_m + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k>i}^{m} c_1 \cdots \hat{c}_i \cdots \hat{c}_k \cdots c_m + \ldots + \hat{c}_1 \cdots \hat{c}_m$$

其中 $\hat{c}_i = -\epsilon_2(c_i)$。这是一个由长度至多为 m 的字组成的和式。设 w_n 是该和式中的一个字，其中有 $n \leq m$ 个带帽的 Reeb 弦。则

$$\Omega(w_n) = (-1)^n \epsilon_2(c_{i_1} \cdots c_{i_n}) \sum_{j=1}^{m-n} \Phi_{L_1}(c_{i_{n+1}} \cdots c_{i_{n+j-1}}) K(c_{i_{n+j}}) \Phi_{L_2}(c_{i_{n+j+1}} \cdots c_{i_m}).$$

现在固定 j。设 $i_r < i_{n+j}$ 是 Reeb 弦带帽的最大指标，且 i_s、$i_{n+j} < i_s$ 是其 Reeb 弦也带帽的最小指标，并且 $r + s = n$。则 $(-1)^r \epsilon_2(c_{i_1} \cdots c_{i_r}) \Phi_{L_1}(c_{i_{n+1}} \cdots c_{i_{n+j-1}})$ 是 $\Phi_{L_1} \circ \phi^{-\epsilon_2}(c_1 \cdots c_{i_{n+j}-1})$ 中唯一的一项，而 $K(c_{i_{n+j}}) = K \circ \phi^{-\epsilon_2}(c_{i_{n+j}})$，并且 $(-1)^s \epsilon_2(c_{i_s} \cdots c_m) \Phi_{L_2}(c_{i_{n+j+1}} \cdots c_m)$ 是 $\Phi_{L_2} \circ \phi^{-\epsilon_2}(c_{i_{n+j}+1} \cdots c_m)$ 中唯一的一项。因此，它们的拼接是

$$\Phi_{L_1} \circ \phi^{-\epsilon_2}(c_1 \cdots c_{i_{n+j}-1}) K \circ \phi^{-\epsilon_2}(c_{i_{n+j}}) \Phi_{L_2} \circ \phi^{-\epsilon_2}(c_{i_{n+j}+1} \cdots c_m).$$

因此，$\Omega \circ \phi^{-\epsilon_2}(c_1 \cdots c_m)$ 中的任意字都是以下形式的唯一一个字

$$\sum_{j=1}^{m} \Phi_{L_1} \circ \phi^{-\epsilon_2}(c_1 \cdots c_{j-1}) K \circ \phi^{-\epsilon_2}(c_j) \Phi_{L_2} \circ \phi^{-\epsilon_2}(c_{j+1} \cdots c_m).$$

现在考虑和式 $\sum_{j=1}^{m} \Phi_{L_1} \circ \phi^{-\epsilon_2}(c_1 \cdots c_{j-1}) K \circ \phi^{-\epsilon_2}(c_j) \Phi_{L_2} \circ \phi^{-\epsilon_2}(c_{j+1} \cdots c_m)$ 中的一个字。对于固定的 j，我们有

$$\begin{aligned}&\Phi_{L_1} \circ \phi^{-\epsilon_2}(c_1 \cdots c_{j-1}) K \circ \phi^{-\epsilon_2}(c_j) \Phi_{L_2} \circ \phi^{-\epsilon_2}(c_{j+1} \cdots c_m) \\ &= (-1)^r \epsilon_2(c_{i_1} \cdots c_{i_r}) \Phi_{L_1}(c_1 \cdots c_{j-1}) K(c_j) (-1)^{s-r} \epsilon_2(c_{i_{r+1}} \cdots c_s) \Phi_{L_2}(c_{j+1} \cdots c_m) \\ &= (-1)^s \epsilon_2(c_{i_1} \cdots c_{i_s}) \Phi_{L_1}(c_1 \cdots c_{j-1}) K(c_j) \Phi_{L_2}(c_{j+1} \cdots c_m),\end{aligned}$$

它是和式 $(-1)^s\epsilon_2(c_{i_1}\cdots c_{i_s})\Omega(w_s)$ 中唯一的一个字，其中 w_s 是某个字中未加帽的 Reeb 弦组成的字，该字属于 $\phi^{-\epsilon_2}(c_1\cdots c_m)$，其加帽的 Reeb 弦为 c_{i_1}，…，c_{i_s}。因此，$\sum_{j=1}^{m}\Phi_{L_1}\circ\phi^{-\epsilon_2}(c_1\cdots c_{j-1})K\circ\phi^{-\epsilon_2}(c_j)\Phi_{L_2}\circ\phi^{-\epsilon_2}(c_{j+1}\cdots c_m)$ 中的任意一个字都是 $\Omega\circ\phi^{-\epsilon_2}(c_1\cdots c_m)$ 中唯一的一个字，故引理得证。□

既然我们已经证明了 $\Omega^{\epsilon_1}=\phi^{\epsilon_1}\circ\Omega\circ\phi^{-\epsilon_2}$，我们就可以证明定理 2.2中第 1）和第 2）部分的线性化版本。提醒读者，指数 ℓ表示取表达式的线性项。

定理 *1.2* 的证明。 对于定理中的第 1）项，设 c是 Λ的一个 Reeb 弦。于是

$$\begin{aligned}(\Phi_L^{\epsilon_1})^\ell(c)&=(\phi^{\epsilon_1}\circ\Phi_L\circ\phi^{-\epsilon_2})^\ell(c)\\&=(\phi^{\epsilon_1}\circ\Phi_L)^\ell(c-\epsilon_2(c))\\&=(\phi^{\epsilon_1})^\ell(c-\epsilon_2(c))\\&=(c+\epsilon_1(c)-\epsilon_2(c))^\ell\\&=c.\end{aligned}$$

为了证明陈述 2），我们从 [8] 中的同伦方程开始。

$$\Phi_{L_1}-\Phi_{L_2}=\Omega\circ\partial_2+\partial_1\circ\Omega,$$

这等价于

$$\Phi_{L_1}^{\epsilon_1}-\Phi_{L_2}^{\epsilon_1}=\phi^{\epsilon_1}\circ\Omega\circ\phi^{-\epsilon_2}\circ\phi^{\epsilon_2}\circ\partial_2\circ\phi^{-\epsilon_2}+\phi^{\epsilon_1}\circ\partial_1\circ\phi^{-\epsilon_1}\circ\phi^{\epsilon_1}\circ\Omega\circ\phi^{-\epsilon_2}.$$

根据引理 3.4，这等价于

$$\Phi_{L_1}^{\epsilon_1}-\Phi_{L_2}^{\epsilon_1}=\Omega^{\epsilon_1}\circ\partial_{\epsilon_2}+\partial_{\epsilon_1}\circ\Omega^{\epsilon_1}.$$

将两边线性化可得

$$(\Phi_{L_1}^{\epsilon_1})^\ell-(\Phi_{L_2}^{\epsilon_1})^\ell=(\Omega^{\epsilon_1}\circ\partial_{\epsilon_2})^\ell+(\partial_{\epsilon_1}\circ\Omega^{\epsilon_1})^\ell.$$

我们需要证明，复合映射 $\Omega^{\epsilon_1}\circ\partial_{\epsilon_2}$ 和 $\partial_{\epsilon_1}\circ\Omega^{\epsilon_1}$ 的线性项分别等于它们线性化后的复合映射。设 $a_{i_1,\dots,i_j}\in\mathbb{Z}$ 和 $\mathcal{C}_{\Lambda_2}=\{c_1,\dots,c_n\}$ 是 Λ_2 中的 Reeb 弦，满足

$$w=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i_1,\dots,i_j}a_{i_1,\dots,i_j}c_{i_1}\cdots c_{i_j}\right)\in\operatorname{Im}\partial_{\epsilon_2}.$$

我们必须证明，长度大于 1 的字会被映射为长度也大于 1 的字。我们有

$$\Omega^{\epsilon_1}(w)=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i_1,\dots,i_j}a_{i_1,\dots,i_j}\Omega^{\epsilon_1}(c_{i_1}\cdots c_{i_j})\right).$$

长度大于 2 的 Reeb 弦字在 Ω^{ϵ_1} 下的像将是若干字之和，其中每个字至少有两个字母经过 $\Phi_{L_i}^{\epsilon_1}$ 作用；根据引理3.2，这些字母都没有常数项。因此这些字的长度将大于 1。现在考虑二次项 $a_{i_1,i_2}\Omega^{\epsilon_1}(c_{i_1}c_{i_2})=a_{i_1,i_2}(\Phi_{L_1}^{\epsilon_1}(c_{i_1})K^{\epsilon_1}(c_{i_2})+K^{\epsilon_1}(c_{i_1})\Phi_{L_2}^{\epsilon_1}(c_{i_2}))$ 的像。由于 $\operatorname{Im}\partial_{\epsilon_2}$ 中没有分次为 -1 的 Reeb 弦，$K\circ\phi^{-\epsilon_2}(c_{i_1})$ 和 $K\circ\phi^{-\epsilon_2}(c_{i_2})$

都是分次非零的字之和。因此，它们的和中的所有这些字都必须含有分次非零的 Reeb 弦；又因为 ϕ^{ϵ_1} 在分次非零的生成元上是恒等映射，所以 $\phi^{\epsilon_1} \circ K \circ \phi^{-\epsilon_2}(c_{i_1})$ 和 $\phi^{\epsilon_1} \circ K \circ \phi^{-\epsilon_2}(c_{i_2})$ 没有常数项。我们刚刚证明了

$$(\Omega^{\epsilon_1} \circ \partial_{\epsilon_2})^\ell = (\Omega^{\epsilon_1})^\ell \circ \partial_{\epsilon_2}^\ell.$$

根据命题 1.1 的证明中使用的同一论证，$(\partial_{\epsilon_1} \circ \Omega^{\epsilon_1})^\ell = \partial_{\epsilon_1}^\ell \circ (\Omega^{\epsilon_1})^\ell$，因此我们得到链同伦方程：

$$(\Phi_{L_1}^{\epsilon_1})^\ell - (\Phi_{L_2}^{\epsilon_1})^\ell = (\Omega^{\epsilon_1})^\ell \circ \partial_{\epsilon_2}^\ell + \partial_{\epsilon_1}^\ell \circ (\Omega^{\epsilon_1})^\ell.$$

□

注 3.5。 在结论 2) 的证明中，我们要求 $\operatorname{Im} \partial_{\epsilon_2}$ 中的二次项 $c_i c_j$ 不含分次为 -1 的 Reeb 弦，因为 $K(c_j)$ 的和中可能包含一个由 Reeb 弦组成的字，且其中所有 Reeb 弦的分次都为零，并且通过 ϵ_1 映射后成为非零常数。进而，这会导致和 $K^{\epsilon_1}(c_j)$ 中出现常数项，因此 $\Phi_{L_1}^{\epsilon_1}(c_i) K^{\epsilon_1}(c_j)$ 可能会有线性项，从而妨碍所需的等式 $(\Omega^{\epsilon_1} \circ \partial_{\epsilon_2})^\ell = (\Omega^{\epsilon_1})^\ell \circ (\partial_{\epsilon_2})^\ell$。

4. 保持 A∞ 结构

令 $((\Phi_L^{\epsilon_1})^k)^*$ 为映射 $(\Phi_L^{\epsilon_1})^k \colon F_{\Lambda_2} \to F_{\Lambda_1}^{\otimes k}$ 的伴随映射，该映射将 Reeb 弦 c 映至和式 $\Phi_L^{\epsilon_1}(c)$ 中长度为 k 的字。我们将证明，集合 $\{((\Phi_L^{\epsilon_1})^k)^*\}_{k \geq 1}$ 是一个 A_∞ 态射。Pan 在 [21], 中证明了这一点，但我们将采用类似于第 3 节中的链层次论证来证明。我们先证明以下两个引理。提醒读者， $\partial_{\epsilon_i}^k(c)$ 表示和式 $\partial_{\epsilon_i}(c)$ 中长度为 k 的项， $i = 1$， 2。本节中我们使用 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 系数。

引理 4.1. 设 L 是从 Λ_1 到 Λ_2 的恰当拉格朗日协边，并假设 $j < k$。那么

$$(\partial_{\epsilon_1} \circ (\Phi_L^{\epsilon_1})^j)^k(c) = \sum_{i+n+1=j} (1^{\otimes i} \otimes \partial_{\epsilon_1}^{k-j+1} \otimes 1^{\otimes n}) \circ (\Phi_L^{\epsilon_1})^j(c)$$

证明。设

$$(\Phi_L^{\epsilon_1})^j(c) = \sum_{i_1,\ldots,i_j} a_{i_1,\ldots,i_j} c_{i_1} \cdots c_{i_j}.$$

Then

$$\begin{aligned} \partial_{\epsilon_1} \circ (\Phi_L^{\epsilon_1})^j(c) &= \sum_{i_1,\ldots,i_j} a_{i_1,\ldots,i_j} \partial_{\epsilon_1}(c_{i_1} \cdots c_{i_j}) \\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_j} a_{i_1,\ldots,i_j} (\partial_{\epsilon_1}(c_{i_1}) c_{i_2} \cdots c_{i_j} + \ldots + c_{i_1} c_{i_2} \cdots \partial_{\epsilon_1}(c_{i_j})). \end{aligned}$$

这个和的长度为 k 字，恰好是

$$\sum_{i_1,\ldots,i_j} a_{i_1,\ldots,i_j} (\partial_{\epsilon_1}^{k-j+1}(c_{i_1}) c_{i_2} \cdots c_{i_j} + \ldots + c_{i_1} c_{i_2} \cdots \partial_{\epsilon_1}^{k-j+1}(c_{i_j})),$$

or

$$\sum_{i_1,\dots,i_j} a_{i_1,\dots,i_j}(\partial_{\epsilon_1}^{k-j+1}\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1+\ldots+1\otimes\cdots\otimes 1\otimes\partial_{\epsilon_1}^{k-j+1})(c_{i_1}\cdots c_{i_j}),$$

可以改写为

$$\sum_{i+1+n=j}\sum_{i_1,\dots,i_j} a_{i_1,\dots,i_j}(1^{\otimes i}\otimes\partial_{\epsilon_1}^{k-j+1}\otimes 1^{\otimes n})(c_{i_1}\cdots c_{i_j}),$$

引理得证。 □

引理 4.2. 设 L 是从 Λ_1 到 Λ_2的一个恰当拉格朗日子流形协边，并假设 $j<k$。那么

$$((\Phi_L^{\epsilon_1})\circ\partial_{\epsilon_2}^{j})^k(c)=\sum_{k_1+\ldots+k_j=k}((\Phi_L^{\epsilon_1})^{k_1}\otimes\ldots\otimes(\Phi_L^{\epsilon_1})^{k_j})\circ\partial_{\epsilon_2}^{j}(c)$$

.

证明。设

$$\partial_{\epsilon_2}^{j}(c)=\sum_{i_1,\dots,i_j} a_{i_1,\dots,i_j}c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_j}.$$

Then

$$\Phi_L^{\epsilon_1}\circ\partial_{\epsilon_2}^{j}(c)=\sum_{i_1,\dots,i_j} a_{i_1,\dots,i_j}\Phi_L^{\epsilon_1}(c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_j})=\sum_{i_1,\dots,i_j} a_{i_1,\dots,i_j}\Phi_L^{\epsilon_1}(c_{i_1})\cdots\Phi_L^{\epsilon_1}(c_{i_j}).$$

那么，来自该乘积的长度为 k 的字恰好是由以下内容得到的

$$(\Phi_L^{\epsilon_1})^{k_1}(c_{i_1})(\Phi_L^{\epsilon_1})^{k_2}(c_{i_2})\cdots(\Phi_L^{\epsilon_1})^{k_j}(c_{i_j}),$$

其中 $k_1+\ldots+k_j=k$。对所有此类 k_1、.....、 k_j 求和，即得引理。 □

现在证明 $\{((\Phi_L^{\epsilon_1})^k)^*\}_{k\geq 1}$ 是一个 A_∞ 态射。我们将 $\partial_{\epsilon_i}^k$ 的伴随映射记为 $m_k^{\epsilon_i}$,$i=1$，2。

定理的证明*1.4*。我们先考虑链群，然后再取对偶。考虑方程

$$(\partial_{\epsilon_1}\circ\Phi_L^{\epsilon_1})^k(c)=(\Phi_L^{\epsilon_1}\circ\partial_{\epsilon_2})^k(c).$$

这可以改写为

$$\sum_{j=1}^{k}(\partial_{\epsilon_1}\circ(\Phi_L^{\epsilon_1})^j)^k(c)=\sum_{j=1}^{k}((\Phi_L^{\epsilon_1})\circ\partial_{\epsilon_2}^{j})^k(c)$$

因为如果 $j>k$，那么 ∂_{ϵ_1} 和 $\Phi_L^{\epsilon_1}$ 作为同态所满足的莱布尼茨法则，再结合它们的像中不含常数这一点，可知长度为 $j>k$ 的字会被映射为长度大于 k的字之和。根据上述引理，这可以改写为

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i+n+1=j}(1^{\otimes i}\otimes\partial_{\epsilon_1}^{k-j+1}\otimes 1^{\otimes n})\circ(\Phi_L^{\epsilon_1})^j(c)=\sum_{j=1}^{k}\sum_{k_1+\ldots+k_j=k}((\Phi_L^{\epsilon_1})^{k_1}\otimes\cdots\otimes(\Phi_L^{\epsilon_1})^{k_j})\circ\partial_{\epsilon_2}^{j}(c).$$

对偶化得到方程

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i+n+1=j}((\Phi_L^{\epsilon_1})^j)^*\circ(1^{\otimes i}\otimes m_{k-j+1}^{\epsilon_1}\otimes 1^{\otimes n})=\sum_{j=1}^{k}\sum_{k_1+\ldots+k_j=k} m_j^{\epsilon_2}\circ(((\Phi_L^{\epsilon_1})^{k_1})^*\otimes\cdots\otimes((\Phi_L^{\epsilon_1})^{k_j})^*).$$

对左侧重新编号得到方程

$$\sum_{i+p+n=k}((\Phi_L^{\epsilon_1})^{i+n+1})^*\circ(1^{\otimes i}\otimes m_p^{\epsilon_1}\otimes 1^{\otimes n})=\sum_{j=1}^{k}\sum_{k_1+\ldots+k_j=k} m_j^{\epsilon_2}\circ(((\Phi_L^{\epsilon_1})^{k_1})^*\otimes\cdots\otimes((\Phi_L^{\epsilon_1})^{k_j})^*).$$

因此， $\{((\Phi_L^{\epsilon_1})^k)^*\colon (F_1^*)^{\otimes k}\to F_2^*\}_{k\geq 1}$ 是一个 A_∞ 态射。

□

既然我们已经证明了 $(F_1^*,\{m_k^{\epsilon_1}\}_{k\geq 1})$ 与 $(F_2^*,\{m_k^{\epsilon_2}\}_{k\geq 1})$ 之间存在一个 A_∞ 态射，现在来考察两个拉格朗日同痕协边在它们的高阶乘积结构上诱导的映射。如果从 Λ_1 到 Λ_2 的两个恰当拉格朗日协边拉格朗日同痕（并满足定理 1.2 中的条件），那么我们可以对定理 1.2 中的链同伦方程取对偶，从而得到 $((\Phi_{L_1}^{\epsilon_1})^\ell)^*$ 与 $((\Phi_{L_2}^{\epsilon_2})^\ell)^*$ 之间的链同伦方程。由于 $(F_1^*,\{m_k^{\epsilon_1}\}_{k\geq 1})$ 和 $(F_2^*,\{m_k^{\epsilon_2}\}_{k\geq 1})$ 上的乘积结构分别定义在 $(F_1^*,(\partial_{\epsilon_1}^\ell)^*)$ 和 $(F_2^*,(\partial_{\epsilon_2}^\ell)^*)$ 的上同调商空间上，$((\Phi_{L_1}^{\epsilon_1})^\ell)^*$ 与 $((\Phi_{L_2}^{\epsilon_2})^\ell)^*$ 之间的链同伦方程意味着它们在这些乘积结构上诱导的映射相等。因此，我们得到以下推论。

推论 4.3. 设 L_1 与 L_2拉格朗日同痕， ϵ_1 是 Λ_1的一个增广， $\epsilon_1\circ\Phi_{L_1}=\epsilon_1\circ\Phi_{L_2}$，且 ∂_{ϵ_2} 的像中的二次项不含次数为 -1 的 ***Reeb*** 弦。那么，$((\Phi_{L_1}^{\epsilon_1})^\ell)^*$ 和 $((\Phi_{L_2}^{\epsilon_1})^\ell)^*$ 所诱导的映射在高阶乘积结构上相等。

参考文献

[1] Sarah Blackwell、No´emie Legout、Caitlin Leverson、Ma¨ylis Limouzineau、Ziva Myer、Yu Pan、Samantha Pezzimenti、Lara Simone Su´arez 和 Lisa Traynor。《拉格朗日协边的构造》。载于辛几何、接触几何与拓扑研究方向，第27卷*Assoc. Women Math. Ser.*，第245–272页。Springer，Cham， [2021] ©2021。[2] Fr´ed´eric Bourgeois、Joshua M. Sabloff 和 Lisa Traynor。通过生成族构造拉格朗日 cobordism：构造与地域分布。*Algebr. Geom. Topol.*，15(4)：2439–2477，2015。[3] Baptiste Chantraine。Legendrian 结的拉格朗日同调。*Algebr. Geom.Topol.*，10(1)：63–85，2010。[4] Yuri Chekanov。Legendrian链环微分代数。*Invent. Math.*，150(3)：441–483，2002。[5] Gokhan Civan、Paul Koprowski、John Etnyre、Joshua M. Sabloff 和 Alden Walker。勒让德接触同调的乘积结构。*Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*，150(2)：291–311，2011。[6] Christopher Cornwell、Lenhard Ng 和 Steven Sivek。拉格朗日同调的障碍。*Algebr. Geom. Topol.*，16(2)：797–824，2016。[7] Tobias Ekholm、John Etnyre 和 Michael Sullivan。 $\mathbb{R}^{2n+1}$中的非同位Legendrian子流形。*J. Differential Geom.*，71(1)：85–128，2005。[8] Tobias Ekholm、Ko Honda 和 Tam´as K´alm´an。Legendrian 结与恰当拉格朗日协边。*J. Eur. Math. Soc.(JEMS)*，18(11)：2627–2689，2016。[9] Yakov Eliashberg。接触拓扑中的不变量。*Documenta Mathematica*，第327–338页，1998。[10] Judith Epstein、Dmitry Fuchs 和 Maike Meyer。Chekanov-Eliashberg不变量与Legendrian结的横截近似。*Pacific J. Math.*，201(1)：89–106，2001。[11] John B. Etnyre。Legendrian结与横截结。载于结理论手册，第105–185页。Elsevier B. V.，阿姆斯特丹，2005。[12] John B. Etnyre 和 Lenhard L. Ng。 $\mathbb{R}^3$中的勒让德接触同调。载于微分几何综述*2020*：三维流形拓扑与几何综述，第25卷*Surv. Differ. Geom.*，第103–161页。Int. Press，波士顿，MA， [2022] ©2022。[13] John B. Etnyre、Lenhard L. Ng 和 Joshua M. Sabloff。Legendrian结不变量与相容定向。*J.Symplectic Geom.*，1(2)：321–367，2002。

[14] M. Gromov。辛流形中的伪全纯曲线。*Invent. Math.*，82(2)：307–347，1985。[15] Roberta Guadagni、Joshua M. Sabloff 和 Matthew Yacavone。勒让德卫星与可分解协边。*J.Knot TheoryRamifications*，31(13)：论文编号2250071，共33页，2022。[16] Francesco Lin。Legendrian结的恰当拉格朗日帽。*J. Symplectic Geom.*，14(1)：269–295，2016。[17] Jiajie Ma 和 Joshua M. Sabloff。勒让德接触同调的弱相对Calabi–Yau结构，2025。[18] Lenhard Ng。勒让德接触同调的L∞结构，2025。[19] Lenhard Ng 和 DanielRutherford。Legendrian 结的卫星与 Chekanov-Eliashberg 代数的表示。*Algebr. Geom. Topol.*，13(5)：3047–3097，2013。[20] Lenhard L. Ng。可计算的勒让德不变量。*Topology*，42(1)：55–82，2003。[21] Yu Pan。由恰当拉格朗日协边诱导的增广范畴映射。*Algebr. Geom. Topol.*，17(3)：1813–1870，2017。[22] Joshua M. Sabloff。勒让德接触同调的对偶性。*Geom. Topol.*，10：2351–2381，2006。[23] Joshua M. Sabloff 和 Lisa Traynor。通过生成族研究Legendrian子流形之间拉格朗日协边的障碍。*Algebr.Geom.Topol.*，13(5)：2733–2797，2013。

佐治亚理工学院数学学院，亚特兰大，佐治亚州电子邮箱地址：sknavel3@gatech.edu

佐治亚理工学院数学学院，亚特兰大，佐治亚州电子邮箱地址：tomrodewald@gatech.edu