《天文学与天体物理学》稿件编号：主文稿
2026年1月12日
©ESO 2026

arXiv:2601.05426v1 [physics.space-ph] 8 Jan 2026

使用多航天器数据计算空间等离子体中旋度和散度的无积分方法

Rohan Singh、Supratik Banerjee 和 Arijit Halder

物理系，印度理工学院坎普尔分校，印度208016rohansingh23@iitk.ac.in,
sbanerjee@iitk.ac.in，harijit@iitk.ac.in

接收日期：XXXX年XX月；接受日期：XXXX年XX月

摘要

了解局部空间梯度（旋度、散度等）对于研究空间等离子体（如太阳风）中包括速度和磁场在内的流场的三维变化至关重要。本文提出一种简单方法，利用多航天器系统的原位数据计算这些量。不同于依赖矢量积分定理的常用旋度计方法，我们的无积分方法基于构建局部正交归一坐标系及其相应的有限差分近似。旋度计适用于由四面体排列的四航天器系统，并给出旋度的单一体积平均估计。另一方面，利用我们提出的方法处理MMS（NASA）的107 个时间区间数据后，我们成功计算出了四面体各航天器位置处以及由其中三个航天器组成的（三点不共线）子集中的空间导数。对于给定四面体，所计算的所有旋度的平均值与利用旋度计公式计算的旋度高度一致（相关系数为 ~ 0.99）。研究发现，当航天器构型接近正四面体时，利用我们的方法计算得到的旋度质量会有所提高。当前框架有助于研究湍流加热率，并探索局部流动特征，例如贝尔特拉米化、电流片的存在等，适用于当前及未来的多航天器任务，包括涉及四个以上航天器的任务。

关键词。 太阳风–多航天器任务–旋度–散度–电流密度–涡量

1。引言

T湍流的特征清晰地显现于太阳风中
t通过其电磁场和等离子体
v变量（密度、速度等。），跨越广泛的
s空间和时间尺度。人们认为湍流在其中发挥着至关重要的作-
c在解释加速和局部加热方面发挥重要作用的
t太阳风（Verma 等，1995；Matthaeus 等，1999；Sorriso-Valvo 等，2007；Vasquez 等，2007；Carbone 等，2009；Banerjee 等，2016；Chen, C. H. K. 等，2021）。对于长度
s大于离子惯性尺度的尺度上，太阳
w风湍流的若干特征可由以下框架充分解释：
m磁流体动力学（MHD）湍流（Grappin 等，1990；G oldstein 等，1995；Horbury 等，2005；Bruno 和 Carbone 2013）。

湍流加热率的精确测量可以通
t过不可压缩磁流体湍流的精确关系获
g得，该关系由 $\nabla_r \cdot \mathcal{F} = -4\varepsilon$ （Politano 和 Pouquet 1998）给出，其中 ε 是
t能量级联率（等于湍流加热率），以及

$$\mathcal{F} = \left\langle \delta\boldsymbol{u} \left[(\delta\boldsymbol{u})^2 + (\delta\boldsymbol{b})^2 \right] - 2\delta\boldsymbol{b}\,(\delta\boldsymbol{u}\cdot\delta\boldsymbol{b}) \right\rangle, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{u}$ 为流体速度， $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{B}/\sqrt{\mu_0}$ 中， $\boldsymbol{B}$ 为磁场，μ_0 为真空磁导率，而 δ 表示相距 r的两点之间的空间增量。对于各向同性湍流，可将上述精确关系在半径为r 的球面上积分，得到 $\mathcal{F}_r = -(4/3)\varepsilon r$。然而，太阳风中不可忽略的平均磁场会使能量传递呈现各向异性（Matthaeus 等人 1996；Horbury 等人 2008；Podesta 等人 2009；Telloni 等人 2019；Deepali 和 Banerjee 2021；Sakshee 等人 2022）。另一种

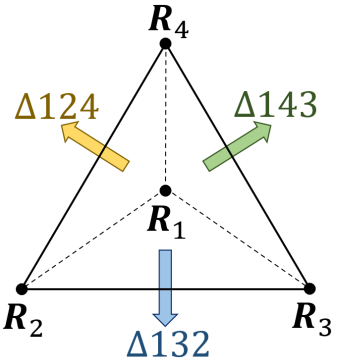

图 1：四面体多航天器系统示意图，航天器位于各顶点（位置以 $\boldsymbol{R}$表示）。粗箭头表示与 MMS 1（位于 $\boldsymbol{R}_1$）共面的表面的方向。

精确关系可表示为（Banerjee &Galtier2016），无需假设各向同性，尤其适用于计算湍流加热率。

$$\langle \delta(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\omega})\cdot\delta\boldsymbol{u} + \delta(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{b})\cdot\delta\boldsymbol{u} + \delta(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{b})\cdot\delta\boldsymbol{j} \rangle = 2\varepsilon, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{\omega} = \nabla\times\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{j} = \nabla\times\boldsymbol{b}$。因此，除了 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{b}$之外，还需要计算 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{j}$，以测量 ε。单航天器的数据无法用于计算旋度，计算旋度需要多航天器系统。过去，人们提出了多种利用多航天器任务计算旋度的方法，包括旋度计 技术

(Dunlop 等人，1988)、线性插值法（Chanteur 与 Harvey（1998））、最小二乘法（Harvey（1998））、几何法（Shen 与 Dunlop（2023））等。所有这些方法都基于积分学，而旋度计(Dunlop 等人，1988）技术已成为上述方法中最常用的一种。按照该技术，对于给定的四面体多航天器结构（Cluster 和 MMS），如图 1所示，我们首先取三角形表面 Δ132并使用

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} \implies \oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 \iint_{\Delta 132} \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\implies \int_1^3 \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_3^2 \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_2^1 \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 \iint_{\Delta 132} \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{S}, \quad (3)$$

其中， $\boldsymbol{J}$ 为电流密度。下一步，对于每个线积分，假设磁场均匀，其强度等于两端磁场强度的平均值。此外，如果假设整个四面体的平均电流为 $\boldsymbol{J}$，则上述表达式可近似表示为

$$\left(\frac{\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_3}{2}\right) \cdot (\boldsymbol{R}_3 - \boldsymbol{R}_1) + \left(\frac{\boldsymbol{B}_3 + \boldsymbol{B}_2}{2}\right) \cdot (\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_3)$$
$$+ \left(\frac{\boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{B}_1}{2}\right) \cdot (\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R}_2) = \mu_0 \boldsymbol{J} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{R}_{31} \times \boldsymbol{R}_{21}}{2}\right)$$
$$\implies \boldsymbol{B}_{31} \cdot \boldsymbol{R}_{21} - \boldsymbol{B}_{21} \cdot \boldsymbol{R}_{31} = \mu_0 \boldsymbol{J} \cdot (\boldsymbol{R}_{31} \times \boldsymbol{R}_{21}), \quad (4)$$

其中 $\boldsymbol{R}_i$ 是i^{th} 号航天器的位置矢量， $\boldsymbol{B}_i$ 是相应的磁场，对于任意向量 $\boldsymbol{A}$， $\boldsymbol{A}_{ji} = \boldsymbol{A}_j - \boldsymbol{A}_i$。采用类似方法处理曲面 Δ124和Δ143，可得到另外两个与方程（4）类似的方程，求解后最终得到 $\boldsymbol{J}\,i$，即：的旋度 $\boldsymbol{B}$ （Dunlop 等人，1988）。显然，按照构造，旋度计技术仅适用于采用四面体构型的四航天器任务，因此，当航天器数量少于四个时，无法使用该技术。此外，该方法给出的是整个四面体范围内旋度的平均估计值（此处为 $\boldsymbol{J}$），而非某一特定航天器位置处的旋度值。

本文提出了一种简单而稳健的工具，可补充现有的空间等离子体空间导数计算技术。该方法基于构建一个固定于航天器的正交归一坐标系，不涉及任何矢量积分定理。所提出的无积分方法（以下简称 IFM）不要求多航天器系统必须呈四面体形状（如 Cluster 和 MMS）；正如我们所展示的，该方法也成功应用于 MMS 的一个由三艘航天器组成的子集。其形式体系基于寻找三个相互正交的方向，随后利用旋度的基本定义，而该定义不涉及矢量分析中的任何积分定理。因此，我们可以计算特定点（参考航天器所在位置）处的旋度，而非整个航天器编队的平均值。这也为计算所得旋度量的高阶导数铺平了道路，而旋度计无法做到这一点。最后，我们展示了该方法还可用于计算相关向量场的局部散度，从而构成一套完整的工具箱，借助场变量的不同类型空间导数来探测太阳风及类似系统。

本文结构安排如下：第2节介绍本研究所用数据的筛选和时间区间详情。第3节介绍利用 IFM 计算旋度和散度的工作原理。随后，我们在第4节展示四航天器系统的结果，以及其在三航天器系统（忽略第四个航天器）中的应用。在同一节中，我们还根据所有数据集的相关系数和直方图，对 IFM 与旋度计方法进行比较。本节最后定量研究了计算所得旋度的准确性与四面体质量之间的关系。第5节总结本研究的发现，并展望未来研究方向。

2. 数据选择

本研究使用了由 MMS（NASA）任务记录的原位数据。该任务由四艘航天器组成，它们呈四面体构型排列，分别位于四面体的顶点处（见图2）。MMS 上搭载的磁通门磁强计（FGM）由模拟磁通门磁强计（AFG）和数字磁通门磁强计（DFG）组成，用于记录各航天器位置处的磁场数据（Russell 等，2016；Torbert 等，2016）。本研究使用巡测模式下的磁场数据，采样间隔为 0.0625 至 0.125 秒。太阳风速度数据（离子和电子）由航天器上搭载的快速等离子体调查仪（FPI）静电分析器记录，该分析器由四台双离子和电子能谱仪（分别为 DIS 和 DES）组成（Pollock 等，2016）。本文使用采样间隔为 4.5 秒的快速模式数据。航天器位置、磁场和离子速度数据采用地心太阳轨道（GSE）坐标系表示 $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$，其中$\hat{i}$ 为径向，方向由地球指向太阳；$\hat{j}$ 为切向，方向与地球在黄道面内的轨道运动相反；而k垂直于黄道面，并与前两者共同构成右手正交归一基。

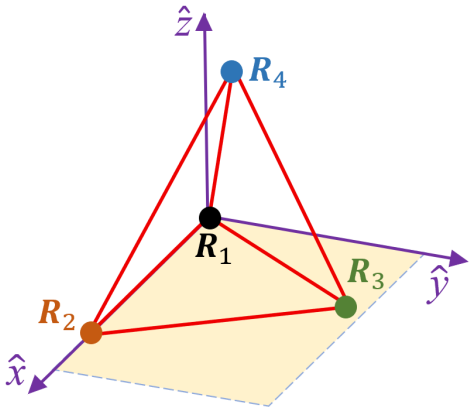

图2：一种可能的正交归一坐标系，以 MMS 1 $\hat{}$ 为中心，$\hat{}x = \boldsymbol{R}_{21}$、$\hat{}z = (\mathbf{R}_{21} \times \mathbf{R}_{31})/|\mathbf{R}_{21} \times \mathbf{R}_{31}|$，以及 $\hat{}y = \hat{}z \times \hat{}x$。

本文应用 IFM，计算了2015年到2017年太阳活动中等期间共107 个时间区间的旋度。每个数据集时长为1小时，分辨率为4.5秒（高采样率的 FGM数据被降采样至 FPI数据的分辨率）。这些数据集经过筛选，以确保平稳性，并避免数据中出现突然的高幅度波动。功率谱中的任何尖锐不规则峰值都会被滤除，以确保数据规整。对于较小的数据缺口（小于1%），采用线性插值进行处理。

3. 旋度计算方法

让我们计算 $\boldsymbol{R}_1$ 位置处向量的旋度。第一步是构造一个新的坐标系，其正交归一基 {ˆx、ˆy、ˆz} 固定于四面体构型（见图2），并将原点设在 MMS 1。可以选择沿 MMS 1 与其他三个航天器之一之间的连线作为一个方向。第二个方向可定义为四面体三角形表面的垂线，该三角形的一条边沿第一个方向。第三个方向取为完成右手坐标系的方向。例如，我们选择沿 R_{21} 的方向作为ˆx方向，并将垂直于表面 Δ123的方向作为ˆz方向。因此，单位向量为ˆx $= R_{21}/|R_{21}|$、ˆz $= (R_{21} \times R_{31})/|R_{21} \times R_{31}|$以及ˆy $=$ ˆz $\times$ ˆx。用 GSE坐标表示的新基向量可以写成矩阵形式：X $=$ T K，其中

$$X = \begin{bmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\\ \hat{z}\end{bmatrix},\ K = \begin{bmatrix}\hat{i}\\ \hat{j}\\ \hat{k}\end{bmatrix},\ \text{and}\ T = \begin{bmatrix}x_i & x_j & x_k\\ y_i & y_j & y_k\\ z_i & z_j & z_k\end{bmatrix}\ \text{is the transformation}$$

矩阵。如果 $\boldsymbol{A}_n$ 表示 $\boldsymbol{R}_n$处的向量场，则该向量在新坐标中的分量与地心太阳轨道坐标系坐标中的分量之间的关系为

$$\begin{bmatrix}A_{nx}\\ A_{ny}\\ A_{nz}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_i & x_j & x_k\\ y_i & y_j & y_k\\ z_i & z_j & z_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{ni}\\ A_{nj}\\ A_{nk}\end{bmatrix} \tag{5}$$

因此，在 {ˆx、ˆy、ˆz}中， $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{R}_1$ 处的旋度可写为

$$\nabla\times\boldsymbol{A}\big|_1 = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{z} \tag{6}$$

其中

$$\frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{A_{2z} - A_{1z}}{\mathbf{R}_{21}\cdot\hat{x}}, \tag{7a}$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{A_{2y} - A_{1y}}{\mathbf{R}_{21}\cdot\hat{x}}, \tag{7b}$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{A_{3z} - A_{1z}}{\mathbf{R}_{31}\cdot\hat{y}}, \tag{7c}$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{A_{3x} - A_{1x}}{\mathbf{R}_{31}\cdot\hat{y}}, \tag{7d}$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{A^{4y} - A^{1y}}{\mathbf{R}_{41}\cdot\hat{z}}, \tag{7e}$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{A_{4x} - A_{1x}}{\mathbf{R}_{41}\cdot\hat{z}}. \tag{7f}$$

请注意，在保持中心航天器不变的情况下，只需改变 x 和 z 方向，即可得到六组不同的基向量（见表 1）。通过逆变换矩阵，将所有计算得到的旋度表示为 $\{\hat{i}、\hat{j}、\hat{k}\}$，再对六种选择求平均，即可得到旋度各地心太阳轨道坐标系分量的最终值。由此，电流密度[1]可通过以下公式求得 $\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{J} = (\nabla\times\boldsymbol{B})/\mu_0$ 而利用离子流体速度 $\boldsymbol{u}_p$，可以计算离子涡度： $\boldsymbol{\omega}_p = \nabla\times\boldsymbol{u}_p$。

除了旋度之外，使用 IFM 还可以计算 MMS 1 处向量（例如 $\boldsymbol{A}$）的散度：

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{A}\big|_1 &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\\ &= \frac{A_{2x} - A_{1x}}{\mathbf{R}_{21}\cdot\hat{x}} + \frac{A_{3y} - A_{1y}}{\mathbf{R}_{31}\cdot\hat{y}} + \frac{A_{4z} - A_{1z}}{\mathbf{R}_{41}\cdot\hat{z}}.\end{aligned} \tag{8}$$

计算得到的散度属于标量，因此对六种选择的结果取平均值以获得最终值，无需将其转换到地心太阳黄道坐标。为了将 IFM 应用于三航天器系统，我们抑制其中一艘航天器，

[1] 请注意，只有四面体当前八分体中的坐标选择才与式（7a）–（7f）中的近似表达式一致。

表 1：以 MMS 1 为原点的新坐标系中基向量可能的方向。

方向	ˆx 轴	x-y平面向量
1	$\hat{R}_{21}$	$\hat{R}_{21}$ 和 $\hat{R}_{31}$
2	$\hat{R}_{21}$	ˆR_{21}和ˆR_{41}
3	$\hat{R}_{31}$	$\hat{R}_{31}$ 和 $\hat{R}_{21}$
4	$\hat{R}_{31}$	ˆR_{31}和ˆR_{41}
5	$\hat{R}_{41}$	$\hat{R}_{41}$ and $\hat{R}_{21}$
6	$\hat{R}_{41}$	$\hat{R}_{41}$ 和 $\hat{R}_{31}$

这样就只剩下一个三角形表面。以三角形的一个顶点为中心，x轴可沿与该中心相连的两条边中的任意一条选取。该平面的法线即为z轴，随后确定y轴，从而定义右手坐标系。例如，抑制 MMS 4，并使用平面 Δ123。由于所有航天器均位于x-y 平面内，因此不考虑沿z轴的变化，从而得到 $\partial/\partial z \equiv 0$，因此可以将其有效地写为

$$\nabla\times\boldsymbol{A}\big|_1 = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)\hat{x} + \left(-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{z}. \tag{9}$$

与四航天器系统不同，这里只有两组可能的基向量（表1中的方向 1 和 3），最终平均值在这两组基向量上计算。

4. 结果

4.1. 空间导数的计算

对于2017年9月14日15:30:00协调世界时至16:30:00协调世界时这一时段，我们使用 IFM 计算 $\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{\omega}_p$，并绘制它们的模（见图3）。如第1节所述，IFM 允许计算旋度的高阶导数。因此，我们计算所得旋度的旋度和散度，并比较它们的模。发现 $\boldsymbol{J}$ 的模（地心太阳轨道坐标系）为 $\sim 10^{-8}$ A m^{-2}，而 $\nabla\cdot\boldsymbol{J}$的模为 $\sim 10^{-15}$A m^{-3}，比 $|\nabla\times\boldsymbol{J}| \sim 10^{-13}$A m^{-3}小100倍。相对于 $|\nabla\times\boldsymbol{J}|$，$|\nabla\cdot\boldsymbol{J}|$的值小到可忽略，这与 $\boldsymbol{J}$ 是一个向量的旋度这一事实相符。对于 $\boldsymbol{\omega}_p$，其模为 $\sim 10^{-1}$s^{-1}，而$\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}_p$的模为 $\sim 10^{-7}$m^{-1} s^{-1}，同样比 $|\nabla\times\boldsymbol{\omega}_p| \sim 10^{-5}$m^{-1}s^{-1} 小 100 倍，从而支持旋度的散度为零这一事实。在其他航天器位置，我们以类似方式计算 $\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{\omega}_p$ 及其散度和旋度，也观察到相同的行为。

4.2. 应用于三航天器系统

为考察 IFM 在三航天器系统中的适用性，我们在总计 107 个时间区间内，抑制其余航天器中的一个（此处为 MMS 4）后，计算 MMS 1 所在位置的 $\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{\omega}_p$。为比较抑制和未抑制 MMS 4 时计算得到的旋度，我们绘制了两者在各分量及其大小上的相关系数（R）直方图（见图 4）。每个直方图的峰值均为 $R \sim 0.9$，表明两种计算结果相当一致。表2列出了三个分量以及〈和〉的大小的平均相关系数 σ_R 及其对应的标准差 $\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{\omega}_p$。尽管存在不可忽略的

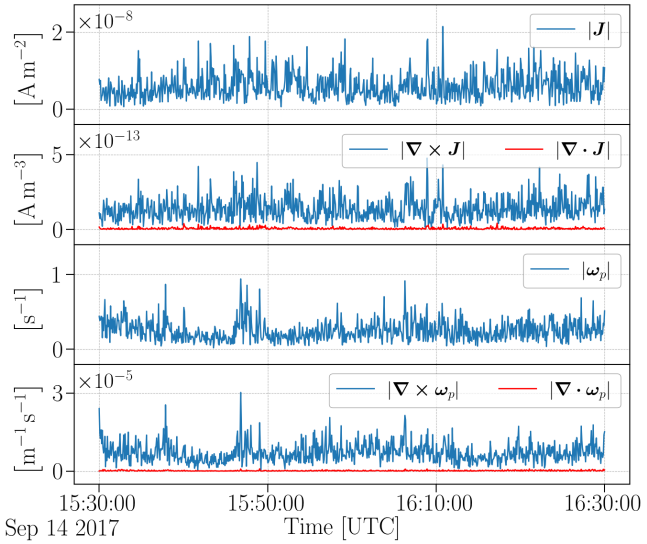

图3：2017年9月14日，在 $\boldsymbol{R}_1$ 时段内，使用 IFM 计算的 $\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{\omega}_p$ 的大小及其旋度和散度，时间间隔为 1 小时。

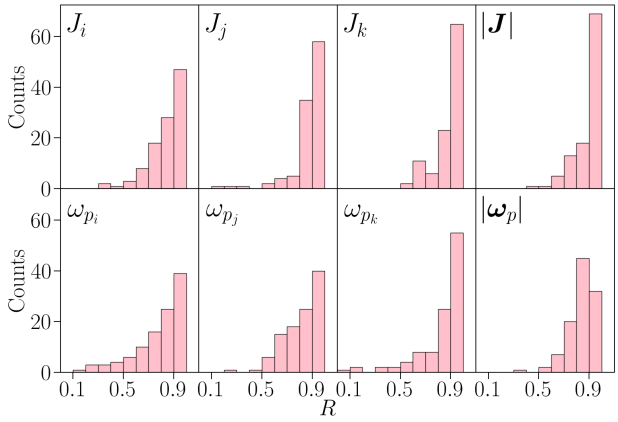

图4：在 $\boldsymbol{R}_1$ 处，基于 107 个数据集绘制的相关系数直方图，比较使用 IFM（3 个航天器）和 IFM（4 个航天器）计算的量。通过屏蔽 MMS 4 获得三航天器系统。

离散度 ~ 0.1（这可能与可用坐标系较少有关），但相当高的 $\langle R\rangle \sim 80\%$ 证明，IFM 即使应用于三航天器系统，也能可靠地计算旋度。这是 IFM 的一项重要优势，在某个航天器数据不可用或不适合使用时尤其有用。

表 2：屏蔽 MMS 4 后，MMS 1 处 $\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{\omega}_p$ 各分量及其大小的 IFM（3 个航天器）与 IFM（4 个航天器）之间的 $R\rangle$，以及对应的标准差（σ_R）。

	J_i	J_j	J_k	$\lvert\boldsymbol{J}\rvert$	ω_{p_i}	ω_{p_j}	ω_{p_k}	$\lvert\boldsymbol{\omega}_p\rvert$
$\langle R\rangle$	0.84	0.88	0.90	0.89	0.78	0.81	0.84	0.84
σ_R	0.16	0.16	0.13	0.11	0.25	0.22	0.23	0.12

4.3. 与旋度计数据的比较

接下来，我们将结果与旋度计方法计算的旋度进行比较。需要注意的是，与 IFM 不同，旋度计提供的是整个四面体上的平均旋度值，并不对应于任何特定航天器的位置。因此，使用旋度计计算的旋度可与使用 IFM 在四个航天器位置计算所得旋度的平均值进行比较。图不同分量以及 $\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{\omega}_p$ 的大小采用这两种方法计算，其比较结果展示于 2017年9月 8, 2015 [12:15:00 协调世界时 - 13:15:00 协调世界时]的图5中，结果显示两种方法吻合良好（$R \sim 0.99$）。

对于全部107个数据集，我们以相关系数（R）为指标，对 IFM 与旋度计进行相同的比较。在图6中，我们展示了旋度各分量及其大小的相关系数直方图。对于每种情况，直方图都明显集中在$R = 0.99$ 附近，且分布范围很窄（~ 0.01），这表明旋度计与平均 IFM 值几乎完全吻合。所有分量的平均相关系数 $\langle R\rangle$ 及相应的标准差（σ_R）$\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{\omega}_p$ 均列于表3中。

表3：$\langle R\rangle$为平均 IFM 与旋度计之间的相关系数，括号内为相应的标准差（σ_R），分别对应 $\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{\omega}_p$的各分量及大小。

	J_i	J_j	J_k	$\lvert\boldsymbol{J}\rvert$	ω_{p_i}	ω_{p_j}	ω_{p_k}	$\lvert\boldsymbol{\omega}_p\rvert$
$\langle R\rangle$	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.98
σ_R	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02

4.4. 对我们方法质量的评估

理论上，向量旋度的散度为零，而同一向量的旋度则不一定为零。因此，计算所得旋度（$\boldsymbol{M}$）的精度可通过以下方式量化：

$$Q_M = \frac{\langle|\nabla \cdot \boldsymbol{M}|\rangle}{\langle|\nabla \times \boldsymbol{M}|\rangle}, \tag{10}$$

其中假设分母不可忽略，此处的平均值取自给定时间间隔内的整个时间序列（Dunlop 等人，1988）。Q_M 值较小表示旋度质量较好，反之亦然。对于所有时间间隔，我们在图 7 中绘出了 $1 - Q_J$ 和 $1 - Q^{\omega_p}$，结果表明两者均显著大于 0.8，说明使用 IFM 计算的旋度具有较高的可靠性。计算所得旋度的质量还取决于四面体的规则程度（MMS 中通常是不规则的），可用四面体质量因子 T QF $= Q_V Q_S$ 量化，其中 Q_V 是四面体形状的质量因子，定义为 $Q_V = V_a/V_r$；V_a 为四面体的实际体积，V_r 为边长为 L 的正四面体体积（L 等于实际四面体各边长的平均值）；Q_S 则是航天器间距的质量因子（定义见 Fuselier 等人（2016）中的公式（3）、（4）和（5））。对于正四面体，TQF = 1；当四颗航天器位于同一平面时，TQF 则为零。图 7 叠加绘出了 $1 - Q_J$、$1 - Q^{\omega_p}$ 和 T QF 随数据集编号的变化。在大多数情况下，$1 - Q_J$ 和 $1 - Q^{\omega_p}$ 的变化趋势与 TQF 一致。相关系数

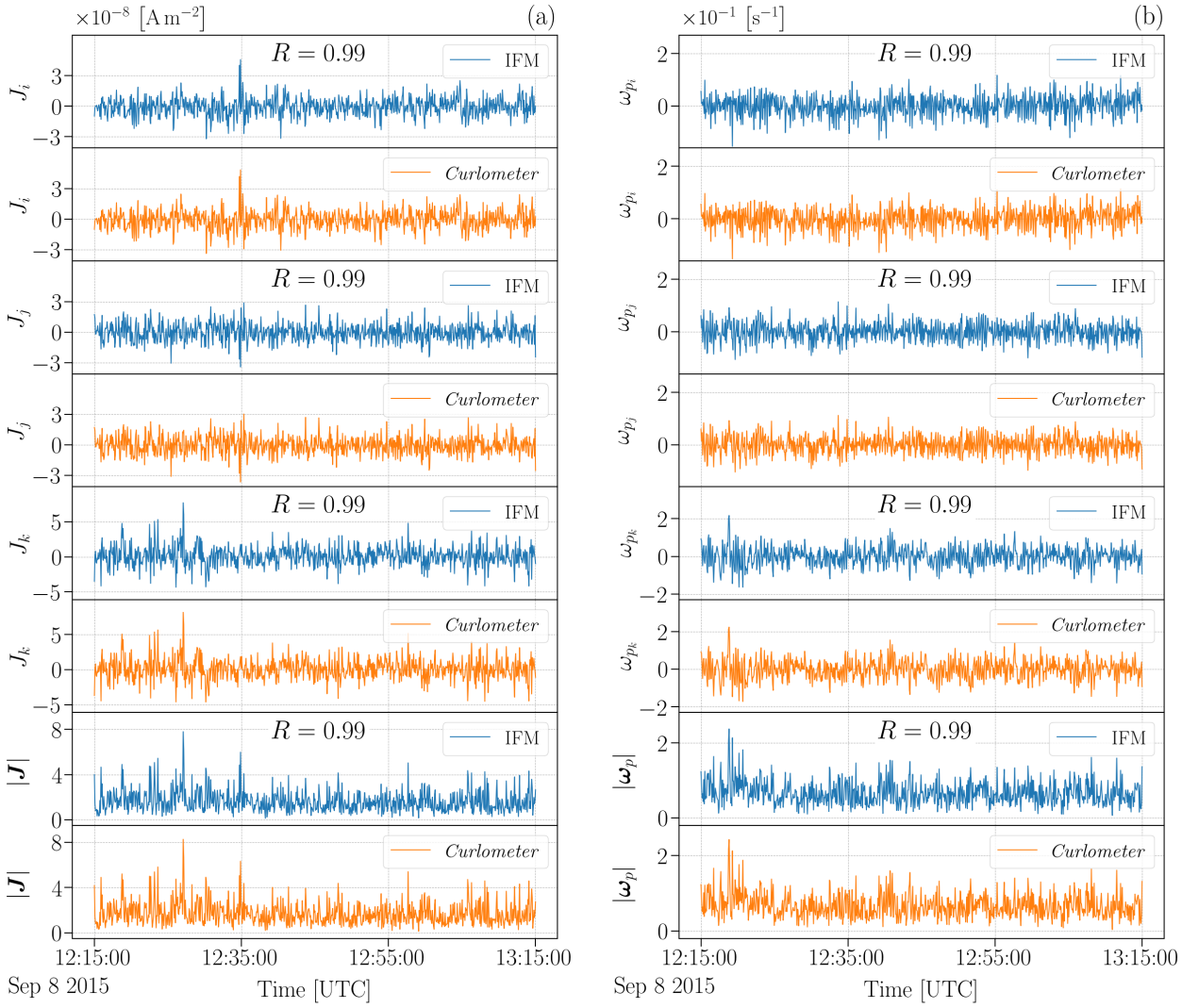

图 5：在 2015年9月8日 的 1 小时区间内，平均 IFM 与 旋度计 计算结果的对比：(a) $\boldsymbol{J}$ 和 (b) $\boldsymbol{\omega}_p$ 的相关系数R 。

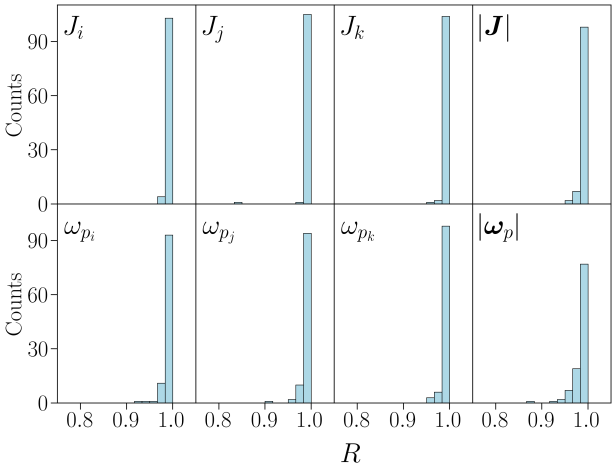

图 6：使用平均 IFM 和 旋度计 方法计算的各量之间相关系数的直方图，共涉及 107 个数据集。

发现 $1 - Q_J$ 与 TQF 之间的相关系数为 0.71，而 $1 - Q^{\omega_p}$ 与 TQF 之间的相关系数为 0.64，这表明旋度质量与四面体形状之间存在明确联系。同样，在数据集 10 至 20 之间，TQF 出现骤降，对应于 $\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{\omega}_p$的质量显著下降。

5. 结论

在本研究中，我们提出一种无积分方法，利用多航天器任务（Cluster 和 MMS）的原位数据，计算空间等离子体相关矢量场（速度、磁场等）的旋度和散度。对于四航天器系统，我们的方法成功计算了总计 107 个数据集在每个航天器所在位置处的导数（一阶及以上）。与现有的旋度计方法相比，这是一项显著优势，因为后者只能计算整个多航天器系统的单个数值。我们得到的计算所得旋度的散度与旋度模之比很小，这与旋度的散度为零这一理论事实相符。与旋度计不同，即使三航天器系统不共线，我们的方法也可用于计算旋度和散度——

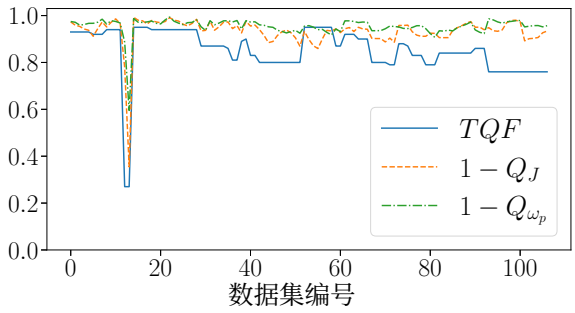

图 7：所有数据集中，$1-Q_J$ 和 $1-Q^{\omega_p}$ 随 TQF 的变化。

统。与四航天器数据的比较表明，两者之间具有较高的相关性，因此，即使其中一艘航天器的数据不可用或不适用，仍可计算导数。例如，MMS 4 在 2018年遭遇飞行异常后，无法提供电子速度数据（见 AMDA 数据库），此时可直接使用 IFM，仅凭其余航天器的数据计算该航天器处的旋度。然而，由于可用方向较少，使用三艘航天器数据计算出的导数精度相对较低。依此类推，我们的方法也可用于计算包含四艘以上航天器的航天器任务的空间导数（例如未来的 HelioSwarm（NASA）任务）。不过，坐标系的选择应根据系统的瞬时构型确定。

对于全部 107 个时间区间，我们系统地比较了使用旋度计 方法计算得到的旋度与通过平均 IFM（对四艘航天器取平均）得到的旋度。极高的相关系数 $R \approx 0$。99 表明两者高度吻合，从而验证了我们提出的方法，并以广泛采用的基准方法 旋度计作为参照。对于每个数据集，我们用 $1-Q_J$和 $1-Q^{\omega_p}$来量化旋度的精度；这两个指标均接近 1，表明旋度计算质量良好。我们还将旋度质量与四面体形状的规则程度联系起来，发现二者存在较强的依赖关系。对四面体形状的依赖是该方法的一个缺点，因为对于形状高度不规则的四面体，该方法无法提供高质量的旋度计算。与旋度计不同，我们的方法能够在特定航天器位置计算局部导数，从而便于计算湍流加热率；该加热率涉及每个航天器位置处的速度和磁场值。对 $|\boldsymbol{J}|$ 的了解可用于直接识别电流片所在位置，从而补充现有方法（Li 等（2011）；Osman 等（2014））。

利用 IFM 计算空间梯度，还使我们能够根据针对可压缩磁流体湍流推导出的精确标度关系，估算湍流加热率（Banerjee 与 Galtier（2013）；Banerjee 与 Kritsuk（2018））。此外，还可以考察逐点的 $\boldsymbol{u}_p-\boldsymbol{\omega}_p$和 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{J}$对齐（贝尔特拉米化），从而深入了解湍流弛豫过程（Mahajan 与 Yoshida（1998）；Banerjee 等（2023））。

致谢。作者感谢印度空间研究组织空间技术组项目（STC/PHY/2023664O）提供的经费支持。S. B. 感谢 Dibyendu Chakrabarty 提供的宝贵讨论。数据分析使用了由法国国家科学研究中心、法国国家空间研究中心、天文台巴黎和图卢兹的保罗·萨巴蒂埃大学共同支持的等离子体物理数据中心（CDPP）提供的 AMDA 科学分析系统。第 *TQF* 节中使用的 4.4 数值取自 MMS 科学数据中心网站。

参考文献

Banerjee, S. & Galtier, S. 2013, 《物理评论E》, 87, 013019 Banerjee, S. & Galtier, S. 2016, Journal of Physics A: Mathematical and Theo- retical, 50, 015501 Banerjee, S., Hadid, L. Z., Sahraoui, F., & Galtier, S. 2016, 《天体物理学杂志快报》, 829, L27 Banerjee, S., Halder, A., & Pan, N. 2023, 《物理评论E》, 107, L043201 Banerjee, S. & Kritsuk, A. G. 2018, 《物理评论E》, 97, 023107 Bruno, R. & Carbone, V. 2013, 《太阳物理学综述》, 10, 2 Carbone,V., Marino, R., Sorriso-Valvo, L., Noullez, A., & Bruno, R.2009, Phys. Rev. Lett., 103, 061102 Chanteur, G. & Harvey, C. C. 1998, ISSI科学报告系列, 1, 371 Chen, C. H. K., Chandran, B. D. G., Woodham, L. D., et al. 2021, A& A, 650, L3 Deepali, D. & Banerjee, S. 2021, 《皇家天文学会月刊：快报》, 504, L1 Dunlop, M., Southwood, D., Glassmeier, K.-H., & Neubauer, F. 1988, 《空间研究进展》, 8, 273 Fuselier, S., Le wis, W., Schiff, C., et al. 2016, 《空间科学评论》, 199, 77 Goldstein, M. L., Roberts, D. A., & Matthaeus, W. H. 1995, 《天文学与天体物理学年度评论》, 33, 283 Grappin, R., Mangeney, A., & Marsch, E. 1990, Journal of Geophysical Re- search: Space Physics, 95, 8197 Harvey, C. C. 1998, I SSI scientific reports series, 1, 307 Horbury, T. S., Forman, M., & Oughton, S. 2008, Phys. Rev. Lett., 101, 175005 Horbury, T. S., For man, M. A., & Oughton, S. 2005, Plasma Physics and Con- trolled Fusion, 47, B703 Li, G., Miao, B., Hu, Q., & Qin, G. 2011, Phys. Rev. Lett., 106, 125001 Mahajan, S. M. & Yoshida, Z. 1998, Phys. Rev. Lett., 81, 4863 Matthaeus, W. H., Bieber, J. W., & Zank, G. P. 1996, AIP Conference Proceed- ings, 382, 256 Matthaeus, W. H., Zank, G. P., Smith, C. W., & Oughton, S. 1999, Phys. Rev. Lett., 82, 3444 Osman, K. T., Matthaeus, W. H., Gosling, J. T., et al. 2014, Phys. Rev. Lett., 112, 215002 Podesta, J. J., Chandran, B. D. G., Bhattacharjee, A., Roberts, D. A., & Gold- stein, M. L. 2009, Journal of Geophysical Research: Space Physics, 114 Politano, H. & Pouquet, A. 1998, Phys. Rev. E, 57, R21 Pollock, C., Moore, T., Jacques, A., et al. 2016, 《空间科学评论》, 199, 331 Russell, C., Anderson, B., Baumjohann, W., et al. 2016, 《空间科学评论》, 199, 189 Sakshee, S., Bandyopadhyay, R., & Banerjee, S. 2022, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 514, 1282 Shen, C. & Dunlop, M. 2023, 《地球物理研究杂志：空间物理学》, 128, e2023JA031313 Sorriso-Valvo, L., Marino, R., Carbone, V., et al. 2007, Phys. Rev. Lett., 99, 115001 Telloni, D., Carbone, F., Bruno, R., et al. 2019, 《天体物理学杂志》, 887, 160 Torbert, R., Russell, C., Magnes, W., et al. 2016, 《空间科学评论》, 199, 105 Vasquez, B. J., Smith, C. W., Hamilton, K., MacBride, B. T., & Leamon, R. J. 2007, 《地球物理研究杂志：空间物理学》, 112 Verma, M. K., Roberts, D. A., & Goldstein, M. L. 1995, 《地球物理研究杂志：空间物理学》, 100, 19839